

PHYSIQUE ET CHIMIE

Concours écoles d'ingénieurs post-bac

FESIC • GEIPI-POLYTECH • ENI • ECE • ESIEE • EFREI •
EPF • EPITA...

Didier Magloire

l'Étudiant

DUNOD

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2009
ISBN 978-2-10-054585-8

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.



Table des matières

| | |
|---|-----|
| INTRODUCTION • LES ÉCOLES D'INGÉNIEURS RECRUTANT AU NIVEAU BAC PAR CONCOURS | vii |
| CHAPITRE 1 • MÉCANIQUE | 1 |
| CHAPITRE 2 • ÉLECTRICITÉ | 54 |
| CHAPITRE 3 • PHÉNOMÈNES ONDULATOIRES | 105 |
| CHAPITRE 4 • PHYSIQUE ATOMIQUE ET NUCLÉAIRE | 134 |
| CHAPITRE 5 • CHIMIE | 162 |

Les écoles d'ingénieurs recrutant au niveau Bac par concours

Les informations qui suivent concernent les écoles d'ingénieurs recrutant au niveau Bac par concours. Un certain nombre d'écoles recrutent au niveau Bac uniquement sur dossier et entretien. Vous trouverez la liste complète de ces écoles dans le guide Bien choisir son école d'ingénieurs édition 2010 publié par L'Étudiant et disponible en librairie.

Les bacheliers représentent 20 % des nouveaux inscrits chaque année en école d'ingénieurs. La grande majorité d'entre eux est issue de terminale S. Car même si quelques écoles s'ouvrent aux titulaires de bacs technologiques STI et STL, ces derniers restent minoritaires. Et même parmi les bacheliers S, une sélection « naturelle » s'opère entre ceux qui ont choisi les options maths ou physique-chimie, plutôt bien placés, et les autres.

Des étudiants moins stressés

Les écoles qui recrutent après le bac proposent pour la plupart un schéma d'études identique comprenant deux années de cycle préparatoire suivies de trois années de cycle ingénieur. Il s'agit en quelque sorte d'effectuer vos deux années de classe prépa au sein d'une école dans laquelle vous poursuivrez ensuite vos études. Cette solution peut se révéler intéressante si vous avez un bon niveau scolaire, mais redoutez à la fois la scolarité au sein d'une prépa traditionnelle et... l'angoisse liée à la préparation des concours d'entrée dans les écoles d'ingénieurs, car la sélection dans les écoles en cinq ans s'effectue généralement sur dossier et entretien.

Durant les deux années de cycle préparatoire, même si le programme des cours reste chargé (dans certains établissements, vous ne verrez pas la différence avec une prépa classique !), les élèves sont moins stressés que ceux des classes prépas traditionnelles. De plus, ils ont l'opportunité de s'investir au sein d'une école qui les accueillera au minimum pendant cinq ans. Enfin, les enseignements sont souvent plus concrets qu'en classe prépa et la plupart des écoles prévoient, dès la première année, un stage en entreprise. Le programme du cycle préparatoire des INSA comporte ainsi des maths, de la physique, de la chimie, de la thermodynamique, de l'informatique, de la mécanique, de la communication et des langues, du sport...

Le redoublement en cycle préparatoire est autorisé, en première ou deuxième année selon les établissements (contrairement aux classes prépas où le redoublement est possible uniquement en deuxième année). Au final, ce sont vos résultats durant les

deux premières années qui conditionnent votre passage en cycle ingénieur. Bien sûr, il peut arriver que certains étudiants soient recalés. « Mais les difficultés apparaissent dès le début et on attend rarement la fin des deux années de cycle préparatoire pour réorienter un élève en difficulté », explique Michel Martin, responsable des admissions à l'UTC (université de technologie de Compiègne).

Les ENI

Les cinq ENI (écoles nationales d'ingénieurs) de Brest, Metz, Saint-Étienne, Tarbes et Blois recrutent en commun leurs candidats en cycle préparatoire première année. Ces écoles ont offert respectivement 140, 140, 110, 190 et 100 places en 2007. Les pré-inscriptions s'effectuent sur Internet (www.admission-postbac.org), de mi-janvier à fin mars. Les candidats peuvent s'inscrire pour une ou plusieurs écoles. Pour le concours 2008, le coût était de 90 €. Pour en savoir plus, vous pouvez contacter le SCRENI (Service commun de recrutement en première année des ENI), BP 1643, 65016 Tarbes cedex, tél. 05.62.44.27.05 ou consulter le site Internet : www.enit.fr.

Le concours des ENI

Il est ouvert aux bacheliers S et STI. La sélection comporte une seule phase d'admission, qui repose sur un examen du dossier scolaire (coefficient 3), une épreuve écrite de 3 h (coefficient 4) et un entretien de motivation de 30 minutes (coefficient 3). À l'écrit, les candidats STI planchent en partie sur un QCM (questionnaire à choix multiple) de maths, physique, chimie et mécanique portant sur le programme de terminale. Les bacheliers S passent la même épreuve que celle du concours GEIPI (voir plus loin).

Liste des ENI

Elles sont cinq, mais l'ENISE Saint-Étienne délivre en fait deux diplômes d'ingénieur, l'un en génie mécanique et l'autre en génie civil.

- **ENIB Brest**
École nationale d'ingénieurs de Brest, technopôle Brest-Iroise, CS 73862, 29238 Brest cedex 3, tél. 02.98.05.66.00, Web : www.enib.fr.
- **ENIM Metz**
École nationale d'ingénieurs de Metz, Ile du Saulcy, 57045 Metz cedex 1, tél. 03.87.34.69.00, Web : www.enim.fr.
- **ENISE Saint-Étienne**
École nationale d'ingénieurs de Saint-Étienne, 58, rue Jean-Parot, 42023 Saint-Étienne cedex 2, tél. 04.77.43.84.84, Web : www.enise.fr.
- **ENIT Tarbes**
École nationale d'ingénieurs de Tarbes, 47, av. d'Azereix, BP 1629, 65016 Tarbes cedex, tél. 05.62.44.27.00, Web : www.enit.fr.
- **ENIVL Blois**
École nationale d'ingénieurs du Val-de-Loire, rue de la Chocolaterie, BP 3410, 41034 Blois cedex, tél. 02.54.55.84.50, Web : www.enivl.fr.

Les écoles de la FESIC

La FESIC (Fédération d'écoles supérieures d'ingénieurs et de cadres) rassemble 20 établissements de l'enseignement catholique qui délivrent tous un diplôme d'ingénieur reconnu par la Commission des titres. Le nombre de places offertes chaque année par l'ensemble des écoles est d'environ 2 800.

14 de ces écoles ont mis en place une procédure commune de recrutement, sur dossier, épreuves écrites et éventuellement entretien (les épreuves sont détaillées un peu plus loin), accessible aux titulaires d'un bac S (et STI, pour l'EPMI, l'ESEO et la salle Beauvais ainsi que STL pour cette dernière uniquement). Il s'agit de CPE Lyon, l'EPMI Cergy-Pontoise, l'ESA Angers, l'EI Toulouse, l'ESCOM Beauvais, l'ESEO Angers et Paris, l'ISA Lille, LaSalle Beauvais, l'ISARA Lyon, l'ISEN Brest, l'ISEN Toulon, l'ISEN Lille, l'ISEP Paris et l'École Louis-de-Broglié Rennes.

Cinq autres écoles de la FESIC recrutent, elles, directement sur dossier et, éventuellement, entretien. Il s'agit de l'ECAM Lyon, de HEI Lille et des trois ICAM de Lille, Nantes et Toulouse. À noter, les ICAM de Lille et Toulouse auxquels s'ajoutent les ICAM de Bretagne et de Vendée proposent un cursus en apprentissage.

Le concours commun

L'inscription s'effectue sur Internet (sur www.grandesecoles-postbac.fr), de janvier à mi-avril. Vous devez y préciser, notamment, quel est votre cursus depuis cinq ans et quelles sont vos notes de français obtenues au bac (à l'écrit et à l'oral). Il faudra également verser les frais d'inscription au concours. Ceux-ci sont de 130 € pour le premier groupe et 50 € par groupe supplémentaire, sachant que les écoles sont réparties en cinq groupes. Le groupe 1 comprend CPE Lyon, EPMI Cergy-Pontoise, ESCOM, ESEO, ISEN Brest, ISEN Lille, ISEN Toulon, ISEP, LOUIS de Broglie ; le groupe 2 rassemble les écoles d'agriculture (EI Purpan, ESA, ISA, ISARA-Lyon), le groupe 3 est composé de LaSalle Beauvais, le groupe 4, de HEI et le groupe 5, de l'ECAM et des trois ICAM de Lille, Nantes, Toulouse.

Le dossier de candidature. Il devra contenir vos bulletins de seconde, première et terminale, vos résultats au bac français, une lettre de motivation manuscrite, une lettre d'appréciation de vos professeurs de mathématiques, de physique-chimie et de sciences de la vie et de la Terre. Selon les écoles, ce dossier sera plus ou moins important lors de la sélection finale. Par ailleurs, certaines écoles pourront exiger des documents complémentaires.

Le concours. Il a lieu courant mai et comprend trois ou quatre épreuves écrites qui se déroulent sous la forme de QCM en mathématiques (2h30), chimie (1h30), physique (2h30) et, pour les écoles d'ingénieurs en agriculture, en sciences de la vie et de la Terre (1h30). Chaque école applique ses propres coefficients. Le programme des épreuves est du niveau terminale S et porte uniquement sur les enseignements obligatoires (vous trouverez des annales sur le site de la FESIC). À noter, les bacheliers qui ont suivi l'option sciences de l'ingénieur et biologieécologie sont dispensés de l'épreuve de SVT.

Les résultats sont communiqués fin mai et chaque école constitue sa propre liste de candidats admis (ou admissibles pour les écoles qui font passer un entretien). Pour en savoir plus, vous pouvez contacter la sélection FESIC, 35, rue de la Bienfaisance, 75008 Paris, au 01.80.90.53.10 ou sur Internet : www.fesic.org.

REPÈRES

Le nombre de places aux concours FESIC

Le tableau ci-dessous récapitule les différentes procédures de sélection et le nombre de places offertes par les écoles de la FESIC aux concours 2008.

| Écoles | Mode de recrutement | Places offertes |
|--------------------------------|--------------------------------|-----------------|
| CPE Lyon | Dossier et épreuves | 220 |
| ECAM Lyon | Dossier | 135 |
| École Louis- de-Broglie Rennes | Dossier et épreuves | 48 |
| ESA Angers | Dossier, épreuves et entretien | 120 |
| EI Toulouse | Dossier, épreuves et entretien | 155 |
| EPMI Cergy-Pontoise | Dossier, épreuves et entretien | 70 |
| ESCOM Compiègne | Dossier et épreuves | 110 |
| ESEO Angers, Paris et Dijon | Dossier et épreuves | 252 |
| HEI Lille | Dossier et entretien | 350 |
| ICAM (1) | Dossier et deux entretiens | 300 |
| ISA Lille | Dossier et épreuves | 110 |
| ISARA Lyon | Dossier, épreuves et entretien | 120 |
| ISEN Brest | Dossier et épreuves | 96 |
| ISEN Toulon | Dossier et épreuves | 110 |
| ISEN Lille | Dossier et épreuves | 114 |
| ISEP Paris | Dossier et épreuves | 110 |
| LaSalle Beauvais | Dossier, épreuves et entretien | 230 |
| | | Total 2 650 |

(1) Lille, Nantes et Toulouse.

Liste des écoles

- **ECAM Lyon**
École catholique d'arts et métiers, 40, montée Saint-Barthélemy, 69321 Lyon cedex 05, tél. 04.72.77.06.00, Web : www.ecam.fr.
- **ÉCOLE LOUIS-DE-BROGLIE Rennes**
Campus de Ker-Lann, 35170 Bruz, tél. 02.99.05.84.00, Web : www.ecole-debroglie.fr.
- **EI PURPAN Toulouse**
École d'ingénieurs de Purpan, 75, voie du Toec, BP 57611, 31076 Toulouse cedex 3, tél. 05.61.15.30.30, Web : www.purpan.fr

- **EPMI Cergy-Pontoise**
École d'électricité, de production et des méthodes industrielles, 13, bd de l'Hautil, 95092 Cergy-Pontoise cedex, tél. 01.30.75.60.40, Web : www.epmi.fr.
- **ESA Angers**
École supérieure d'agriculture, 55, rue Rabelais, BP 30748, 49007 Angers cedex 1, tél. 02.41.23.55.55, Web : www.groupe-esa.com
- **ESCOM Compiègne**
École supérieure de chimie organique et minérale, 1, allée du réseau Jean-Marie-Buckmaster, 60200 Compiègne, tél. 03.44.23.88.00, Web : www.escom.fr.
- **ESEO Angers**
4, rue Merlet-de-la-Boulaye, BP 30926, 49009 Angers cedex 01, tél. 02.41.86.67.67, Web : www.eseo.fr
- **HEI Lille**
Hautes études d'ingénieur, 13, rue de Toul, 59046 Lille cedex, tél. 03.28.38.48.58, Web : www.hei.fr.
- **ICAM Lille**
Institut catholique d'arts et métiers, 6, rue Auber, 59046 Lille cedex, tél. 03.20.22.61.61, Web : www.icam.fr.
- **ICAM Nantes**
Institut catholique d'arts et métiers, 35, av. du Champ-de-Manoeuvres, 44470 Carquefou, tél. 02.40.52.40.52, Web : www.icam.fr.
- **ICAM Toulouse**
Institut catholique d'arts et métiers, 75, av. de Grande-Bretagne, 31300 Toulouse, tél. 05.34.50.50.50, Web : www.icam.fr.
- **INSTITUT POLYTECHNIQUE LaSalle Beauvais**
rue Pierre-Waguet, BP 30313, 60026 Beauvais cedex, tél. 03.44.06.25.25, Web : www.lasalle-beauvais.fr.
- **ISA Lille**
Institut supérieur d'agriculture, 48, bd Vauban, 59046 Lille, tél. 03.28.38.48.48, Web : www.isa-lille.fr.
- **ISARA Lyon**
Institut supérieur d'agriculture et d'agroalimentaire Rhône-Alpes, 23, rue Jean-Baldassini, 69364 Lyon cedex 07, tél. 04.27.85.85.85, Web : www.isara.fr.
- **ISEN Brest**
Institut supérieur de l'électronique et du numérique de Brest, 20, rue Cuirassé-Bretagne, CS 42807, 29228 Brest cedex 2, tél. 02.98.03.84.00, Web : www.isen.fr.
- **ISEN Lille**
Institut supérieur de l'électronique et du numérique de Lille, 41, bd Vauban, 59046 Lille cedex, tél. 03.20.30.40.50, Web : www.isen.fr.
- **ISEN Toulon**
Institut supérieur de l'électronique et du numérique de Toulon, Maison des technologies, place Georges-Pompidou, 83000 Toulon, tél. 04.94.03.89.50.
- **ISEP Paris**
Institut supérieur d'électronique de Paris, 28, rue Notre-Dame-des-Champs, 75006 Paris, tél. 01.49.54.52.00, 01.49.54.52.43, Web : www.isep.fr.

Les écoles du GEIPI-POLYTECH

Le GEIPI-Polytech (Groupement d'écoles d'ingénieurs publiques à parcours intégré) rassemble 23 écoles universitaires qui recrutent des bacheliers S sur concours commun. Ces écoles ont représenté, au total, un volume de 1 700 places pour la session de recrutement 2009.

Vous pouvez vous informer sur le concours sur Internet (www.geipipolytech.org) ou auprès du service concours du GEIPI-Polytech (ESSTIN, 2, rue Jean-Lamour, 54519 Vandoeuvre-lès-Nancy cedex, tél. 03.83.68.50.50). Pour vous inscrire, il faut passer par le site national www.admission-postbac.org. Le coût du concours GEIPI-Polytech était de 70 € en 2009 quel que soit le nombre d'écoles choisies.

Pas d'impasse sur la culture générale

Le concours d'entrée dans ces écoles se compose de deux épreuves d'une durée chacune de trois heures (dont une est commune avec les ENI), comprenant à chaque fois des mathématiques et de la physique-chimie, et d'un entretien. Le programme des épreuves correspond à celui de l'année de terminale, mais les écoles du GEIPI-Polytech apprécient également les candidats qui possèdent une bonne connaissance de l'environnement scientifique. Ces acquis sont vérifiés notamment au sein de l'épreuve de physique qui comprend des questions de culture générale scientifique. Vous trouverez des annales sur le site du GEIPI-Polytech.

À SAVOIR

Les places au concours GEIPI-Polytech'

Le tableau ci-dessous récapitule le nombre de places offertes au concours GEIPI-Polytech en 2009, au sein des 23 écoles.

| Ecoles | Places |
|-------------------------------|--------|
| Agrosup Dijon | 10 |
| ESIREM Dijon | 10 |
| ISAT Nevers | 80 |
| ISEL Le Havre | 40 |
| ISTIA Angers | 48 |
| ISTY Versailles | 40 |
| EEIGM Nancy | 55 |
| ENSGSI Nancy | 40 |
| ESSTIN Nancy | 140 |
| Institut Galilée Villetaneuse | 50 |
| Telecom Lille | 115 |
| Telecom Saint-Étienne | 40 |

| Ecoles | Places |
|----------------------------|--------|
| Polytech' Clermont-Ferrand | 80 |
| Polytech' Grenoble | 60 |
| Polytech' Lille | 80 |
| Polytech' Marseille | 90 |
| Polytech' Montpellier | 140 |
| Polytech' Nantes | 90 |
| Polytech' Nice-Sophia | 90 |
| Polytech' Orléans | 90 |
| Polytech' Paris-UMPC | 120 |
| Polytech' Savoie | 60 |
| Polytech' Tours | 90 |
| TOTAL GENERAL | 1 700 |

À noter que les « bons élèves » (ceux qui ont au moins 15 de moyenne en mathématiques et en physique et sont bons en anglais et en français) sont dispensés de passer les épreuves du concours. Pour ce faire, il suffit de fournir un dossier comprenant notamment vos notes de première et de terminale. Si vous obtenez, après examen du dossier par un jury, plus de 1500 points, vous serez admis d'office.

