ÉLECTROSTATIQUE

I.Introduction

L'électrostatique étudie les phénomènes d'attraction ou de répulsion qui s'exercent entre corps chargés, ou électrisés, les charges étant fixes, ainsi que les distributions des charges qui en résultent.

L'électrostatique forme une construction mathématique reposant …, elle conduit aux formules de Gauss, de Faraday, de Poisson, dont les conséquences expérimentales sont vérifiables avec une très grande précision. Toutefois, les relations que nous allons établir devront être recalculées.

II.Loi de Coulomb

Soient deux charges ponctuelles, q et q', fixes dans un référentiel, et placées en deux points P et P'. La loi de Coulomb (que l'électrostatique prend comme loi référentielle) dit que dans le vide, ces charges ces charges exercent l'une sur l'autre une force qui est:

- dirigée suivant la droite les joignant
- attractive pour les charges de signes contraires, répulsive pour les charges de même signe.
- Proportionnelle à la valeur de ces charges, et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare.

$$\boxed{|F| = |F'| = k\frac{qq'}{r^2}}$$

La constante k dépend du système d'unités adopté pour mesurer r, F, q, q', de la nature du milieu diélectrique dans lequel sont placées les charges q et q'. En général, on prendra le **système international**. Dans ce cas, **pour le vide**, on aura:

$$\boxed{k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}$$

ε_0 = constante du vide

Si c'est un autre milieu, on multipliera la constante du vide par une constante propre au milieu.

III.champ et potentiel électriques:

1.champ électrique

La loi de Coulomb indique que tout système de corps électrisés crée des forces d'origine électrique dans la région de l'espace qui l'entoure.

Ainsi une distribution fixe quelconque de charges électriques exerce sur une charge ponctuelle une force qui ne dépend que de la position de cette dernière. On dit que la distribution crée un champ électrique dans l'espace qui l'entoure. Autrement dit, le champ électrique $\vec{E}$, en tout point, est un vecteur identique à la force qui s'exerce sur la charge électrique placée en ce point. Du point de vue quantitatif, le vecteur $\vec{F}$ étant la force subie par une charge par une charge q placée en un point P d'une région de l'espace où règne un champ électrique $\vec{E}$, la relation qui définit $\vec{F}$ en P est donnée par:

$$\boxed{\vec{F} = q\,\vec{E}}$$

$\vec{F} \rightarrow$ Attraction Forte $\rightarrow$ Newton (N)
$\vec{E} \rightarrow$ Volt / mètre $(V.m^{-1})$

Si on compare la force électrostatique et la force gravitationnelle, on a:

$|F| = q\,E$
$|F| = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \times E$
E en mégavolts
$|F| \approx 10^{-15}$

$P = mg$
$P = 10 \times 9{,}1 \cdot 10^{-31}$
$P \approx 10^{-29}$

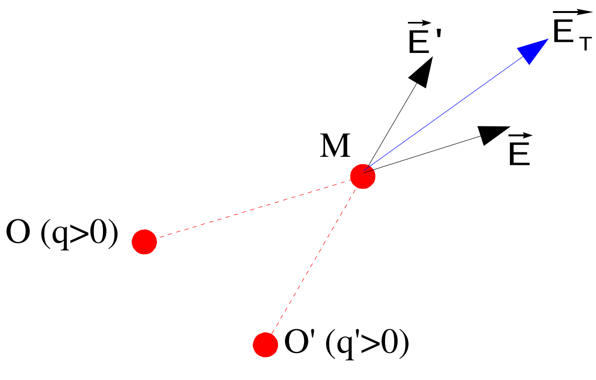
donc $F_{ELECTROSTATIQUE} = 10^{15} \cdot F_{GRAVITATIONNELLE}$ $\rightarrow$ on négligera la force gravitationnelle.
En réalité, des études ont prouvé que: $F_{ELECTROSTATIQUE} = 10^{42} \cdot F_{GRAVITATIONNELLE}$! !

2.Champ crée par une charge ponctuelle.

Soit une charge ponctuelle placée en O, le champ électrostatique crée par cette charge au point M est:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\,\vec{u}}$$

3.Champ crée par un ensemble de charges ponctuelles.



