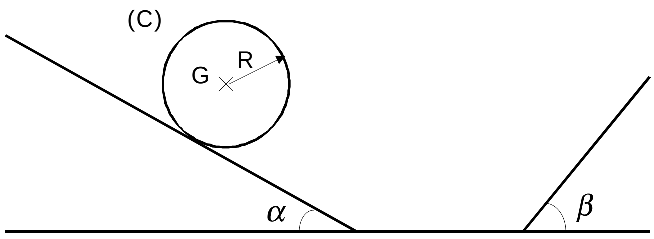
-EXERCICE 17.1-

• ENONCE :

« Roulement d'un cylindre sur un plan incliné »



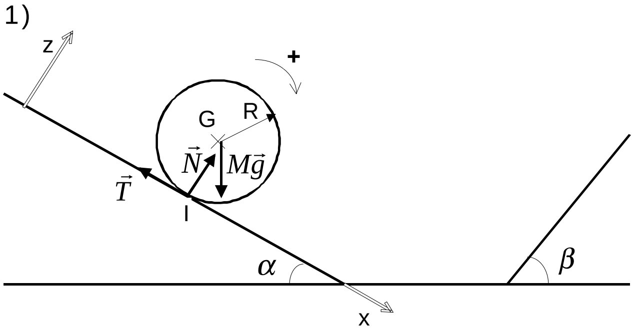
Un cylindre homogène de masse M, de rayon R, de centre d'inertie G, roule sans glissement sur un plan incliné.
Son moment d'inertie par rapport à G est noté:
$J = \frac{1}{2}MR^2$
Le cylindre n'a pas de vitesse initiale, et G se trouve à une hauteur h+R à t=0 (par rapport au plan horizontal).

1) Déterminer la vitesse de G lorsque le cylindre (C) arrive sur le plan horizontal.
2) Le roulement sans glissement continue sur le plan horizontal, puis sur un plan incliné d'un angle β, à priori différent de α ; lorsque le cylindre arrête de monter sur le plan incliné, le point G est-il plus haut, aussi haut ou moins haut qu'à son point de départ ?
3) On supprime maintenant tout frottement sur le plan incliné d'un angle β : même question qu'en 2).

• CORRIGE :

« Roulement d'un cylindre sur un plan incliné »

1)



Le système est le cylindre; il y a, à priori, deux degrés de liberté (un de translation, l'autre de rotation).
Mais le mouvement de RSG fournira une relation supplémentaire: il n'y a donc **qu'un degré de liberté**, on choisira donc un théorème énergétique.

• Le bilan des forces est : $\vec{T}$, $\vec{N}$ (forces de contact) et le poids $M\vec{g}$ (pour qu'il y ait **roulement**, il faut nécessairement une composante $\vec{T}$, sinon on a un pur glissement : il ne faut donc pas confondre absence de glissement avec absence de frottement).

Puisque la vitesse de glissement $\vec{v}_g$ est nulle, les forces de contact ne travaillent pas dans un référentiel lié au plan incliné $\Rightarrow$ nous pourrons donc utiliser la conservation de l'énergie mécanique.

• Par ailleurs, écrivons la relation de distribution des vitesses dans un solide, entre les points I et G : $\vec{v}_g = \vec{0} = \vec{v}_{I_2\in(C)} - \vec{v}_{I_1\in\, plan} = \vec{v}_{I_2\in(C)} - \vec{0} = \vec{v}(G) + \overrightarrow{IG}\wedge\vec{\omega}$, où $\vec{\omega}$ est le vecteur rotation instantanée du cylindre. On a donc : $\vec{0} = v(G)\vec{e}_x + R\omega\vec{e}_z \wedge \vec{e}_y = [v(G) - R\omega]\vec{e}_x \;\Rightarrow\; \boxed{v(G) = R\omega}$

(on peut vérifier que lorsque $v(G) \succ 0$, le cylindre tourne dans le sens horaire = sens +)

• L'énergie cinétique est donnée par le théorème de König :

$$E_C = \frac{1}{2}Mv^2(G) + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}Mv^2(G) + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}MR^2\times\left(\frac{v(G)}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}Mv^2(G)$$

L'énergie potentielle est de la forme $E_P = MgZ_G$, où Z_G est l'altitude du centre d'inertie, comptée à partir du plan horizontal. Il vient donc :

$$E_C + E_P = cste = 0 + Mg(h+R) = \frac{3}{4}Mv^2(G) + MgR \;\Rightarrow\; \boxed{v(G) = \sqrt{\frac{4}{3}gh}}$$

2) Lorsque le cylindre arrêtera de monter le long du 2ème plan incliné, $v(G)$ et ω seront nuls, ainsi que l'énergie cinétique : l'énergie potentielle aura donc la même valeur qu'au point de départ sur le 1er plan incliné $\Rightarrow$ le point G se trouvera à la même hauteur, soit h+R.

3) Cette fois, $\vec{T} = \vec{0}$ sur le 2ème plan incliné ; le TMC barycentrique donne : $J\dfrac{d\omega}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \omega = cste$.

Lorsque le cylindre stoppe sa montée, **l'énergie cinétique** de **translation** est **nulle**, mais **pas** celle de **rotation** ; il y a donc moins d'énergie cinétique convertie en énergie potentielle $\Rightarrow$ le point G se trouvera à une **hauteur inférieure** à h+R. On a, en notant Z_F la hauteur finale de G :

$$Mg(h+R) = MgR + \frac{1}{2}Mv^2(G) = \frac{1}{2}J\omega_F^2 + MgZ_F$$ (ω_F = vitesse de rotation à la fin de la montée) $\Rightarrow$

$$\omega_F^2 = [\frac{v(G)}{R}]^2 = \frac{4gh}{3R^2} \;\Rightarrow\; Mg(h+R) = mgZ_F + \frac{1}{2}\times\frac{MR^2}{2}\times\frac{4gh}{3R^2} = mgZ_F + \frac{Mgh}{3} \;\Rightarrow\; \boxed{Z_F = \frac{2h}{3} + R \prec h + R}$$

