1 Notion d'oscillateur mécanique

1. Définition

● On appelle oscillateur (ou système oscillant) un système pouvant évoluer, du fait de ses caractéristiques propres, de façon périodique et alternative autour d'une position d'équilibre (ex : suspension de voiture, balançoire...).

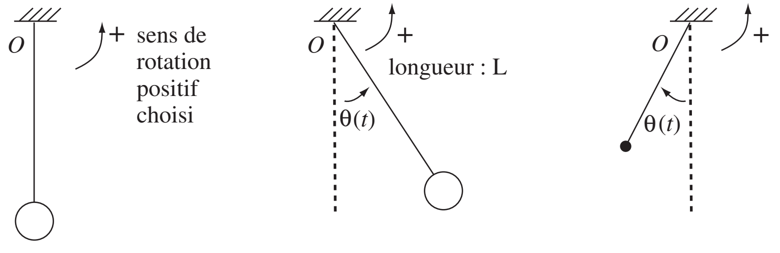
2. Caractérisation des oscillateurs mécaniques

● La grandeur oscillante intervenant dans les équations est ici **l'écart à l'équilibre**. C'est une grandeur algébrique. Cet écart est en général repéré :
– soit par l'abscisse rectiligne $x(t)$ dans le cas d'une oscillation rectiligne (système solide-ressort) ;
– soit par l'abscisse angulaire $\theta(t)$ dans le cas d'une oscillation circulaire (système pendulaire).

● La valeur positive extrême (ou maximale) prise par $x(t)$ et $\theta(t)$ définit l'amplitude de l'oscillation.

3. Le pendule simple

● Un pendule simple est un oscillateur élémentaire. C'est un modèle idéalisé du pendule pesant dans lequel la masse suspendue peut être considérée comme ponctuelle.



Pendule pesant à l'équilibre : les forces se compensent.

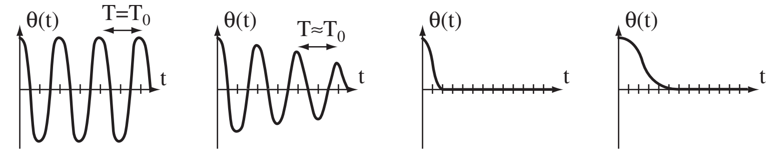
Pendule pesant à l'abscisse angulaire $\theta(t) > 0$: les forces ne se compensent plus.

Pendule simple à l'abscisse angulaire $\theta(t) < 0$.

Fig. 11-1

● Lorsqu'on écarte un pendule pesant ou un pendule simple de sa position d'équilibre d'une abscisse angulaire θ_0 et qu'on l'abandonne à lui-même, on constate que, pour des valeurs de θ_0 n'excédant pas une dizaine de degrés, celui-ci effectue des oscillations libres dont la période T est indépendante de θ_0. On dit que le pendule simple et le pendule pesant vérifient la loi d'**isochronisme des petites oscillations**.

● Selon l'importance des frottements de l'amortissement, il y a plusieurs régimes **libres** possibles une fois que le pendule est abandonné à lui-même :



Sans amortissement (cas idéal non réel) : **régime périodique.**

Amortissement faible : **régime pseudo-périodique.**

Amortissement critique : **régime critique.**

Amortissement fort : **régime apériodique.**

Fig. 11-2

● Dans le cas du pendule simple sans frottement, la période des oscillations T_0 est appelée **période propre**. L'expérience montre qu'elle ne dépend que de la masse du pendule et de la longueur du fil : $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$,

où L est la longueur du fil (en mètre) et g est l'intensité de pesanteur.

● Avec frottements, la période T de l'oscillation est inférieure à T_0. Mais si l'amortissement est faible, on peut considérer que $T \approx T_0$.

Exemple d'application

Un pendule simple est constitué d'une petite bille d'acier de masse m = 50 g suspendue à un fil de longueur L = 2 m. On l'écarte de 4° de sa position d'équilibre puis on le lâche.

1. Les frottements étant supposés faibles, calculer la période de l'oscillation.

2. Montrer que la période a bien la dimension d'un temps.

3. Que vaudrait la période de l'oscillation si on avait écarté le pendule de 8° ?

Données : $g = 9{,}81\ \text{N.kg}^{-1}$

Corrigé commenté

1. Dans ce cas, la période est : $T_0 = 2\,\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. AN : $T_0 = 2\,\pi\sqrt{\frac{2}{9{,}81}} \approx 2{,}84\,\text{s}$.

2. ***Indication** : Pour l'analyse dimensionnelle, souvenez-vous que 1 N.kg^{-1} = 1 m.s^{-2}.*

$[T_0] = \sqrt{\frac{L}{g}} = \sqrt{\frac{L}{\frac{L}{T^2}}} = \sqrt{T^2} = T$: la période a bien la dimension d'un temps.