Le champ électrique possède toutes les propriétés d'une force: supposons qu'une certaine distribution de charges crée en un point un champ électrique $\vec{E_1}$. Une seconde distribution crée au même point un champ électrique $\vec{E_2}$. Le champ global $\vec{E}$ en ce point est la somme vectorielle de $\vec{E_1}$ et $\vec{E_2}$:

$$\boxed{\vec{E_T} = \vec{E_1} + \vec{E_2}}$$

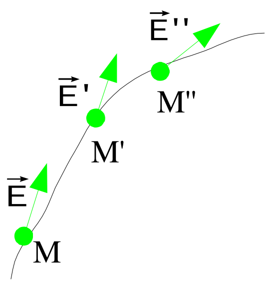
D'une manière générale: soient n charges ponctuelles q créant en un point P des champs électrostatiques $\vec{E}_I$. Le champ total crée en P par toutes ces charges est:

$$\boxed{\vec{E}_T = \sum_{I=1}^{N} \vec{E}_I}$$

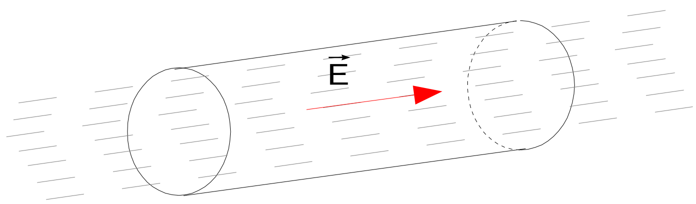
$$\boxed{\vec{E}_T = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{I=1}^{n} \frac{q_I}{r_I^{\,2}}\vec{u}_I}$$

4.Ligne de forces (de champ), tube de forces (champ)

On appelle ligne de force (ligne de champ) une ligne qui est tangente en tous ces points à la direction du champ électrique.



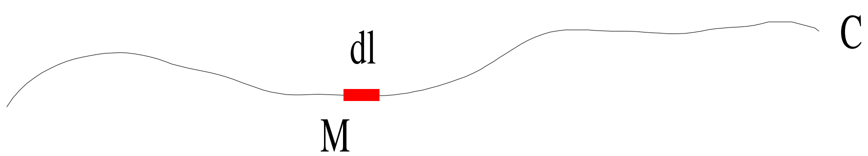
En chaque point de l'espace, il passe une ligne de forces et une seule. L'ensemble des lignes de forces passant par tout les points d'une ligne fermée est un tube de forces.



5.Champ crée par une distribution linéique de charges

Soit une courbe C portant une distribution continue de charges. On appelle densité linéique de charges en un point M de cette courbe la grandeur:

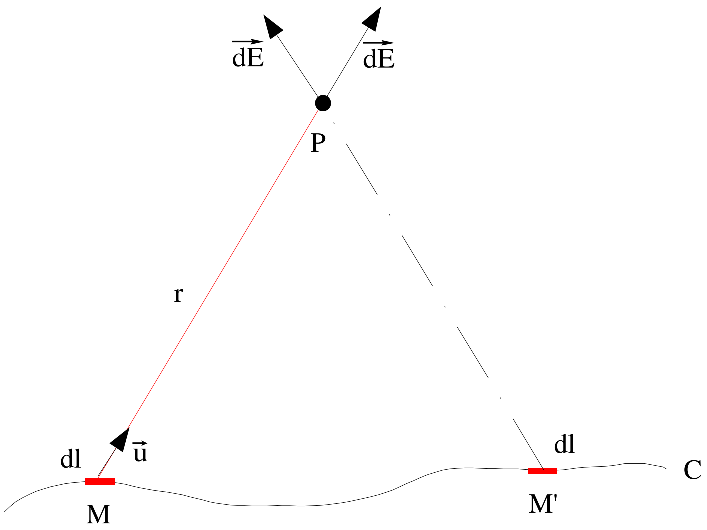
$$\boxed{\lambda = \frac{dq}{dl}}$$



(la partie dl porte une charge dq)

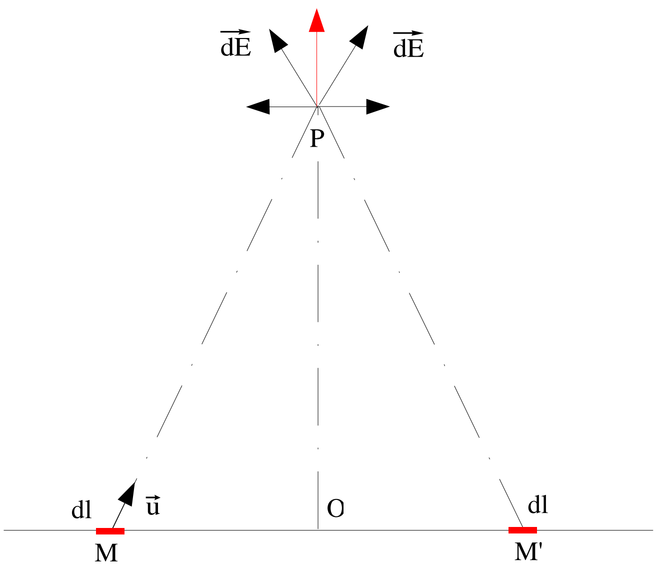
dq est la charge portée par un élément dl de la courbe, infiniment petit, entourant le point M. On définit alors le champ électrostatique $\vec{E}$ en un point P par:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\vec{u}}$$