Liste des écoles

- **AGROSUP Dijon**
Institut national supérieur des sciences agronomiques, de l'alimentation et de l'environnement, campus universitaire, 1, esplanade Erasme, 21000 Dijon, tél. 03.80.39.66.01, Web : www.ensbana.fr.
- **EEIGM Nancy**
École européenne d'ingénieurs en génie des matériaux, 6, rue Bastien-Lepage, BP 630, 54010 Nancy cedex, tél. 03.83.36.83.00, Web : www.eeigm.inpl-nancy.fr.
- **ENSGSI Nancy**
École nationale supérieure en génie des systèmes industriels, 8, rue Bastien-Lepage, BP 90647, 54010 Nancy cedex, tél. 03.83.19.32.32, Web : www.ensgsi.inpl-nancy.fr.
- **ESIREM Dijon**
École supérieure d'ingénieurs de recherche en matériaux, 9, av. Alain-Savary, aile des sciences de l'ingénieur, bât. Mirande, BP 47870, 21078 Dijon cedex, tél. 03.80.39.60.09, Web : www.u-bourgogne.fr/ESIREM.
- **ESSTIN Nancy**
École supérieure des sciences et technologies de l'ingénieur de Nancy, 2, rue Jean-Lamour, 54519 Vandoeuvre-lès-Nancy cedex, tél. 03.83.68.50.00, Web : www.esstin.uhp-nancy.fr.
- **INSTITUT GALILÉE VILLETANEUSE**
99, av. Jean-Baptiste-Clément, 93430 Villetaneuse, tél. 01.49.40.30.00, Web : www.sup-galilee.univ-paris13.fr.
- **ISAT Nevers**
Institut supérieur de l'automobile et des transports, 49, rue Mademoiselle-Bourgeois, BP 31, 58027 Nevers cedex, tél. 03.86.71.50.00, Web : www.isat.fr.
- **ISEL Le Havre**
Institut supérieur d'études logistiques, quai Frissard, BP 1137, 76063 Le Havre cedex, tél. 02.32.74.49.00, Web : www.univ-lehavre.fr/enseign/isel.
- **ISTIA Angers**
Institut des sciences et techniques de l'ingénieur d'Angers, 62, av. Notre-Dame-du-Lac, 49000 Angers, tél. 02.41.22.65.00, Web : www.istia.univ-angers.fr.
- **ISTY Versailles**
Institut des sciences et techniques des Yvelines, 45, av. des États-Unis, 78035 Versailles cedex, tél. 01.39.25.45.85, Web : www.isty.uvsq.fr.
- **POLYTECH' Clermont-Ferrand**
Centre universitaire des sciences et techniques de l'université Clermont-Ferrand 2, campus des Cézéaux, 24, av. des Landais, BP 206, 63174 Aubière cedex, tél. 04.73.40.75.00, Web : www.polytech-clermontferrand.fr.

- **POLYTECH'Grenoble**
École polytechnique de l'université Grenoble 1, 28, av. Benoît-Frachon, Saint-Martin-d'Hères, BP 53, 38041 Grenoble cedex 9, tél. 04.76.82.79.02, Web : www.polytech-grenoble.fr.
- **POLYTECH'Lille**
École polytechnique universitaire de Lille, av. Paul-Langevin, 59655 Villeneuve-d'Ascq cedex, tél. 03.28.76.73.00, Web : www.polytech-lille.fr.
- **POLYTECH'Marseille**
École polytechnique universitaire de Marseille, 60, rue Frédéric-Joliot-Curie, 13453 Marseille cedex 13, tél. 04.91.11.26.56, Web : www.polytech-marseille.com.
- **POLYTECH'Montpellier**
École polytechnique universitaire de Montpellier, place Eugène-Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, tél. 04.67.14.31.60, Web : www.polytech.univ-montp2.fr.
- **POLYTECH'Nantes**
École polytechnique de l'université de Nantes, site de la Chantrerie, rue Christian-Pauc, BP 50609, 44306 Nantes cedex 3, tél. 02.40.68.32.00, Web : www.polytech.univ-nantes.fr.
- **POLYTECH'Nice**
École polytechnique de l'université de Nice Sophia-Antipolis, 930, route des Colles, BP 145, 06903 Sophia-Antipolis cedex, tél. 04.92.96.50.50, 04.92.96.51.23, Web : www.polytechnice.fr.
- **POLYTECH'Orléans**
École polytechnique de l'université d'Orléans, 8, rue Léonard-de-Vinci, 45072 Orléans cedex 2, tél. 02.38.41.70.50, Web : www.univ-orleans.fr/polytech.
- **POLYTECH'Paris**
École polytechnique universitaire Pierre-et-Marie-Curie, Paris 6, 4, place Jussieu, bât. Esclançon, case courrier 135, 75252 Paris cedex 05, tél. 01.44.27.13.13, Web : www.polytech.upmc.fr.
- **POLYTECH'Savoie**
École polytechnique universitaire de Savoie, campus universitaire d'Annecy-le-Vieux, BP 80439, 74944 Annecy-le-Vieux cedex, tél. 04.50.09.66.00, Web : www.polytech.univ-savoie.fr.
- **POLYTECH'Tours**
École polytechnique de l'université de Tours,
 - département aménagement, 35, allée Ferdinand-de-Lesseps, 37200 Tours, tél. 02.47.36.14.50.
 - département informatique, 64, av. Jean-Portalis, 37200 Tours, tél. 02.47.36.14.14.
 - départements électronique et systèmes de l'énergie électrique, mécanique et conception des systèmes, 7, av. Marcel-Dassault, 37200 Tours, tél. 02.47.36.13.00,
 Web : www.polytech.univ-tours.fr.
- **TELECOM Lille**
Cité scientifique, rue Guglielmo-Marconi, BP 20145, 59653 Villeneuve-d'Ascq cedex, tél. 03.20.33.55.77, Web : www.telecom-lille1.eu.
- **TELECOM Saint-Étienne**
21-23, rue du Docteur-Paul-Michelon, 42023 Saint-Etienne cedex 2, tél. 04.77.48.50.00, Web : www.telecom-st-etienne.fr.

Les autres écoles recrutant par concours

En dehors des concours communs de recrutement accessibles aux bacheliers, il reste de nombreuses possibilités d'intégrer des écoles qui recrutent de manière individuelle, sur dossier, épreuves, entretien... Elles assurent toutes un cursus en cinq ans qui permet d'obtenir un diplôme d'ingénieur reconnu par la CTI.

- **ECE Paris**
École centrale d'électronique, 37, quai de Grenelle, immeuble Pollux, 75725 Paris cedex 15, tél. 01.44.39.06.00, Web : www.ece.fr.
- **EFREI Paris**
École d'ingénieurs des technologies de l'information et du management, 30-32, av. de la République, 94815 Villejuif cedex, tél. 01.46.77.64.67, Web : www.efrei.fr.
- **EPF-ÉCOLE D'INGÉNIEURS Sceaux**
3 bis, rue Lakanal, 92330 Sceaux, tél. 01.41.13.01.51.
- **EPITA Le Kremlin-Bicêtre**
École pour l'informatique et les techniques avancées, 14-16, rue Voltaire, 94276 Le Kremlin-Bicêtre cedex, tél. 01.44.08.01.01, Web : www.epita.fr.
- **ESIEA Laval**
ESIEA – Grande école d'ingénieurs, parc universitaire de Laval-Changé, 38, rue des Docteurs-Calmette-et-Guérin, BP 0339, 53003 Laval cedex, tél. 02.43.59.24.24.
- **ESIEA Paris**
ESIEA – Grande école d'ingénieurs, 72, av. Maurice-Thorez, 94200 Ivry-sur-Seine, tél. 01.43.90.21.21, Web : www.esiea.fr.
- **ESIEE Amiens**
École supérieure d'ingénieurs en électronique et électrotechnique, 14, quai de la Somme, BP 100, 80082 Amiens cedex 02, tél. 03.22.66.20.00, Web : www.esieeamiens.fr.
- **ESIEE Paris**
Cité Descartes, BP 99, 93162 Noisy-le-Grand cedex, tél. 01.45.92.65.00, Web : www.esiee.fr.
- **ESILV Paris-La Défense**
École supérieure d'ingénieurs Léonard-de-Vinci, Pôle universitaire Léonard-de-Vinci, 92916 Paris-La Défense cedex, tél. 01.41.16.71.03, Web : www.esilv.fr.
- **ESME SUDRIA Paris**
38, rue Molière, 94200 Ivry-sur-Seine, tél. 01.56.20.62.00, Web : www.esme.fr.

Ces informations sont extraites du guide *Bien choisir son école d'ingénieurs* édition 2010 publié par L'Étudiant et disponible en librairie.

Mécanique

Thèmes du chapitre

Cinématique

Référentiel. Repère de projection. Coordonnées de position. Lois horaires. Trajectoire. Vitesse (vecteur vitesse, composantes du vecteur, norme du vecteur). Accélération (vecteur accélération, composantes du vecteur, norme du vecteur). Mouvement rectiligne uniforme. Mouvement rectiligne uniformément varié. Mouvement plan uniformément varié. Mouvement circulaire uniforme.

Dynamique

Masse. Force. Travail d'une force. Puissance d'une force. Énergies cinétique, potentielle et mécanique. Référentiel galiléen.

Forces

Force de gravitation (faire la différence avec la force de pesanteur ou poids d'un objet matériel). Forces constantes. Force de frottement solide (constante). Force de frottement fluide (proportionnelle et opposée au vecteur vitesse). Force de rappel élastique des ressorts. Tension d'un fil. Réaction d'un support.

Dispositifs classiques

Pendule simple. Pendule élastique (Ressort + masse).

Lois de la mécanique

Théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel galiléen. Principe de l'inertie. Principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen. Principe de l'action et de la réaction.

Des savoir-faire à maîtriser

- Savoir utiliser les lois de la mécanique.
- Connaître ou être capable de rapidement retrouver les unités des grandeurs physiques.

Des réflexes à avoir

- Définir le système.
- Établir le bilan des forces qui s'exercent sur lui.
- Qualité galiléenne ou non du référentiel d'étude afin de pouvoir appliquer au système le théorème de l'énergie cinétique (si vous recherchez seulement la norme d'une vitesse et si les forces sont connues *a priori*) ou le principe fondamental de la dynamique (si vous recherchez des lois horaires).
- Vérifier l'homogénéité de l'expression obtenue

1.1 Unités

1 GEIPI - ENI 2006

Une seule réponse vraie

La seconde, le mètre, l'ampère et le kilogramme sont les unités de base du système international. Trouver l'unité équivalente au joule :

A : $\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}$

B : kg.m.s^{-1}

C : kg.m.s^{-2}

D : $\text{kg.m}^2.\text{s}^{-1}$

E : $\text{kg.m}^2.\text{s}^{-2}$

2 GEIPI - ENI 2006

Une seule réponse vraie

Trouver l'unité équivalente au volt :

A : $\text{kg.m}^2.\text{s}^{-3}.\text{A}^{-1}$

B : $\text{kg.m}^2.\text{s}^{-1}.\text{A}^{-1}$

C : $\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-3}.\text{A}$

D : $\text{kg.m}^2.\text{s}^{-2}.\text{A}$

E : $\text{kg.m.s}^{-1}.\text{A}^{-1}$

1.2 Cinématique

3 GEIPI - ENI 2006

Une seule réponse vraie

La vitesse $v(t)$ d'un mobile est représentée sur la figure 1.1 en fonction du temps t .

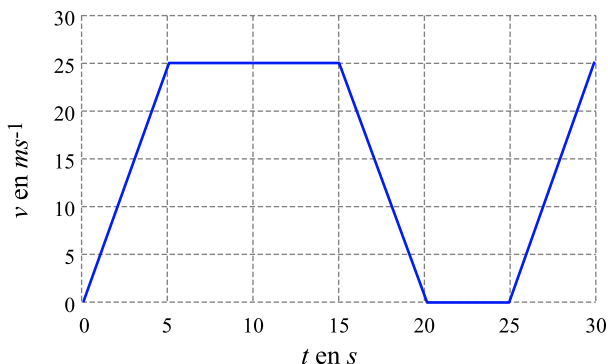
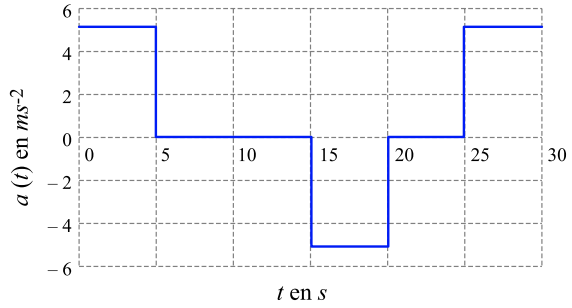


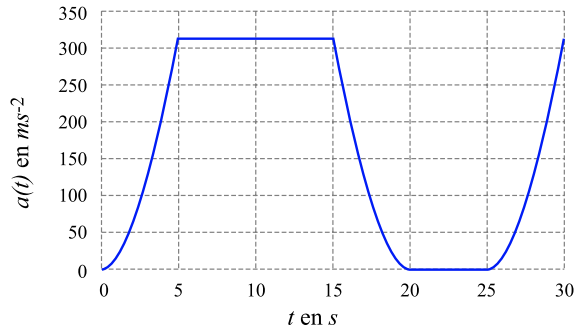
Figure 1.1

Quel est le graphe représentant l'accélération du mobile en fonction du temps ?

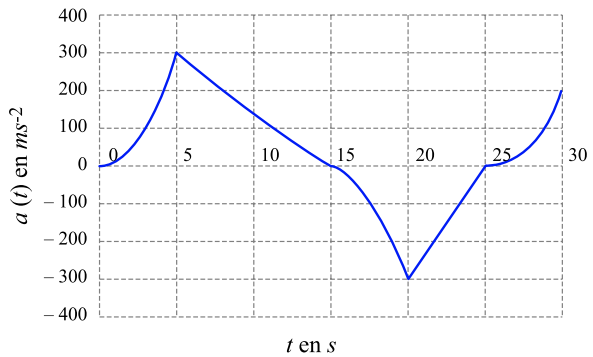
Réponse A :



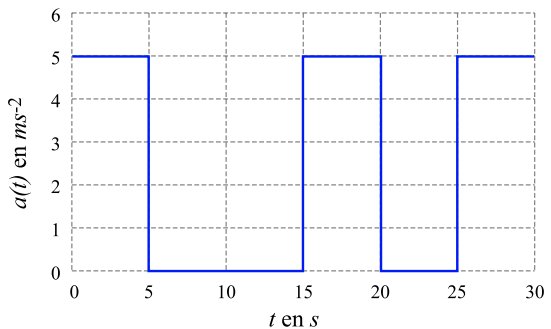
Réponse B :



Réponse C :



Réponse D :



Réponse E : Aucune des réponses précédentes.

4 GEIPI - ENI 2006

Une seule réponse vraie

Les coordonnées cartésiennes de la position du centre de gravité d'un objet de masse m sont données par :

$$x(t) = \alpha.t^2 \text{ et } y(t) = \beta.t^2 \text{ avec } \alpha \text{ et } \beta \text{ constants.}$$

Soit $a = \|\vec{a}\|$, la norme de l'accélération du centre de gravité.

Retrouver l'expression exacte de a .

A : $a = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ **B :** $a = 2(\alpha + \beta)$ **C :** $a = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$
D : $a = 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ **E :** $a = \frac{1}{2}|\alpha + \beta|$

5 ECE 2007

Vrai ou faux ?

Une voiture est stationnée à 90 m d'un piéton immobile. À un instant donné, elle démarre et roule avec une accélération constante de 5 m.s^{-2} . On prendra $\sqrt{5} \approx 2,24$.

1. Elle passe devant le piéton après 10 secondes.

Une seconde voiture part du même endroit avec une accélération constante mais met le double de temps pour atteindre l'individu.

2. L'accélération de ce second véhicule est de $2,5 \text{ m.s}^{-2}$.

L'individu jusque là immobile se met à courir et ses coordonnées en mètres par rapport à un repère orthonormé sont :

$$\begin{cases} x(t) = -0,5t^2 + 5t + 30 \\ y(t) = 0,25t^2 - 10t + 30 \end{cases}$$

3. La vitesse de cet individu après 10 s est de l'ordre de 7 m.s^{-1} .

4. Son accélération après 10 s est de $1,12 \text{ m.s}^{-2}$.

6 GEIPI - ENI 2007

Une seule réponse vraie

Une fronde est une lanière qui permet de faire tourner un projectile afin de lui communiquer une grande vitesse initiale. On s'intéresse à la phase du mouvement où le projectile est animé d'un mouvement circulaire uniforme dans le plan horizontal.

Le mouvement est caractérisé par :

- un projectile tournant à **4 tours par seconde** ;
- une lanière de longueur **50 cm** ;
- une masse de projectile de **250 g** .

La vitesse du projectile est :

- A : $\frac{2}{\pi} \text{ m.s}^{-1}$ B : 4 m.s^{-1} C : $2\pi \text{ m.s}^{-1}$ D : 8 m.s^{-1} E : $4\pi \text{ m.s}^{-1}$

1.3 Dynamique et énergie

7 GEIPI - ENI 2007 (suite de l'ex. 6)

Une seule réponse vraie

La force exercée par la lanière sur le projectile est :

- A : 16 N B : 20 N C : 40 N D : 80 N E : 160 N

8 ECE 2007

Vrai ou faux ?

On laisse tomber un objet de masse $m = 1 \text{ kg}$ du haut d'une tour de hauteur $h = 50 \text{ m}$ avec une vitesse initiale $v_0 = 600 \text{ m.min}^{-1}$. On prendra $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$, $\sqrt{1\,100} \approx 33$, $\sqrt{1\,000} \approx 32$.

1. La vitesse de cet objet arrivé au niveau du sol est de 60 m.s^{-1} .
2. L'énergie cinétique est $E_c = 512 \text{ J}$.

On ne néglige plus les frottements de l'air que l'on assimile à une force de frottements constante de 1 N .

3. La vitesse de cet objet arrivé au sol est de 50 m.s^{-1} .
4. L'énergie cinétique en tenant compte des frottements est $E_c = 400 \text{ J}$.

9 FESIC 2005

Vrai ou faux ?

Une goutte d'eau, assimilée à une boule de rayon R , de masse m , de masse volumique ρ , tombe verticalement dans l'air. Elle est freinée dans sa chute par la force $\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v}$ (\vec{v} : vecteur vitesse de la goutte ; η : coefficient constant de viscosité).

On a enregistré l'altitude z de la goutte en fonction du temps (figure 1.2).

- a. À partir de $t = 8$ secondes, le mouvement de la goutte est uniformément varié.
- b. Le coefficient de viscosité η s'exprime en $\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$.
- c. La valeur de la vitesse limite atteinte par la goutte est 1 m.s^{-1} .
- d. La vitesse limite atteinte est inversement proportionnelle au rayon de la goutte.