3. La période ne changerait pas car, pour ces faibles amplitudes, il y a isochronisme des oscillations.

2 Le pendule élastique

1. Dispositif expérimental

● Un solide (S) de masse m pouvant coulisser sur un rail horizontal est fixé à l'extrémité d'un ressort de masse négligeable à spires non jointives. L'autre extrémité du ressort est accrochée à un point fixe.

● On repère la position de (S) par l'abscisse $x(t)$ de son centre de gravité, choisie nulle lorsque le système est au repos. Ainsi $x(t)$ est directement l'écart à l'équilibre.

Au repos $x_{éq} = 0$

Au repos à l'abscisse $x(t)$

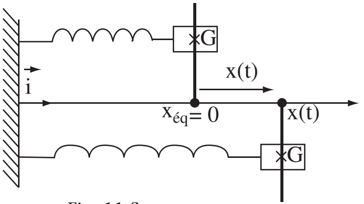


Fig. 11-3

L'écart à l'équilibre est : $x(t) - x_{éq} = x(t) - 0 = \boldsymbol{x(t)}$. Ici le ressort est étiré donc $x(t) > 0$.

● Le bilan des forces extérieures appliquées au système (S) dans le référentiel terrestre supposé galiléen après l'avoir écarté de sa position d'équilibre de x_0 puis lâché sans vitesse initiale est :
$\vec{P} = m\vec{g}$, le poids de (S) ; $\vec{R}_N$, la réaction normale du rail supportant (S) ; $\vec{f}$, la force équivalente réunissant les forces de frottement avec le rail et avec l'air ; $\vec{F}_r = -k\,x\,\vec{i}$, la force de rappel du ressort (k est la constante de raideur du ressort exprimée en N.m^{-1}).

● La résultante des forces est : $\sum\left(\overrightarrow{\text{forces}}\right) = \left(\vec{P} + \vec{R}_N\right) + \vec{f} + \vec{F}_r = \vec{0} + \vec{f} + \vec{F}_r = \vec{f} - k\,x\,\vec{i}$.

2. Équation différentielle

● Appliquons le théorème du centre d'inertie au système (S) dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $\sum \vec{F} = m\,.\,\vec{a}_G$ (1).
Ces forces étant colinéaires, on projette (1) selon l'axe Ox uniquement.

On obtient : $f - k\,x = m\,\ddot{x}$, soit : $\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x - f = 0}$ (2).

● De même que pour le pendule simple et selon l'intensité des frottements, on peut envisager plusieurs régimes libres : régime apériodique, régime critique, régime pseudo-périodique, régime périodique. On vérifie également l'isochronisme des petites oscillations.

3. Solution analytique de l'équation différentielle pour $f = 0$

- Dans le cas où les frottements sont négligeables, l'équation (2) se réduit à $\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0}$ (3) : c'est une équation différentielle du second ordre.
- La solution de cette équation est l'équation horaire d'un mouvement **libre non amorti**. Elle est de la forme : $\boxed{x(t) = x_m . \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} . t + \phi_0\right)}$ (4),

où $\boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}}$ est la **période propre** de l'oscillateur, où x_m est l'**amplitude** de l'oscillation et où ϕ_0 la **phase à l'origine des dates** (déterminables par les conditions initiales).

La condition initiale $v(0) = 0$ impose ici $\phi_0 = 0$ radian.
La condition initiale $x(0) = x_0$ impose ici $x_m = x_0$.

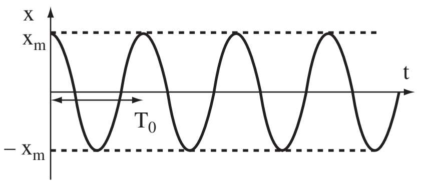


Fig. 11-4

Exemple d'application

On écarte le pendule élastique défini précédemment de $x_0 = 10$ cm vers la droite avant de le lâcher sans vitesse initiale. Les frottements sont négligés.
Données : $m = 100$ g ; $k = 50$ N.m^{-1}.

1. Déterminer complètement l'expression de $x(t)$.

2. Montrer que la période propre T_0 a bien la même dimension qu'un temps.

Corrigé commenté

1. ***Conseil :*** *exprimez clairement les conditions initiales x(0) et v(0).*

Rappel : *la vitesse est la dérivée de la position par rapport au temps.*

On a : $x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \phi_0\right)$, avec $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$. AN : $T_0 = 0{,}28$ s.
La première condition initiale est $v(0) = 0 = \dot{x}(0)$. En dérivant $x(t)$ et en tenant compte de cette condition, on obtient : $\phi_0 = 0$.
La deuxième condition initale est $x(0) = x_0 = 0{,}10$ m, soit $x_m = 0{,}1$ m tous calculs faits.
On détermine donc : $\boxed{x(t) = 0{,}1.\cos(22{,}4\ t)}$.

