Vocabulaire des mathématiques

par **Michel CESSENAT**
Ingénieur des Arts et Manufactures
Docteur en Mathématiques Statistiques et Physique Mathématique

1.	**Notions relatives aux ensembles**	A 1 205 - 2
1.1	Ensembles	— 2
1.2	Fonctions ou applications	— 2
2.	**Notions relatives aux nombres**	— 3
2.1	Principaux ensembles de nombres	— 3
2.2	Intervalles (dans $\mathbb{R}$)	— 3
2.3	Notations particulières	— 3
2.4	Espaces produits de nombres ou puissances *n*-ièmes	— 4
3.	**Principales notions d'algèbre linéaire**	— 4
4.	**Principales notions relatives à la topologie**	— 4
4.1	Notions fondamentales	— 4
4.2	Définitions de quelques sous-ensembles d'un espace topologique E	— 5
4.3	Définitions pour des fonctions numériques (à valeurs dans $\mathbb{R}$) sur E	— 5
4.4	Principaux types d'espaces topologiques	— 5
4.5	Principales façons de définir une topologie sur un ensemble E	— 6
4.6	Notions fondamentales de dualité	— 7
5.	**Calcul intégral. Notions fondamentales de mesure et d'intégration**	— 7
6.	**Calcul différentiel et opérateurs différentiels linéaires**	— 10
7.	**Propriétés dans les espaces vectoriels topologiques**	— 11
7.1	Notions fondamentales	— 11
7.2	Principaux espaces de « suites »	— 12
8.	**Notions principales relatives aux distributions**	— 13
9.	**Principaux espaces fonctionnels**	— 14
9.1	Espaces de fonctions « régulières » (au moins continues)	— 14
9.2	Espaces de fonctions intégrables	— 14
9.3	Espaces de Sobolev	— 15
9.4	Espaces de distributions	— 15
10.	**Opérateurs**	— 15
10.1	Notions sur les opérateurs différentiels linéaires (odl)	— 15
10.2	Notions relatives aux « opérateurs » linéaires dans les espaces de Banach (et Hilbert)	— 16
10.3	Quelques opérateurs particuliers	— 17
10.4	Principaux espaces d'applications (opérateurs) linéaires continues (bornées)	— 17
10.5	Topologie sur des familles de parties d'un espace métrique (E, d)	— 18
	Références bibliographiques	— 20

Ce vocabulaire raisonné répertorie – en rappelant brièvement leurs définitions – des notions utiles pour un ingénieur confronté à un problème, tant au niveau de sa modélisation mathématique que de sa résolution effective (théorique et numérique). L'ingénieur peut alors être en contact avec des mathématiciens ou des articles mathématiques dont il doit comprendre le lan-

gage, ou encore mener lui-même l'étude, ce qui l'amènera normalement à utiliser quelques notions mathématiques indiquées ici. Les problèmes visés sont surtout tournés vers l'analyse fonctionnelle ; c'est notamment le cas ***des systèmes distribués****, pour des problèmes avec équations aux dérivées partielles, avec conditions aux limites et conditions initiales.*

Ce vocabulaire n'a pas la prétention d'être exhaustif et a, bien sûr, de nombreuses lacunes. Pour combler ces lacunes, nous renvoyons le lecteur aux articles de Sciences fondamentales, et aux références bibliographiques indiquées à la fin de cet article.

Notations et Symboles

Symbole	Définition
$\forall$	quel que soit
$\exists$	il existe
$\Rightarrow$	implique
$\Leftrightarrow$	équivalent à (= ssi : si et seulement si)
$\overset{\text{def}}{=}$	égal à, par définition
ie	c'est-à-dire

1. Notions relatives aux ensembles

1.1 Ensembles

■ Si on désigne par E un ensemble, x un élément de E, x est aussi appelé **point** ; on écrit :

$x \in E$	x **appartient** à E ;
$x \notin E$	x n'appartient pas à E ;
$\{x \in E, P\}$	ensemble des éléments x de E, ayant la propriété P (la virgule peut être remplacée par $\mid$ ou par ;) ;
$F \subset E$	F partie (sous-ensemble de E) contenue dans E ; tout élément x de F est élément de E : $\forall\ x \in F \Leftrightarrow x \in E$;
$\subset$	est dite l'**inclusion** ;
$\varnothing$	**ensemble vide**.

■ Soient A_1, A_2 deux sous-ensembles de E, et plus généralement :

$(A_i)_{i \in I}$	une famille (quelconque) de sous-ensembles de E ; on note :
$A_1 \cup A_2$	l'**union** de A_1 et A_2, ie l'ensemble des éléments qui appartiennent à A_1 ou (non exclusif) à A_2 ;
$A_1 \cap A_2$	l'**intersection** de A_1 et A_2, ie l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A_1 et à A_2 ;
$\bigcup_{i \in I} A_i$	l'**union** de la famille $A_i = \{x \in E, \exists\ i \in I$ tel que $x \in A_i\}$;
$\bigcap_{i \in I} A_i$	l'**intersection** de la famille $A_i = \{x \in E, x \in A_i\ ;\ \forall\ i \in I\}$;
$E \backslash A = \complement_E A = \complement A$	le **complémentaire** d'une partie A dans $E = \{x \in E, x \notin A\}$;
$\mathscr{P}(E)$	l'ensemble des parties (ie des sous-ensembles) de E.

■ Soient E_1 et E_2 deux ensembles, et plus généralement $(E_i)_{i \in I}$ une famille (quelconque) d'ensembles ; on note :

$E_1 \times E_2$	le **produit cartésien** de E_1 et E_2, ie l'ensemble des couples (x_1, x_2) avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$;
$\prod_{i \in I} E_i$	le **produit cartésien** de la famille $(E_i)_{i \in I}$, ie $\{(x_i)_{i \in I}, x_i \in E_i, \forall\ i \in I\}$;
$E \times E \times \ldots \times E = E^n$	la **puissance *n*-ième** de E, ie le produit cartésien de $\prod_{i = 1 \text{ à } n} E_i$ avec $E_i = E$, $\forall\ i \in I$, ie encore l'ensemble des n-uples $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i \in E$ pour $i = 1$ à n.

1.2 Fonctions ou applications

Nota : le lecteur pourra se reporter aux articles *Langage des ensembles et des structures* [AF 33] et *Analyse fonctionnelle* [A 101] du traité Sciences fondamentales.

■ Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F : à tout élément x de E, f fait correspondre un élément $f(x)$ de F. Suivant les auteurs, cela s'écrit de façon équivalente :

$$f : x \in E \to f(x) \in F$$

$$\text{ou} \quad x \in E \rightsquigarrow f(x) \in F \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \mapsto f(x) \\ E \to F \end{cases}$$

$f(x)$ est dit l'image de x par f.

Attention : on note parfois, par *abus de notation*, par $f(x)$ l'application $x \to f(x)$.

On considère parfois des applications f définies seulement sur une partie D_f de E, et non sur tout E. L'ensemble D_f est alors dit ensemble de définition de f.

Im $f = f(E) \subset F$ **ensemble image** de E par f, ie :

$$\{y \in F\ ;\ \exists\ x \in E,\ y = f(x)\}$$

■ On désigne par A un sous-ensemble de E, et B un sous-ensemble de F ; on note :

$f(A)\ (\subset F)$	l'**ensemble image** de A par f, ie $\{y \in F\ ;\ \exists\ x \in A,\ y = f(x)\}$
$\overset{-1}{f}(B) \subset E$	l'**ensemble réciproque** de B par f, ie $\{x \in E,\ f(x) \in B\}$
f	**application injective** ou **injection** : $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ ou encore $\forall\ y \in f(E)$, $\exists\ x$ **unique** tel que $y = f(x)$

f **application surjective** ou **surjection** : $f(E) = F$ ou encore $\forall\ y \in F, \exists\ x \in E$ tel que $y = f(x)$

f **application bijective** ou **bijection** : f est à la fois injective et surjective : $\forall\ y \in F, \exists\ x$ **unique** tel que $y = f(x)$

$\overset{-1}{f}$ **application réciproque** de f (si f est une application injective) : application de $f(E)$ dans E notée $\overset{-1}{f}$: $y \in f(E) \rightarrow x \in E$ tel que $y = f(x)$

$$\text{ainsi} \begin{cases} \overset{-1}{f}(f(x)) = x,\ \forall\ x \in E \quad (\text{ou } x \in D_f) \\ f(\overset{-1}{f}(y)) = y,\ \forall\ y \in \operatorname{Im} f \end{cases}$$

■ Si A est un sous-ensemble de E, et f une application de E dans F, on note :

$f|_A$ la **restriction** de f à l'ensemble A : $x \in A \rightarrow f(x) \in F$.

■ Si E, F, G sont des ensembles, f et g des applications respectivement f de E dans F et g de F dans G, on note par :

$g \circ f$ la **composée** des applications g et f, de E dans G, définie par : $(g \circ f)(x) = g(f(x)),\ \forall\ x \in E$ (on dit « g rond f ») ;

I_E l'**application identique** dans E : ainsi $I_E(x) = x,\ \forall\ x \in E$.

■ Si f est une application injective de E dans F, on a ainsi :

$$\overset{-1}{f} \circ f = I_E, \quad f \circ \overset{-1}{f} = I_{f(E)}$$

■ Une application f de E dans $\mathbb{R}$ est généralement appelée **fonction numérique**.

2. Notions relatives aux nombres

Nota : le lecteur pourra se reporter à l'article *Polynômes. Études algébriques* [AF 37] du présent traité.

2.1 Principaux ensembles de nombres

$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels : {0, 1, 2, ...} ;
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatifs {..., – 2, – 1, 0, 1, 2, ...} ;
$\mathbb{Q}$	ensemble des nombres rationnels, ie ensemble des fractions : p/q avec p et $q \in \mathbb{Z}$;
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels ;
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	sont des ensembles ordonnés pour la relation $\leqslant$;
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes ;
$\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$	ensemble des nombres réels modulo $\mathbb{Z}$, ou ensemble quotient de $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Z}$ (identifiable à l'intervalle [0, 1[) [on note aussi parfois $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, ensemble des angles], aussi appelé **tore à une dimension**.

On utilise aussi souvent les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^* &= \mathbb{N}\backslash\{0\} = \{1, 2, ...\} \\ \mathbb{Z}^* &= \mathbb{Z}\backslash\{0\} \\ \mathbb{Q}^* &= \mathbb{Q}\backslash\{0\} \\ \mathbb{R}^* &= \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ \mathbb{C}^* &= \mathbb{C}\backslash\{0\} \\ \mathbb{Q}^+ &= \{x \in \mathbb{Q},\ x \geqslant 0\} \\ \mathbb{R}^+ &= \{x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0\} \end{aligned}$$

2.2 Intervalles (dans $\mathbb{R}$)

$[a, b]$	fermé = $\{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x \leqslant b\}$
$]a, b[$	ouvert = $\{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$
$[a, b[$	semi-ouvert à droite = $\{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x < b\}$
$]a, b]$	semi-ouvert à gauche = $\{x \in \mathbb{R},\ a < x \leqslant b\}$

On désigne parfois par (a, b) l'ensemble des nombres réels compris entre a et b, bornes comprises ou non (à ne pas confondre avec le couple (a, b)).

2.3 Notations particulières

2.3.1 Notations dans $\mathbb{R}$

■ Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$:

majorant de A : y tel que $a \leqslant y,\ \forall\ a \in A$;
minorant de A : y tel que $y \leqslant a,\ \forall\ a \in A$,
sup A : c'est le plus petit des majorants ; ie $x = \sup A$ vérifie

$$\begin{cases} a \leqslant x,\ \forall\ a \in A, \text{ et} \\ x \leqslant y,\ \forall\ y \text{ majorant de } A\ ; \end{cases}$$

inf A : c'est le plus grand des minorants ; ie $x = \inf A$ vérifie

$$\begin{cases} x \leqslant a,\ \forall\ a \in A, \text{ et} \\ y \leqslant x,\ \forall\ y \text{ minorant de } A. \end{cases}$$

Si l'on sait que $\sup A \in A$, ie que A a un plus grand élément, on note $\sup A$ par $\max A$; de même, si $\inf A \in A$, on note $\inf A$ par $\min A$.

■ Si f est une fonction numérique définie sur un ensemble E, et si A est un sous-ensemble de E, on note :

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A)$$
$$\inf_{x \in A} f(x) = \inf f(A)$$

2.3.2 Notations dans $\mathbb{C}$

Soit $z \in \mathbb{C}$ (un nombre complexe) ; on note :

$$z = x + \mathrm{i}y,\ \mathrm{i} = \sqrt{-1}$$

avec	$x = \operatorname{Re} z$	la partie réelle de z,
	$y = \operatorname{Im} z$	la partie imaginaire de z,
	$\rho = \lvert z\rvert$	le module de z ; $\lvert z\rvert = (x^2 + y^2)^{1/2}$,
	$\theta = \operatorname{Arg} z$	l'argument de z, défini par : $z = \lvert z\rvert \exp(\mathrm{i}\,\theta)$,
	$\bar{z}$	le complexe conjugué de z, donc $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$.

2.4 Espaces produits de nombres ou puissances n-ièmes

$\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{T}^n$, $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ ensembles dont les éléments sont :

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ respectivement.

■ Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on note souvent $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ et pour $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$.

$|\alpha|$ est alors le degré du monôme x^α.

■ Sous-ensembles particuliers de $\mathbb{R}^n$:

S^{n-1} (ou S_{n-1}) $= \{x \in \mathbb{R}^n, |x| = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{1/2} = 1\}$ **sphère unité** de $\mathbb{R}^n$;

$B_n = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| \leqslant 1\}$ dite **boule unité** de $\mathbb{R}^n$.

3. Principales notions d'algèbre linéaire

Notions de groupe, d'anneau, de corps, d'espace vectoriel, d'algèbre et notamment d'algèbre tensorielle, algèbre symétrique et algèbre extérieure (voir articles [AF 85] *Algèbre linéaire* et [A 125] *Calcul tensoriel* du traité Sciences fondamentales).

On se reportera à ces articles pour les définitions de ces notions fondamentales.

Le lecteur doit **faire attention à la notion de vecteur** (voir article [AF 85] *Algèbre linéaire*) défini en mathématique comme élément d'un espace vectoriel, lui-même défini de façon axiomatique.

Les *vecteurs* utilisés par l'ingénieur ou le physicien ne sont souvent pas des vecteurs au sens précédent, mais des éléments d'un espace affine (ie d'un espace translaté d'un espace vectoriel) ou bien encore des *champs vectoriels*. Notamment du point de vue mathématique, une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est un vecteur (ie élément d'un espace vectoriel), un couple (x, y) avec x et $y \in \mathbb{R}$ est un vecteur et même les *scalaires* $x \in \mathbb{R}$ sont des vecteurs !