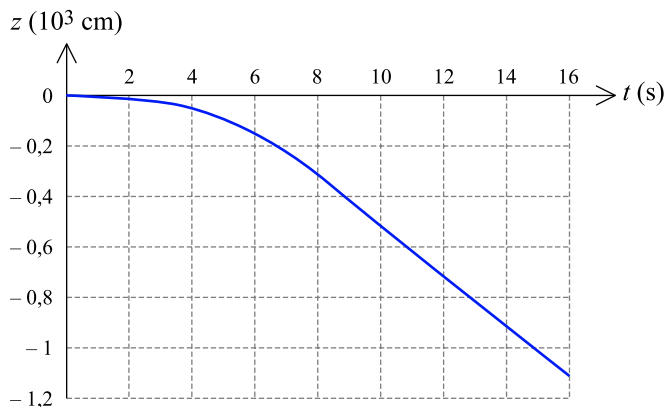


Figure 1.2

10 ECE 2007

Vrai ou faux ?

Une gouttelette de pluie de forme sphérique de rayon 5 mm tombe de la base d'un cumulonimbus situé à une altitude de 4,5 km. On prendra comme origine des temps l'instant où la goutte quitte la base du nuage, comme origine de l'espace l'endroit où la goutte quitte le nuage et l'on négligera les frottements rencontrés lors de cette chute.

L'accélération de la pesanteur $\vec{g} = 10 \vec{y}.m.s^{-2}$; $\pi \approx 3$; $\rho_{air} = 1 \text{ kg}.m^{-3}$; $\rho_{eau} = 10^3 \text{ kg}.m^{-3}$.

1. L'équation horaire du mouvement de la gouttelette est $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$.

2. Le calcul ainsi fait à l'aide de ce modèle prévoit que la goutte atteint le sol avec une vitesse de $100 \text{ m}.s^{-1}$.

Un meilleur modèle devrait tenir compte des forces de frottements exercées par l'air sur la goutte ainsi que de la poussée d'Archimède.

3. La poussée d'Archimède qui s'exerce sur la goutte est $\Pi \approx 5.10^{-7} \text{ N}$.

4. La masse de la goutte est $m = 5 \text{ mg}$.

11 FESIC 2006

Vrai ou faux ?

Une balle de masse $m = 100 \text{ g}$, considérée comme un objet ponctuel, est lancée verticalement vers le haut, avec une vitesse de valeur $v_0 = 12 \text{ m}.s^{-1}$.

Son point de lancement est pris comme origine d'un axe vertical orienté vers le haut.

Au cours de son mouvement, la balle subit des forces de frottements que l'on admettra proportionnelles à sa vitesse, d'expression $\vec{f} = -k\vec{v}$.

Données : $g \approx 10 \text{ m}.s^{-2}$; $k = 0,1 \text{ S.I.}$

- a. Si les frottements étaient négligeables, l'altitude maximale atteinte par la balle serait égale à environ 7,2 m.
- b. Le coefficient de frottement k s'exprime en $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$.
- c. Lorsque la balle atteint son altitude maximale, son vecteur accélération est égal à \vec{g} .
- d. Lorsque la balle retombe, elle atteint une vitesse limite $v_l = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

12 FESIC 2006

Vrai ou faux ?

Un mobile autoporteur M , de masse $m = 800 \text{ g}$, glisse sans frottement sur un plan incliné faisant un angle $\alpha = 10^\circ$ avec l'horizontale (figure 1.3).

L'axe Ox est orienté dans la direction du déplacement.

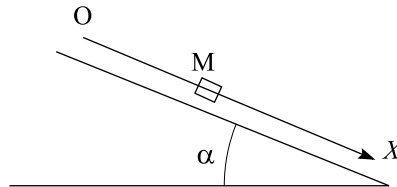


Figure 1.3

Données : Accélération de la pesanteur : $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$;

$$\cos 10^\circ = 0,98 ; \quad \sin 10^\circ = 0,17 ; \quad 8 \times 0,98 = 7,8 ; \quad 8 \times 0,17 = 1,4.$$

- a. Comme il n'y a pas de frottements, la valeur de la réaction du plan incliné est nulle.
- b. La réaction du plan incliné est égale au poids du mobile.
- c. Le mobile étant soumis à des forces constantes, son mouvement est rectiligne uniforme.
- d. L'accélération du centre d'inertie du mobile est $a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 1,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

13 ENI 2005

Une seule réponse vraie

Depuis un point O , on lance vers le haut avec une vitesse initiale \vec{v}_0 , suivant la ligne de plus grand pente d'un plan incliné d'angle α sur l'horizontale, un solide de masse m .

Il s'arrête après avoir parcouru une distance L , puis redescend.

Tout au long de son mouvement il est soumis à une force de frottement \vec{f} , d'intensité constante.

$$m = 200 \text{ g} \quad \sin \alpha = 0,1 \quad v_0 = 3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \quad g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \quad f = 0,1 \text{ N}.$$

Parmi les cinq propositions suivantes une seule est exacte. Laquelle ?

- A : La durée de la montée est de 3 s.
- B : La distance parcourue avant l'arrêt est $L = 3$ m.
- C : L'accélération lors la montée est de $2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.
- D : L'accélération lors de la descente est de $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.
- E : La vitesse du solide lorsqu'il repasse en O est v_0 .

14 ECE 2007

Vrai ou faux ?

Une benne transporte un objet de masse m positionné comme indiqué sur la figure 1.4. La benne se soulève à vitesse constante et au bout de 30 s, l'objet se met à glisser et le chauffeur arrête immédiatement la benne. L'angle entre le plancher de la benne et l'horizontale est alors $\theta = 30^\circ$.

$\sin 30^\circ = 0,5$; $\cos 30^\circ \approx 0,8$; $\tan 30^\circ \approx 0,5$; $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

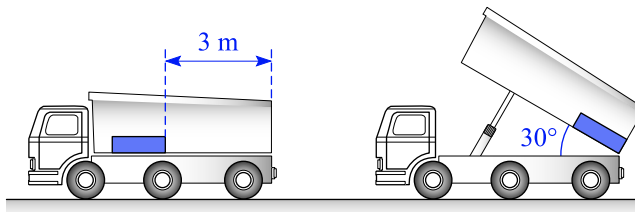


Figure 1.4

La force de frottement statique, quand elle est maximale, s'exprime $f_{f \max} = \mu R$, R étant la réaction entre le plancher et l'objet.

1. Le coefficient de frottement statique entre le plancher de la benne et l'objet est $\mu_{\text{stat}} \approx \frac{1}{2}$.

L'objet ne s'arrête pas ; il glisse avec une accélération uniforme et se déplace de 2 m en 2 s jusqu'au bout de la benne fermée. Cette accélération est due à la différence entre la gravitation et la force de frottement dynamique qui s'exprime $f_{f \text{ dyn}} = \mu_{\text{dyn}} R$.

2. L'accélération de l'objet est de $3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.
3. Le coefficient de frottement dynamique lors de l'accélération de l'objet est

$$\frac{g \sin \theta - a}{g \cos \theta}.$$

4. Le coefficient de frottement dynamique lors de l'accélération de l'objet est $\mu_{\text{dyn}} = 1,5$.

1.4 Tirs et chute libre

15 FESIC 2006

Vrai ou faux ?

Lors d'une mission humanitaire au Darfour (Soudan), un avion des Nations Unies, volant horizontalement à l'altitude $z = 3,0 \times 10^3$ m, à vitesse constante v_0 , largue, en un point S , un colis de vivres.

La résistance de l'air est considérée comme négligeable devant les autres forces s'exerçant sur le colis.

Données : Accélération de la pesanteur $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$; $\sqrt{6} = 2,4$; $\sqrt{3} = 1,7$.

- Dans le référentiel terrestre, la valeur de la vitesse initiale du colis est v_0 .
- La trajectoire du colis est un arc de parabole, de sommet S et d'axe vertical.
- Quand le colis touche le sol, son vecteur vitesse est vertical.
- Le colis touche le sol au bout d'une durée $t = 24$ s.

16 FESIC 2005

Vrai ou faux ?

Un avion volant horizontalement à une altitude $h = 80$ m avec une vitesse constante $v_0 = 360 \text{ km.h}^{-1}$ laisse tomber une bouée en passant par la verticale d'un point A de la mer (figure 1.5).

La résistance de l'air ainsi que tous les frottements sont négligés.

Donnée : valeur du champ de pesanteur $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

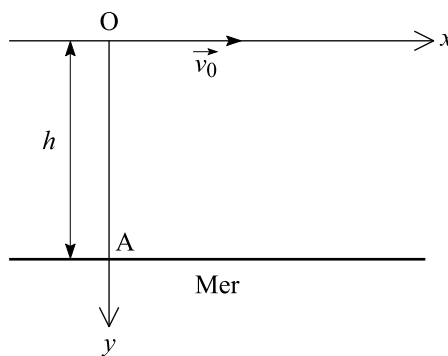


Figure 1.5

- Les équations horaires du mouvement du centre d'inertie de la bouée projetées sur Ox et Oy s'écrivent : $x(t) = 360t$, $y(t) = 5t^2$, x et y exprimés en m et t en seconde.
- La bouée touchera la surface de la mer au bout de 4 s.

c. La bouée tombe dans la mer à 1 440 m du point A .

d. Entre le largage de la bouée et sa chute dans la mer, l'avion a parcouru une distance de 400 m.

17 GEIPI 2006

Un joueur de Tennis (joueur 1) désire effectuer un lob, cela signifie qu'il doit envoyer la balle suffisamment haut pour que son adversaire (joueur 2) ne puisse pas l'intercepter. Toutefois, la balle doit retomber dans les limites du court.

On notera A le point où le joueur 1 frappe la balle (figure 1.6).

On prendra comme origine O du repère le point du sol à la verticale du point A .

On note : $z_0 = 1,00$ m : ordonnée du point A .

$z_1 = 3,00$ m : ordonnée correspondant à la hauteur maximale pour laquelle le joueur 2 ne peut intercepter la balle quand il lève sa raquette.

$x_1 = 15,0$ m : abscisse correspondant à la position du joueur 2.

$x_2 = 25,0$ m : abscisse correspondant à la ligne de fond de court du côté du joueur 2.

\vec{V}_0 : vecteur vitesse initiale de la balle en A , $V_0 = \|\vec{V}_0\|$.

$\alpha = 45,0^\circ$: angle entre la direction horizontale et \vec{V}_0 .

$g = 9,80 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$: accélération de la pesanteur, dirigée selon l'axe Oz dans le sens décroissant.

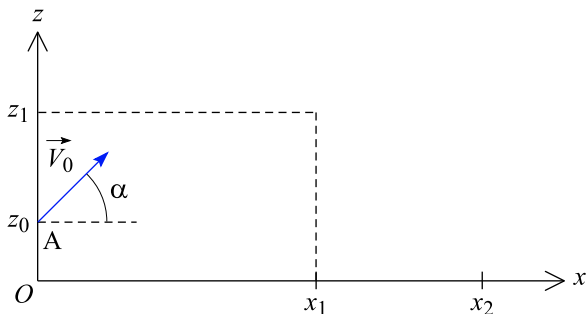


Figure 1.6

Pour que le lob soit réussi, il faut donc que la trajectoire de la balle issue du point A avec le vecteur vitesse initiale \vec{V}_0 soit telle que $z > z_1$ pour $x = x_1$ et que $x < x_2$ pour $z = 0$.

On se propose de déterminer les valeurs de la vitesse initiale V_0 pour que le lob soit réussi. On néglige tous les effets liés à l'air.

1. Compte tenu des hypothèses, quel est le nom mathématique de la courbe décrite par la trajectoire de la balle ?

2. Donner les expressions littérales des composantes du vecteur vitesse initiale \vec{V}_0 .
3. Donner les expressions littérales des équations horaires $x(t)$ et $z(t)$.
4. Donner l'expression littérale de la trajectoire $z(x)$;
5. À partir de l'équation précédente, exprimer la vitesse initiale V_0 en fonction de x , z , z_0 , α et g .
6. En déduire la valeur numérique V_{01} de la vitesse initiale pour que la balle passe par le point de coordonnées : $x = x_1$; $z = z_1$.

De même, donner la valeur numérique V_{02} de la vitesse initiale pour que la balle touche le sol au point de coordonnées $x = x_2$; $z = 0$.

En déduire finalement l'intervalle de la valeur de la vitesse initiale pour lequel le lob est réussi.

18 FESIC 2008

Vrai ou faux ?

On néglige toutes les forces dues à l'air : la balle est en chute libre. Une balle de masse $m = 100$ g est lancée verticalement vers le haut avec une vitesse initiale $v_0 = 5$ m.s⁻¹.

Grâce à un dispositif de chronophotographie, on a relevé l'altitude de la balle à intervalles de temps réguliers. On a pu ainsi tracer sa courbe d'énergie potentielle (origine choisie au niveau du sol) et sa courbe d'énergie cinétique en fonction du temps (figure 1.7).

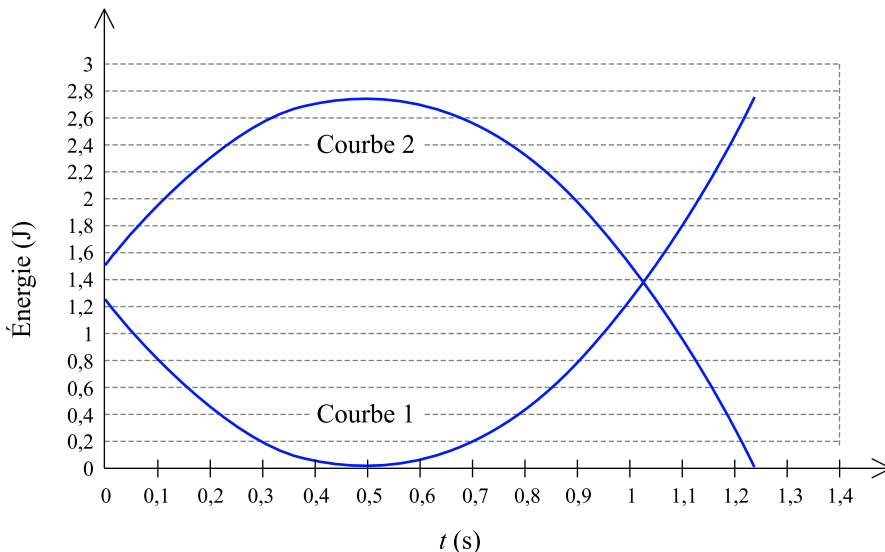


Figure 1.7

Données : valeur du champ de pesanteur terrestre $g = 10$ m.s⁻² ; $\sqrt{54} \approx 7,4$.

- La courbe 1 représente l'énergie potentielle de la bille.
- La bille a été lancée avec une énergie mécanique d'environ 2,7 J.
- La bille a été lancée d'un point d'altitude h égale à 1,25 m.
- La bille retombe sur le sol avec une vitesse d'environ $7,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

1.5 Gravitation universelle

19 GEIPI 2008

On se propose d'étudier le mouvement de la Lune autour de la Terre. Dans ce cadre, seul le système Terre-Lune en interaction seule est considéré. L'influence des autres astres n'est donc pas prise en compte. La Terre et la Lune sont assimilées à deux points matériels T et L de masses respectives m_T et m_L . La distance entre ces deux points est notée d_{TL} . On note \vec{u} le vecteur unitaire porté par la droite passant par les deux points T et L (voir la figure 1.8). On ne tient pas compte de la rotation de la Terre sur elle-même et on néglige tous les frottements. Enfin, on note G la constante de l'attraction universelle.

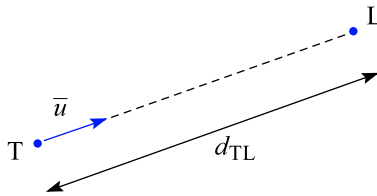


Figure 1.8

- Calculer la distance TC entre le centre de la Terre T et le centre d'inertie C du système Terre-Lune.
- Quelle est la nature exacte de la trajectoire de la Lune autour de la Terre ?
Dans la suite du problème, on admet pour simplifier les calculs, que le mouvement de la Lune autour de la Terre est circulaire uniforme.
- Quelle est la nature de la force \vec{F} qui s'exerce sur la Lune ?
- Placer \vec{F} sur le schéma ci-dessus. Donner son expression et calculer son intensité F .
- Quelle est l'unité de la constante de l'attraction universelle ?
- Donner l'expression vectorielle du vecteur accélération de la Lune \vec{a}_L en fonction de \vec{u} , du module v_L de sa vitesse et de la distance d_{TL} .
- En appliquant le principe fondamental de la dynamique, donner une seconde expression pour ce même vecteur accélération.

8. Tracer sur le schéma ci-dessus la vitesse \vec{v}_L de la Lune. Exprimer puis calculer son module v_L .

Quelle est la période de rotation T_r de la Lune autour de la Terre. Donner sa valeur en jours (J), heures (h), minutes (mn) et secondes (s).

$$\begin{aligned} \text{Données : } m_T &= 5,980 \cdot 10^{24} \text{ kg} & m_L &= 8,1 \cdot 10^{22} \text{ kg} \\ R_T &= 6\,370 \text{ km} & R_L &= 1\,723 \text{ km} \\ d_{TL} &= 387\,200 \text{ km} & G &= 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ S.I.} \end{aligned}$$

20 FESIC 2008

Vrai ou faux ?

La Terre est assimilée à une sphère homogène de masse M_T et de rayon R_T .

Une navette spatiale a été placée sur une orbite circulaire à une altitude $h = 260 \text{ km}$. À cette altitude, l'accélération de la pesanteur est d'environ 9 m.s^{-2} . La durée d'une révolution de la navette autour de la Terre est T .

Données : $\pi \cdot \sqrt{10} \approx 10$; $\sqrt{6\,640} \approx 81$; $R_T = 6\,380 \text{ km}$.

- a. La navette a un mouvement circulaire uniforme.
b. D'après la troisième loi de Kepler,

$$\frac{T^2}{R_T^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}.$$

- c. La période de révolution de la navette est $T = 5,4 \cdot 10^3 \text{ s}$.
d. La navette spatiale tourne sur son orbite avec une vitesse angulaire supérieure à celle d'un satellite géostationnaire.

21 ECE 2007

Vrai ou faux ?

On considère la Terre de masse M_T , de rayon R et un objet de masse m . L'objet gravite autour de la Terre et est situé à une distance h de sa surface. On néglige dans tout cet exercice les frottements dus à la résistance de l'air et on prendra la constante de gravitation $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$, l'accélération de la pesanteur, notée g , comme étant uniforme et égale à 10 m.s^{-2} et $R \approx 6\,700 \text{ km}$.