Une petite partie de la courbe dl porte une petite charge dq qui engendre un petit champ $d\vec{E}$ en P.

pour une droite:



Vecteurs $d\vec{E}$ crées par dq placés à l'infini de la droite:

➔les composantes horizontales s'annulent

➔pour le champ $\vec{E}$ total crée par la droite, la somme vectorielle sera orienté vers le haut.

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\int \lambda\,\frac{dl}{r^2}\vec{u}}$$

6.Champ crée par une distribution superficielle de charges

Soit une surface S portant une distribution continue de charges. On appelle densité superficielle de charges en un point M de cette surface la grandeur: $\Sigma = \frac{dq}{dS}$ où dq est la charge portée par un élément ds infiniment petit autour de M. Le champ crée par cette surface est:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \iint_s \frac{\sigma\, ds\, \vec{u}}{r^2}}$$

7.Champ crées par un distribution volumique de charges

Soit un volume v portant une distribution continue de charges. On appelle densité volumique de charges en un point M de v la grandeur: $\rho = \frac{dq}{dv}$ où dq est la charge portée par un élément dv infiniment petit du volume v entourant M. Le champ crée par ce volume est:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \iiint_v \rho \frac{\sigma\, dv\, \vec{u}}{r^2}}$$

IV.Formulation mathématique.

Soit un trièdre orthonormé $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ et M un point de l'espace de coordonnées (x, y, z), on a $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, on peut définir les fonctions scalaires et vectorielles par:
$v(\overrightarrow{M}) = X(x\,;y\,;z)\vec{i} + Y(x\,;y\,;z)\vec{j} + Z(x\,;y\,;z)\vec{k}$ et $f(M) = f(x\,;y\,;z)$

1.Vecteur gradient

Le vecteur gradient noté $\overrightarrow{grad}$ est défini à partir d'une fonction scalaire de points et a pour composantes suivant $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ les dérivées partielles par rapport à x, y, z de cette fonction scalaire.

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\delta f}{\delta x}\vec{i} + \frac{\delta f}{\delta y}\vec{j} + \frac{\delta f}{\delta z}\vec{k}}$$

exemple : Soit $f(x\,;y\,;z) = 2\,xy + z^3$

$$\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\delta(2xy + z^3)}{\delta x}\vec{i} + \frac{\delta(2xy + z^3)}{\delta y}\vec{j} + \frac{\delta(2xy + z^3)}{\delta z}\vec{k} \qquad \overrightarrow{grad}\, f = \begin{vmatrix} 2y \\ 2x \\ 3z^2 \end{vmatrix}$$

2.Divergence d'un vecteur

La divergence, notée div, n'est définie qu'à partir d'une fonction vectorielle de points et donne une fonction vectorielle de points.

$$\boxed{div\,\vec{v} = \vec{i}\cdot\frac{\delta \vec{v}}{\delta x} + \vec{j}\cdot\frac{\delta \vec{v}}{\delta y} + \vec{k}\cdot\frac{\delta \vec{v}}{\delta z}}$$

Exemple : $\vec{v} = (2xy + z)\vec{i} + (z^3 + y^3)\vec{j} + (2xz^3 + y^2)\vec{k}$
div $\vec{v} = 2y + 3y^2 + 6xz^2$

3.Rotationnel d'un vecteur

Le rotationnel d'un vecteur noté $\overrightarrow{rot}$ donne une fonction vectorielle et se définit par:

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{v} = \vec{i} \wedge \frac{\delta\,\vec{v}}{\delta\,x} + \vec{j} \wedge \frac{\delta\,\vec{v}}{\delta\,y} + \vec{k} \wedge \frac{\delta\,\vec{v}}{\delta\,z}}$$

$$\text{Soit } \overrightarrow{rot}\,\vec{v} = \left|\begin{array}{l} \dfrac{\delta\,Z}{\delta\,y} - \dfrac{\delta\,Y}{\delta\,z} \\ \dfrac{\delta\,X}{\delta\,z} - \dfrac{\delta\,Z}{\delta\,x} \\ \dfrac{\delta\,Y}{\delta\,x} - \dfrac{\delta\,X}{\delta\,y} \end{array}\right|$$