Rappelons seulement quelques propriétés utiles pour la suite.

■ **Quelques propriétés importantes de fonctions sur un espace vectoriel**

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

● Une fonction f de E dans F est dite :

— **additive**, si $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall\, x, y \in E$

— **linéaire**, si $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y), \forall\, x, y \in E, \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

— **affine**, s'il existe une fonction linéaire φ de E dans F, et un vecteur $a \in F$ tels que :

$$f(x) = \varphi(x) + a, \quad \forall\, x \in E$$

Noter qu'une fonction affine n'est pas linéaire sauf si $a = 0$.

— **homogène d'ordre** α ($\alpha \in \mathbb{R}$), si :

$$f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x), \forall\, x \in E, \forall\, \lambda > 0$$

● Pour $F = \mathbb{R}$, on dit que $f: E \to \mathbb{R}$ est :

— **convexe**, si :

$$f(tx + (1-t)\, y) \leqslant t f(x) + (1-t)\, f(y) \quad \forall\, x, y \in E, \forall\, t \in [0, 1]$$

— **concave**, si $-f$ est convexe

— **strictement convexe**, si :

$$f(tx + (1-t)\, y) < t f(x) + (1-t)\, f(y) \; \forall\, x, y \in E, x \neq y, \forall\, t \in\,]0, 1[$$

— **strictement concave,** si $-f$ est strictement convexe.

● Une fonction f de $E \times E$ dans F est dite :

— **bilinéaire**, si elle est linéaire par rapport à chacune des variables ;

— **sesquilinéaire** (pour E espace vectoriel sur $\mathbb{C}$), si elle vérifie :

$$\begin{cases} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 f(x_1, y) + \lambda_2 f(x_2, y) \\ f(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \overline{\lambda_1} f(x, y_1) + \overline{\lambda_2} f(x, y_2) \end{cases}$$

pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in E$.

● Pour $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on parle de **forme bilinéaire** et de **forme sesquilinéaire**.

● **Rappel : ensemble convexe A** :

$$tx + (1-t)\, y \in A, \forall\, x, y \in A, \forall\, t \in [0, 1]$$

4. Principales notions relatives à la topologie

Nota : le lecteur pourra se reporter à l'article *Analyse fonctionnelle* [A 101] du traité Sciences fondamentales.

La notion même de topologie est particulièrement importante pour l'ingénieur, puisqu'elle concerne tous les problèmes d'approximation.

4.1 Notions fondamentales

4.1.1 Ouverts, fermés, voisinages

Une topologie $\mathcal{T}$ sur un ensemble E est définie de façon axiomatique par la donnée d'une famille (que l'on peut noter aussi $\mathcal{T}$) de sous-ensembles de E, appelés **ouverts**, avec les propriétés suivantes :

— **toute** réunion d'ouverts est un ouvert ;
— toute intersection d'un nombre **fini** d'ouverts est un ouvert.

L'ensemble E avec $\mathcal{T}$ est alors dit **espace topologique**.

■ **Fermé** : tout complémentaire dans E d'un ouvert.

■ **Voisinage d'un ensemble** A (resp. **d'un point** $x \in E$) : toute partie de E contenant un ouvert contenant A (resp. x).

Une topologie $\mathcal{T}$ sur un ensemble E peut aussi être définie de façon axiomatique par la donnée de la famille des fermés, ou encore par la famille des voisinages de tout point $x \in E$.

■ **Base d'une topologie** $\mathcal{T}$ **sur** E : famille $\mathcal{B}$ d'ouverts telle que tout ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathcal{T}$ soit réunion d'ensembles de $\mathcal{B}$.

■ **Base de voisinages** $\mathcal{G}$ (ou **système fondamental de voisinages**) de $x \in E$: famille de voisinages de x telle que pour tout voisinage V de x, il existe un voisinage W de la famille $\mathcal{G}$ tel que $W \subset V$.

■ **Comparaison de deux topologies** $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$: la topologie $\mathcal{T}_1$ est dite **plus fine** que $\mathcal{T}_2$ si $\mathcal{T}_1$ contient plus d'ouverts que $\mathcal{T}_2$, on écrit : $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$.

4.1.2 Convergence et limites

Une autre notion fondamentale est celle **de convergence et de limite** qui nécessite, pour une définition générale, la **notion de filtre** [2] ; donnons seulement deux cas particuliers, celui des suites et celui des fonctions continues en un point.

■ **Convergence d'une suite** $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans un espace topologique E. Un point $x \in E$ est dit **limite de la suite** (x_n) si, pour tout voisinage V de x, il existe un entier N tel que $x_n \in V, \forall\, n > N$.

On dit alors que la suite (x_n) **converge vers** x ; on note : $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

■ **Valeur d'adhérence (ou point d'accumulation) d'une suite** (x_n) : tout point $y \in E$ tel que pour tout voisinage V de y et pour tout N entier, il existe $n > N$ tel que $x_n \in V$.

■ **Continuité en un point** x_0 **d'une fonction** $f : E \to F$, E et F étant deux espaces topologiques ; pour tout voisinage V_y de $y = f(x_0)$, il existe un voisinage W_x de x dans E tel que $f(W_x) \subset V_y$ [ou encore $\overset{-1}{f}(V_y)$ est un voisinage de x dans E]. On note :

$$y = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

■ **Continuité d'une fonction** $f : E \to F$; l'image réciproque par f de tout ouvert dans F est un ouvert dans E. Ceci est équivalent à : f est continu en tout point x de E. Il y a bien d'autres définitions équivalentes telles que : l'image réciproque par f de tout fermé (resp. voisinage) dans F est un fermé (resp. voisinage) de E.

4.2 Définitions de quelques sous-ensembles d'un espace topologique E

■ Étant donné une partie A de E, on définit :

$\overline{A}$ la **fermeture** de A ou l'**adhérence** de A ; ie l'ensemble des points x de E tel que tout voisinage de x rencontre A (ou encore l'intersection des fermés contenant A).

$\mathring{A}$ l'**intérieur** de A, ie l'ensemble des points x de E tel que A soit un voisinage de x (ou encore l'union des ouverts contenus dans A).

Fr A la **frontière** de A : Fr $A = \overline{A} \cap \overline{\complement A} = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

■ Principaux sous-ensembles d'un espace E.

● **Ensemble dense** (dans E) : partie A telle que $\overline{A} = E$.

● **Ensemble compact** K dans un espace séparé E : de toute famille $(\Omega_i)_{i \in I}$ d'ouverts de E recouvrant K, ie telle que $K \subset \bigcup\limits_{i \in I} \Omega_i$, on peut extraire une famille **finie** $(\Omega_{i_k})_{k = 1 \text{ à } N}$ recouvrant K.

Il y a plusieurs définitions équivalentes possibles. Noter une propriété essentielle : toute suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans un compact K a au moins un point d'accumulation dans K.

● **Ensemble relativement compact** : ensemble dont la fermeture est compacte.

● **Ensemble borné** B dans un espace vectoriel topologique E (EVT). Pour tout voisinage de zéro, U dans E, il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que :

$$B \subset \lambda\, U$$

Dans un espace métrique E (§ 4.4), muni d'une distance d, un ensemble B est borné si son diamètre $\delta(B) = \sup\limits_{x \in B,\, y \in B} d(x, y)$ est fini.

● **Ensemble connexe** F dans E : E ne peut être la réunion de deux ensembles ouverts non vides disjoints (ie d'intersection vide) ; ou encore : il n'existe aucun sous-ensemble non vide (et différent de F) à la fois ouvert et fermé.

4.3 Définitions pour des fonctions numériques (à valeurs dans $\mathbb{R}$) sur E

■ **Fonction** f **semi-continue inférieurement** (resp. **supérieurement**) **en un point** $a \in E$: pour tout réel h, $h < f(a)$ (resp. $h > f(a)$), il existe un voisinage V de a tel que $h < f(x)$ (resp. $h > f(x)$), $\forall\, x \in V$.

■ **Fonction semi-continue inférieurement** (resp. **supérieurement**) si la propriété précédente est vraie pour tout $a \in E$.

4.4 Principaux types d'espaces topologiques

Soit E un espace topologique.

■ **Espace séparé (ou espace de Hausdorff)**

Quels que soient a, b points **distincts** de E, il existe un voisinage U de a et un voisinage V de b sans point commun.

■ **Espace compact**

L'espace E est séparé, et pour toute famille d'ouverts $(\Omega_i)_{i \in I}$ recouvrant E (ie $\bigcup\limits_{i \in I} \Omega_i = E$), il existe une sous-famille **finie** recouvrant E.

■ **Espace localement compact**

L'espace E est séparé, et tout point de E possède un voisinage compact.

■ **Espace métrique**

Espace E muni d'une distance d (ou **métrique**). Cette distance définit sur E une topologie telle que pour tout $x \in E$, la famille :

$$B_\rho(x) = \{x \in E,\, d(x, y) \leqslant \rho\},\ \rho > 0$$

forme une base de voisinages de x.

La famille $(B_{1/n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ forme une base dénombrable de voisinages de x.

■ **Espace métrisable**

Espace topologique dont la topologie peut être définie à l'aide d'une distance.

■ **Espace métrique (ou métrisable) séparable**

Espace métrique (ou métrisable) dans lequel il existe un ensemble dénombrable dense (dans E).

■ **Espace métrique complet**

Un espace métrique est dit **complet** si toute suite de Cauchy dans E est convergente dans E.

La **notion d'espace complet** peut être généralisée à des espaces non métriques [2] [3].

Suite de Cauchy

Une suite (x_n) dans un espace métrique E est dite suite de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, pour tous n et m supérieurs à N.

■ **Espace vectoriel topologique (EVT)**

Espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$ (ou sur $\mathbb{R}$) muni d'une topologie telle que les applications d'addition et de multiplication par un scalaire :

$$\begin{cases}(x, y) \in E \times E \to x + y \in E \\ (\lambda, x) \in \mathbb{C} \times E \text{ (ou } \mathbb{R} \times E) \to \lambda\, x \in E\end{cases}$$

sont continues.

■ **Espace vectoriel topologique localement convexe**

Un espace vectoriel topologique E est dit localement convexe s'il existe un système fondamental de voisinages de 0 formé d'ensembles convexes.

■ **Espace de Fréchet**

Un espace vectoriel topologique est un espace de Fréchet s'il est à la fois métrisable, complet et localement convexe.

■ **Espace normé**

Espace vectoriel topologique E muni d'une norme $\|\cdot\|$. Cette norme définit sur E une topologie telle que les boules :

$$B_\rho = \{x \in E;\ \|x\| \leqslant \rho\},\ \rho > 0$$

forment une base de voisinages de l'origine.

■ **Espace normable**

Espace vectoriel topologique E dont la topologie peut être définie à l'aide d'une norme.

■ **Espace de Banach**

Espace normé complet.

■ **Espace préhilbertien**

Espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$), muni d'une forme hermitienne positive, notée (,) (ou (|)), (le produit scalaire).

■ **Espace hilbertien ou espace de Hilbert**

Espace préhilbertien séparé et complet [la forme hermitienne, (§ 4.5), (,) définit une norme $\|\cdot\|$ par $\|x\| = (x, x)^{1/2}$].

■ Les espaces $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ sont naturellement munis d'une topologie : celle due à la distance euclidienne. On est amené à utiliser les ensembles suivants :

$\mathbb{R} \cup \{+\infty\} =]-\infty, +\infty]$ pour lequel on *ajoute* simplement à la topologie de $\mathbb{R}$, la famille $\left]\frac{1}{n}, +\infty\right]$, n entier, comme base de voisinages de $+\infty$;

$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ou droite achevée, avec la famille $\left[-\infty, -\frac{1}{n}\right[$, n entier, comme base de voisinages de $-\infty$;

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (*compactifié* de $\mathbb{R}$), c'est-à-dire $\mathbb{R}$, avec sa topologie, à laquelle on ajoute les familles $\mathbb{R} \backslash \left[-\frac{1}{m}, -\frac{1}{n}\right]$ comme base de voisinages de l'infini.

■ Par ailleurs, pour traiter les problèmes d'équations aux dérivées partielles et pour les approximations, on est amené à définir des **topologies sur des espaces fonctionnels, sur des espaces de suites, sur des espaces d'opérateurs** (par exemple, pour traiter des problèmes de stabilité vis-à-vis de données d'une structure), **sur des familles de sous-ensembles** de $\mathbb{R}^n$ (pour traiter de problèmes du type *optimal shape design* [5]).

Les topologies sur des espaces fonctionnels interviennent souvent de façon naturelle pour le problème physique considéré (conservation d'une énergie correspondant à une norme par exemple) ; les espaces fonctionnels peuvent correspondre à des fonctions plus ou moins régulières (éventuellement des distributions).

On est aussi amené à changer de topologie pour *améliorer* la convergence. C'est le cas des topologies dites faibles.

4.5 Principales façons de définir une topologie sur un ensemble *E*

■ **Écart**

On appelle écart sur E toute application f de $E \times E$ dans l'intervalle $[0, +\infty]$ vérifiant :

a) $\forall\, x \in E,\ f(x, x) = 0$;
b) $\forall\, x$ et $y \in E,\ f(x, y) = f(y, x)$ (**symétrie**) ;
c) $\forall\, x, y, z \in E,\ f(x, y) \leqslant f(x, z) + f(z, y)$ (**inégalité du triangle**).

■ **Distance ou métrique**

On appelle distance ou métrique sur E toute application d de $E \times E$ dans l'intervalle $[0, +\infty[$, vérifiant :

a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (deux points à distance nulle sont identiques) ;
b) d vérifie les propriétés (b) (symétrie) et (c) (inégalité du triangle) relatives aux écarts.

■ **Semi-norme sur un espace vectoriel *E***

Une fonction $x \in E \to p(x) \in [0, +\infty[$ est dite une semi-norme si elle vérifie les conditions suivantes :

a) p est sous-additive, ie $\forall\, x, y \in E,\ p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$;
b) p est positivement homogène de degré 1, ie $\forall\, x \in E$ et $\forall\, \lambda \in \mathbb{C},\ p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$;
c) $p(0) = 0$ [impliquée par (b)].

■ **Norme (sur un espace vectoriel *E*)**

Une semi-norme sur E est appelée une norme si :

$$x \in E,\ p(x) = 0 \text{ implique } x = 0$$

on note de façon usuelle $p(x) = \|x\|$.