1. Le module F de la force d'attraction exercée par M_T sur m s'écrit

$$F = \frac{GmM_T}{h^2}.$$

2. La masse de la Terre est $M_T = 6,7 \cdot 10^{28} \text{ kg}$.

L'énergie cinétique E_c de l'objet m sur l'orbite r est $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ et de son énergie potentielle est

$$E_p(r) = -\frac{GmM_T}{(R+h)}.$$

3. L'objet est lâché sans vitesse initiale de l'orbite r et arrive au sol avec une vitesse

$$v = \sqrt{2gR} \left(1 - \frac{R}{R+h} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

4. La vitesse de libération du satellite à partir de l'altitude h est la vitesse minimale qu'il faut donner à un objet pour qu'il quitte l'attraction terrestre

$$v_l = \sqrt{\frac{2GM_T}{R+h}}.$$

1.6 Pendule simple

22 FESIC 2007

Vrai ou faux ?

Un pendule simple, de masse $m = 10 \text{ g}$ et de longueur $l = 1 \text{ m}$, est écarté de sa position d'équilibre d'un angle $\alpha = 8^\circ$, puis lâché sans vitesse initiale. Les forces de frottements sont supposées négligeables.

Le plan horizontal contenant la position d'équilibre de l'objet est choisi comme plan de référence de l'énergie potentielle de pesanteur.

Données : $\cos(8^\circ) \approx 0,99$; g est l'accélération de la pesanteur : $g \approx 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

- La période d'un pendule simple est proportionnelle à la racine carrée de sa masse.
- L'énergie mécanique totale E_m du pendule vaut 1 mJ .
- L'expression de la vitesse maximale atteinte par le pendule est

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2E_m}{m}}.$$

d. Lorsque l'énergie cinétique du pendule est égale au quart de son énergie mécanique, la vitesse de la masse est égale à la moitié de sa vitesse maximale.

23 ECE 2007

Vrai ou faux ?

On considère un pendule simple constitué d'une masse m ponctuelle accrochée au bout d'une tige rigide de masse négligeable et de longueur l . Cette barre est articulée autour d'un point fixe O et peut se mouvoir dans un plan vertical. On repère la position du pendule par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. L'origine des énergies potentielles est prise quand $\theta = 0$.

Dans l'état initial, le pendule est lancé avec les conditions suivantes :

$$\theta_0 = 0 \quad \left[\frac{d\theta}{dt} \right]_0 = \alpha \sqrt{\frac{g}{l}}$$

α étant une constante et on suppose le mouvement sans frottement.

1. L'énergie potentielle de ce système à un angle θ est $E_p(\theta) = mgl(1 - \cos \theta)$.
2. L'énergie cinétique s'écrit

$$E_c(\theta) = \frac{1}{2}ml^2 \cdot \left[\frac{d\theta}{dt} \right]^2.$$

3. L'énergie mécanique totale de ce système est $E = \frac{1}{2}mg\alpha^2l$.

4.

$$\left[\frac{d\theta}{dt} \right]^2 = 2 \frac{g}{l} \left[\left(\frac{\alpha^2}{2} - 1 \right) + \cos \theta \right].$$

24 GEIPI 2005

On considère un métronome que l'on modélise par un pendule de longueur réglable $l = OA$. Il est constitué par une masse considérée comme ponctuelle $M = 20 \text{ g}$ placée au bout d'une tige rigide de masse négligeable (figure 1.9). Les frottements seront négligés.

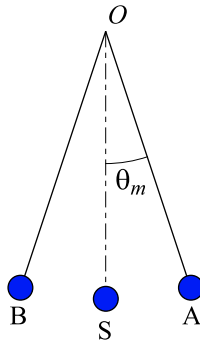


Figure 1.9

Quand on écarte le pendule de sa position d'équilibre verticale d'un angle θ_m , il oscille dans un plan vertical, la masse M oscillant entre les positions limites A et B . On appelle $\theta(t)$ l'angle que fait la tige avec la verticale à l'instant t .

À l'instant $t = 0$, on écarte le pendule d'un angle $\theta_m = 8^\circ$ et on le libère sans vitesse initiale.

Lorsque la masse M passe en A et en B , le métronome émet un signal sonore.

On choisit comme origine des énergies potentielles le plan horizontal passant par la position de la masse M au repos (point S).

Le métronome est placé dans un laboratoire où $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

1. Le métronome est réglé pour un tempo de $N = 120$ soit 120 signaux sonores par minute.

Calculer la période des oscillations T et la longueur l .

2. Le mouvement du pendule admet comme solution une équation horaire de la forme $\theta(t) = a \cos(bt + c)$.

Déterminer a , b et c .

3. Donner l'expression littérale de $\theta'(t)$, la dérivée de $\theta(t)$ par rapport au temps.

On appelle $v(t)$ le module de la vitesse instantanée de la masse M .

Calculer v en A et S .

Représenter v en fonction du temps.

4. Calculer les énergies potentielle E_p et cinétique E_c du pendule au point A .

Calculer l'énergie mécanique E_m au point S .

5. On place le métronome ainsi réglé sur la Lune. La période est alors $T_L = 2,45$ s.

Déterminer l'accélération de la pesanteur g_L sur la Lune.

1.7 Pendule élastique

25 FESIC 2008

Vrai ou faux ?

Un lanceur de flipper est constitué d'un ressort de constante de raideur $k = 50 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ et de longueur à vide $l_0 = 12 \text{ cm}$. Il permet de propulser une bille d'acier, de masse $m = 20 \text{ g}$, selon la ligne de plus grande pente d'un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale (figure 1.10).

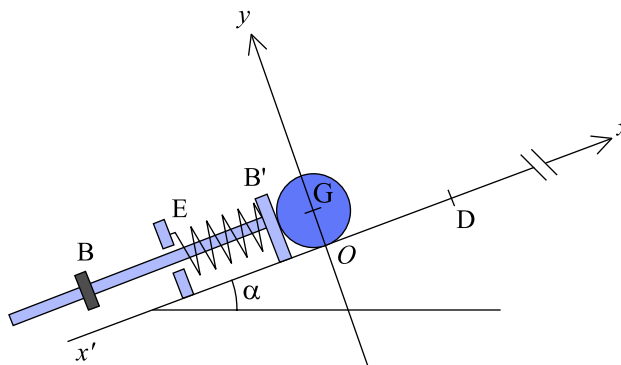


Figure 1.10

Un joueur tire sur la tige et comprime le ressort, jusqu'à ce que le centre d'inertie de la bille se trouve immobile au niveau du point O . La longueur du ressort ainsi comprimé est égale à 8,0 cm.

En lâchant la tige, il libère le dispositif qui propulse la bille. Lorsque le centre d'inertie de la bille arrive au niveau du point D , la butée B bloque le mouvement du ressort qui retrouve dans cette position sa longueur à vide et libère la bille.

Remarques : La bille reste en contact avec le lanceur de O à D .

Les forces de frottement peuvent être considérées comme négligeables par rapport aux autres forces.

- Lors de la phase de lancement, la force exercée par le ressort sur la bille est supérieure à la force exercée par la bille sur le ressort.
- Lors de la phase de lancement, entre les position O et D , le mouvement de la bille est uniformément accéléré.
- L'énergie potentielle élastique du ressort est égale à 40 mJ lorsqu'il est comprimé.
- L'énergie cinétique acquise par la bille en D est égale à 40 mJ.

26 FESIC 2008

Vrai ou faux ?

Soit le pendule élastique ci-dessous constitué d'un cylindre de masse $m = 200$ g attaché à un ressort dont la constante de raideur est $k = 20$ N.m⁻¹.

On considère que l'ensemble peut coulisser sans frottement sur une tige horizontale. Lorsque le cylindre est en équilibre, son centre d'inertie coïncide avec la graduation O de l'axe (figure 1.11).

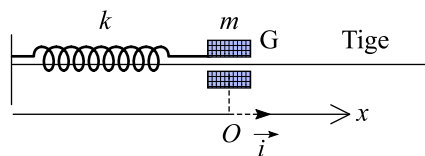


Figure 1.11

Données : $2\pi \approx 6,3$; $\sqrt{10} \approx 3,2$; $6,3 \times 3,2 \approx 20$;

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} ; \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 ; \frac{2}{\sqrt{2}} \approx 1,4.$$

- La période des oscillations de ce pendule est de 0,63 s.

La solution générale de l'équation différentielle du mouvement s'écrit sous la forme :

$x(t) = x_m \cos\left(2\pi \frac{t}{T_0} + \varphi_0\right)$ où x_m est l'amplitude du mouvement en mètres, T_0 la période et φ_0 la phase à l'origine.

On écarte le solide de sa position d'équilibre d'une distance x telle que $x = +2,0$ cm, puis on le lance avec une vitesse de composante $v_{x_0} = +0,20$ m.s⁻¹.

b. L'équation horaire du mouvement est : $x(t) = 2,8 \cdot 10^{-2} \cos\left(10t - \frac{\pi}{4}\right)$.

c. Le mobile inverse le sens de son mouvement à la date $t_1 = \pi/40$ s.

d. Le mobile repasse par sa position d'équilibre à la date $t_2 = 3\pi/40$ s.

27 ECE 2007

Vrai ou faux ?

On s'intéresse à l'énergie d'une masse m soumise à la force de rappel d'un ressort de constante de raideur k . Cet oscillateur s'amortit au cours du mouvement sous l'effet d'une force de frottement $\vec{F}_f = -b\vec{v}$ avec b coefficient de frottement dynamique. On donne l'équation de mouvement de cet oscillateur amorti

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

et on pose

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad ; \quad Q = \frac{m}{b}\omega_0.$$

L'énergie s'écrit $E = E_0 e^{-\frac{b}{m}t}$ avec E_0 énergie mécanique totale à l'instant $t = 0$.

On pourra faire l'approximation $e^{(-x)} \approx 1 - x$; $\ln 3 \approx 1$; $\ln \frac{2}{3} \approx -0,4$.

1. La fraction d'énergie perdue pendant une période de mouvement est

$$\frac{\Delta E}{E} = -\frac{2\pi b}{m\omega_0}.$$

2. $\sqrt{\frac{k}{m}}$ a la dimension d'une période.

En prenant $\omega_0 = 10$ s.i. ; $Q = 400$,

3. $x(t) = Ae^{-\frac{b}{m}t} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$ est l'équation de mouvement pour cet oscillateur avec A constante.

4. L'amplitude des oscillations est réduite de $2/3$ au bout de 100 s.

28 GEIPI 2004

On considérera dans ce problème des ressorts à spires non jointives et de masses négligeables. Les extrémités des ressorts se situeront sur un axe horizontal. Soit un solide (S) de masse M et d'épaisseur négligeable, accroché aux ressorts. Les seules forces agissant sur cet objet seront exercées par les ressorts.

Premier cas : Le solide (S) est accroché à un seul ressort (de raideur k et de longueur au repos l_0) dont l'autre extrémité est fixe. (figure 1.12)

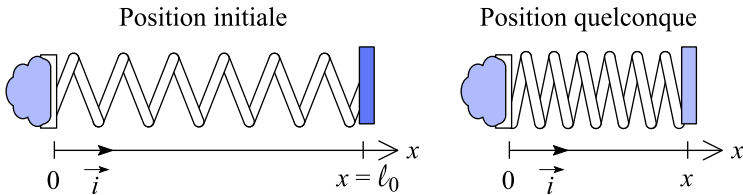


Figure 1.12

1. Écrire l'équation différentielle du mouvement de (S) de masse M .
2. Donner l'expression de la période T du mouvement.

Deuxième cas : Le solide (S) est accroché à deux ressorts. Le ressort R_1 de gauche a une raideur k_1 et une longueur au repos l_0 . Le ressort R_2 de droite a une raideur k_2 et une même longueur au repos l_0 . Les extrémités des ressorts non liées à (S) sont fixes. (figure 1.13)

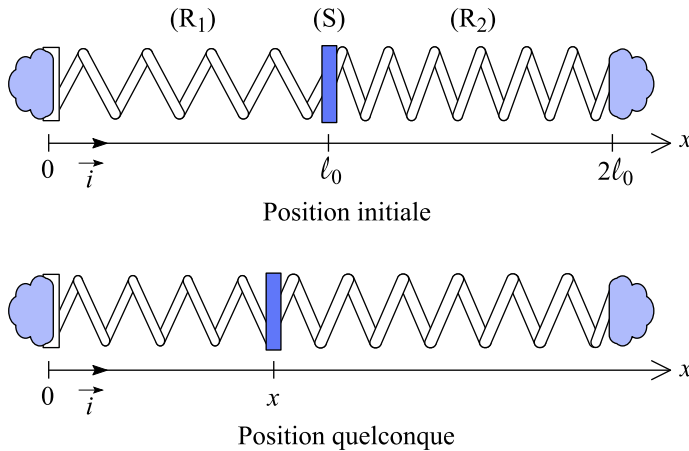


Figure 1.13

3. Donner l'expression des forces s'exerçant sur (S).
4. En déduire l'équation différentielle du mouvement.
5. Cette association de deux ressorts équivaut à un ressort unique de raideur k_{eq} . Donner l'expression de k_{eq} .

Troisième cas : Le solide (S) est accroché au ressort R_2 de raideur k_2 et de longueur au repos l_{02} . L'autre extrémité de ce ressort est liée au ressort R_1 de raideur k_1 et de longueur au repos l_{01} . L'autre extrémité du ressort R_1 est fixe (figure 1.14).

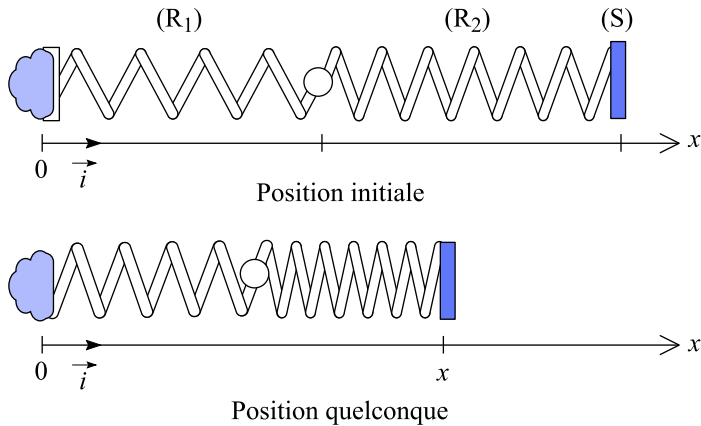


Figure 1.14

6. Comparer la force exercée par le ressort R_2 sur (S) , $\vec{F}_{R_2/S}$ à la force exercée par le ressort R_1 sur le ressort R_2 , \vec{F}_{R_1/R_2} .

7. Cette association de deux ressorts équivaut à un ressort unique de raideur k'_{eq} et de longueur à vide $l_{0_{eq}}$. Donner les expressions de $l_{0_{eq}}$ et k'_{eq} .

29 ECE 2007

Vrai ou faux ?

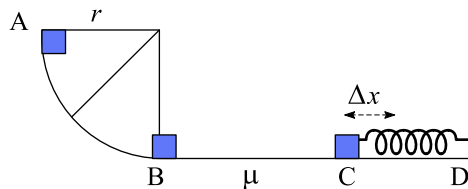


Figure 1.15

On considère un solide ponctuel de masse $m = 1 \text{ kg}$ glissant sans vitesse initiale, à partir du point A sur un quart de cercle vertical de rayon 1 m et prolongé par une piste horizontale BC , de 2 m de longueur, caractérisée par une force de frottement $F = \mu R$ avec $\mu = \frac{1}{4}$ et R réaction normale entre le support et le solide. Le solide M continue son trajet et percute alors un ressort de raideur k qu'il comprime de 10 cm .

On donne : $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ et $\sqrt{10} = 3,15$.

1. La vitesse v_B que doit avoir la masse au point B est $v_B = 6 \text{ m.s}^{-1}$.
2. Le travail effectué par la force de frottements entre B et C est $W_{BC} = 5 \text{ J}$.
3. La vitesse du solide au point C est $v_C = 3,15 \text{ m.s}^{-1}$.
4. La constante de raideur de ce ressort est de 1000 N.m^{-1} .

1.1 Unités

1 Réponse : E.

Le joule est l'unité d'énergie dans le système international ; elle est donc homogène au produit d'une masse et du carré d'une vitesse.

Toutes les formes d'énergies et les travaux des forces possèdent la même dimension physique : produit d'une masse et du carré d'une longueur divisée par le carré d'un temps, ce que nous notons $[\mathcal{E}] = \mathcal{M} \cdot \mathcal{L}^2 \cdot \mathcal{T}^{-2}$, où $[\mathcal{E}]$ se lit « dimension d'une énergie ». Il en est ainsi des énergies cinétique, potentielle, électrique accumulée dans un condensateur, magnétique emmagasinée dans une bobine d'auto-induction, acoustique des ondes sonores ou ultrasonores ou celle transportée par les ondes mécaniques ou électromagnétiques, etc. Vous remarquerez que les moments d'une force par rapport à un point ou à un axe ont aussi la même dimension physique que l'énergie.

Vous devez distinguer la dimension, unique, d'une grandeur physique des unités, multiples, en lesquelles elle peut être mesurée. Une de ces unités possibles est officielle, celle du Système International d'Unités (ex : le joule, de symbole J) ; d'autres sont admises car adoptées pour leur commodité ou par tradition (ex : l'électronvolt, de symbole eV, $1 \text{ eV} \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ eV}$) ; d'autres encore peuvent se rencontrer au détour d'exposés plus ancien et sont aujourd'hui tombées en désuétude (ex : la calorie, symbole cal, $1 \text{ cal} \approx 4,18 \text{ J}$).

Les dimensions fondamentales sont au nombre de sept : longueur (\mathcal{L}), temps (\mathcal{T}), masse (\mathcal{M}), intensité de courant électrique (\mathcal{I}), température thermodynamique (Θ), quantité de matière (\mathcal{N}) et intensité lumineuse (\mathcal{J}). Les unités de base correspondantes sont : le mètre, la seconde, le kilogramme, l'ampère, le kelvin, la mole et la candela.

2 Réponse : A.

Le volt est l'unité de tension ou de différence de potentiel. Ces dernières ont la dimension d'une énergie ramenée à une charge ou d'une puissance ramenée à une intensité de courant électrique (la puissance électrique reçue par un dipôle $P = U \cdot I$, où U est la tension aux bornes du dipôle et I l'intensité du courant électrique qui le traverse, les conventions étant réceptrices). Or, la puissance possède la dimension d'une énergie ramenée à un temps. Donc, une tension possède la même dimension qu'une énergie divisée par un temps et par une intensité, $[U] = [P]/\mathcal{I} = [\mathcal{E}]/[\text{charge}]$. L'exercice précédent donne l'unité équivalente du joule, unité d'énergie, le temps est exprimé en seconde (s) et l'intensité de courant électrique en ampère (A). La réponse est donc $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{A}^{-1}$ soit $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1}$.