4.Théorème de STOKES

On définit d'abord la circulation d'un vecteur $\vec{E}$ le long d'un contour C par $C(\vec{E}) = \int_c \vec{E}\,d\,\vec{l}$

Soit pour une surface quelconque: $\int_c \vec{E}\,d\,\vec{l} = \iint_C \overrightarrow{rot}\,\vec{E}\,d\,\vec{s}$

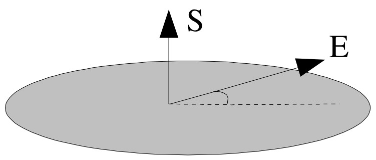
5.Théorème d'OSTROGRADSKI

On définit d'abord le flux d'un vecteur à travers une surface s par:

$$\Phi(\vec{E}) = \iint_s \vec{E}\,d\,\vec{s} = \iint_s E\cos\alpha\;ds$$

Soit:

$$\boxed{\iint_s \vec{E}\,d\,\vec{s} = \iiint_v \text{div}\,\vec{E}\,d\,\tau}$$



$d\,\vec{s}$ est le vecteur unitaire de la surface , il est perpendiculaire à celui ci

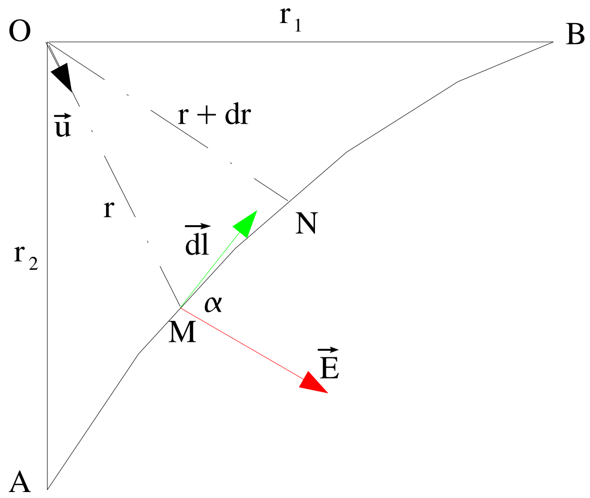
V.Potentiel électrostatique

1.Différence de Potentiel

Soit deux points A et B quelconques reliés par une courbe quelconque elle aussi.

La différence de Potentiel (ddp) entre A et B est le travail des forces électriques lorsqu'une charge positive égale à l'unité va de A en B par un chemin quelconque.

Soit une charge q située au point O et deux points A et B quelconques reliés par une courbe quelconque elle aussi. Soit un point M de cette courbe:



$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}}$$

Soit le point N situé à la distance dl (très petite) de M. Le travail du champ électrique pour aller de A à N est:

$$dW = \frac{q}{4\ \pi\,\varepsilon_0\ r^2}\underbrace{dl\cos\alpha}_{dr} \quad\Rightarrow\quad \boxed{dW = \frac{q}{4\ \pi\,\varepsilon_0\ r^2}dr}$$

donc:

$$W_{AB} = \int_A^B \frac{q}{4\ \pi\,\varepsilon_0\ r^2}dr = -\left[\frac{q}{4\ \pi\,\varepsilon_0\ r}\right]_{r_1}^{r_2}$$

$$\boxed{W_{AB} = \frac{q}{4\ \pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

$$\text{donc } V_A = \frac{q}{4\ \pi\,\varepsilon_0\ r_1} + Cte$$

$$V_B = \frac{q}{4\ \pi\,\varepsilon_0\ r_2} + Cte$$

Le potentiel en un point quelconque est donc défini par

$$\boxed{V = \frac{q}{4\ \pi\,\varepsilon_0\ r} + Cte}$$

<u>Cas général:</u>

Soit un champ crée par une distribution quelconque de charges. Quelque soit la distribution de charges, il est toujours possible de la diviser en un très grand nombre de charges presque ponctuelles, le champ total sera la somme vectorielle de l'ensemble des charges élémentaires crées par ces charges ponctuelles et le travail qui définit la différence de potentiel est la somme algébrique des travaux correspondants. On peut écrire:

$$\boxed{V = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\sum \frac{q_i}{r_i}}$$

Remarque: En électricité: $W_{AB} = q\left(V_A - V_B\right)$

2.Expression du champ électrique à partir du potentiel.

champ et potentiel sont deux notions étroitement liées, la connaissance de l'un entraîne celle de l'autre.

$$\vec{E}\, d\vec{l} = -\, dV$$

$$\text{à une dimension}: E_x = \frac{-\,dv}{dx};\ E_y = \frac{-\,dv}{dy}\ \ldots$$

$$\text{à trois dimensions}: E = \frac{-\,dv}{dx} - \frac{dv}{dy} - \frac{dv}{dz}$$

donc:

$$\boxed{\begin{array}{c}\vec{E} = -\,\overrightarrow{grad}\ v \\ \text{et } \overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \vec{0}\end{array}}$$

VI.Flux du champ et travail de la force électrostatique.