■ **Forme hermitienne positive. Produit scalaire**

On appelle forme hermitienne (pour E espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, ou symétrique pour E espace vectoriel sur $\mathbb{R}$) toute application f de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) vérifiant :

$$\begin{cases} f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y),\ \forall\, x_1, x_2, y \in E \\ f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2),\ \forall\, x, y_1, y_2 \in E \\ f(\lambda x, y) = \lambda\, f(x, y) \\ f(x, \mu y) = \bar{\mu}\, f(x, y)\ \forall\, x, y \in E,\ \lambda, \mu \in \mathbb{C} \text{ (ou } \mathbb{R}) \\ f(x, y) = \overline{f(x, y)} \end{cases}$$

Une forme hermitienne f sur E est **positive** si elle vérifie :

$$f(x, x) \geqslant 0, \quad \forall\, x \in E$$

Alors $(f(x, x))^{1/2}$ est une semi-norme sur E.

Une forme hermitienne f sur E est dite **définie positive**, ou **positive non dégénérée**, si elle vérifie :

$$x \neq 0 \Rightarrow f(x, x) > 0$$

Alors $(f(x, x))^{1/2}$ est une norme sur E. On note de façon usuelle :

$f(x, y) = (x, y)$ ou $(x|y)$, appelé **produit scalaire** de x et y

■ **Quelques autres façons de définir une topologie sur un ensemble**

● **Topologie induite** sur un sous-ensemble E_0 d'un espace topologique $(E, \mathcal{T})$: c'est la topologie $\mathcal{T}_0$ sur E_0 dont l'ensemble des ouverts sont de la forme $E_0 \cap \mathcal{O}$, $\mathcal{O}$ ouvert de $\mathcal{T}$.

● **Topologie produit** sur l'espace produit $E_1 \times E_2$ de deux espaces topologiques $(E_1, \mathcal{T}_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2)$: la famille des ensembles de la forme $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ avec $\mathcal{O}_1 \in \mathcal{T}_1$ et $\mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}_2$ forme une base de la topologie produit.

● **Transport de structure** : étant donné un espace topologique $(E_1, \mathcal{T}_1)$ et une bijection φ de E_1 sur un ensemble E_2, on définit sur E_2 une topologie $\mathcal{T}_2$ par :

$$\mathcal{O} \in \mathcal{T}_2 \quad \text{si} \quad \overset{-1}{\varphi}(\mathcal{O}) \in \mathcal{T}_1$$

● **Topologie $\mathcal{T}$ la moins fine** sur un ensemble E rendant continue une famille d'applications φ_i de E dans un espace topologique $(E_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$: l'ensemble des intersections finies des ensembles de la forme $\overset{-1}{\varphi_i}(\mathcal{O}_i)$ pour $\mathcal{O}_i \in \mathcal{T}_i$ forme une base de la topologie $\mathcal{T}$.

4.6 Notions fondamentales de dualité

Soit E un espace vectoriel topologique (EVT) sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

■ Une **forme linéaire** f **sur** E est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (suivant le corps de E), et on note :

$$f(x) = \langle f, x \rangle, \ \forall x \in E$$

■ **Dual (topologie) E' de E**

Ensemble des formes linéaires continues sur E **(si E est de dimension infinie, toute forme linéaire n'est pas continue)**.

■ **Topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E**

Topologie la moins fine sur E rendant continus tous les éléments de E'. C'est une topologie localement convexe séparée, définie par la famille des semi-normes $x \in E \to |\langle f, x \rangle| \in \mathbb{R}^+$.

Ces premières notions sont essentiellement utilisées pour E espace localement convexe séparé, et notamment pour E espace de Banach. Nous supposerons par la suite, pour simplifier, que E est un espace de Banach. Alors la topologie faible n'est pas métrisable. On appelle parfois, par opposition, topologie forte, la topologie *initiale* d'espace de Banach.

L'hypothèse que E est un espace de Banach n'est pas suffisante pour toutes les applications. Nous renvoyons dans le cas où E n'est pas un espace de Banach à [3] [2].

■ **Dual fort ou topologie forte sur le dual d'un espace de Banach**

Espace E', muni de la *norme duale* :

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leqslant 1}} |\langle f, x \rangle|$$

c'est un espace de Banach pour cette norme.

■ **Bidual E'' de E**

C'est le dual de E'. C'est aussi un espace de Banach pour la norme :

$$\|\xi\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leqslant 1}} |\langle \xi, f \rangle|$$

On peut identifier E à un sous-espace de E'' par l'*injection canonique* $J : E \to E''$ définie par :

$$\langle Jx, f \rangle_{E'', E'} = \langle f, x \rangle_{E', E}, \ \forall x \in E, \forall f \in E'$$

les indices des crochets rappelant la dualité concernée.

J est une isométrie (§ 10.3) de E dans E''.

■ **Espace réflexif**

Un espace de Banach E est dit réflexif si $JE = E''$ (ie on peut identifier E à son bidual E'' par J).

La propriété essentielle des espaces de Banach réflexifs est que la boule unité $B_E = \{x \in E, \|x\| \leqslant 1\}$ est compacte pour la topologie faible.

■ **Topologie faible $*$ sur E', ou topologie $\sigma(E', E)$**

Topologie la moins fine sur E' rendant continues toutes les applications :

$$f \in E' \to \langle f, x \rangle, x \in E$$

Comme $E \subset E''$, la topologie faible $*$ sur E' est moins fine que la topologie faible de E', ie la topologie $\sigma(E', E'')$.

La propriété essentielle de cette topologie faible $*$ est que la boule unité de E', $B_{E'} = \{f \in E', \|f\| \leqslant 1\}$ est compacte pour cette topologie. Ceci n'a d'intérêt que si E' n'est pas réflexif. Noter que E' est réflexif si et seulement si E est réflexif.

■ **Prédual d'un espace de Banach F**

S'il existe un espace de Banach E tel que $F = E'$, E est dit prédual de F.

■ **Exemples** d'espaces réflexifs : $E = L^p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$ (§ 9.2).

■ **Exemples** d'espaces non réflexifs $E = L^1(\Omega)$, $E = L^\infty(\Omega)$.

L'espace $E = L^1(\Omega)$ n'admet pas de prédual.

Remarque : tout espace de Hilbert peut s'identifier à son dual – par suite du théorème de Riesz – et donc est réflexif. Cette identification n'est pas toujours intéressante à faire : on appelle généralement **espace pivot** (dans un cadre variationnel) un espace de Hilbert H identifié à son dual ; c'est généralement le cas des espaces $H = L^2(\Omega)$.

■ **Antidual d'un espace de Hilbert (ou même de Banach) E sur $\mathbb{C}$**

Ensemble des **formes antilinéaires** continues sur E ; ie des applications f continues de E dans $\mathbb{C}$, telles que :

$$f(\lambda x + \mu y) = \bar{\lambda} f(x) + \bar{\mu} f(y)$$
$$\forall x, y \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

5. Calcul intégral. Notions fondamentales de mesure et d'intégration

Soit E un ensemble.

■ **Tribu ou σ - algèbre**

Ensemble de parties de E, stable par les opérations du passage au complémentaire et union dénombrable ; si $\mathcal{A}$ est une tribu de parties de E, alors :

$$\begin{cases} A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \complement A = E \backslash A \in \mathcal{A} \\ A_i \in \mathcal{A}, \ \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A} \end{cases} \quad \text{(et ainsi } \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A})$$

$\varnothing \in \mathcal{A}$, et $E \in \mathcal{A}$.

■ **Tribu engendrée par une famille $\mathcal{B}$ de parties de E**

La plus petite tribu (au sens de l'inclusion des tribus) contenant la famille $\mathcal{B}$.

Tribu de Borel d'un espace topologique E

La tribu engendrée par les parties ouvertes de E.

Espace mesurable

C'est un couple $(E, \mathfrak{a})$ avec E ensemble (non vide) et $\mathfrak{a}$ tribu de parties de E ; les éléments de $\mathfrak{a}$ sont appelés parties mesurables de E.

Application mesurable f d'un espace mesurable $(E, \mathfrak{a})$ dans un autre espace mesurable $(F, \mathscr{B})$

Pour tout $B \in \mathscr{B}$, $\overset{-1}{f}(B) \in \mathfrak{a}$.

Mesure (abstraite) sur un espace mesurable $(E, \mathfrak{a})$, (à valeurs dans un espace F, $F = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $F = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ ou $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, espace de Banach).

C'est une application μ de $\mathfrak{a}$ dans F, dite **σ - additive** , ie telle que pour toute famille dénombrable $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathfrak{a}$ deux à deux disjoints, la famille $(\mu(X_i))_{i \in \mathbb{N}}$ est sommable et :

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(X_i)$$

La mesure est dite **réelle, réelle finie, positive** ($\geqslant 0$), **complexe, vectorielle** respectivement si $F = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}, \mathbb{C}$, espace de Banach.

La mesure μ est dite **σ - finie** si E est réunion dénombrable d'éléments X_i de $\mathfrak{a}$ tels que $\mu(X_i)$ est fini pour tout i.

Espace mesuré $(E, \mathfrak{a}, \mu)$

C'est un espace mesurable $(E, \mathfrak{a})$ avec une mesure positive (à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$) μ, définie sur la tribu $\mathfrak{a}$.

Application étagée f d'un espace mesurable $(E, \mathfrak{a})$ dans un ensemble F (F quelconque non vide)

Il existe une famille finie $(A_i)_{i = 1 \text{ à } n}$ d'éléments de $\mathfrak{a}$ deux à deux disjoints tels que $\bigcup_{i = 1 \text{ à } n} A_i = E$, et la restriction de f à A_i est constante $\forall\ i = 1$ à n.

Application μ -étagée f, d'un espace mesuré $(E, \mathfrak{a}, \mu)$ dans un espace de Banach F

f est une application étagée de $(E, \mathfrak{a})$ dans F, telle que :

$$\mu(\overset{-1}{f}(F \backslash \{0\})) \text{ est fini}$$

Ou encore : il existe $y_j \in F$, $A_j \in \mathfrak{a}$, $j = 1$ à m (fini) tel que :

$$\mu(A_j) < +\infty$$

$$f = \sum_{j = 1 \text{ à } m} y_j,\ 1_{A_j},\ 1_{A_j} \text{ fonction caractéristique de } A_j \qquad \textbf{(1)}$$

Ensemble négligeable M dans un espace mesuré $(E, \mathfrak{a}, \mu)$

Une partie M de E est **dite négligeable** (relativement à la mesure μ, ou μ - négligeable) s'il existe $A \in \mathfrak{a}$ tel que :

$$M \subset A \quad \text{et} \quad \mu(A) = 0$$

Une propriété P dans E est **dite vraie μ - presque partout** (μ - pp), si l'ensemble des points x de E, qui ne possèdent pas cette propriété, est négligeable.

Application μ - mesurable f de $(E, \mathfrak{a}, \mu)$ dans un espace de Banach F

Il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications μ - étagées de E dans F convergeant μ - presque partout vers f (ie il existe une partie μ - négligeable N de E telle que pour tout $x \in E \setminus N$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$).

Ou encore : il existe une application g mesurable de E dans F, μ - presque partout égale à f.

Intégrale d'une fonction μ - étagée

Pour toute fonction f μ - étagée de $(E, \mathfrak{a}, \mu)$ dans F, on définit l'intégrale de f (relativement à μ), notée $\int f \mathrm{d}\mu$ ou $\int f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$, par :

$$\int f \mathrm{d}\mu = \sum_{j = 1 \text{ à } m} \mu(A_j)\, y_j \quad [y_j, A_j \text{ définis dans la relation (1)}]$$

L'ensemble des fonctions μ - étagées de $(E, \mathfrak{a}, \mu)$ dans F étant noté $\mathrm{St}_\mu(E, F)$, on définit une semi-norme sur $\mathrm{St}_\mu(E, F)$ par :

$$N_1(f) = \int |f|\,\mathrm{d}\mu$$

Application μ - intégrable f de $(E, \mathfrak{a}, \mu)$ dans F

Il existe une suite de Cauchy $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications μ - étagées de E dans F, convergeant μ - presque partout vers f.

L'intégrale de f (pour la mesure μ) notée $\int f \mathrm{d}\mu$ est définie par :

$$\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \mathrm{d}\mu$$

Application f de $(E, \mathfrak{a}, \mu)$ dans F, μ - intégrable dans $A \in \mathfrak{a}$

Application telle que $f \cdot 1_A$ est μ - intégrable.

(avec 1_A fonction caractéristique de A).

L'intégrale de f dans A, notée $\int_A f \mathrm{d}\mu$, est définie par :

$$\int_A f \mathrm{d}\mu = \int f \cdot 1_A \mathrm{d}\mu$$

L'espace des fonctions μ - intégrables de E dans F est noté $\mathscr{L}^1_\mu(E, F)$.

L'espace quotient de l'espace vectoriel $\mathscr{L}^1_\mu(E, F)$ par le sous-espace $\mathscr{N}$ des fonctions μ - presque partout nulles est noté $L^1_\mu(E, F)$.

C'est un espace de Banach pour la norme :

$$\|f\|_1 = \int |f|\,\mathrm{d}\mu$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme dans F, et $|f|$ l'application $x \in E \to |f(x)| \in \mathbb{R}^+$.

L'**espace quotient** considéré est l'espace des classes de fonctions obtenues en identifiant deux fonctions dont la différence appartient à $\mathscr{N}$.

Variation totale d'une mesure μ sur un ensemble mesurable $(E, \mathfrak{a})$ à valeurs dans F avec $F = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ou un espace de Banach.

C'est la mesure positive, notée $|\mu|$, définie pour tout $A \in \mathfrak{a}$, par :

$$|\mu|(A) = \sup \sum_{i = 0}^{\infty} |\mu(X_i)| \qquad \textbf{(2)}$$

la borne supérieure (dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$) étant prise pour toutes les familles dénombrables $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathfrak{a}$ tels que : $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i = A$ [la notation $|\mu(X_i)|$ désigne la norme dans F de $\mu(X_i)$].

Mesure (abstraite) bornée

Mesure μ telle que :

$$\|\mu\| = \sup_{A \in \mathfrak{a}} |\mu|(A) < +\infty$$

L'ensemble $\mathfrak{M}(E, \mathfrak{a}\,;F)$ des mesures bornées à valeurs dans un espace de Banach F est un espace de Banach pour la norme $\|\mu\|$.