1.2 Cinématique

3 Réponse : A.

De 0 à 5 s, la vitesse du mobile croît linéairement de 0 à 25 m.s^{-1} donc l'accélération est constante et vaut $(25 - 0)/(5 - 0) = 5 \text{ m.s}^{-2}$. De 5 s à 15 s, sa vitesse est constante donc son accélération est nulle. Sur les 5 s suivantes, la vitesse décroît jusqu'à zéro, donc l'accélération est opposée à celle de la première phase, $(0 - 25)/(20 - 15) = -5 \text{ m.s}^{-2}$. De 20 s à 25 s, le corps est immobile, son accélération est de nouveau nulle. De 25 s à 30 s le mouvement est identique à celui de la première phase et l'accélération reprend la même valeur, $(25 - 0)/(30 - 25) = 5 \text{ m.s}^{-2}$. L'accélération est donc constante par morceau, positive au départ, puis nulle, puis négative, nulle à nouveau, enfin positive. La seule courbe ayant ces caractéristiques est celle de la réponse A, et de surcroît les valeurs des accélérations des phases successives et les instants délimitant ces phases correspondent.

Le vecteur accélération d'un point matériel dans un référentiel \mathcal{R} donné est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse dans le même référentiel,

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(t) = \dot{\vec{v}}_{\mathcal{R}}(t).$$

Lorsque le mouvement est *linéaire* donc unidimensionnel, la relation devient scalaire $a_{\mathcal{R}}(t) = \dot{v}_{\mathcal{R}}(t)$, comme ici. Cette précision manque et l'ambiguïté de la formulation fait que $v(t)$ pourrait très bien représenter la norme du vecteur vitesse, $v(t) = \|\vec{v}_{\mathcal{R}}(t)\|$ et s'il s'agissait par exemple d'un mouvement circulaire, nous ne pourrions rien dire sur l'accélération sans connaître au moins le rayon.



Quand l'énoncé manque *a priori* de précision, l'attitude raisonnable est de « faire simple »...

4 Réponse : D.

$a = \|\vec{a}(t)\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ avec $a_x = \dot{v}_x(t) = \ddot{x}(t)$ et $a_y = \dot{v}_y(t) = \ddot{y}(t)$; soit en l'espèce

$$\dot{x}(t) = 2\alpha.t \text{ et } \ddot{x}(t) = 2\alpha \quad \text{et} \quad \dot{y}(t) = 2\beta.t \text{ et } \ddot{y}(t) = 2\beta.$$

Ainsi

$$a = \sqrt{(2\alpha)^2 + (2\beta)^2} = 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

d'où le résultat.

A priori, le mouvement d'un point M se déroule dans les trois dimensions de l'espace et sa position doit, pour être définie de manière univoque, être repérée par trois coordonnées spatiales dans un repère de projection du référentiel d'étude, par exemple $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$; elles permettent ainsi d'écrire le vecteur position de M ,

$$\vec{OM}(t) = x(t).\vec{e}_x + y(t).\vec{e}_y + z(t).\vec{e}_z,$$

ses vecteurs vitesse dans le référentiel

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t).\vec{e}_x + \dot{y}(t).\vec{e}_y + \dot{z}(t).\vec{e}_z$$

et accélération dans le même référentiel

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{x}(t).\vec{e}_x + \ddot{y}(t).\vec{e}_y + \ddot{z}(t).\vec{e}_z.$$

5

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| F | F | V | V |

1. L'accélération du centre d'inertie de la voiture est $a = 5 \text{ m.s}^{-2}$, constante, donc, par intégration, sa vitesse est $v(t) = a.t$ et sa position $x(t) = \frac{1}{2}a.t^2$. Donc au bout de 10 s, la position de son centre d'inertie est $x(10\text{s}) = \frac{1}{2}.5.10^2 = 250 \text{ m}$.

2. La nature du mouvement du second véhicule est la même que celle du premier : mouvement rectiligne uniformément accéléré. La même distance étant parcourue pendant une durée double, si nous désignons par a_1 et a_2 les accélérations respectives des deux voitures, nous devons avoir $a_1.t_0^2 = a_2.(2t_0)^2$ soit $a_2 = a_1/4$, d'où $a_2 = 1,25 \text{ m.s}^{-2}$.

3. La vitesse du bonhomme au bout de 10 s est $v(10\text{s}) = \sqrt{(\dot{x}(10\text{s}))^2 + (\dot{y}(10\text{s}))^2}$; or $\dot{x}(t) = -t+5$ soit $\dot{x}(10\text{s}) = -5 \text{ m.s}^{-1}$ et $\dot{y}(t) = 0,5.t-10$ soit $\dot{y}(10\text{s}) = -5 \text{ m.s}^{-1}$. Ainsi, $v(10\text{s}) = \sqrt{50} \approx 7 \text{ m.s}^{-1}$.

4. Son accélération est $a(10\text{s}) = \sqrt{(\ddot{x}(10\text{s}))^2 + (\ddot{y}(10\text{s}))^2}$; or $\ddot{x}(t) = -1$ et $\ddot{y}(t) = 0,5$, en m.s^{-2} . Ainsi l'accélération est constante et vaut à tout instant

$$a = \sqrt{(-1)^2 + (0,5)^2} = \sqrt{5 \times 0,25} \approx 1,12 \text{ m.s}^{-2}.$$

6 Réponse : E.

La vitesse (en tant que norme) d'un point en mouvement de rotation uniforme est $v = R.\omega$, où R est le rayon de la trajectoire circulaire en m et ω la vitesse angulaire en rad.s^{-1} . D'où

$$v = 0,5 \times 2\pi \times 4 = 4\pi \text{ m.s}^{-1}.$$

Lorsque la trajectoire d'un point M dans un référentiel est plane, il est possible de donner ses vecteurs vitesse $\vec{v}(t)$ et accélération $\vec{a}(t)$ dans le référentiel à l'aide du repère de Frenet (M, \vec{t}, \vec{n}) , où \vec{t} est le vecteur unitaire (dépendant du temps) tangent en M à la trajectoire du point et orientée dans le sens du mouvement, et \vec{n} le vecteur unitaire orthogonal à \vec{t} en M , contenu dans le plan de la trajectoire et dirigé vers l'intérieur de la concavité de la courbe.

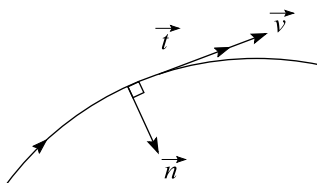


Figure 1.16

Ainsi, $\vec{v}(t) = v(t)\vec{t}(t)$ où $v(t) = \|\vec{v}(t)\|$ et

$$\vec{a}(t) = \dot{v}(t)\vec{t}(t) + \frac{(v(t))^2}{\rho(t)}\vec{n}(t),$$

$\rho(t)$ étant le rayon de courbure de la trajectoire au point M . Nous voyons ainsi que l'exercice 3 pourrait prendre une toute autre signification sans la précision explicite de la nature du mouvement : si le mouvement était circulaire non uniforme de rayon R , avec une norme de la vitesse $v(t)$ telle celle représentée dans l'énoncé, alors

$$a(t) = \|\vec{a}(t)\| = \sqrt{(\dot{v}(t))^2 + \left(\frac{(v(t))^2}{\rho(t)}\right)^2} \neq \dot{v}(t).$$

Naturellement, si le mouvement est rectiligne, les vecteurs \vec{t} et \vec{n} sont alors indépendants du temps, le rayon de courbure $\rho(t)$ devient infini et le second terme sous la racine s'annule : nous retrouvons la situation de l'exercice. Cela montre, s'il en était besoin, la nécessité d'être précis dans la description d'un phénomène...

1.3 Dynamique et énergie

7 Réponse : D.

Le mouvement du projectile est une rotation uniforme ; *a priori*, la force à laquelle le projectile est soumis est exercée par la lanière, notée \vec{f} . L'application du principe fondamental de la dynamique appliqué au centre d'inertie du projectile est : $m.\vec{a} = \vec{f}$, avec $\vec{a} = (v(t))^2.\vec{n}/R$. D'où $f = \|\vec{f}\| = m.v^2/R = m.R.\omega^2$, soit $f = 0,25 \times 0,5 \times (2\pi \times 4)^2 \approx 80 \text{ N}$.



Deux points nécessitent d'être examinés dans l'analyse de la situation proposée. D'une part, la nature galiléenne du référentiel n'est pas précisée dans l'énoncé : il faut donc la supposer. D'autre part, même si le mouvement du projectile de la fronde est circulaire dans un plan horizontal pour simplifier le problème, le projectile est en réalité soumis à la force \vec{f} exercée par la lanière et à son poids $\vec{P} = m.\vec{g}$, où \vec{g} est le vecteur accélération de la pesanteur, vertical et descendant. Le principe fondamental de la dynamique appliqué au centre d'inertie du projectile — ce qui ne peut avoir de sens que dans un référentiel galiléen, — donne donc : $\vec{f} + \vec{P} = m.\vec{a}$, \vec{a} étant l'accélération du centre d'inertie dans le référentiel en question ; elle est, d'après la nature du mouvement et de la trajectoire du projectile, dans un plan horizontal. (cf. la figure ci-dessous)

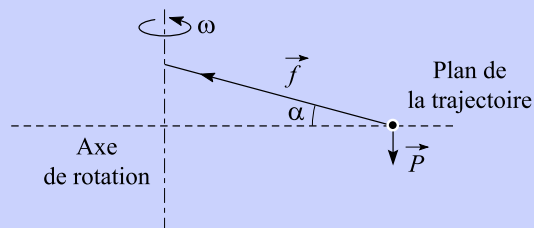


Figure 1.17

Il résulte de cette analyse que la lanière est nécessairement inclinée par rapport à l'horizontale, l'angle d'inclinaison α étant déterminé par la longueur l de la lanière et le rayon de la trajectoire : $\cos \alpha = R/l$ (1). La norme f de la force \vec{f} doit être telle que $\sin \alpha = mg/f$ (2) et la résultante centripète des forces, $m.R.\omega^2\vec{n}$ telle que $\cos \alpha = m.R.\omega^2/f$ (3). Par conséquence, combinant les relations (1) et (3), il découle en toute rigueur que $f = m.l.\omega^2$: ce qui intervient alors dans la force est en fait la longueur de la lanière (qui n'est pas donnée) et non le rayon de la trajectoire du projectile. Seule la comparaison des normes du poids du projectile (environ 2,5 N) et de la résultante des forces (80 N) permet de conclure que le poids est négligeable, $\vec{f} + \vec{P} \approx \vec{f}$, et donc, que $\alpha \approx 0$ et $l \approx R$, validant le résultat que l'on attendait de vous comme réponse.

8

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| F | F | F | F |

1. Désignons par v_s la vitesse de la masse au niveau du sol, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le théorème de l'énergie cinétique donne alors, en l'absence de frottement,

$$\frac{1}{2}.m.v_s^2 - \frac{1}{2}.m.v_0^2 = m.g.h,$$

$m.g.h$ étant le travail du poids de la masse pendant sa chute. Ainsi, après multiplication des deux membres par 2, simplification par m , passage de v_0^2 dans le membre de droite de la relation et prise de racine carrée, il vient :

$$v_s = \sqrt{2.g.h + v_0^2},$$

soit, numériquement : $v_s = \sqrt{2 \times 10 \times 50 + 10^2} = \sqrt{1\,100} \approx 33 \text{ m.s}^{-1}$, ce qui rend l'assertion 1 fausse.

2. Au sol l'énergie cinétique sera, toujours d'après le théorème de l'énergie cinétique, $\mathcal{E}_c = m.g.h + \frac{1}{2}.m.v_0^2$. Soit, numériquement, $\mathcal{E}_c = 1 \times 10 \times 50 + 0,5 \times 1 \times 10^2 = 550 \text{ J}$, invalidant la proposition.

3. Le théorème de l'énergie cinétique devient

$$\frac{1}{2}.m.v_s^2 - \frac{1}{2}.m.v_0^2 = m.g.h - F.h,$$

$m.g.h$ étant toujours le travail du poids de la masse pendant sa chute et $-F.h$ le travail de la force de frottement de l'air, supposée constante, durant la chute. La vitesse au sol est alors

$$v_s = \sqrt{2.g.h - \frac{2.F.h}{m} + v_0^2},$$

soit, numériquement :

$$v_s = \sqrt{2 \times 10 \times 50 - 2 \times 1 \times 50/1 + 10^2} = \sqrt{1\,000} \approx 32 \text{ m.s}^{-1},$$

ce qui ne correspond pas à la valeur proposée.

4. Au sol l'énergie cinétique sera, toujours d'après le théorème de l'énergie cinétique, $\mathcal{E}_c = m.g.h - F.h + \frac{1}{2}.m.v_0^2$.

Soit, numériquement, $\mathcal{E}_c = 1 \times 10 \times 50 - 1 \times 50 + 0,5 \times 1 \times 10^2 = 500 \text{ J}$, invalidant à nouveau la proposition.



Songez à utiliser le théorème de l'énergie cinétique lorsqu'il n'y a pas de lois horaires demandées.

Le référentiel dans lequel est étudiée la chute devait être supposé galiléen, précision sans laquelle le théorème de l'énergie cinétique que vous connaissez ne saurait être appliqué.

Par ailleurs, ceux qui seraient gênés par l'absence d'indication sur l'orientation de la vitesse initiale, à savoir, vers le haut ou vers le bas dans le cas d'un mouvement unidimensionnel (ce qui, au passage, n'est pas explicitement annoncé) examineront les deux situations. Ils constateront qu'elles conduisent, en l'absence de frottement de l'air, au même résultat final : en effet, après la phase de montée, la masse repasse au niveau de son point de lancement avec une vitesse de même norme que celle qu'elle possédait au moment de son lancement vers le haut, mais avec une orientation opposée, désormais dirigée vers le bas. En revanche, en présence du frottement de l'air, il n'y a plus équivalence des deux situations : si la vitesse est initialement orientée vers le haut, après sa montée, elle repassera au niveau de son point de lancement avec une vitesse inférieure en norme à celle de son lancement ; en effet, une partie de l'énergie cinétique initiale a déjà été dissipée par frottement dans l'air à ce moment-là.

Les demandes sur les valeurs de l'énergie cinétique auraient dû être explicitement complétées par la précision des instants auxquels on souhaitait obtenir ces quantités, par exemple « lorsque la masse touche le sol » ou tout autre.

Enfin, il faut toujours se demander si l'unité dans laquelle une donnée est présentée est l'unité légale.

9

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| F | V | F | F |

a. Observez sur la courbe de l'altitude z en fonction du temps que $z(t)$ est approximativement linéaire à partir de $t = 8$ s : son mouvement est donc rectiligne uniforme à partir de cet instant. La proposition **a.** est donc fausse.

b. La dimension de la force est $\mathcal{M} \cdot \mathcal{L} \cdot \mathcal{T}^{-2}$; d'après l'expression qui en est donnée, sa dimension $[f] = [\eta] \cdot [R] \cdot [\vec{v}]$ conduit à $[\eta] = [f]/([R] \cdot [\vec{v}])$, d'où $[\eta] = \mathcal{M} \cdot \mathcal{L} \cdot \mathcal{T}^{-2} / (\mathcal{L} \cdot \mathcal{L} \cdot \mathcal{T}^{-1}) = \mathcal{M} \cdot \mathcal{L}^{-1} \cdot \mathcal{T}^{-1}$ et son unité s'en déduit : $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, validant la proposition **b.**

c. La différence d'altitude entre les instants $t_1 = 8$ s et $t_2 = 16$ s, Δh vaut $z_2 - z_1 \approx -8$ m, donc la vitesse limite est égale à $\Delta h / (t_2 - t_1) \approx -8/8 \approx -1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La valeur de la vitesse limite atteinte par la goutte est ainsi $-1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ce qui invalide l'affirmation.

d. La goutte d'eau tombe sous l'effet de son poids, $m\vec{g} = \frac{4}{3}\pi R^3\rho\vec{g}$ et de la force de freinage \vec{f} . Une fois le régime transitoire achevé, la goutte possède une vitesse constante et en supposant le référentiel galiléen, l'application du principe fondamental de la dynamique au centre d'inertie de la goutte donne pendant cette phase du mouvement

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} = m\vec{g} - 6\pi\eta R\vec{v},$$

soit

$$\vec{v}_l = \frac{2}{9}\frac{R^2}{\eta}\rho\vec{g}.$$

L'assertion est donc fautive, puisque la vitesse limite est proportionnelle au carré du rayon de la goutte.

En toute rigueur, il faudrait aussi tenir compte de la poussée d'Archimède de la goutte dans l'air, $\vec{P}_a = -\frac{4}{3}\pi R^3\rho_{air}\vec{g}$ dans le bilan des forces et la vitesse limite deviendrait alors :

$$\vec{v}_l = \frac{2}{9}\frac{R^2}{\eta}(\rho - \rho_{air})\vec{g}.$$

Cela ne modifie en rien la dépendance de la vitesse limite en fonction du rayon de la goutte.



Pour répondre à l'assertion c. vous devez faire attention à l'échelle données pour l'axe des ordonnées. Par ailleurs, l'expression « la valeur de... » est imprécise : s'agit-il de valeur algébrique, c'est-à-dire de la projection du vecteur vitesse sur le vecteur unitaire, orienté vers le haut d'après les valeurs des ordonnées, ou de la norme, c'est-à-dire la valeur absolue lorsqu'on est à une dimension ?

10

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| F | F | F | F |

1. Dans ce premier modèle, la goutte tombe sous l'effet de son seul poids $m\vec{g}$. Si on suppose le référentiel terrestre comme galiléen, le principe fondamental de la dynamique appliqué au centre d'inertie de la goutte donne $m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g}$ soit une accélération $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}$. Posez $\vec{OM} = x(t)\vec{x} + y(t)\vec{y} + z(t)\vec{z}$, comme d'après l'énoncé $\vec{g} = g\vec{y}$,

la projection du principe fondamental de la dynamique sur les vecteurs de la base conduit à $\ddot{x}(t) = 0$, $\ddot{y}(t) = g$ et $\ddot{z} = 0$. En supposant que la vitesse tombe sans vitesse initiale, vous intégrez chacune de ces trois équations par rapport au temps et vous obtenez : $\dot{x}(t) = 0$, $\dot{y} = gt$ et $\dot{z} = 0$. Enfin, une nouvelle intégration par rapport au temps vous conduit aux équations horaires suivantes, en tenant compte de l'origine du repère de projection prise à l'endroit où la goutte quitte le nuage : $x(t) = 0$, $y(t) = \frac{1}{2}gt^2$ et $z(t) = 0$. Il y a donc un signe « - » en trop à l'équation horaire proposée, qui de ce fait est fautive.