1.Flux du champs crée par une distribution de charges (Théorème de GAUSS).

Le théorème de GAUSS exprime le flux du vecteur champ électrostatique sortant d'une surface fermée. Il est égal au quotient de la charge totale q_{INT} contenue dans le volume τ intérieur à S sur la permittivité du vide ε_0 .

$$\boxed{\Phi = \iint \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds}\,\frac{\sum q_{INT}}{\varepsilon_0}}$$

$\overrightarrow{ds}$ est un vecteur normal à l'élément de surface ds et orienté vers l'extérieur. Lorsque la distribution de charges est continue et caractérisée par la densité de charges ρ . La relation précédente s'écrit:

$$\boxed{\iint \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{\tau} \rho\, d\tau}$$

En utilisant le théorème d'OSTROGRADSKI, on peut écrire:

$$\boxed{div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

2.Travail de la force électrostatique.

Une charge q se déplaçant dans le champs $\vec{E}$ de A en B est soumise à une force électrostatique

$\vec{F} = q\,\vec{E}$ et le travail de A à B est alors:

$$W = \int_A^B \vec{F}\,\vec{dl} = \int_A^B q\,\vec{E}\,\vec{dl} \qquad \boxed{W = q\left(v_A - v_B\right)}$$

$$\text{note}: \vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}}\ v = \frac{-\,dv}{dl}$$

A partir de cette relation, on définit l'électron Volt (eV) comme l'unité d'énergie qui est la variation d'énergie d'une particule élémentaire soumise à une différence de potentiel de 1 Volt

$$1\ \text{eV} = 1{,}6\ \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

La combinaison de d'équation de MAXWELL et de la relation du champ potentiel fournit l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait le potentiel v (équation de POISSON):

$$\boxed{\nabla\ v + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$$

3.Étude de cas.

a/Conducteur en équilibre électrostatique.

Un conducteur est en équilibre électrostatique lorsqu'il ne se passe aucun mouvement d'ensemble des charges libres. L'absence de mouvement d'ensemble implique que la force qui est appliquée à un porteur de charges est nulle, ce qui entraîne: $\vec{E_i} = 0$

Le champ électrostatique est nul à l'intérieur du conducteur, par conséquent le conducteur est une **volume équipotentiel**

D'après la relation de MAXWELL, on peut écrire:

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \ \rightarrow\ \rho = 0$$

Puisque l'intérieur du conducteur ne peut être chargé, la **répartition des charges est surfacique.**

b/Capacité d'un conducteur seul dans l'espace.

Soit un conducteur chargé seul dans l'espace. Il porte une charge totale q et son potentiel est v, on définit sa capacité propre par:

$$\boxed{C = \frac{q}{v}}$$

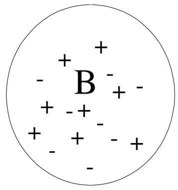
On peut aussi écrire le champ au voisinage d'un conducteur en équilibre par le théorème de COULOMB:

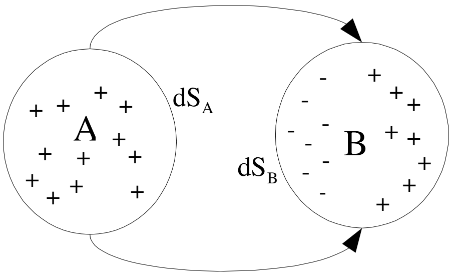
$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

Le champ est donc discontinu à la traversée d'un conducteur.

c/Influence électrostatique, Influence partielle.

Considérons un conducteur B isolé initialement neutre. On approche un conducteur A chargé positivement, le conducteur B influencé par A reste neutre mais la distribution des charges dans le conducteur va varier.





Considérons un tube de champ T qui découpe sur A et B des surfaces dS_A et dS_B , on montre que les charges portées par ces éléments sont opposées.

$$\boxed{dq_A + dq_B = 0}$$

d/Condensateur.

On appelle ainsi un ensemble de deux conducteurs placés dans des conditions d'influence totale. On désigne la capacité du condensateur par le rapport:

$$\boxed{C = \frac{q}{v_1 - v_2}}$$

Si on associe des condensateurs en série, la capacité totale de l'ensemble sera: $\boxed{\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}}$

De même pour une association en parallèle on aura: $\boxed{C = \sum C_i}$