Mesure de Borel sur un espace localement compact *E*

Mesure abstraite μ définie sur la tribu de Borel $\mathcal{B}$ de E, à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, ou dans un espace de Banach F telle que :

$|\mu|(K) < +\infty$, $\forall$ K compact de E [avec la notation de la relation (2)]

Une **mesure de Borel positive sur** E est dite σ - régulière si elle vérifie :

- $\mu(A) = \inf[\mu(V),\ V \text{ ouvert} \supset A],\ \forall\ A \in \mathcal{B}$,
- $\begin{cases}\mu(M) = \sup[\mu(K),\ K \text{ compact} \subset M], \\ \forall\ M \text{ ouvert de } E \text{ et } \forall\ M \in \mathcal{B} \text{ vérifiant } \mu(M) < +\infty.\end{cases}$

Mesure de Radon (scalaire) μ sur un espace localement compact *E*

C'est une forme linéaire continue sur l'espace $\mathcal{C}_c(E)$ des fonctions scalaires continues à support compact, ou encore :
μ est une mesure de Radon si, $\forall$ K compact de E, $\|\mu\|_K = \sup(|\mu(f)|,\ f \in \mathcal{C}_K(E),\ \|f\| \leqslant 1)$ est fini (avec $\mathcal{C}_K(E)$ désignant l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}_c(E)$ nulles en dehors de K, et $\|f\| = \sup\limits_{x \in K} |f(x)|$).

On peut définir des mesures de Radon réelles ou complexes, ou plus généralement à valeurs dans un espace de Banach F.

Une mesure de Radon est dite **positive** si :

$$\mu(\varphi) \geqslant 0,\ \forall\ \varphi \geqslant 0,\ \varphi \in \mathcal{C}_c(E)$$

Une mesure de Radon est dite **bornée** si :

$$\|\mu\|_E = \sup(|\mu(\varphi)|,\ \varphi \in \mathcal{C}_c(E),\ \|\varphi\| \leqslant 1) \text{ est finie}$$

L'**ensemble des mesures de Radon bornées** sur un espace localement compact E muni de la norme $\|\mu\|_E$ est un espace de Banach. Cet espace noté $\mathcal{M}^1(E)$ s'identifie au dual de l'espace de Banach $\mathcal{C}_0(E)$ des fonctions continues sur E et tendant vers zéro à l'infini, muni de la norme :

$$\|\varphi\| = \sup_{x \in E} |\varphi(x)|$$

Les mesures de Radon peuvent s'identifier à des mesures abstraites particulières : notamment, pour toute mesure de Radon positive sur E, il existe une mesure de Borel unique $\hat{\mu}$ (appelée **prolongement principal** de μ), σ - régulière, telle que :

$$\begin{cases}\text{toute fonction réelle } \varphi \in \mathcal{C}_c(E) \text{ est } \hat{\mu} \text{ - intégrable, et} \\ \displaystyle\int \varphi\, \mathrm{d}\hat{\mu} = \mu(f)\end{cases}$$

Espace de probabilité $(E, \mathfrak{a}, P)$

C'est un espace mesuré, avec une mesure (positive) $\mu = P$ telle que :

$$\mu(E) = 1$$

Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, etc

En tant que mesure abstraite, on peut définir la mesure de Lebesgue ℓ sur $\mathbb{R}$ comme l'unique mesure positive telle que pour tout intervalle $[a, b[$ (a et $b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$) :

$$\ell([a, b[) = b - a$$

En tant que mesure de Radon, on peut la définir à l'aide de la notion de primitive d'une fonction $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, par :

$$\ell(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{d}x$$

Mesure ν absolument continue par rapport à une mesure μ, définies sur $(E, \mathfrak{a})$ (on note $\nu \ll \mu$)

$$\forall\ A \in \mathfrak{a} \text{ tel que } |\mu|(A) = 0 \quad \text{vérifie } |\nu|(A) = 0$$

Si μ et $|\nu|$ sont des mesures **finies**, il existe une fonction $f\,\mu$ - intégrable telle que :

$$\nu(A) = \int_A f\, \mathrm{d}\mu, \quad \forall\ A \in \mathfrak{a}$$

f est appelée **dérivée de Radon-Nikodym** (ou simplement **densité**) de ν par rapport à μ, et on note $f = \dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ (Ceci se généralise aux mesures σ - finies) et on écrit $\mathrm{d}\nu = f\mathrm{d}\mu$ (ou encore $\nu = f \cdot \mu$).

Mesures étrangères μ et ν définies sur $(E, \mathfrak{a})$ (on note $\mu \perp \nu$)

Il existe deux ensembles A et B dans E, avec $A \cup B = E$, $A \cap B = \varnothing$, tels que pour tout $X \in \mathfrak{a}$, $X \cap A$ et $X \cap B \in \mathfrak{a}$, et :

$$\mu(X \cap A) = 0,\ \nu(X \cap B) = 0$$

On dit que μ est **concentrée** sur A et ν est **concentrée** sur B.

Décomposition de Lebesgue d'une mesure ν sur $(E, \mathfrak{a}, \mu)$, μ- mesure positive σ - finie, avec $|\nu|$ σ - finie

ν se décompose de manière unique en une somme de mesures ν_1 et ν_2,

$$\nu = \nu_1 + \nu_2, \text{ avec } \nu_1 \ll \mu \quad \text{et} \quad \nu_2 \perp \mu$$

Fonction f numérique absolument continue sur un intervalle borné $I =]a, b[$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que pour toute suite d'intervalles $]a_n, b_n[\subset I$, deux à deux disjoints :

$$\sum_n (b_n - a_n) < \delta \Rightarrow \sum_n |f(b_n) - f(a_n)| < \varepsilon$$

Ce sont aussi les fonctions f sur I dont la dérivée (au sens des distributions) est une mesure ν absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $\ell = \mathrm{d}x$ sur I, on écrit $f \in W^{1,1}(I)$.

Fonction *f* numérique à variation bornée sur I

Il existe $C > 0$ tel que :

$$\sum_{i=0}^{k-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \leqslant C$$

pour toute suite $t_0 < t_1 < \ldots < t_k$ de I.

Ce sont aussi les fonctions $f \in L^1(I)$ dont la dérivée [au sens des distributions (§ 9.4)] est une mesure bornée. Cela permet de définir des intégrales dites de Stieltjes.

Mesure induite sur une partie mesurable E_1 d'un espace mesuré $(E, \mathfrak{a}, \mu)$ par la mesure μ

Si $\mathfrak{a}_1$ est la tribu induite par $\mathfrak{a}$ sur E_1 (ie la famille des éléments de $\mathfrak{a}$ qui sont contenus dans E_1), la restriction de μ à $\mathfrak{a}_1$ est dite mesure induite.

Mesure image

On désigne par $(E_1, \mathfrak{a}_1)$, $(E_2, \mathfrak{a}_2)$ deux espaces mesurables. Soit π une application mesurable de E_1 dans E_2, et μ_1 une mesure définie sur $(E_1, \mathfrak{a}_1)$. On appelle **mesure image** de μ_1 par π, la mesure μ_2 sur $(E_2, \mathfrak{a}_2)$ définie par :

$$\mu_2(A_2) = \mu_1(\overset{-1}{\pi}(A_2)) \quad \forall\ A_2 \in \mathfrak{a}_2$$

Une fonction f sur E_2 est μ_2 - intégrable (resp. μ_2 - mesurable) si et seulement si $f \circ \pi$ est μ_1 - intégrable (resp. μ_1 - mesurable), et on a la formule de *changement de variable* :

$$\int_{E_1} f \circ \pi \, \mathrm{d}\mu_1 = \int_{E_2} f \, \mathrm{d}\mu_2$$

● **Cas particulier** : $\pi = \Phi$ est une bijection d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ sur un ouvert $\Phi(U)$ de $\mathbb{R}^n$, de classe $\mathscr{C}^1$ ainsi que son inverse ; alors :

$$\int_{\Phi(U)} f(y) \, \mathrm{d}y = \int_U f(\Phi(x)) \, |\det(\mathrm{D}\Phi(x))| \, \mathrm{d}x$$

où det(D $\Phi(x)$) désigne le jacobien de Φ (§ 6).

■ **Mesure produit**

Soient $(E_1, \mathfrak{a}_1, \mu_1), (E_2, \mathfrak{a}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés, avec μ_1 et μ_2 mesures σ - finies. On appelle :

$\mathfrak{a}_1 \otimes \mathfrak{a}_2$ la **tribu produit** de $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$ sur $E_1 \times E_2$, ie la tribu engendrée par les parties $A_1 \times A_2$, avec $A_1 \in \mathfrak{a}_1$, $A_2 \in \mathfrak{a}_2$.

$\mu_1 \otimes \mu_2$ la **mesure produit** des mesures μ_1 et μ_2, caractérisée par :
$\mu_1 \otimes \mu_2 (A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2), \quad \forall A_1 \in \mathfrak{a}_1, A_2 \in \mathfrak{a}_2$.

Si f est une fonction $\mu_1 \otimes \mu_2$ intégrable sur $E_1 \times E_2$, on a la formule d'**interversion des intégrales** (ou **théorème de Fubini**) :

$$\begin{aligned}\int_{E_1 \times E_2} f \, \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{E_1 \times E_2} f(x_1, x_2) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \, \mathrm{d}\mu_2(x_2) \\ &= \int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x_1, x_2) \mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \\ &= \int_{E_2} \left(\int_{E_1} f(x_1, x_2) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \right) \mathrm{d}\mu_2(x_2)\end{aligned}$$

6. Calcul différentiel et opérateurs différentiels linéaires

Nota : le lecteur pourra se reporter à l'article *Calcul différentiel* [AF 55] du traité Sciences fondamentales.

■ Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ (ou un intervalle **ouvert** I de $\mathbb{R}$), à valeurs réelles ou complexes, ou dans un espace de Banach Y. On note :

$f'(a) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ **la dérivée de** f **au point** a, c'est-à-dire la limite (si elle existe) de $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ pour $h \to 0$; f est alors dite **dérivable** en a.

$f^{(n)}(a) = \dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(a)$ **la dérivée d'ordre** n **de** f **au point** a, pour f fonction $n-1$ fois dérivable dans un voisinage de a, dont la $(n-1)$-ième dérivée $f^{(n-1)}$ est dérivable en a ; ainsi $f^{(n)}(a) = \dfrac{\mathrm{d}f^{(n-1)}}{\mathrm{d}x}(a)$.

La fonction $a \in I \to f'(a)$ (resp. $f^{(n)}(a)$) (si $f'(a)$ et $f^{(n)}(a)$ existent $\forall a \in I$) est dite dérivée (resp. dérivée n-ième) au sens classique de f. La fonction f est alors dite dérivable (resp. n fois dérivable) dans I.

Si f est une distribution, on définit la dérivée de f (**au sens des distributions**) par dualité de la dérivée usuelle dans l'espace $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ ou $\mathscr{D}(I)$, ie par :

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi'), \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \text{ ou } \mathscr{D}(I)$$

et aussi pour la dérivée n-ième :

$$(f^{(n)}, \varphi) = (-1)^n (f, \varphi^{(n)}), \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \text{ ou } \mathscr{D}(I)$$

Si f est une fonction régulière, les deux définitions de dérivées coïncident ; si f n'est pas suffisamment régulière pour que la dérivée $f'(a)$ existe en tout point a de I, on peut tout de même définir sa dérivée au sens des distributions si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$.

■ Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles ou complexes, ou dans un espace de Banach Y. On note :

- $\mathrm{D}_k f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ ou $\partial_k f(a)$ **la dérivée partielle de** f **par rapport à la variable** x_k **au point** a, c'est-à-dire la limite (si elle existe) de $\dfrac{1}{h}[f(a_1, ..., a_k + h, a_{k+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_k, a_{k+1}, ..., a_n)]$ pour $h \to 0$;
- $\mathrm{D}^\alpha f(a)$ ou $\dfrac{\partial^{|\alpha|} f(a)}{\partial x^\alpha}$ ou $\partial_\alpha f(a)$, avec $\mathrm{D}^\alpha f = (\mathrm{D}_1)^{\alpha_1} \cdot (\mathrm{D}_2)^{\alpha_2} \dots (\mathrm{D}_n)^{\alpha_n} f$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i = 1$ à n, **la dérivée partielle d'ordre** $|\alpha|$ **de** f **en** a.

Les fonctions $a \to \mathrm{D}_k f(a)$ et $a \to \mathrm{D}^\alpha f(a)$, ..., notées naturellement $\mathrm{D}_k f \left(\text{ou } \dfrac{\partial f}{\partial x_k} \text{ ou } \partial_k f \right)$ et $\mathrm{D}^\alpha f \left(\text{ou } \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}, \text{ ou } \partial_\alpha f \right)$, sont appelées dérivées partielles de f par rapport à x_k et dérivée partielle d'ordre $|\alpha|$ de f au sens classique.

Si f est une distribution, on définit de même les dérivées partielles de f par rapport à x_k et d'ordre $|\alpha|$ de f par dualité, par :

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{D}_k f, \varphi \rangle &= -\langle f, \mathrm{D}_k \varphi \rangle, & \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \\ \langle \mathrm{D}^\alpha f, \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle f, \mathrm{D}^\alpha \varphi \rangle, & \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)\end{aligned}$$

Si f est une fonction régulière, les deux définitions de dérivées coïncident ; si f n'est pas suffisamment régulière, mais telle que $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, on peut tout de même définir ses dérivées partielles, et d'ordre $|\alpha|$, au sens des distributions.

■ **Dérivée de Fréchet**

● $f'(a) = \mathrm{D}f(a)$ la **dérivée de Fréchet** de f au point a, c'est-à-dire l'application linéaire continue (si elle existe) $h \in \mathbb{R}^n \to \mathrm{D}f(a) \cdot h \in Y$, telle que :

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{D}f(a) \cdot h + |h| \, o(h), \ \forall h \in \mathbb{R}^n, \quad \text{avec } \|o(h)\| \to 0 \quad \text{pour } h \to 0 \qquad (3)$$

La fonction f est alors dite **différentiable** en a. On note indifféremment D $f(a) \cdot h$ ou D $f(a)$ h (ie avec ou sans point).

Pour $h = \eta \, e_k$, e_k étant le k-ième vecteur unitaire de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\mathrm{D}f(a) \cdot e_k = \mathrm{D}_k f(a)$$

La fonction f est dite **différentiable (ou dérivable) dans** Ω si elle est différentiable en tout point $a \in \Omega$. Elle est dite **continûment différentiable** si l'application $a \in \Omega \to \mathrm{D}f(a) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, Y)$ est continue.