2. L'application du théorème de l'énergie cinétique entre l'instant où la goutte d'eau quitte le nuage, sans vitesse initiale et celui où elle atteint le sol avec la vitesse v recherchée donne dans le cadre du modèle où seul le poids travaille :

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgh,$$

avec h la hauteur de chute de la goutte. Simplifiez par m et multipliez par 2 des deux membres, vous obtenez alors $v = \sqrt{2gh}$, soit numériquement

$$v = \sqrt{2 \times 10 \times 4500} = \sqrt{90000} = 300 \text{ m.s}^{-1}$$

3. La poussée d'Archimède qui s'exerce sur la goutte est opposée au poids du volume de fluide (en l'occurrence, l'air) déplacé, soit $\vec{\Pi} = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{air} \vec{g}$. Donc, sa norme $\Pi = \|\vec{\Pi}\| \approx \frac{4}{3} \times 3 \times (5.10^{-3})^3 \times 1 \times 10 \approx 5.10^{-6} \text{ N}$ et non les 5.10^{-7} N annoncés.

4. La masse m de la goutte vaut $\rho_{eau} \cdot V = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{eau}$; soit

$$m \approx \frac{4}{3} \times 3 \times (5.10^{-3})^3 \times 10^3 = 5.10^{-4} \text{ kg}$$

soit 0,5 g ou 500 mg et non 5 mg.



La loi horaire proposée en **1.** serait correcte avec un axe vertical orienté vers le haut, or d'après la définition de \vec{g} que l'énoncé donnait, il était clair que l'orientation de cet axe dans le sens de \vec{g} , donc vers le bas, était choisie. Si vous avez la certitude d'avoir obtenu la loi horaire, la question **2.** peut être résolue à partir des lois horaires. En effet, la durée de la chute t_0 est donnée par la relation $h = \frac{1}{2}gt_0^2$ soit $t_0 = \sqrt{2h/g}$ et la vitesse au sol est alors $v = gt_0 = \sqrt{2gh}$, expression identique à celle donnée par application du théorème de l'énergie cinétique.

11

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| V | V | V | V |

a. Le référentiel est supposé galiléen, donc vous pouvez appliquer le théorème de l'énergie cinétique entre l'instant de lancement ($v = v_0$) et celui où la balle atteint son altitude maximale à une hauteur h et avec une vitesse nulle et vous obtenez :

$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh,$$

où $-mgh$ est le travail, résistant donc négatif, du poids de la masse. Il en découle que l'altitude h vaut $h = v_0^2/(2g)$, soit, numériquement : $h = 12^2/2/10 = 144/20 = 7,2$ m.

b. L'équation aux dimensions donne $[\vec{f}] = [k] \cdot [\vec{v}]$ d'où

$$[k] = [\vec{f}]/[\vec{v}] = \mathcal{M} \cdot \mathcal{L} \cdot \mathcal{T}^{-2} / (\mathcal{L} \cdot \mathcal{T}^{-1}) = \mathcal{M} \cdot \mathcal{T}^{-1};$$

son unité dans le Système International s'en déduit : $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

c. La balle est soumise dans le référentiel supposé galiléen à son poids $m\vec{g}$ et à la force de frottement $-k\vec{v}$. Le principe fondamental de la dynamique appliqué au centre d'inertie de la balle permet d'affirmer que :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - k\vec{v}.$$

Or, à son altitude maximale, la vitesse de la balle est nulle, ce qui annule le second terme du membre de droite. L'accélération de la balle à cet instant particulier vaut donc \vec{g} .

d. En supposant que la chute soit suffisamment longue pour que la balle puisse atteindre sa vitesse limite \vec{v}_l , vous obtiendrez cette dernière en écrivant que, la vitesse ne variant plus, l'accélération est nulle dans l'équation exprimant le principe fondamental de la dynamique. Ainsi, $\vec{0} = m\vec{g} - k\vec{v}_l$, soit $\vec{v}_l = m\vec{g}/k$; d'où, numériquement : $v_l = \|\vec{v}_l\| = 0,1 \times 10/0,1 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

12

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| F | F | F | F |

a. Dire qu'il n'y a pas de frottement, c'est dire que la réaction est orthogonale (ou normale) au déplacement, donc normale au plan incliné, de sorte qu'elle ne travaille pas, mais elle n'est pas nulle.

b. Elle équilibre la composante du poids perpendiculaire au plan incliné et elle vaut donc $mg \cos \alpha$.

c. La résultante de ces forces n'est pas nulle : la composante du poids parallèle au plan incliné n'est pas compensée. La résultante des forces est ainsi constante, non nulle et l'accélération est donc constante : le mouvement est uniformément varié.

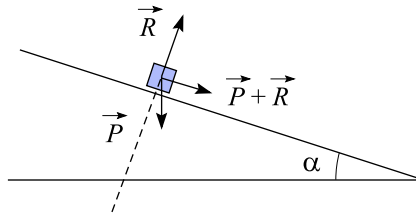


Figure 1.18

d. L'application du principe fondamental de la dynamique au centre d'inertie du mobile donne

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{R},$$

soit en projection sur la direction du mouvement : $m\ddot{x}(t) = mg \sin \alpha$, d'où l'accélération $a_x = g \sin \alpha$; numériquement, $a_x \approx 10 \times 0,17 = 1,7 \text{ m.s}^{-2}$ et non $1,4 \text{ m.s}^{-2}$.

13 Réponse : B.

Le solide est soumis à trois forces : son poids $\vec{P} = m\vec{g}$, vertical, la réaction \vec{R} du plan incliné, orthogonale au plan et la force de frottement \vec{f} , de sens opposé à la vitesse.

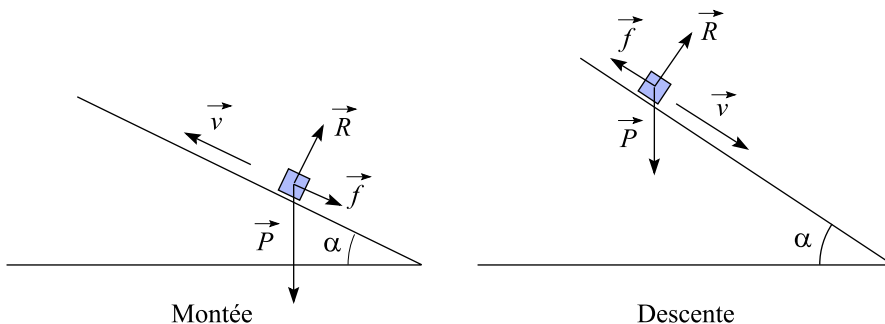


Figure 1.19

Dans le référentiel d'étude supposé galiléen, le théorème de l'énergie cinétique appliqué au centre d'inertie du solide entre l'instant initial où le solide est lancé vers le haut de la ligne de plus grande pente du plan incliné avec une vitesse \vec{v}_0 et l'instant où

il est arrêté en fin de montée après un parcours de longueur L le long du plan incliné donne ainsi :

$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \mathcal{W}(\vec{P}) + \mathcal{W}(\vec{R}) + \mathcal{W}(\vec{f}).$$

Or, la réaction du plan incliné, normale au déplacement, ne travaille pas : $\mathcal{W}(\vec{R}) = 0$; le travail du poids, $\mathcal{W}(\vec{P})$, est égal $-mg \cdot L \cdot \sin \alpha$, $L \cdot \sin \alpha$ représentant la hauteur dont monte le centre d'inertie du solide, et celui de la force de frottement, $\mathcal{W}(\vec{f})$, vaut $-f \cdot L$. Ainsi, le théorème de l'énergie cinétique se transforme en :

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = -(mg \cdot \sin \alpha + f) \cdot L,$$

d'où

$$L = \frac{mv_0^2}{2(mg \cdot \sin \alpha + f)},$$

numériquement, $L = 0,5 \times 0,2 \times 3^2 / (0,2 \times 10 \times 0,1 + 0,1) = 3$ m. Ce qui correspond à la proposition **B**



Considérez le référentiel dans lequel se déroule l'expérience comme galiléen, même si ce caractère n'est souvent pas mentionné dans les énoncés.

Dans ce type d'exercice, il vous faut assez fréquemment résoudre complètement le problème posé pour examiner les différentes propositions. Par application du principe fondamental de la dynamique au centre d'inertie, vous pourrez vérifier que l'accélération a_x , lors de la montée, vaut $g \cdot \sin \alpha + f/m$, soit $a_x = 10 \times 0,1 + 0,1/0,2 = 1,5 \text{ m.s}^{-2}$ et, pendant la descente, $a_x = g \cdot \sin \alpha - f/m$, soit $a_x = 10 \times 0,1 - 0,1/0,2 = 0,5 \text{ m.s}^{-2}$, l'axe (Ox) étant orienté vers le bas du plan incliné dans les deux phases du mouvement. Les propositions **C** et **D** sont de la sorte infirmées.

Il est clair, à cause du frottement, que la vitesse au passage par O à la descente sera plus faible que v_0 : le théorème de l'énergie cinétique appliqué entre l'instant où le solide est au zénith de sa trajectoire et l'instant où il repasse par le point O à la descente, donne

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - 0 = mg \cdot \sin \alpha \cdot L - f \cdot L,$$

soit

$$v_1 = \sqrt{2L \cdot \left(g \cdot \sin \alpha - \frac{f}{m} \right)},$$

numériquement, $v_1 = \sqrt{2 \times 3 \times (10 \times 0,1 - 0,1/0,2)} \approx 1,73 \text{ m.s}^{-1}$, ce qui invalide la proposition **E**.

14

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| V | F | V | F |

1. L'objet est soumis aux trois forces suivantes : son poids, vertical, $m\vec{g}$, la réaction normale du plancher de la benne \vec{R} et le frottement \vec{f} entre le plancher et l'objet, dirigé suivant la pente de la benne, vers le haut. Au moment où l'objet se met en mouvement, le frottement $\mu_{stat}R$ devient inférieur à la composante du poids dirigée suivant la pente de la benne. D'où, à la limite du mouvement $\mu_{stat}mg \cdot \cos \theta = mg \cdot \sin \theta$, soit, après simplification par m et g , $\mu_{stat} = \tan \theta$. Numériquement $\mu_{stat} = \tan 30^\circ \approx 0,5$. La proposition est donc vraie.

2. L'objet ayant une accélération uniforme, le mouvement de son centre d'inertie suivant la ligne de plus grande pente (Ox) est gouverné par l'équation $\ddot{x} = a = cte$; vous en déduirez, après intégration par rapport au temps et en tenant compte de ce que la vitesse initiale de l'objet est nulle, $\dot{x} = a \cdot t$ et, après une seconde intégration par rapport au temps et en faisant coïncider l'origine O avec la position initiale de l'objet dans la benne, la loi horaire $x = \frac{1}{2}a \cdot t^2$. Ainsi l'accélération est donnée par la relation $a = 2x/t^2$, soit numériquement $a = 2 \times 2/2^2 = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. La proposition 2. est ainsi fautive.

3. D'après l'énoncé, la quantité d'accélération ma est égale à la différence de la composante du poids selon la pente de la benne $mg \cdot \sin \theta$ et le frottement dynamique $\mu_{dyn}mg \cos \theta$; ainsi, $ma = mg \cdot \sin \theta - \mu_{dyn}mg \cos \theta$, soit

$$\mu_{dyn} = \frac{g \sin \theta - a}{g \cos \theta}.$$

La proposition 3. est donc vraie.

4. D'après ce qui précède, $\mu_{dyn} = (10 \times 0,5 - 1)/(10 \times 0,8) = 0,5$, différent du résultat proposé.

1.4 Tirs et chute libre

15

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| V | V | F | V |

a. Le colis possède, à l'instant de son largage, la même vitesse que l'avion. La proposition est donc vraie.

b. Le colis n'est, par hypothèse, soumis qu'à son poids $m\vec{g}$, dirigé vers le bas. L'accélération \vec{a} de son centre d'inertie est donc égale à \vec{g} , constante, donc le mouvement du centre d'inertie du colis est uniformément accéléré avec une vitesse initiale horizontale en S . La proposition **b.** est donc vraie.

c. La proposition est fausse puisque le colis possède à tout instant, en l'absence de résistance de l'air, la même composante horizontale de vitesse v_0 qui vient s'ajouter à la composante verticale descendante due à sa chute libre.

d. Vous avez déjà affirmé que l'accélération du centre d'inertie du solide était égale à l'accélération de la pesanteur. Si vous désignez par z l'altitude du colis, l'axe (Oz) étant dirigé vers le haut, alors $\ddot{z} = -g$; par intégration par rapport au temps et en tenant compte de ce que la vitesse initiale n'a pas de composante verticale, vous avez $\dot{z} = -g \cdot t$, puis après une nouvelle intégration par rapport au temps et en notant z_0 l'altitude de largage, l'équation horaire de l'altitude $z = z_0 - \frac{1}{2}g \cdot t^2$. La durée de la chute du colis est donné par l'instant t_c auquel l'altitude s'annule; ainsi, $t_c = \sqrt{2z_0/g}$, soit, numériquement, $t_c = \sqrt{2 \times 3,0 \times 10^3/10} = \sqrt{600} = 10\sqrt{6} \approx 24$ s.



En toute rigueur, la proposition **b.** devrait être plus précise et énoncer « la trajectoire du centre d'inertie du colis est un arc de parabole... ». En effet, dans un solide, c'est son centre d'inertie qui possède le mouvement le plus simple, centre d'inertie qui n'est, par ailleurs, pas nécessairement un point matériel appartenant au solide. Pour vous persuader de cette dernière assertion, demandez-vous où est le centre d'inertie d'une bouée de sauvetage.

16

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| F | V | F | V |

a. Le centre d'inertie de la bouée n'est soumis qu'à son poids $m\vec{g}$. Si vous considérez que le référentiel terrestre peut être supposé galiléen, l'application du principe fondamental de la dynamique au centre d'inertie de la bouée vous conduit à $m\vec{\ddot{v}} = m\vec{g}$, soit $\vec{\ddot{v}} = \vec{g}$. La projection de cette dernière équation sur les axes (Ox) et (Oy) vous donne respectivement $\ddot{v}_x = \ddot{x} = 0$ et $\ddot{v}_y = \ddot{y} = g$. Les conditions initiales pour intégrer ces deux relations sont $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$ pour la position du centre d'inertie de la bouée et $v_x(0) = v_0$ et $v_y(0) = 0$ pour sa vitesse à l'instant du largage. Vous en déduisez par une première intégration par rapport au temps : $v_x = \dot{x} = v_0$ et $v_y = \dot{y} = gt$; une seconde intégration par rapport au temps vous conduit à $x(t) = v_0t$ et $y(t) = \frac{1}{2}gt^2$, soit numériquement : $x(t) = 100t$ et $y(t) = 5t^2$, vu les unités.

- b.** Le temps t_0 au bout duquel la bouée atteindra la surface de la mer est obtenu en écrivant que $h = y(t_0)$ soit $h = \frac{1}{2}gt_0^2$ d'où $t_0 = \sqrt{2h/g}$; numériquement, $h = \sqrt{2 \times 80/10} = 4$ s.
- c.** La bouée tombe dans la mer à $x(t_0)$ du point A, soit $x = v_0 t_0$; numériquement, $x(4) = 100 \times 4 = 400$ m et non 1 440 m du point A.
- d.** Les équations horaires du mouvement de l'avion sont en effet $x(t) = v_0 t$ et $y(t) = 0$. Donc, $x(4) = 400$ m et aussi la distance parcourue par l'avion entre le largage de la bouée et sa pénétration dans l'eau.

Vous remarquerez que, dans ce modèle sans résistance de l'air, la bouée pénètre dans la mer à la verticale de l'avion. Ainsi, pour un observateur dans l'avion, il s'agit donc d'une chute libre : c'est une manifestation de la relativité galiléenne des points de vue. Les observateurs liés respectivement à la mer et à l'avion se déplacent l'un par rapport à l'autre à vitesse constante et sont de ce fait tous les deux liés à des référentiels galiléens. Le bilan des forces s'exerçant sur le centre d'inertie de la bouée pour l'observateur dans l'avion est rigoureusement le même que celui que nous avons fait en **a.** en nous plaçant implicitement du point de vue du nageur au repos dans la mer.



Vous devez faire attention aux unités des données et à celles devant être employées dans les équations ainsi qu'aux orientations des axes.

17 Réponses : 1. portion de parabole,

2. $v_{x0} = V_0 \cos \alpha$, $v_{z0} = V_0 \sin \alpha$,
3. $x(t) = V_0 \cos \alpha t$ et $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin \alpha t + z_0$,
4.
$$z = -\frac{1}{2} \frac{g}{V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha \cdot x + z_0,$$
5.
$$V_0 = \frac{x}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2(z_0 - z + \tan \alpha \cdot x)}},$$
6. $V_{01} = 13,0 \text{ m.s}^{-1}$ et $V_{02} = 15,3 \text{ m.s}^{-1}$ et $V_{01} < V_0 < V_{02}$.

Explications :

1. La balle n'est soumise qu'à son poids $m\vec{g}$, force constante, donc le mouvement de son centre d'inertie est uniformément varié et la trajectoire qui en résulte, la vitesse initiale n'étant pas colinéaire à la force, est ainsi une portion de parabole.

2. La projection de \vec{V}_0 sur l'axe Ox est $V_{x0} = V_0 \cos \alpha$; celle sur l'axe Oz est $V_{z0} = V_0 \sin \alpha$.

3. Le référentiel est supposé galiléen; l'application du principe fondamental de la dynamique au centre d'inertie de la balle conduit à $m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g}$, soit $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}$. La projection de cette dernière relation sur Ox donne ainsi $\dot{v}_x = \ddot{x} = 0$ et sur Oz , $\dot{v}_z = \ddot{z} = -g$. Par intégration par rapport au temps et en tenant compte des conditions initiales, vous obtiendrez les deux lois de vitesse $v_x = \dot{x} = V_0 \cos \alpha$ et $v_z = \dot{z} = -gt + V_0 \sin \alpha$; vous intégrerez une seconde fois par rapport au temps et aurez ainsi les lois horaires $x = V_0 \cos \alpha \cdot t$ et $z = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin \alpha \cdot t + z_0$.

4. Vous obtiendrez l'équation de la trajectoire en éliminant le paramètre temps, t , entre $x(t)$ et $z(t)$. Extrayez t de la plus simple, $t = x / (V_0 \cos \alpha)$ et remplacez le dans l'équation horaire de $z(t)$:

$$z = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x}{V_0 \cos \alpha} \right)^2 + V_0 \sin \alpha \cdot \left(\frac{x}{V_0 \cos \alpha} \right) + z_0,$$

soit, après simplification, $z = -\frac{1}{2} \frac{g}{V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha \cdot x + z_0$.