2. $[T_0] = \left[\sqrt{\frac{m}{k}}\right] = \sqrt{\frac{M}{[k]}}$. Or, comme $F = k.x$, on a $[k] = \left[\frac{F}{x}\right] = \left[\frac{m.a}{L}\right] = \frac{M.L.T^{-2}}{L} = M.T^{-2}$.

On a donc : $[T_0] = \sqrt{\frac{M}{M.T^{-2}}} = T$: T_0 est bien homogène à un temps.

3 Le phénomène de résonance

1. Excitation d'un système « solide-ressort »

● Considérons à nouveau le dispositif de la partie 2 en accrochant cette fois le point A du ressort à la périphérie d'un disque dont la fréquence de rotation est contrôlable. Ceci constitue un dispositif d'excitation. Le mouvement de G n'est plus libre : on parle d'**oscillations forcées**.

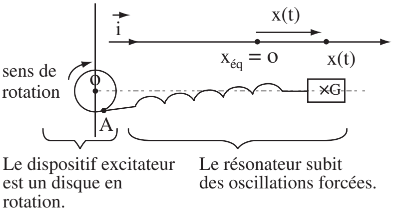


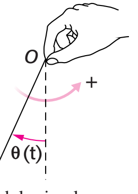
Fig. 11-5

● On s'arrange en général pour que OA soit négligeable devant AG afin de pouvoir considérer, dans l'étude, que le ressort reste horizontal. Ainsi, le disque tournant à la fréquence N (période T) impose un mouvement horizontal de G à la même fréquence (et donc de même période T).

2. Excitation d'un pendule simple

● Considérons à nouveau le pendule simple de la partie 1. Il est tenu cette fois en O par un opérateur pouvant imposer un petit mouvement de balancier de période T au pendule.

● Dans cette situation, on dit que le **pendule est excité**. C'est l'opérateur qui constitue l'excitateur.



Pendule simple
à l'abscisse angulaire
θ (t) < 0

Fig. 11-6

3. Résonance

● Dans le cas « solide-ressort » comme dans celui du pendule simple, le dispositif excité reproduit un mouvement plus ou moins amplifié de l'excitateur en fonction de la fréquence d'excitation.

● Lorsqu'il n'y a pas de frottements, le mouvement de (S) est le plus ample pour une période d'excitation égale à la période propre du système. On dit alors qu'il y a **résonance**.

Sans frottement, il y a résonance pour $T = T_0$.
Avec des frottements faibles, la résonance a lieu pour $T \approx T_0$.

● Si les frottements sont faibles, l'amplitude à la résonance est importante mais uniquement pour des excitations de période T très proches de T_0 : on parle de résonance **aiguë**.
Exemple : un microphone très sensible à une zone étroite de fréquence de son constitue un résonateur à résonance aiguë ; un micro de chanteur par exemple est relativement sélectif.

● Si au contraire l'amortissement est fort, l'amplitude à la résonance n'est pas très grande. La résonance s'observe aussi pour des excitations dont les périodes T font partie d'un voisinage plus large de T_0 : on parle de résonance **floue**.
Exemple : un haut-parleur de chaîne Hi-Fi doit être capable de restituer des sons de fréquences diverses ; il constitue un résonateur à résonance floue.

Exemple d'application

On considère un pendule simple de masse m et de longueur L, excité avec une période T comme l'indique la figure 11-6. L'amplitude des oscillations est notée θ_m. Les frottements sont faibles. Comparer les amplitudes du pendule θ_{m1}, θ_{m2} et θ_{m3} pour des périodes d'excitation de valeurs respectives T_1 = 1,9 s, T_2 = 2,0 s et T_3 = 10 s.
Données : m = 50 g ; L = 1,0 m ; g = 9,81 N.kg^{-1}.

Corrigé commenté

***Indication** : calculez la période propre de l'oscillateur.*
La période propre T_0 de cet oscillateur est définie par : $T_0 = 2\,.\,\pi\,.\sqrt{\dfrac{L}{g}}$.
On calcule : $T_0 = 2\,.\,\pi\,.\sqrt{\dfrac{1}{9{,}81}} = 2{,}0\ \text{s}$.
Une excitation de période T_2 est telle que $T_2 = T_0$. C'est pour cette période d'excitation qu'il y a résonance : θ_{m2} est donc la plus grande. Une excitation de période T_1 ne correspond pas à la résonance car $T_1 \neq T_0$, d'où $\theta_{m1} < \theta_{m2}$. Cependant, comme T_1 n'est que très légèrement inférieure à la période propre, on peut dire que θ_{m1} a sensiblement la même valeur que θ_{m2}.
Pour l'excitation de période T_3, on est très loin de la résonance car T_3 est cinq fois supérieur à T_0. θ_{m3} est la plus petite des trois.

Au final, on a : $\boxed{\theta_{m3} < \theta_{m1} < \theta_{m2}}$.