Si f est une *application différentiable* de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, la fonction f est déterminée par la donnée de m fonctions différentiables réelles sur Ω, $(f_i)_{i=1 \text{ à } m}$, et l'application linéaire $\mathrm{D}f(a)$ est représentée par la matrice $(\partial_j f_i(a))$ dite **matrice dérivée** (ou **matrice jacobienne**) de l'application f en a. Si $m = n$, le déterminant de cette matrice est appelé **jacobien** de f en a.

● $f''(a) = \mathrm{D}^2 f(a)$ la **dérivée seconde de Fréchet** de f en a, pour f application dérivable de $\Omega \subset \mathbb{R}^n \to Y$, telle que $f' = \mathrm{D}f : \Omega \to \mathscr{L}(X, Y)$ soit dérivable en

$a \in \Omega : f''(a) \overset{\text{def}}{=} (f')'(a) \in \mathscr{L}(X ; \mathscr{L}(X, Y))$ (identifié à une application bilinéaire, symétrique, continue de X dans Y), on écrit :

$$(f''(a)\, h)\, k = f''(a)\,(h, k) = f''(a)\,(k, h), \quad \forall\, h, k \in X$$

Avec les notations antérieures, on a :

$$\mathrm{D}^2 f(a)\,(e_i, e_j) = \partial_i(\partial_j f)(a)$$

et la **formule dite de Taylor-Young** (du second ordre) :

$$\begin{cases} f(a+h) = f(a) + \mathrm{D}f(a) \cdot h + \dfrac{1}{2}\mathrm{D}^2 f(a)\,(h, h) + |h|^2\, o(h) \\ \text{avec } \|o(h)\| \to 0 \text{ pour } h \to 0 \end{cases}$$

La fonction f est alors dite deux fois différentiable ou dérivable en a, et deux fois différentiable ou dérivable (dans Ω), si cela est vrai $\forall\, a \in \Omega$, enfin deux fois continûment différentiable ou dérivable si $f'' : a \in \Omega \to f''(a)$ est continue (on écrit $f'' \in \mathscr{C}^2(\Omega)$).

Si f est une *application deux fois dérivable* de $\Omega \subset X$ dans $\mathbb{R}$, le **hessien** de f au point a est la matrice symétrique de $\mathrm{D}^2 f(a)$:

$$(\partial_i\, \partial_j f(a))_{i,\, j = 1 \text{ à } n}$$

● $f^{(k)}(a) = \mathrm{D}^k f(a)$ la **dérivée de Fréchet de f d'ordre k en** a, par généralisation des situations précédentes.

Cas particulier de fonction f définie dans $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On définit les dérivées $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ par :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

■ **Quelques opérateurs différentiels sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$**

Gradient (grad), divergence (div), rotationnel (rot), laplacien (Δ) définis respectivement en **coordonnées cartésiennes** par :

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \quad \text{pour } f : \Omega \to \mathbb{R}\ (\text{ou } \mathbb{C})$$

$$\operatorname{div} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad \text{pour } f : \Omega \to \mathbb{R}^n\ (\text{ou } \mathbb{C}^n),\ f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$$

$$\operatorname{rot} f = (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2,\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3,\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1), \text{ pour } \Omega \subset \mathbb{R}^3$$
$$f : \Omega \to \mathbb{R}^3\ (\text{ou } \mathbb{C}^3),\ f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$$

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \sum_{i = 1 \text{ à } n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \text{ pour } f : \Omega \to \mathbb{R}\ (\text{ou } \mathbb{C})$$

On définit aussi le d'alembertien $\square$ sur $\Omega \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$ par :

$$\square f = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \Delta f, \text{ pour } f : \Omega \to \mathbb{R}\ (\text{ou } \mathbb{C})$$

7. Propriétés dans les espaces vectoriels topologiques

7.1 Notions fondamentales

Les propriétés visées dans ce paragraphe sont de nature partiellement algébrique, partiellement topologique, concernant notamment les notions d'espaces supplémentaires, de bases, de suites convergentes et de famille sommable. Les notions indiquées sont *a priori* bien connues des ingénieurs pour des espaces vectoriels de dimension finie, mais recouvrent de nombreux pièges lorsque la dimension est infinie.

■ Soit E un espace vectoriel topologique, M un sous-espace vectoriel de E. Un sous-espace vectoriel N de E est dit :

— **supplémentaire algébrique** de M dans E, si l'application $(x, y) \to x + y$ est un isomorphisme de $M \times N$ sur E pour la structure d'espace vectoriel (ie une application linéaire bijective de $M \times N$ sur E) ;

— **supplémentaire topologique** de M dans E, si l'application $(x, y) \to x + y$ est un isomorphisme de $M \times N$ sur E pour la structure d'**espace vectoriel topologique** (ie l'application est continue, d'inverse continu, M et N ayant les topologies de sous-espaces de E).

Cela nécessite que M et N soient des sous-espaces fermés de E. **L'espace E est alors dit somme directe de M et N.**

Remarque : dans un espace de Banach E, un sous-espace vectoriel fermé M n'admet pas nécessairement de supplémentaire topologique. Par contre, si $E = H$ est un espace de Hilbert, tout espace vectoriel fermé M admet, comme supplémentaire topologique, l'**espace orthogonal** noté M^0 ou $M^\perp$:

$$M^0 = M^\perp = \{x \in H,\ (x, y) = 0, \quad \forall\, y \in M\}$$

● **Série convergente dans E**

Une famille $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ définit une série (notée $\sum_i x_i$) convergente dans E, s'il existe $x \in E$ (noté $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ ou $\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i$ ou encore $\sum x_i$ appelé **limite de la série**), si pour tout voisinage V de x, il existe un entier n tel que $x - \sum_{i=1}^{n} x_i \in V$.

● **Famille sommable dans E**

Une famille $(x_i)_{i \in I}$ (avec I ensemble quelconque d'indices) est dite sommable dans E s'il existe $x \in E$ tel que, pour tout voisinage V de x, il existe une partie finie J_0 de I telle que l'on ait :

$$\sum_{i \in J} x_i \in V \text{ pour toute partie finie } J \text{ de } I \text{ contenant } J_0$$

x est appelé **somme de la famille** (x_i) et noté $x = \sum_{i \in I} x_i$.

Pour $I = \mathbb{N}$, une famille sommable est aussi dite **série inconditionnellement convergente** (pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$ (ie σ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$), la série $\sum x_{\sigma(i)}$ converge vers $x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i$).

■ Par la suite, nous nous occuperons de la notion de base dans (un espace vectoriel topologique) E sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.

● **Base algébrique de E**

Une famille $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments e_i de E est dite **base algébrique** (ou **base de Hamel**) de E si pour tout $x \in E$, il existe une famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ **unique** d'éléments $\alpha_i \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), avec un **nombre fini** d'éléments non nuls, telle que :

$$x = \sum_{i \in I} \alpha_i \, e_i$$

E est donc l'ensemble des combinaisons linéaires **(finies)** des e_i ; la topologie de E n'est pas intervenue.

● **Ensemble total A dans E**

Le sous-espace vectoriel fermé engendré par A est identique à E, ie l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) d'éléments de A est dense dans E.

● **Famille topologique libre $(e_i)_{i \in I}$ dans E**

Pour tout $i_0 \in I$, le sous-espace vectoriel fermé V_{i_0} engendré par les e_i d'indice $i \neq i_0$ ne contient pas e_{i_0}.

L'ensemble des (e_i) est alors dit **partie topologiquement libre**. Dans un EVT E, il n'existe pas nécessairement de partie topologiquement libre qui soit totale !

● **Base de Schauder d'un espace de Banach E (séparable), de norme $\| \, . \, \|$**

Une suite $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments e_i de E est dite base de Schauder de E si, pour tout $x \in E$, il existe une suite **unique** $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments $\alpha_i \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) telle que la série $\sum_i \alpha_i \, e_i$ converge vers x.

$$\text{ie } \forall \, \varepsilon > 0, \exists \, n \text{ tel que } \left\| x - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \, e_i \right\| \leqslant \varepsilon$$

On dit que la **base de Schauder est inconditionnelle** si la série $\sum \alpha_i \, e_i$ est une famille sommable (ie converge encore vers x après une permutation arbitraire de ses termes).

Un espace de Banach séparable n'admet pas nécessairement une base de Schauder.

● **Base orthonormale d'un espace (pré)hilbertien E**

Une famille $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments e_i de E est dite base orthonormale de E si cette famille est orthonormale et totale dans E ; ie si :

$$\|e_i\| = 1, \quad \forall \, i \in I, \quad (e_i, e_j) = 0, \quad \forall \, i, j, \quad i \neq j$$

et l'espace vectoriel des combinaisons linéaires (finies) est dense.

Tout élément $x \in E$ s'écrit alors de façon unique :

$$x = \sum_{i \in I} \alpha_i \, e_i, \text{ avec } \alpha_i = (x, e_i), \quad \sum_{i \in I} |\alpha_i|^2 < +\infty$$

Noter qu'une base orthonormale d'un espace (pré)hilbertien n'est pas une base algébrique !

Il n'est pas toujours possible numériquement d'utiliser une base orthonormale d'un espace de Hilbert (notamment en théorie du signal...). Aussi est-on amené à généraliser.

■ Soit I un ensemble (d'indices), et soit $\ell^2(I)$ l'espace de Hilbert :

$$\ell^2(I) = \{(\alpha_i)_{i \in I}, \alpha_i \in \mathbb{R} (\text{ou } \mathbb{C}), \text{ de carré sommable : } \sum_{i \in I} |\alpha_i|^2 < +\infty\}$$

avec le produit scalaire :

$$((\alpha_i), (\beta_i)) = \sum_{i \in I} \alpha_i \overline{\beta_i}$$

● **Structure oblique (ou *frame*) d'un espace de Hilbert H**

Une famille $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments e_i de H est une structure oblique de H si l'application T définie pour toute famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ ayant un nombre fini d'éléments non nuls par :

$$T((\alpha_i)) = \sum_{i \in I} \alpha_i \, e_i$$

se prolonge en une application linéaire continue et surjective (encore notée T) de $\ell^2(I)$ sur H.

Cela signifie qu'il existe une constante $C_1 \geqslant 0$ telle que :

$$\left\| \sum \alpha_i \, e_i \right\|_H \leqslant C_1 \left(\sum |\alpha_i|^2 \right)^{1/2} \qquad \textbf{(4)}$$

et une constante $C_2 \geqslant 0$ telle que, pour tout $x \in H$, il existe une suite $(\beta_i)_{i \in I} \in \ell^2(I)$ telle que :

$$x = \sum \beta_i \, e_i \quad \text{et} \quad \left(\sum |\beta_i|^2 \right)^{1/2} \leqslant C_2 \|x\| \qquad \textbf{(5)}$$

et on montre alors qu'il existe des constantes C_1, C_2 positives telles que :

$$C_1 \|x\| \leqslant \left(\sum_{i \in I} |(x, e_i)|^2 \right)^{1/2} \leqslant C_2 \|x\|$$

La famille $(e_i)_{i \in I}$ est dite **base de Riesz** si, de plus, il existe $C_3 > 0$, telle que :

$$\left\| \sum \alpha_i \, e_i \right\| \geqslant C_3 \left(\sum |\alpha_i|^2 \right)^{1/2}, \quad \forall \, (\alpha_i)_{i \in I} \in \ell^2(I) \qquad \textbf{(6)}$$

c'est-à-dire si l'opérateur T est un isomorphisme de $\ell^2(I)$ sur H [4].

Une base orthonormale d'un espace de Hilbert H est donc une base de Riesz particulière, où T est une isométrie :

tout élément $x \in H$ s'écrit alors de façon unique :

$$x = \sum_{i \in I} \alpha_i \, e_i, \quad \text{avec } (\alpha_i) \textit{ telle que } \sum_{i \in I} |\alpha_i|^2 < +\infty,$$
$$\text{avec } \alpha_i = (x, e_i)$$

7.2 Principaux espaces de « suites »

L'utilisation des bases (lorsque c'est possible) permet de passer de certains espaces fonctionnels à des espaces de *suites* et inversement. Nous indiquons dans ce qui suit quelques espaces de suites particulièrement intéressants pour les applications. L'ensemble I des indices peut être, outre l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ (pour lequel on utilise généralement le mot suite), les ensembles $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}^n$, qui interviennent pour les développements de fonctions périodiques (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$) en séries de Fourier.

Les éléments de la suite peuvent être pris réels ou complexes. Nous nous limiterons à une écriture avec les complexes.

$\mathbb{C}^{(I)}$ l'espace des suites $(\alpha_i)_{i \in I}$ avec un nombre fini d'éléments α_i non nuls.

s l'espace des suites $(\alpha_i)_{i \in I}$ à décroissance rapide :

$$\sum_{i \in I} (1 + |i|)^k |\alpha_i| < +\infty, \quad \forall \, k \geqslant 0$$

(c'est un espace de Fréchet pour la famille de semi-normes correspondantes).

$\ell^p(I)$ l'espace des suites $\alpha = (\alpha_i)_{i \in I}$ telles que :

$$\|\alpha\|_{\ell^p} = \left(\sum_{i \in I} |\alpha_i|^p\right)^{1/p} < +\infty, \quad \text{pour } 1 \leqslant p < +\infty$$

$$\|\alpha\|_{\ell^\infty} = \sup_{i \in I} |\alpha_i| < +\infty \quad , \quad \text{pour } p = +\infty$$

(C'est un espace de Banach pour la norme correspondante)

Pour $I = \mathbb{N}$, on utilise aussi l'espace :

$\ell_\infty(\mathbb{N})$ l'espace des suites $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, telles que :

$$\alpha_n \to 0 \text{ pour } n \to +\infty$$

qui est un sous-espace fermé de $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

s' l'espace des suites $(\alpha_i)_{i \in I}$ à croissance lente : il existe $k > 0$ tel que la suite $(1 + |i|)^{-k} |\alpha_i|$ est bornée.

$\mathbb{C}^I$ l'espace des suites $(\alpha_i)_{i \in I}$ (dit espace des séries formelles).

On a les inclusions naturelles :

$$\mathbb{C}^{(I)} \subset s \subset \ell^1 \subset \ell^{p1} \subset \ell^{p2} \ldots \subset \ell^\infty \subset s' \subset \mathbb{C}^I$$
$$p_1 \leqslant p_2$$

L'espace ℓ^p s'identifie au dual de l'espace ℓ^q, pour $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $1 < p \leqslant +\infty$ pour la dualité $(\alpha, \beta) = \sum_{i \in I} \alpha_i \overline{\beta_i}$; de même les espaces s' et $\mathbb{C}^I$ s'identifient resp. au dual de s et de $\mathbb{C}^{(I)}$.