5. À partir de la dernière relation que vous avez obtenue à la question précédente, vous isolez V_0 . Ainsi,

$$z - z_0 - \tan \alpha \cdot x = -\frac{1}{2} \frac{g}{V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2,$$

puis

$$\frac{2(z - z_0 - \tan \alpha \cdot x)}{gx^2} = -\frac{1}{V_0^2 \cos^2 \alpha};$$

vous inversez les deux membres de l'équation,

$$\frac{gx^2}{2(z - z_0 - \tan \alpha \cdot x)} = -V_0^2 \cos^2 \alpha$$

puis vous divisez par $\cos^2 \alpha$,

$$\frac{gx^2}{2 \cos^2 \alpha (z - z_0 - \tan \alpha \cdot x)} = -V_0^2$$

et enfin vous changez les signes du numérateur du membre de gauche, éliminez celui du membre de droite de l'égalité et prenez la racine carrée des deux membres :

$$V_0 = \frac{x}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2(z_0 - z + \tan \alpha \cdot x)}}.$$

6. Vous remplacez dans l'expression précédente x et z par les valeurs de x_1 et z_1 afin de déterminer la valeur de V_{01} ; numériquement,

$$V_{01} = 15 / \cos 45^\circ \times \sqrt{9,8 / (2 \times (1 - 3 + 15 \tan 45^\circ))} \approx 13,0 \text{ m.s}^{-1}.$$

Vous faites de même pour V_{02} :

$$V_{02} = 25 / \cos 45^\circ \times \sqrt{9,8 / (2 \times (1 - 0 + 15 \tan 45^\circ))} \approx 15,3 \text{ m.s}^{-1}.$$

18

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| F | V | F | V |

a. La balle étant dirigée vers le haut, la courbe de son énergie potentielle mgh doit d'abord augmenter, puis, une fois atteint le sommet de sa trajectoire décroître. C'est la courbe 2 qui représente ce profil. La courbe 1 est la courbe d'énergie cinétique en fonction du temps : ceci est confirmé par le fait que l'énergie cinétique diminue au fur et à mesure que la bille monte, et donc, qu'elle ralentit, puis augmente lorsque la bille perd de l'altitude et prend de la vitesse.

b. Le système est supposé conservatif, la résistance de l'air étant négligée. Ainsi, à n'importe quel instant, la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle est la même ; trois points permettent de le vérifier aisément : à l'instant initial où l'énergie cinétique \mathcal{E}_c est égale à 1,25 J et son énergie potentielle \mathcal{E}_p égale à 1,45 J, à l'instant $t = 0,5$ s où la bille est au sommet de la trajectoire, pour lequel ces deux énergies valent respectivement 0 J et 2,7 J et à l'instant $t \approx 1,23$ s de son impact sur le sol où ces énergies valent alors respectivement 2,7 J et 0 J. L'énergie mécanique initiale est donc bien égale à 2,7 J environ.

c. L'énergie potentielle initiale de la bille, \mathcal{E}_{p0} , vaut 1,45 J ; or, son expression mgh_0 conduit à $h_0 = \mathcal{E}_{p0} / mg$, soit numériquement $h_0 = 1,45 / (0,1 \times 10) = 1,45$ m.

d. L'énergie cinétique au moment de l'impact sur le sol, à l'instant $t_i \approx 1,23$ s vaut 2,7 J ; toute l'énergie mécanique initiale est alors sous forme d'énergie cinétique.

Or, l'expression de l'énergie cinétique \mathcal{E}_c est $\frac{1}{2}mv^2$; ainsi $v = \sqrt{2\mathcal{E}_{ci}/m}$, soit numériquement, $v = \sqrt{2 \times 2,7 / 0,1} = \sqrt{54} \approx 7,4 \text{ m.s}^{-1}$.

1.5 Gravitation universelle

19 Réponses : 1. $TC = \frac{m_L}{m_T + m_L} \cdot d_{TL}$, $TC \approx 5176$ km.

2. Une ellipse.

3. Force de gravitation universelle.

4. $\vec{F} = -G (m_L \cdot m_T / d_{TL}^2) \cdot \vec{u}$, $F = 2,15 \cdot 10^{20}$ N.

5. $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$ ou $\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

6. $\vec{a}_L = - (v_L^2 / d_{TL}) \cdot \vec{u}$.

7. $\vec{a}_L = - (Gm_T / d_{TL}^2) \cdot \vec{u}$.

8. $v_L = \sqrt{Gm_T / d_{TL}}$.

$v_L = 1015 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $T_r = 2\pi d_{TL} / v_L$, $T_r = 27 \text{ j } 17 \text{ h } 50 \text{ mn } 7 \text{ s}$.

Explications :

1. La position C du centre d'inertie du système Terre-Lune est donnée par l'équation : $m_T \vec{CT} + m_L \vec{CL} = \vec{0}$. En décomposant le vecteur \vec{CL} en $\vec{CT} + \vec{TL}$ et en remplaçant dans l'égalité, vous obtiendrez $m_T \vec{CT} + m_L (\vec{CT} + \vec{TL}) = \vec{0}$ d'où vous tirez $(m_T + m_L) \vec{CT} + m_L \vec{TL} = \vec{0}$ soit

$$\vec{TC} = \frac{m_L}{m_T + m_L} \vec{TL}.$$

En norme, la relation donne

$$TC = \frac{m_L}{m_T + m_L} \cdot d_{TL}.$$

Numériquement la distance TC qui est la norme de \vec{TC} vaut

$$TC = \frac{8,1 \cdot 10^{22}}{5,980 \cdot 10^{24} + 8,1 \cdot 10^{22}} \times 387\,200 \approx 5\,176 \text{ km}.$$

2. La trajectoire de la Lune dans ce modèle est une ellipse.

3. Il s'agit de la force de gravitation universelle.

4. L'expression de la force d'attraction universelle de la Terre sur la Lune est

$$\vec{F} = -G \frac{m_T m_L}{d_{TL}^2} \vec{u}.$$

Son intensité est $F = G (m_T m_L / d_{TL}^2)$; soit numériquement

$$F = 6,67 \cdot 10^{-11} \times 5,980 \cdot 10^{24} \times 8,1 \cdot 10^{22} / (3,872 \cdot 10^8)^2 \approx 2,15 \cdot 10^{20} \text{ N}.$$

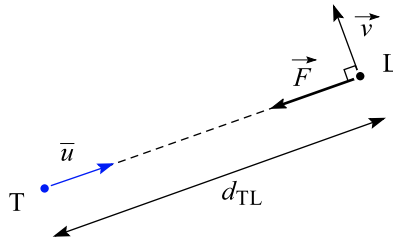


Figure 1.20

5. La dimension de la constante de l'attraction universelle est :

$[G] = [\vec{F}] \cdot [d^2]/[m^2]$ soit $[G] = \mathcal{M} \mathcal{L} \mathcal{T}^{-2} \mathcal{L}^2 / \mathcal{M}^2 = \mathcal{L}^3 / (\mathcal{M} \mathcal{T}^2)$. L'unité de la constante en découle $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$.

6. L'expression désirée correspond à celle de l'accélération centripète dans le repère de coordonnées polaires : $\vec{a}_L = - (v_L^2 / d_{TL}) \cdot \vec{u}$.

7. La Lune est soumise à la seule force de gravitation universelle ; ainsi, $m_L \vec{a}_L = \vec{F}$, soit, en utilisant l'expression de la force donnée à la question 4. et en simplifiant par m_L , $\vec{a}_L = - (Gm_T / d_{TL}^2) \vec{u}$.

8. Voir sur le schéma ci-dessus. La vitesse est tangente à la trajectoire et orthogonale à la force. L'égalité des deux expressions de l'accélération de la lune conduit à $v_L^2 / d_{TL} = Gm_T / d_{TL}^2$ d'où $v^2 = Gm_T / d_{TL}$, soit $v_L = \sqrt{Gm_T / d_{TL}}$; numériquement, $v_L = \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \times 5,980 \cdot 10^{24} / 3,872 \cdot 10^8} \approx 1015 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

La période de révolution de la lune est donnée par le rapport de la longueur de la trajectoire de la lune $2\pi d_{TL}$ par la vitesse v_L à laquelle elle est parcourue :

$$T_r = \frac{2\pi d_{TL}}{v_L} = \frac{2\pi d_{TL}^{3/2}}{(Gm_T)^{1/2}}$$

Numériquement,

$$T_r = 2 \times \pi \times (3,872 \cdot 10^8)^{(3/2)} / (6,67 \cdot 10^{-11} \times 5,98 \cdot 10^{24})^{(1/2)} \approx 2,397 \cdot 10^6 \text{ s,}$$

ce qui donne 27 j 17 h 50 mn 7 s.

20

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| V | F | V | V |

a. Le point, en mouvement circulaire, n'est soumis qu'à la force d'attraction universelle : son accélération est normale ; or, dans le repère de Frenet, cette accélération $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{t} + \frac{v^2}{R} \vec{n}$, où v est la vitesse du point, R le rayon de courbure de la trajectoire et \vec{t} le vecteur unitaire tangent à la trajectoire et orienté dans le sens de celle-ci, se

réduit à $\vec{a} = \frac{v^2}{R} \vec{n} = \frac{GM_T}{R^2} \vec{n}$ où \vec{n} est le vecteur unitaire de même direction et de même sens que la force d'attraction. Comme la trajectoire est de plus circulaire, alors R est constant et v est donc constante : le mouvement circulaire est nécessairement uniforme.

b. Dans l'expression de l'accélération, le rayon de courbure est $R = R_T + h$ et non R_T . Comme la vitesse est égale à la circonférence de la trajectoire divisée par la période, $v = 2\pi(R_T + h)/T$ et ainsi,

$$\frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2(R_T + h)^2}{T^2} \cdot \frac{1}{R_T + h} = \frac{4\pi^2(R_T + h)}{T^2} = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2},$$

d'où

$$\frac{4\pi^2}{GM_T} = \frac{T^2}{(R_T + h)^3}.$$

c. L'application de la troisième loi de Kepler donne

$$T^2 = \frac{4\pi^2(R_T + h)^3}{(GM_T)};$$

or, l'accélération de la pesanteur g' est égale, à l'altitude h , à $GM_T/(R_T + h)^2$, d'où

$$T^2 = 4\pi^2(R_T + h)/g' \text{ et } T = \sqrt{4\pi^2(R_T + h)/g'} = 2\pi\sqrt{(R_T + h)/g'}.$$

Numériquement,

$$T = 2 \times \pi \sqrt{6640 \cdot 10^3 / 9} = 2 \times \pi \times 10 \times \sqrt{10} \times \sqrt{6640} / 3 \\ \approx 20 \times 10 \times 81 / 3 = 5,4 \cdot 10^3 \text{ s soit } 1 \text{ h } 30 \text{ mn}$$

d. Un satellite géostationnaire orbite autour de la Terre en 24 h et possède donc une vitesse angulaire $2\pi/T$ inférieure à celle de la navette spatiale.

21

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| F | F | V | V |

1. Le module de la force d'attraction exercée par M_T sur m est

$$F = \frac{GmM_T}{(R + h)^2}.$$

En effet, c'est la distance entre l'objet et le centre de la Terre qui intervient au dénominateur.

2. L'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre est à peu près égale au module du champ de gravitation au point considéré. À savoir $g \approx GM_T/R^2$ soit $M_T \approx gR^2/G$; numériquement, $M_T \approx 10 \times (6,7 \cdot 10^6)^2 / 6,7 \cdot 10^{-11} \approx 6,7 \cdot 10^{24}$ kg.

3. L'énergie mécanique E_m de l'objet en l'absence de frottements est conservée ; or, par définition, cette énergie est égale à la somme des énergies cinétique et potentielle, soit $E_m = E_c + E_p$. À l'altitude h et sans vitesse initiale, l'énergie mécanique vaut :

$$E_m = -\frac{GmM_T}{(R+h)} ;$$

au sol, elle devient :

$$E_m = -\frac{GmM_T}{R} + \frac{1}{2}mv^2 .$$

Ainsi, au sol, la vitesse atteinte est-elle donnée par la relation

$$-GmM_T/(R+h) = -GmM_T/R + (1/2)mv^2 ;$$

en simplifiant par m et en remplaçant GM_T par gR^2 , on obtient

$$(1/2)v^2 - gR = -gR^2/(R+h)$$

puis $v^2 = 2gR - 2gR^2/(R+h)$ et, en mettant $2gR$ en facteur dans le membre de droite de la dernière relation

$$v^2 = 2gR \left(1 - \frac{R}{(R+h)} \right) ,$$

enfin, en prenant la racine carrée des deux membres, on retrouve l'expression donnée, qui est donc vraie.

4. L'énergie mécanique de l'objet à l'altitude h qui permet la libération doit être positive car la libération signifie que l'objet va à l'infini, donc que son énergie potentielle devient nulle, et, qu'à l'infini, sa vitesse soit encore non nulle. Ainsi, à la limite, $E_m = -GmM_T/(R+h) + (1/2)mv_l^2 = 0$ soit, en simplifiant par m et en isolant v_l , la relation donnée par l'énoncé qui de ce fait est vraie.

Il convient de se rappeler la distinction entre champ de pesanteur et champ de gravitation. Le champ de gravitation créé en un point Q par une masse M située au point P est le rapport de la force d'attraction universelle qu'exercerait la masse M sur une masse m située en Q à la masse m en question. La force d'attraction universelle que M en P exerce sur m en Q est

$$\vec{F}_{P \rightarrow Q} = -GmM \frac{P\vec{Q}}{\|P\vec{Q}\|^3} .$$

Ainsi, noté $\vec{G}(Q)$, le champ de gravitation en Q est défini par la relation

$$\vec{F}_{P \rightarrow Q} = m\vec{G}(Q) .$$

Le champ de pesanteur $\vec{g}(Q)$ en un point Q est la somme du champ de pesanteur en Q et de l'effet centrifuge en ce point dû à la rotation de la Terre sur elle-même ; cet effet est traduit par une accélération d'entraînement $\vec{a}_{ie}(Q) = -\omega^2 \vec{H}Q$, où ω est la vitesse angulaire de la Terre dans sa rotation propre et H le projeté orthogonal du point Q sur l'axe de rotation. Par conséquence,

$$\vec{g}(Q) = \vec{G}(Q) - \vec{a}_{ie}(Q) = \vec{G}(Q) + \omega^2 \vec{H}Q.$$

Le terme correctif est nul aux pôles, puisque Q et H sont alors confondus et maximum sur l'équateur où le terme correctif $\omega^2 \|\vec{H}Q\|$ est $\omega^2 R$, R étant le rayon équatorial terrestre, soit, numériquement de l'ordre de $(2\pi/(24 \times 60 \times 60))^2 \times 6,4 \cdot 10^6 \approx 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

1.6 Pendule simple

22

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| F | V | V | V |

a. La masse n'intervient pas dans l'expression de la période des oscillations du pendule qui est égale à $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

b. Le système est conservatif, donc, à tout instant, son énergie mécanique est égale à son énergie mécanique initiale. Or, celle-ci est égale à l'énergie potentielle initiale puisque la vitesse initiale du pendule est nulle. Ainsi, en désignant par E_c l'énergie cinétique et E_p l'énergie potentielle de pesanteur, $E_m = E_c + E_p = E_{p0}$. Or, à l'instant initial, l'énergie potentielle vaut mgh_0 , h_0 représentant l'altitude initiale du pendule par rapport à son point le plus bas, soit $h_0 = l(1 - \cos \alpha)$. Numériquement, $E_m = 10^{-2} \times 10 \times 1 \times (1 - 0,99) = 10^{-3} \text{ J} = 1 \text{ mJ}$.

c. La vitesse maximale est atteinte lorsque l'énergie cinétique de la masse est elle-même maximale et donc lorsque son énergie potentielle est minimale. Or, la constitution du pendule et le niveau de référence choisi pour l'énergie potentielle font que sa valeur minimale est égale à 0 J ; alors l'énergie cinétique est égale à l'énergie mécanique, soit $E_m = \frac{1}{2}mv_{max}^2$, d'où $v_{max}^2 = 2E_m/m$ et $v_{max} = \sqrt{2E_m/m}$.

d. D'après l'expression qui précède, lorsque la vitesse vaut $v_{max}/2$, l'énergie cinétique devient à $\frac{1}{2}m(v_{max}/2)^2$, soit $\frac{1}{4}\frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{4}E_m$.

L'énergie mécanique du pendule à l'instant t est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle à cet instant, soit : $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p$. Or l'énergie potentielle à l'instant t est égale à $mgh(t)$ où $h(t)$ est l'altitude de la masse par rapport au plan horizontal de référence choisi à l'instant t , soit $h = l(1 - \cos \theta(t))$, avec $\theta(t)$ écart angulaire du pendule à l'instant t par rapport à la verticale descendante (cf. schéma ci-dessous).

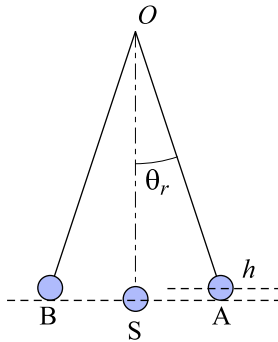


Figure 1.21

À l'instant t , la vitesse de la masse est égale $\|l\dot{\theta}(t)\|$ et son énergie cinétique s'exprime par $\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2(t)$. Ainsi,

$$E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2(t) + mgl(1 - \cos \theta(t))$$

L'énergie se conserve au cours du temps puisque les phénomènes dissipatifs sont négligés ; sa dérivée par rapport au temps est donc égale à 0.

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = \frac{1}{2}ml^2 \cdot 2\dot{\theta}(t) \cdot \ddot{\theta}(t) + mgl\dot{\theta}(t) \sin \theta(t),$$

en factorisant $ml\dot{\theta}(t)$, il vient

$$0 = ml\dot{\theta}(t) (l\ddot{\theta}(t) + g \sin \theta(t)).$$

Or, au cours du mouvement, θ varie et donc $\dot{\theta} \neq 0$ sauf aux instants particuliers où le pendule atteint son altitude maximale. Il en résulte que la nullité de l'expression n'est satisfaite à tout instant que si

$$0 = l\ddot{\theta}(t) + g \sin \theta(t)$$

soit

$$0 = \ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \sin \theta(t).$$

Pour les angles θ exprimés en radians et petits en valeur absolue par rapport à 1, $\sin \theta \approx \theta$ et l'équation différentielle du mouvement devient

$$0 = \ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \theta(t).$$

On reconnaît dans cette expression l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ et donc de période

$$T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{l/g}.$$

23

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| V | F | V | V |

1. La situation est identique à celle de l'exercice précédent. L'altitude de la masse m par rapport au plan de référence, lorsque sa position est $\theta(t)$, est donc positive et égale à $l(1 - \cos \theta)$; l'énergie potentielle dans la position $\theta(t)$ est ainsi $mg l(1 - \cos \theta(t))$.