8. Notions principales relatives aux distributions

Rappel

■ Une fonction f sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ peut être considérée comme une distribution si $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (ie f est intégrable sur tout compact K de Ω) ; on identifie alors f à la distribution :

$$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \to \int_\Omega \varphi f \, \mathrm{d}x \in \mathbb{R} \, (\text{ou } \mathbb{C}) \text{ ; on note } <f, \varphi> = \int_\Omega \varphi f \, \mathrm{d}x$$

■ Les opérations de dérivation sont continues dans les espaces de distributions.

■ **Support d'une distribution f dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, supp f**

C'est le complémentaire du plus grand ouvert ω tel que :

$$<f, \varphi> = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega)$$

■ **Restriction d'une distribution f (quelconque) sur Ω à un domaine (ouvert) $\omega \subset \Omega$**

C'est la distribution notée $f|_\omega$ définie par :

$$<f|_\omega, \varphi> = <f, \varphi>, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega)$$

■ **Produit d'une distribution f par une fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$**

C'est la distribution notée $f \cdot g$ définie par :

$$<f \cdot g, \varphi> = <f, g \cdot \varphi>, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

(le produit de deux distributions f et g n'a pas de sens, en général).

■ **Produit de convolution, noté $*$, pour des fonctions ou des distributions sur $\mathbb{R}^n$**

Il est défini dans les cas suivants :

● **Convolution de deux fonctions** f et g sur $\mathbb{R}^n$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), telles que :

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n), \; g \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad 1 \leqslant p \leqslant +\infty$$
$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \, g(y) \, \mathrm{d}y$$

Alors $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, et $\|f * g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$

supp $(f * g) \subset$ supp $f +$ supp g, et $f * g = g * f$

Le produit de convolution est aussi défini si :

a) $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ (continue à support compact) et $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ alors $f * g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$.

b) $f \in \mathcal{C}^k_c(\mathbb{R}^n)$ (ie $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$, à support compact) et $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ alors $f * g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ et $\mathrm{D}^k(f * g) = (\mathrm{D}^h f) * g$.

c) $f \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, et $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ alors $f * g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

d) $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ alors $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ avec $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$, $\|f * g\|_{L^r} \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$

● **Convolution d'une fonction f et d'une distribution g** : $f * g$ est défini si :

a) $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$; alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on note : $\tau_x \check{f}$ la fonction définie par :

$$\tau_x \check{f}(y) = f(x-y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

et on définit $f * g$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par :

$$f * g(x) = <g, \tau_x \check{f}> \text{ ; } f * g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{7}$$

(noté $<g(y), f(x-y)>$).

La propriété $f * g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ est essentielle, car elle permet de régulariser (c'est-à-dire, d'approcher une distribution par une famille de fonctions régulières) la distribution g !

b) $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ (ie $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, à support compact) ; la même définition (7) est utilisable, avec les mêmes propriétés.

● **Convolution de deux distributions f et g dont l'une est à support compact** : alors $f * g$ est la distribution sur $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$<f * g, \varphi> = <f(x) \, g(y), \varphi(x+y)>, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

(on a encore supp $(f * g) \subset$ supp $f +$ supp g, ensemble des sommes $x + y$, $x \in$ supp f, $y \in$ supp g, et $\mathrm{D}^\alpha(f * g) = (\mathrm{D}^\alpha f) * g$).

Nota : pour la notion de dérivée d'une distribution (§ 6).

● **Convolution de deux distributions f et g à supports convolutifs** : par exemple : supp f et supp g contenus dans un cône convexe saillant (sur $\mathbb{R}$, par exemple, supp f et supp $g \subset \mathbb{R}^+$).

■ **Produit tensoriel de deux distributions $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_x)$ et $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m_y)$ noté $f \otimes g$**

Distribution sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$ définie sur l'ensemble des fonctions $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ à variables séparées, ie de la forme $\zeta(x, y) = \varphi(x) \, \psi(y)$, avec $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, par :

$$<f * g, \zeta> = <f, \varphi> <g, \psi>$$

■ **Quelques distributions particulières**

δ (resp. δ_a) **distribution de Dirac,** concentrée en 0 (resp. $a \in \mathbb{R}^n$) :

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a), \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

$\left(\text{sur } \mathbb{R},\ \delta = Y',\ Y \text{ ou } H \textbf{ fonction d'Heaviside } Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}\right).$

9. Principaux espaces fonctionnels

9.1 Espaces de fonctions « régulières » (au moins continues)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, K un compact de $\mathbb{R}^n$. Les fonctions sont ici à valeurs réelles ou complexes.

$\mathcal{C}(\Omega)$	espace des fonctions continues sur Ω. Muni de la famille de semi-normes $p_K(u) = \sup\limits_{x \in K} \lvert u(x) \rvert$, pour tout compact $K \subset \Omega$, c'est un espace de Fréchet.
$\mathcal{C}_b(\Omega)$	espace des fonctions continues bornées sur Ω. C'est un espace de Banach pour la norme : $\lVert u \rVert = \sup\limits_{x \in \Omega} \lvert u(x) \rvert$.
$\mathcal{C}_0(\Omega)$	espace des fonctions continues sur Ω et tendant vers zéro au bord de Ω. C'est un espace de Banach pour la norme précédente.
$\mathcal{C}_c(\Omega)$ ou $\mathcal{C}_{00}(\Omega)$	espace des fonctions continues sur Ω à support compact dans Ω.
$\mathcal{C}(K)$	espace des fonctions continues sur le compact K. C'est un espace de Banach pour la norme « du sup » : $\lVert u \rVert = \sup\limits_{x \in K} \lvert u(x) \rvert$.
$\mathcal{C}^{0,\,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha \leqslant 1$	espace des fonctions höldériennes d'ordre α sur Ω, c'est-à-dire l'espace des fonctions u sur Ω telles que : $\lVert u \rVert_\alpha = \sup\limits_{x,\, y \in \Omega} \dfrac{\lvert u(x) - u(y) \rvert}{\lvert x - y \rvert^\alpha} < +\infty$. C'est un espace de Banach pour la norme $\lVert u \rVert_\alpha$.
$\mathcal{C}^{0,\,\alpha}(\Omega)$	espace de fonctions localement höldériennes d'ordre α, ie des fonctions f telles que $f \in \mathcal{C}^{0,\,\alpha}(K)$ pour tout compact K de Ω. Pour $\alpha = 1$, $\mathcal{C}^{0,\,1}(\overline{\Omega})$ est l'espace des fonctions lipschitziennes.
$\mathcal{C}^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$	espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, ou encore espace des fonctions dont toutes les dérivées d'ordre $\leqslant k$ existent et sont continues. C'est un espace de Fréchet pour la famille de semi-normes : $\lVert u \rVert_{k,\,K} = \sup\limits_{\lvert p \rvert \leqslant k} \sup\limits_{x \in K} \left\lvert \dfrac{\partial^p u}{\partial x^p} \right\rvert$
$\mathcal{C}^{k,\,\alpha}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \leqslant 1$	espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, dont les k-ièmes dérivées appartiennent à l'espace $\mathcal{C}^{0,\,\alpha}(\overline{\Omega})$.
$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)$	espace des fonctions infiniment dérivables ; espace de Fréchet, avec les semi-normes : $\lVert f \rVert_{\alpha,\,K} = \sup\limits_{x \in K} \lvert \mathrm{D}^\alpha f(x) \rvert$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $K \subset \Omega$
$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$	espace des fonctions infiniment dérivables à support compact. Une suite (f_k) de $\mathcal{D}(\Omega)$ tend vers zéro dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si $\cup \operatorname{supp} f_k = K$ est borné et : $\sup\limits_{x \in K} \lvert \mathrm{D}^\alpha f_k(x) \rvert \to 0$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n$. La topologie est dite « limite inductive » d'espace de Fréchet.
$H(\Omega)$	espace des fonctions homomorphes ou analytiques de variables réelles ou complexes pour $\Omega \subset \mathbb{C}^n$: fonctions dont le développement de Taylor en chaque point converge dans un voisinage de ce point.

■ Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, on définit :

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	espace des fonctions de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ à décroissance rapide ainsi que toutes les dérivées ($\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n$, $\lvert x \rvert^k \lvert \mathrm{D}^\alpha f(x) \rvert \to 0$ pour $\lvert x \rvert \to \infty$), muni des semi-normes $\lVert f \rVert_{k,\,\alpha} = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} (\lvert x \rvert^k \mathrm{D}^\alpha f(x))$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$.
$\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$	espace des fonctions de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ à croissance lente ainsi que toutes les dérivées (espace des multiplicateurs de $\mathcal{S}$).

Chaîne, pour $k \geqslant 1$: on note par $\hookrightarrow$ les injections naturelles continues :

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{k,\,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^k(\Omega) \hookrightarrow \ldots\ \mathcal{C}^{0,\,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow \\ \mathcal{C}_{00}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}_0(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}_b(\Omega) \hookrightarrow \end{array}\right\} \mathcal{C}(\Omega)$$

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$$

Toutes ces notions, et les espaces correspondant, se généralisent au cas de fonctions à valeurs dans un espace de Banach X ; on note alors $\mathcal{C}(\Omega\,;X)$, $\mathcal{C}_b(\Omega\,;X)$ ...

9.2 Espaces de fonctions intégrables

■ Soit p un réel, $p \geqslant 1$, et encore Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Les fonctions considérées étant à valeurs réelles ou complexes, on note :

$L^p(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions mesurables sur Ω telles que la fonction $x \in \Omega \to \lvert f(x) \rvert^p$ soit intégrable sur Ω. C'est un espace de Banach pour la norme :

$$\lVert f \rVert_p = \left[\int_\Omega \lvert f(x) \rvert^p \,\mathrm{d}x \right]^{1/p}$$

Nota : on identifie deux fonctions qui ne diffèrent que sur un ensemble négligeable. Il s'agit ici de l'intégration vis-à-vis de la mesure de Lebesgue.

$L^{\infty}(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions mesurables sur Ω telles que la fonction $x \in \Omega \to |f(x)|$ soit essentiellement bornée (ie bornée sauf sur un ensemble négligeable). C'est un espace de Banach pour la norme :

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{\Omega} \text{ess } |f(x)|$$

$L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions mesurables sur Ω telles la fonction $x \in \Omega \to |f(x)|^p$ soit intégrable sur tout compact K contenu dans Ω. C'est un espace de Fréchet pour la famille de semi-normes :

$$\|f\|_{p,\,K} = \left(\int_K |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

■ Soit μ une fonction positive localement intégrable sur Ω, on note :

$L^p_{\mu}(\Omega)$ ou $L^p(\Omega\,;\,\mu\,\mathrm{d}x)$ l'espace des (classes de) fonctions mesurables telles que $x \in \Omega \to |f(x)|^p\,\mu(x)$ soit intégrable. C'est un espace de Banach pour la norme :

$$\|f\|_{p,\,\mu} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p\,\mu(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

9.3 Espaces de Sobolev

Soit $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty[$, $s \in \mathbb{R}$. On note :

$H^m(\Omega)$ l'ensemble des fonctions f telles que $f \in L^2(\Omega)$ avec $\mathrm{D}^{\alpha} f \in L^2(\Omega)$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $|\alpha| = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leqslant m)$, avec, bien sûr, $\mathrm{D}^{\alpha} f$ défini au sens des distributions.
C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(f,\, g) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_{\Omega} \mathrm{D}^{\alpha} f(x) \cdot \overline{\mathrm{D}^{\alpha} g(x)}\,\mathrm{d}x$$

$H^m_0(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$.

$H^{-m}(\Omega)$ l'espace dual de $H^m_0(\Omega)$. C'est un espace de Hilbert pour la norme duale.
On est amené aussi pour les applications à définir des espaces de Sobolev $H^s(\Omega)$, ou $H^s(\Gamma)$, Γ bord de Ω avec $s \in \mathbb{R}$, par exemple par l'utilisation de cartes locales en se ramenant à l'espace $\mathbb{R}^n$ entier.

$H^s(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des distributions tempérées f telles que la distribution (en ξ, variable duale de $x \in \mathbb{R}^n$) :

$$(1 + |\xi|^2)^{s/2}\,\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

$\hat{f}$ transformée de Fourier de f, donnée formellement par :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\,\mathrm{i}\,\xi \cdot x)\,f(x)\,\mathrm{d}x$$

Pour $s = m$ ou $s = -m$, ie $s \in \mathbb{Z}$, les définitions données sont identiques.

$H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions (pour $s > 0$) ou des distributions (pour $s > 0$) f telles que $f \cdot \varphi \in H^s(\Omega)$ [ou $H^s(\mathbb{R}^n)$] pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

$W^{m,\,p}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $f \in L^p(\Omega)$, telles que $\mathrm{D}^{\alpha} f \in L^p(\Omega)$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leqslant m$. C'est un espace de Banach pour la norme :

$$\|f\|_{m,\,p} = \left[\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leqslant m} |\mathrm{D}^{\alpha} f|^p\,\mathrm{d}x\right]^{1/p}$$

$W^{m,\,p}_0(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,\,p}(\Omega)$.
On peut encore définir des espaces $W^{s,\,p}(\Omega)$, pour tout $s \in \mathbb{R}$ [10].

9.4 Espaces de distributions

$\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des **distributions** sur Ω, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$ (à valeurs réelles ou complexes), c'est-à-dire le dual de $\mathcal{D}(\Omega)$.

$\mathcal{E}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω, à support compact dans Ω ; c'est aussi le dual de l'espace : $\mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$.

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, on définit aussi :

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'espace de **distributions tempérées** sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

$\mathcal{O}'_c(\mathbb{R}^n)$ l'espace des **distributions à décroissance rapide**, ou espace des convoluteurs de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

10. Opérateurs

10.1 Notions sur les opérateurs différentiels linéaires (odl)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

■ **Opérateur local *P* de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$**

Opérateur tel que le support de Pu est contenu dans le support de u, $\forall\, u \in \mathcal{D}(\Omega)$.

■ **Opérateur différentiel linéaire (odl) *P***

Application linéaire continue locale de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

L'opérateur P s'écrit alors sous la forme $P = \Sigma\, a_{\alpha}\,\mathrm{D}^{\alpha}$,

avec $\mathrm{D}^{\alpha} = \mathrm{D}_1^{\alpha_1} \ldots \mathrm{D}_n^{\alpha_n}$ opérateur de dérivation d'ordre $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et (a_{α}) une famille de coefficients, $a_{\alpha} \in \mathcal{D}'(\Omega)$; avec sur tout compact K seulement un nombre fini d'éléments non nuls. (La famille (a_{α}) est alors dite localement finie).

■ **Ordre d'un odl *P***

$$m = \sup\,\{|\alpha|,\; a_{\alpha} \not\equiv 0 \text{ sur } \Omega\}$$

■ **Partie principale d'un odl *P* d'ordre fini *m***

$$P^{\bullet} = \sum_{|\alpha| = m} a_{\alpha}\,\mathrm{D}^{\alpha}$$

■ **Solution élémentaire d'un odl P (à coefficients constants)**

Toute distribution E telle que $PE = \delta$.

■ **Vecteur caractéristique $\xi \in \mathbb{C}^n$ d'un odl P (à coefficients constants, d'ordre m)**

Tout élément $\xi \in \mathbb{C}^n$ tel que $P^\bullet(\xi) = 0$, avec $P^\bullet(\xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha \xi^\alpha$,

ξ est dit **caractéristique simple** si $\sum_j \left|\frac{\partial P^\bullet}{\partial \xi_i}(\xi)\right| \neq 0$.

■ **Surface caractéristique S de P**

Surface (régulière) telle que les vecteurs normaux en chaque point de S sont vecteurs caractéristiques de P.

Un odl à coefficients constants sur $\mathbb{R}^n$, P est dit :

— **elliptique** si $P^\bullet(\xi) \neq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$;

— **hypoelliptique** si pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$:

$$u \in \mathscr{D}'(\Omega) \quad \text{et} \quad P\,u \in \mathscr{E}(\Omega) = \mathscr{C}^\infty(\Omega) \Rightarrow u \in \mathscr{E}(\Omega)$$

— **parabolique** par rapport à un demi-espace fermé H de $\mathbb{R}^n$ si P admet une solution élémentaire E dans $\mathscr{D}'(H) \cap \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$;

— **hyperbolique** par rapport à un **cône** convexe fermé saillant C (ie tel que $C \cap (-C) = \{0\}$, C de sommet 0) si P admet une solution élémentaire E à support dans C ;

— **hyperbolique** par rapport à un **demi-espace** fermé H_0 :

$$H_0 = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \xi_0 \cdot x \geqslant 0\} \quad \text{avec } \xi_0 \in \mathbb{R}^n,\ \xi_0 \neq 0$$

si P vérifie :

a) ξ_0 n'est pas un vecteur caractéristique de P,

b) P admet une solution élémentaire à support dans H_0.

■ **Exemples types d'opérateurs :**

— elliptique : le laplacien Δ (noté aussi Δ_x avec indication de la variable d'espace $x \in \mathbb{R}^n$ ou $\Delta_{x,\,t} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta_x$ pour les variables x, t)

— parabolique : opérateur de la chaleur $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x$

— hyperbolique : opérateur des ondes, le d'alembertien $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x$

— hypoelliptique : opérateur de la chaleur $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x$, et plus généralement les opérateurs $P = \frac{\partial}{\partial t} - \omega \Delta_x$, avec $\omega \in \mathbb{C}$, et Re $\omega \neq 0$.

Nota : toutes ces notions se généralisent au cas des odl à coefficients non constants ; on est aussi amené à définir et à utiliser bien d'autres types d'opérateurs. Nous renvoyons pour cela, par exemple à [1].

10.2 Notions relatives aux « opérateurs » linéaires dans les espaces de Banach (et Hilbert)

On distingue essentiellement deux types d'opérateurs (applications linéaires) en se limitant ici aux espaces de Banach ; on désigne par E et F deux espaces de Banach :

a) les opérateurs **linéaires continus (ou bornés) de** F dans E ;

b) les opérateurs **linéaires non bornés dans** E (on se limite alors à $F = E$).

10.2.1 Principales définitions

■ Un opérateur linéaire A non borné dans E est défini par la donnée de son **domaine de définition** $\mathrm{D}(A)$ (espace vectoriel contenu dans E, qui sera supposé dense dans E) et de l'application $x \in \mathrm{D}(A) \to A\,x \in E$ qui peut aussi être donnée par son **graphe,**

$$G(A) = \{(x, Ax),\ x \in \mathrm{D}(A)\}$$

qui est un sous-espace vectoriel de $E \times E$.

● **Opérateur (linéaire) fermé A dans E**

Opérateur linéaire non borné dans E, dont le graphe est **fermé** dans l'espace de Banach (produit) $E \times E$. Cela est équivalent à : le domaine $\mathrm{D}(A)$, muni de la norme :

$$\|x\|_{\mathrm{D}(A)} = \|x\| + \|Ax\| \ \ (\text{ou } (\|x\|^2 + \|Ax\|^2)^{1/2}),\ \forall x \in \mathrm{D}(A)$$

est un espace de Banach [et l'injection $x \in \mathrm{D}(A) \to x \in E$ est continue]. **L'opérateur A est alors continu de** $\mathrm{D}(A)$ **dans** E.

Nota : les situations a) et b) ne sont donc pas très différentes.

● **Opérateur (linéaire) fermable A dans E**

Opérateur linéaire non borné dans E, dont la fermeture du graphe [dans l'espace de Banach (produit) $E \times E$] est encore un graphe.

Cela est réalisé si A a la propriété suivante : pour toute suite (x_n), $x_n \in \mathrm{D}(A)$ telle que $x_n \to 0$ et $Ax_n \to y$ dans E, alors $y = 0$.

● **Extension d'un opérateur non borné A_1, de domaine $\mathrm{D}(A_1) \subset E$**

Opérateur non borné A_2 de domaine $\mathrm{D}(A_2) \subset E$ tel que :

$$\mathrm{D}(A_1) \subset \mathrm{D}(A_2) \quad \text{et} \quad A_2 x = A_1 x, \quad \forall x \in \mathrm{D}(A_1)$$

Inversement l'opérateur A_1 est dit **restriction** de A_2 à $\mathrm{D}(A_1)$.

Exemple type d'opérateur non borné : dans $L^2(I)$, $I =]a, b[\subset \mathbb{R}$ opérateur dérivation $A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, de domaine $\mathrm{D}(A) = H^1(I)$ ou $H_0^1(I)$ ou $\mathscr{C}^1([a, b]...)$

Nota : de nombreux opérateurs non bornés dans un espace de Banach E sont définis à partir des opérateurs différentiels linéaires dans les espaces de distributions par restriction au cadre considéré ou bien dans le cas des espaces de Hilbert, par utilisation d'un cadre variationnel [1].

■ Soit A un opérateur linéaire continu de F dans E.

● **L'opérateur transposé**, noté ${}^tA$, est un opérateur linéaire continu de E' dans F' (avec E' et F' duaux de E et de F) défini par :

$$\langle {}^tAg, f \rangle = \langle g, Af \rangle, \quad \forall f \in F,\ g \in E'$$

(où les crochets désignent les dualités de F' et F, et de E' et E).

● **Cas particulier très important**

F est un espace de Banach (ou même un EVT) contenu dans E, dense dans E, et l'injection *naturelle* $A = J$: $x \in F \to x \in E$ est continue ; alors ${}^tJ$ est aussi l'injection *naturelle* :

$y \in E' \to y \in F'$ (qui permet de considérer E' comme contenu dans F')

Exemple type : $F = \mathscr{D}(\Omega)$, $E = L^2(\Omega)$; alors E' identifié à $L^2(\Omega)$ est contenu dans $F' = \mathscr{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions, pour Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$.

■ **(Rappel de) Notations dans les deux cas considérés** (A borné ou non) :

$$\begin{cases} \mathrm{Im}\,A = R(A) = \{y \in E,\ \exists\, x \in \mathrm{D}(A),\ y = Ax\} \ \text{l'}\textbf{image}\text{ de } A \\ \ker A = N(A) = \{x \in \mathrm{D}(A),\ Ax = 0\} \ \text{le }\textbf{noyau}\text{ de } A \end{cases}$$

[on remplace $D(A)$ par F dans ces définitions pour le cas a)].

$\begin{cases} \alpha(A) \text{ l'\textbf{indice de nullité de} } A = \dim \ker A \\ \beta(A) \text{ l'\textbf{indice de défaut} de } A = \operatorname{codim} \operatorname{Im} A \text{ (ie la dimension de} \\ \text{l'espace quotient } F/\overline{\operatorname{Im} A} \end{cases}$

Si A est injectif, ie si $\ker A = \{0\}$, on note : A^{-1} l'inverse de A.

10.2.2 Notions spectrales

On définit pour le cas $F = E$, A borné ou non.

- Si E est un espace de Banach sur $\mathbb{C}$ on note :

$\rho(A)$ **l'ensemble résolvant de** A, ie l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda I - A$ admette un inverse **continu** : $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$;

$\sigma(A)$ **le spectre de** $A = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$, complémentaire de $\rho(A)$;

$\sigma_p(A)$ **l'ensemble des valeurs propres de** A, ie $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ \exists\, x \in E,\ x \neq 0,\ Ax = \lambda x\}$ [on a $\sigma_p(A) \subset \sigma(A)$ mais ces deux espaces ne sont généralement pas identiques] ;

$R(\lambda, A)$ **l'opérateur résolvant de** A : $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ pour $\lambda \in \rho(A)$.

- Si E est un espace de Hilbert H sur $\mathbb{C}$, on note :

A^* **l'adjoint de** A défini :

— **si** A **est borné dans** H par :

$$(A^* x, y) = (x, Ay), \quad \forall\, x, y \in H$$

— **si** A **est non borné dans** H, par :

$$\begin{cases} D(A^*) = \{x \in H \text{ tel que l'application } y \to (x, Ay) \in \mathbb{C} \text{ est continue} \\ \text{sur } D(A) \text{ muni de la topologie de } H\} \\ (A^* x, y) = (x, Ay), \quad \forall\, y \in D(A) \end{cases}$$

10.3 Quelques opérateurs particuliers

***a*) Un opérateur borné de** F **dans** E est dit :

— **isométrique** (ou appelé **isométrie**) si :

$$\|Ax\|_E = \|x\|_F, \quad \forall\, x \in F \text{ (alors Im } A \text{ est fermé dans } E)$$

Soit à présent $F = E$ un espace de Hilbert H sur $\mathbb{C}$. Un **opérateur borné** A **dans** H est dit :

— **unitaire** si $\begin{cases} (Ax, Ay) = (x, y), \quad \forall\, x \text{ et } y \in H \\ \text{avec Im } A = H \end{cases}$

ou encore si $A^*A = AA^* = I$ (application identique de H), ie $A^* = A^{-1}$

— **hermitien** si :

$$(Ax, y) = (x, Ay), \quad \forall\, x \text{ et } y \in H$$

ou encore si $A^* = A$

— **normal** si $A^*A = AA^*$ (on dit que A commute avec A^*)

Un **projecteur** est un opérateur borné P tel que $P^2 = P$.

Il projette l'espace H sur l'espace vectoriel fermé $M = PH$; en posant $N = (I - P)\,H$, l'espace H se décompose en $H = M \oplus N$. Les espaces M et N sont orthogonaux si P est hermitien.

***b*) Un opérateur** A **non borné** dans H est dit :

— **symétrique** si :

$(Ax, y) = (x, Ay)$, $\forall\, x$ et $y \in D(A)$ donc l'opérateur A^* est une **extension** de l'opérateur A

(ie $D(A) \subset D(A^*)$ et $Ax = A^*x$, $\forall\, x \in D(A)$).

Il faut bien voir la différence entre la notion d'opérateur symétrique et celle de matrice symétrique ;

— **auto-adjoint** si A est symétrique et tel que :

$$D(A) = D(A^*)$$

(ie $A = A^*$ avec identité des domaines).

(Le spectre d'un opérateur auto-adjoint A est réel : $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$).

10.4 Principaux espaces d'applications (opérateurs) linéaires continues (bornées)

Soient E et F des espaces de Banach réels (ou complexes), de normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ (pour plus de généralités avec des espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés, [3]).

- On note :

$\mathcal{L}(E, F)$ l'**espace des applications linéaires continues** (ou encore bornées) de E dans F. C'est un espace de Banach pour la norme **(« uniforme »)** $\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup\limits_{\|x\|_E = 1} \|Ax\|_F = \sup\limits_{\|x\|_E \leqslant 1} \|Ax\|_F$.

$\mathcal{L}_c(E, F)$ l'**espace des applications linéaires compactes,** ie des applications $A \in \mathcal{L}(E, F)$ telles que la fermeture de l'image de la boule unité B_E de E, $\overline{AB_E}$, est compacte dans F (ce qui est équivalent à : l'image de tout voisinage de O dans E est relativement compacte). C'est un sous-espace fermé de $\mathcal{L}(E, F)$.

$\mathcal{L}^1(E, F)$ l'**espace des applications nucléaires** de E dans F, ie des applications $A \in \mathcal{L}(E, F)$ ayant la propriété suivante : il existe des suites $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$, (avec $f_i \in E'$ dual de E, $y_i \in F$) bornées dans E' et F, et une suite $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum\limits_i \alpha_i < +\infty$, telles que :

$$Ax = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \langle f_i, x \rangle y_i \quad \text{dans } Y, \forall\, x \in X$$

Muni de la norme dite norme-trace $\|A\|_{\text{tr}}$:

$$\|A\|_{\text{tr}} = \inf \sum_i \alpha_i$$

(le inf étant pris pour toutes les représentations précédentes) avec $\|f_i\|_{E'} \leqslant 1$, $\|y_i\|_F \leqslant 1$, c'est un espace de Banach.

$\mathcal{L}_d(E, F)$ l'**espace des applications dégénérées** de E dans F, ie des applications $A \in \mathcal{L}(E, F)$ dont l'image est de dimension finie (ou encore de rang fini).

On a les inclusions naturelles continues :

$$\mathcal{L}_d(E, F) \hookrightarrow \mathcal{L}^1(E, F) \hookrightarrow \mathcal{L}_c(E, F) \hookrightarrow \mathcal{L}(E, F)$$

Lorsque $E = F$, ces espaces forment des **algèbres d'opérateurs**. On note alors :

$$\mathcal{L}_d(E) \hookrightarrow \mathcal{L}^1(E) \hookrightarrow \mathcal{L}_c(E) \hookrightarrow \mathcal{L}(E)$$

Développement canonique d'un opérateur compact

Lorsque E et F sont des espaces de Hilbert (séparables), pour tout opérateur compact $A (\in \mathcal{L}_c(E, F))$, il existe deux familles orthonormales $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$, avec $\varphi_i \in E$, $\psi_i \in F$, et une suite bornée $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$, de nombres réels positifs, telles que :

$$Ax = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (x, \varphi_i)\, \psi_i, \quad \forall\, x \in E \tag{8}$$

(les réels α_i sont dits **valeurs singulières** de A).

■ On peut alors aussi définir :

$\mathcal{L}^2(E, F)$ l'**espace des *opérateurs* de Hilbert-Schmidt**, ie des applications $A \in \mathcal{L}(E, F)$ telles que :

$$\|A\|_2 \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \|A e_i\|^2\right)^{1/2} < +\infty$$

où $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormale de E ; $\|A\|_2$ est alors une norme sur $\mathcal{L}^2(E, F)$, qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(A, B) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (A e_i, B e_i), \quad \forall\, A \text{ et } B \in \mathcal{L}^2(E, F) \tag{9}$$

(Noter que tout cela est en fait indépendant de la base orthonormale $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ choisie). Tout opérateur $A \in \mathcal{L}^2(E, F)$ a un développement canonique [de la forme (8)], avec :

$$\|A\|_2 = \left(\sum_i \alpha_i^2\right)^{1/2} < +\infty$$

■ Plus généralement on peut définir :

$\mathcal{L}^p(E, F)$, pour $1 \leqslant p < +\infty$, l'**espace des applications** $A \in \mathcal{L}_c(E, F)$, telles que $\|A\|_p = \left(\sum_i \alpha_i^p\right)^{1/p} < +\infty$, qui est un espace de Banach pour la norme ainsi définie.

On a ainsi les inclusions naturelles continues :

$$\mathcal{L}^1(E, F) \hookrightarrow \mathcal{L}^2(E, F) \hookrightarrow \mathcal{L}_c(E, F) \hookrightarrow \mathcal{L}(E, F)$$

et $$\mathcal{L}^{p_1}(E, F) \hookrightarrow \mathcal{L}^{p_2}(E, F),\ p_1 \leqslant p_2,\ \|A\|_{p_1} \geqslant \|A\|_{p_2}$$

La formule (9) a encore un sens pour tout $A \in \mathcal{L}^1(E, F)$ et $B \in \mathcal{L}_c(E, F)$, et fait aussi apparaître l'espace $\mathcal{L}_c(E, F)$ comme le dual fort de l'espace $\mathcal{L}^1(E, F)$.

Nota : pour plus de développements sur ces questions, voir notamment [3] [7] [9]. Noter que ces opérateurs, lorsque $E = F = L^2(\Omega)$, sont des opérateurs intégraux avec des noyaux $K(x, y)$ qui ont des propriétés très particulières.

■ La **trace** de tout **opérateur nucléaire** A dans E (ie $A \in \mathcal{L}^1(E)$) (de la forme $A = B_1 B_2^*$ *avec* B_1 et $B_2 \in \mathcal{L}^2(E)$) est définie à l'aide de (9) par :

$$\operatorname{tr} A = (B_1, B_2^*)$$

Remarque : la topologie de la norme de A dans $\mathcal{L}(E, F)$ est dite **uniforme**. C'est une topologie souvent trop forte dans les applications et on est amené à définir et utiliser beaucoup d'autres topologies sur l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ telles que les topologies dites **ultraforte, forte, faible** et **ultrafaible** [9].

10.5 Topologie sur des familles de parties d'un espace métrique (*E*, *d*)

10.5.1 Quelques définitions générales

Soient A et B deux parties non vides quelconques de E.

■ **Distance d'un point** $x \in E$ **à l'ensemble** A :

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$$

■ **Distance des ensembles** A et B :

$$d(A, B) = \inf_{x \in A,\, y \in B} d(x, y) = \inf_{x \in A} d(x, B)$$

■ **Diamètre de** A :

$$\delta(A) = \sup_{x \in A,\, y \in A} d(x, y)$$

$\delta(A) = 0 \Leftrightarrow A$ est réduit à un point.

■ **Ensemble borné :** $\delta(A) < +\infty$.

■ **Distance de Hausdorff** $\delta(A, B)$ entre A et B :

$$\delta(A, B) = \max(\rho(A, B), \rho(B, A))$$

avec $\rho(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B)$.

10.5.2 Deux applications

■ Soit $E = \mathbb{R}^n$; δ définit une topologie sur l'ensemble des fermés bornés de $\mathbb{R}^n$; une suite $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers A au sens de Hausdorff si A_m, A sont fermés bornés et si $\delta(A_m, A) \to 0$ [la l*imite de Hausdorff* d'une suite (A_m) est l'ensemble des points d'accumulation des suites (x_m) telles que $x_m \in A_m$, $\forall\, m$].

Nota : pour l'utilisation de cette topologie en *Optimal Shape Design*, voir [5].

■ Soit E un espace de Banach, M et N deux sous-espaces vectoriels fermés de E, S_M et S_N l'ensemble des sphères unités de M et N. On pose :

$$\begin{cases} \hat{\rho}(M, N) = \rho(S_M, S_N) \\ \hat{\delta}(M, N) = \max(\rho(S_M, S_N), \rho(S_N, S_M)) \end{cases}$$

et si M ou $N = \{0\}$, $\hat{\rho}(0, N) = 0$, $\forall\, N$, $\hat{\rho}(M, 0) = 2$ pour $M \neq \{0\}$.

L'ensemble des sous-espaces vectoriels fermés de E est alors un espace métrique complet pour la distance $\hat{\delta}(M, N)$ [7].

Nota : soulignons que les sous-espaces M et N sont bien des espaces tels que $O \in M$ et $O \in N$, et non des espaces affines.

Index alphabétique

Adhérence .... § 4.2 ; § 9.3
Adjoint .... § 10.2.2
Algèbre d'opérateurs .... § 10.4
Antidual .... § 4.6
Application bijective .... § 1.2
Application étagée .... § 5
Application identique .... § 1.2
Application injective .... § 1.2
Application intégrable .... § 5
Application mesurable .... § 5
Application réciproque .... § 1.2
Application surjective .... § 1.2
Argument .... § 2.3.2
Base algébrique .... § 7.1
Base de Hamel .... § 7.1
Base orthonormale d'un espace préhilbertien .... § 7.1
Base de Riesz .... § 7.1
Base de Schauder .... § 7.1
Base de voisinages .... § 4.1.1
Base d'une topologie .... § 4.1.1
Bidual .... § 4.6
Bijection .... § 1.2
Boule unité .... § 2.4
Calcul différentiel .... § 6
Calcul intégral .... § 5
Compactifié .... § 4.4
Complémentaire .... § 1.1
Complexe conjugué .... § 2.3.2
Composée .... § 1.2
Continuité .... § 4.1.2
Convergence .... § 4.1.2
D'alembertien .... § 6
Densités .... § 5
Dérivée .... § 6
Dérivée de Fréchet .... § 6
Dérivée de Radon-Nikodym .... § 5
Developpement canonique d'un opérateur compact .... § 10.4
Diamètre d'un ensemble .... § 10.5
Distance .... § 4.5
Distance des ensembles .... § 10.5
Distance de Hausdorff .... § 10.5
Distance d'un point à un ensemble .... § 10.5
Distributions .... § 8
Divergence .... § 6
Dual .... § 4.6
Dualité .... § 4.6
Écart .... § 4.5
Élément .... § 1.1
Ensemble .... § 1.1
Ensemble borné .... § 4.2 ; § 10.5
Ensemble compact .... § 4.2
Ensemble connexe .... § 4.2
Ensemble convexe .... § 3
Ensemble dense .... § 4.2
Ensemble des entiers naturels .... § 2.1
Ensemble des entiers relatifs .... § 2.1
Ensemble image .... § 1.2
Ensemble négligeable .... § 5
Ensemble des nombres complexes .... § 2.1
Ensemble des nombres rationnels .... § 2.1
Ensemble des nombres réels .... § 2.1
Ensemble réciproque .... § 1.2
Ensemble résolvant .... § 10.2.2
Ensemble total .... § 7.1

Index alphabétique

Ensemble des valeurs propres .... § 10.2.2
Ensemble vide .... § 1.1
Espace des applications dégénérées .... § 10.4
Espace des applications linéaires compactes .... § 10.4
Espace des applications linéaires continues .... § 10.4
Espace des applications nucléaires .... § 10.4
Espace de Banach .... § 4.4
Espace compact .... § 4.4
Espace complet .... § 4.4
Espaces de distributions .... § 9.4
Espace des fonctions höldériennes .... § 9.1
Espaces de fonctions intégrables .... § 9.2
Espace des fonctions lipschitziennes .... § 9.1
Espaces fonctionnels .... § 9
Espace de Fréchet .... § 4.4
Espace de Hausdorff .... § 4.4
Espace hilbertien .... § 4.4
Espace mesurable .... § 5
Espace mesuré .... § 5
Espace métrique .... § 4.4
Espace métrisable .... § 4.4
Espace normable .... § 4.4
Espace normé .... § 4.4
Espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt .... § 10.4
Espace d'opérateurs linéaires bornés .... § 10.4
Espace pivot .... § 4.6
Espace préhilbertien .... § 4.4
Espace de probabilité .... § 5
Espaces produits de nombres .... § 2.4
Espace réflexif .... § 4.6
Espace séparé .... § 4.4
Espace de Sobolev .... § 9.3
Espace de suites .... § 7.2
Espace topologique .... § 4.1.1
Espace vectoriel .... § 3 ; § 4.4
Espace vectoriel topologique EVT .... § 4.4 ; § 7
Famille .... § 1.1
Famille sommable .... § 7.1
Famille topologique libre .... § 7.1
Fermé .... § 4.1.1
Fermeture .... § 4.2
Fonction additive .... § 3
Fonction affine .... § 3
Fonction bilinéaire .... § 3
Fonction concave .... § 3
Fonction convexe .... § 3
Fonction homogène .... § 3
Fonction linéaire .... § 3
Fonction numérique .... § 1.2
Fonction numérique à variation bornée .... § 5
Fonction sesquilinéaire .... § 3
Forme hermitienne .... § 4.5
Forme linéaire .... § 3 ; § 4.6
Formule de Taylor-Young .... § 6
Frame d'un espace de Hilbert .... § 7.1
Frontière .... § 4.2
Gradient .... § 6
Hessien .... § 6
Inclusion .... § 1.1
Indice de défaut .... § 10.2.1
Indice de nullité .... § 10.2.1
Injection .... § 1.2
Intégrale d'une fonction étagée .... § 5
Intégrale d'une fonction μ-intégrable .... § 5
Intérieur .... § 4.2

Index alphabétique

Intersection	§ 1.1
Intervalle fermé	§ 2.2
Intervalle ouvert	§ 2.2
Intervalle semi-ouvert	§ 2.2
Isométrie	§ 10.3
Jacobien	§ 6
Laplacien	§ 6
Limite	§ 4.1.2
Limite de Hausdorff	§ 10.5
Majorant	§ 2.3.1
Matrice dérivée	§ 6
Matrice jacobienne	§ 6
Mesure absolument continue (par rapport à μ)	§ 5
Mesure de Borel	§ 5
Mesure bornée	§ 5
Mesure concentrée (sur A)	§ 5
Mesures étrangères	§ 5
Mesure image	§ 5
Mesure induite	§ 5
Mesure de Lebesgue	§ 5
Mesure produit	§ 5
Mesure de Radon	§ 5
Mesure σ-finie	§ 5
Métrique	§ 4.5
Minorant	§ 2.3.1
Module	§ 2.3.2
Nombres	§ 2
Norme	§ 4.5
Opérateur	§ 10
Opérateur borné hermitien	§ 10.3
Opérateur borné isométrique	§ 10.3
Opérateur borné normal	§ 10.3
Opérateur borné unitaire	§ 10.3
Opérateurs différentiels linéaires	§ 6 ; § 10.1
Opérateur linéaire fermé	§ 10.2.1
Opérateur local	§ 10.1
Opérateur non borné auto-adjoint	§ 10.3
Opérateur non borné symétrique	§ 10.3
Opérateur résolvant	§ 10.2.2
Opérateur transposé	§ 10.2.1

Index alphabétique

Ouvert	§ 4.1.1
Partie imaginaire	§ 2.3.2
Partie réelle	§ 2.3.2
Point	§ 1.1
Point d'accumulation	§ 4.1.2
Prédual	§ 4.6
Produit cartésien	§ 1.1
Produit de convolution	§ 8
Produit d'une distribution par une fonction	§ 8
Produit scalaire	§ 4.5
Produit tensoriel de deux distributions	§ 8
Projecteur	§ 10.3
Restriction	§ 1.2
Restriction d'une distribution	§ 8
Rotationnel	§ 6
Semi-norme	§ 4.5
Série convergente	§ 7.1
Sphère unité	§ 2.4
Structure oblique d'un espace de Hilbert	§ 7.1
Suite de Cauchy	§ 4.4
Support d'une distribution	§ 8
Surjection	§ 1.2
Système fondamental de voisinages	§ 4.1
Théorème de Fubini	§ 5
Topologie	§ 4.1.1
Topologie faible	§ 4.6
Topologie forte	§ 4.6
Topologie induite	§ 4.5
Topologie produit	§ 4.5
Tore à une dimension	§ 2.1
Trace	§ 10.4
Transport de structure	§ 4.5
Tribu	§ 5
Tribu de Borel	§ 5
Tribu produit	§ 5
Union	§ 1.1
Valeur d'adhérence	§ 4.1.2
Valeurs singulières	§ 10.4
Vecteur	§ 3
Voisinage	§ 4.1.1

Références bibliographiques

[1] DAUTRAY (R.) et LIONS (J.-L.). – *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques.* Masson, chap. I à XXI (1984-1985).

[2] BOURBAKI (N.). – *Éléments de mathématiques.* Hermann.

[3] TRÈVES (F.). – *Topological Vector Spaces. Distributions and Kernel.* Academic Press (1967).

[4] MEYER (Y.). – *Ondelettes.* Hermann (tome 1) (1989).

[5] PIRONNEAU (O.). – *Optimal Shape Design for Elliptic Systems.* Springer-Verlag (1984).

[6] BREZIS (H.). – *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Masson (1983).

[7] KATO (T.). – *Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer-Verlag (1966).

[8] MARLE (C.-M.). – *Mesures et probabilités.* Hermann (1974).

[9] DIXMIER (J.). – *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Algèbres de von Neumann).* Gauthier-Villars (1957).

[10] ADAMS (R.A.). – *Sobolev Spaces.* Academic Press (1975).

[11] DIEUDONNÉ (J.). – *Éléments d'analyse.* Gauthier-Villars (tomes 1 à 8).