2. L'expression est inhomogène puisque le membre de droite de la relation proposée a pour dimension $\mathcal{M} \mathcal{L}^2 \mathcal{T}^{-1}$ et non $\mathcal{M} \mathcal{L}^2 \mathcal{T}^{-2}$ comme il le faudrait. L'expression correcte serait $E_c(\theta) = \frac{1}{2} m l^2 \left[\frac{d\theta}{dt} \right]^2$.

3. L'énergie mécanique totale, E , somme des énergies cinétique E_c et potentielle E_p au même instant t , est constante puisque les frottements sont supposés inexistantes. Elle peut donc être déterminée à n'importe quel instant et donc en particulier à l'instant initial pour lequel $\theta_0 = 0$ et $\left[\frac{d\theta}{dt} \right]_0 = \alpha \sqrt{\frac{g}{l}}$; l'énergie potentielle initiale est donc nulle et l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} m v_0^2$ avec $v_0 = l \left[\frac{d\theta}{dt} \right]_0 = l \alpha \sqrt{\frac{g}{l}}$. Ainsi,

$$E_c = \frac{1}{2} m \left(l \alpha \sqrt{\frac{g}{l}} \right)^2 = \frac{1}{2} m g \alpha^2 l.$$

4. L'équation représente en fait l'équation de conservation de l'énergie mécanique. En effet, d'après la question qui précède, $E = E_p + E_c$ soit

$$E = m g l (1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m g \alpha^2 l.$$

La division par $ml^2/2$ des deux membres de la dernière égalité donne

$$\frac{g}{l}\alpha^2 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{2g}{l}(1 - \cos \theta) ;$$

en isolant le terme $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ dans le membre de gauche, vous obtiendrez directement l'équation proposée.

24 Réponses : 1. $T = 1$ s et $l = 24,8$ cm.

2. $a = 0,140$ rad, $b = 2\pi$ et $c = 0$ rad.

3. $\theta'(t) = -b\theta_0 \sin(bt + c)$, $v_A = 0$ m.s⁻¹, $v_S = 0,218$ m.s⁻¹.

4. En A, $E_c = 0$ et $E_p = 0,477$ mJ ; en S, $E_M = 0,477$ mJ.

5. $g_L = 1,63$ m.s⁻².

Explications :

1. Pour un tempo de 120 signaux sonores par minute, à deux signaux par période, il faut soixante périodes par minutes soit $T = 1$ s. La pulsation propre des oscillations

(cf. Rappel théorique de l'ex. 22) est égale à $\sqrt{\frac{g}{l}}$, or $\omega = \frac{2\pi}{T}$, soit $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ et

$$l = g \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2. \text{ D'où, } l = 9,81 \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \approx 0,2485 \text{ m soit } 24,85 \text{ cm.}$$

2. Par définition, a représente l'amplitude maximale de l'oscillation angulaire, b la pulsation propre de l'oscillateur et c la phase à l'origine. Ainsi, la valeur de b est elle $2\pi/1 = 2\pi$ rad.s⁻¹. En remplaçant t par 0 dans l'expression, vous obtenez $\theta_m = a \cos(c)$ et $\theta'(0) = -ab \sin(c) = 0$ puisque le pendule est lâché à partir de θ_m sans vitesse initiale. La seconde relation conduit à $c = 0$ rad ou $c = \pi$ rad, ni a ni b n'étant nuls ; si vous choisissez $c = 0$ alors a sera égal à $\theta_m = 8^\circ$ ou $8\pi/180 \approx 0,140$ rad ; si vous choisissez $c = \pi$ alors a sera égal à $-\theta_m$. Dans les deux cas, l'expression finale sera $\theta(t) = 0,140 \cos(2\pi t)$ rad.

3. D'après l'expression précédente, $\theta'(t) = -ba \sin(bt + c)$. Le module de la vitesse instantanée de la masse M est $|\theta'(t)|$; numériquement,

$$v(t) = 0,2485 \times 2\pi \times 0,140 |\sin(2\pi t)|.$$

En A, c'est-à-dire à $t = 0$, $v_A = v(0) = 0$ et en S, c'est-à-dire après un quart de période, soit $t = 1/4$ s, $v_S = v(0,25) = 0,218$ m.s⁻¹.

4. Au point A, l'altitude de la masse M par rapport au plan de référence est maximale, elle vaut $l(1 - \cos \theta_m)$ et son énergie potentielle est donc $E_p(0) = mgl(1 - \cos \theta_m)$; numériquement,

$$E_p(0) = 20 \cdot 10^{-3} \times 9,81 \times 0,2485 \times (1 - \cos 0,140) \approx 0,477 \text{ mJ.}$$

L'énergie mécanique de la masse au point S est égale, le système étant conservatif, à celle en tout point de sa trajectoire, donc à son énergie mécanique en A , soit $E_p = 0,477 \text{ mJ}$. L'énergie mécanique de la masse en S étant entièrement sous forme d'énergie cinétique, vous pouvez vérifier que

$$\frac{1}{2}mv_S^2 = 0,5 \times 20 \cdot 10^{-3} \times 0,218^2 \approx 0,475 \text{ mJ},$$

soit le même résultat aux approximations intermédiaires près.

5. Que l'on soit sur la Terre ou sur la Lune, la théorie du pendule pesant est la même

et notamment l'expression de la période devient $T_L = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_L}}$ soit, en divisant

l'expression obtenue sur Terre par celle obtenue sur la Lune, $\frac{T}{T_L} = \sqrt{\frac{g_L}{g}}$; d'où

$$g_L = g \left(\frac{T}{T_L}\right)^2. \text{ Numériquement, } g_L = 9,81 \left(\frac{1}{2,45}\right)^2 \approx 1,63 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$



La mesure précise de la période des oscillations du pendule simple — dès que les horlogers ont su concevoir des horloges non fondées sur l'usage de la pesanteur (horloges à ressorts, au XVIII^e siècle) — a mis en évidence les irrégularités de g à la surface de la Terre et a permis de se rendre compte d'une valeur moyenne de g plus faible au niveau de l'équateur que près des pôles.

1.7 Pendule élastique

25

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| F | F | V | F |

a. La bille est soumise à trois forces : la force $\vec{F}_{R \rightarrow m}$ que le ressort exerce sur la bille, le poids de la bille, $m\vec{g}$ et la réaction normale du plan incliné sur la bille, \vec{N} . Le point C de contact entre le ressort et la bille est soumis aux deux forces $\vec{F}_{R \rightarrow m}$ et à celle que la bille exerce sur le ressort, $\vec{F}_{m \rightarrow R}$. Comme ce point est sans masse, $m_C = 0$, le principe fondamental de la dynamique appliqué au point C dans le référentiel, supposé galiléen, du flipper conduit à $m_C \vec{a}_C = 0 = \vec{F}_{R \rightarrow m} + \vec{F}_{m \rightarrow R}$. Ainsi les deux forces sont-elles opposées ; la première n'est pas supérieure à la seconde. Il s'agit naturellement du principe de l'action et de la réaction.

b. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la bille dans le référentiel du flipper, supposé galiléen, donne donc $m\vec{a}_m = \vec{F}_{R \rightarrow m} + m\vec{g} + \vec{N}$. Or, la force du ressort sur la bille dépend de sa compression alors que le poids et la réaction du plan incliné

sont constantes ; la résultante n'est donc pas constante et le mouvement ne peut pas être supposé uniformément accéléré.

c. L'énergie potentielle du ressort, lorsque sa longueur est l , est donnée par l'expression $E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$. Ici, $E_p = 0,5 \times 50 \times (0,08 - 0,12)^2 = 40 \text{ mJ}$.

d. L'énergie potentielle élastique du ressort est transformée pour partie en énergie cinétique pour la bille, mais aussi, celle-ci s'élevant à cause de l'inclinaison du dispositif par rapport à l'horizontale, en énergie potentielle de pesanteur. Ainsi, $E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 = \frac{1}{2}mv_D^2 + mg \cdot OD \cdot \sin \alpha$.

Soit un ressort d'extrémités A et B , de raideur k et de longueur à vide (ou au repos) l_0 et de masse négligeable. La force que le ressort exerce sur l'objet auquel il est attaché en B est, en notant $l = AB = \|\vec{A}\vec{B}\|$, et \vec{u}_{AB} le vecteur unitaire dirigé de A vers B ,

$$\vec{F}_B = -k(l - l_0)\vec{u}_{AB}.$$

La force que le ressort exercerait sur un objet auquel il serait attaché par l'extrémité A serait

$$\vec{F}_A = k(l - l_0)\vec{u}_{AB} = -\vec{F}_B,$$

cette propriété valant aussi bien en extension qu'en compression et les deux forces demeurant toujours dans l'axe du ressort. (figure 1.22)

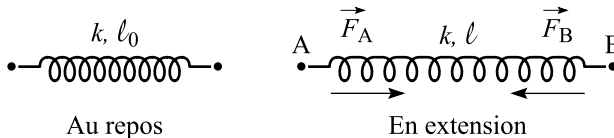


Figure 1.22

Le travail élémentaire fourni par ces forces lorsqu'on modifie la longueur du ressort en déplaçant A de la quantité élémentaire $d(\vec{O}\vec{A})$ et B de $d(\vec{O}\vec{B})$ est

$$\begin{aligned} \delta W &= \vec{F}_B \cdot d(\vec{O}\vec{B}) + \vec{F}_A \cdot d(\vec{O}\vec{A}) \\ &= \vec{F}_B \cdot d(\vec{O}\vec{B}) - \vec{F}_B \cdot d(\vec{O}\vec{A}) \\ &= \vec{F}_B \cdot (d(\vec{O}\vec{B}) - d(\vec{O}\vec{A})) \\ &= \vec{F}_B \cdot (d(\vec{O}\vec{B} - \vec{O}\vec{A})) \\ &= \vec{F}_B \cdot d\vec{A}\vec{B} \\ &= -k(l - l_0)\vec{u}_{AB} \cdot d(l\vec{u}_{AB}) \end{aligned}$$

Or, $d(l\vec{u}_{AB}) = (dl)\vec{u}_{AB} + ld\vec{u}_{AB}$; comme $\vec{u}_{AB}^2 = 1$, il vient, en dérivant cette dernière expression par rapport au temps, que

$$2\vec{u}_{AB} \cdot \frac{d\vec{u}_{AB}}{dt} = 0,$$

et donc que le vecteur unitaire \vec{u}_{AB} est orthogonal $d\vec{u}_{AB}$. Ainsi,

$$\delta W = -k(l - l_0)\vec{u}_{AB} \cdot ((dl)\vec{u}_{AB} + ld\vec{u}_{AB}) = -k(l - l_0)dl.$$

Or $-k(l - l_0)dl = -d\left(\frac{1}{2}k(l - l_0)^2\right)$ et, d'après la définition de la variation de l'énergie potentielle, $\delta W = -dE_p$, il vient que

$$E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + cte.$$

Il est habituel de prendre comme référence de l'énergie potentielle élastique, une énergie nulle lorsque le ressort est au repos et donc d'égaliser à 0 la constante.



L'expression de l'énergie potentielle élastique $E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$ est à connaître par coeur avec la signification exacte de tous les termes qui y entrent.

26

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| V | V | V | V |

1. La pulsation des oscillations de l'oscillateur harmonique est $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et sa période est donc $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$.

Numériquement, $T_0 = 2\pi\sqrt{0,2/20} \approx 6,3/10 = 0,63$ s.

2. Les conditions initiales donnent pour la position à $t = 0$ s, $x(0) = x_m \cos \varphi_0 = 0,02$ m et pour la vitesse au même instant $\dot{x}(0) = -\omega_0 x_m \sin \varphi_0 = 0,2$ m.s⁻¹. Or, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, soit $\omega_0 = \sqrt{20/0,2} = 10$ rad.s⁻¹ d'où les deux relations $x_m \cos \varphi_0 = 0,02$ m et $-x_m \sin \varphi_0 = 0,02$ m. En divisant membre à membre la seconde relation par la première, nous avons $\tan \varphi_0 = -1$ soit $\varphi_0 = -\frac{\pi}{4}$ rad. x_m se déduit alors de la première relation :

$$x_m = 0,02 / \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0,02 \times 2/\sqrt{2} \approx 0,02 \times 1,4 = 0,028 \text{ m} \quad \text{ou} \quad 2,8 \text{ cm.}$$

3. La vitesse du mobile a pour expression $\dot{x}(t) = -\omega_0 x_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ avec $\omega_0 = 10 \text{ rad.s}^{-1}$, $x_m = 2,8 \text{ cm}$ et $\varphi_0 = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}$. La vitesse initiale est positive et le mobile inverse le sens de son mouvement lors du premier passage par 0 de l'argument du sinus, à savoir pour $t_1 = -\varphi_0/\omega_0$, soit pour $t_1 = \pi/40 \text{ s}$.

4. Le mobile passe par ses positions d'équilibre lorsque $\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = 0$ soit $\omega_0 t + \varphi_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où k est un entier quelconque, donc, pour $t = \frac{(2k+1)\pi - 2\varphi_0}{2\omega_0}$.

Ainsi, avec les valeurs correspondant à la situation, $t = \frac{3\pi + 4k\pi}{40} \text{ s}$. Pour $k = 0$, $t_2 = \frac{3\pi}{40} \text{ s}$.



Quelle que soit la nature de l'oscillateur, pendule simple étudié dans la limite des petits angles, pendule élastique, etc. l'équation du mouvement, pour les cas qui vous sont proposés, peut toujours se mettre sous la forme : $\ddot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = 0$ ou *cte* avec ω_0 la pulsation propre de l'oscillateur d'où se déduisent sa fréquence propre f_0 et sa période propre T_0 , reliées à ω_0 par $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$ et $q(t)$ la paramètre de position du système. Cette forme d'équation doit être impérativement mémorisée, ainsi que la forme générale de la solution à laquelle elle conduit, $q(t) = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ ou $q(t) = \text{cte}/\omega_0^2 + q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.

27

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| V | F | F | F |

1. Calculons à l'aide de l'expression de l'énergie $E = E_0 e^{-\frac{b}{m}t}$ l'énergie du système aux instants t et $t+T$ où T est une période des pseudo-oscillations ; à $t+T$, l'énergie vaut $E(t+T) = E_0 e^{-\frac{b}{m}(t+T)}$ et la fraction d'énergie perdue pendant cette période vaut

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E(t+T) - E(t)}{E(t)} = \frac{E_0 e^{-\frac{b}{m}(t+T)} - E_0 e^{-\frac{b}{m}t}}{E_0 e^{-\frac{b}{m}t}},$$

soit, en simplifiant par $E_0 e^{-\frac{b}{m}t}$,

$$\frac{\Delta E}{E} = e^{-\frac{b}{m}T} - 1.$$

Or, T est pratiquement égale à $2\pi/\omega_0$ et l'argument de l'exponentielle vaut donc $-\frac{2\pi b}{m\omega_0} = -\frac{2\pi}{Q}$, d'après l'expression de Q suggérée par l'énoncé. Numériquement,

$\pi/200 \approx 1,57 \cdot 10^{-2}$ est donc suffisamment petit devant 1 pour que l'approximation de l'exponentielle, $e^{-x} \approx 1 - x$, soit valable et que

$$\frac{\Delta E}{E} = -\frac{2\pi b}{m\omega_0}.$$

2. $\sqrt{k/m}$ est l'expression de la pulsation propre des oscillations d'un oscillateur harmonique. Sa dimension $\left[\sqrt{\frac{k}{m}}\right]$ est donc égale à $\left(\frac{[k]}{[m]}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\mathcal{M}\mathcal{T}^{-2}}{\mathcal{M}}\right)^{\frac{1}{2}} = \mathcal{T}^{-1}$.

3. Il suffit de dériver deux fois l'expression donnée et de remplacer dans l'équation de mouvement de l'oscillateur les dérivées première et seconde par leurs expressions respectives pour constater que l'équation n'est pas satisfaite, même approximativement. (Cf. Rappel théorique ci-après)

4. L'affirmation est fausse. En effet, si vous calculez l'énergie au bout d'un temps égal à 100 s, vous trouverez que cette dernière vaut

$$E(100) = E_0 e^{-\frac{10 \times 100}{400}} = E_0 e^{-2,5} \approx 0,082 E_0.$$

Or, l'énergie de l'oscillateur dépend de l'amplitude comme le carré de cette dernière, ce qui signifie que $\frac{E}{E_0} = \left(\frac{A}{A_0}\right)^2$ en désignant par A l'amplitude des oscillation à 100 s et A_0 celle à l'instant initial, et donc, $A = A_0 \sqrt{0,082} \approx 0,285 A_0$, ce qui représente un écart de 15 % par rapport à la diminution de 2/3 annoncée.

L'équation du mouvement de l'oscillateur amorti donnée par l'énoncé correspond à celle d'une masse m , accrochée à l'extrémité d'un ressort de raideur k , dont l'autre extrémité est fixe, qui coulisse sans frottement sur une tige horizontale, tout en étant soumis à la force de frottement fluide $-b\vec{v}$. x représente alors l'écart entre la position de la masse sur la tige et la longueur au repos du ressort, c'est-à-dire son allongement.

L'expression de l'allongement en fonction du temps est effectivement de la forme $x(t) = A_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\Omega t + \varphi_0)$, mais les dérivations première et seconde par rapport au temps de cette expression et leur remplacement dans l'équation du mouvement conduit à imposer nécessairement

$$\frac{1}{\tau} = \frac{b}{2m} \quad \text{et} \quad \Omega^2 = \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2$$

pour que l'équation soit satisfaite pour tout t .

Il est facile de constater alors que l'expression de l'énergie mécanique de l'oscillateur amorti proposée,

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = E_0 e^{-\frac{b}{m} t}$$

n'est qu'une expression approchée, valable pour les seuls oscillateurs très faiblement amortis, soit ceux pour lesquels le facteur de qualité Q est grand devant 1,

ce qui est bien le cas dans l'exemple proposé. Alors, $\Omega \approx \omega_0$ et l'énergie $E \approx E_0 e^{-\frac{b}{m}t}$.

28 Réponses : 1. $M\ddot{x} = -k(x - l_0)$.

2. $T = 2\pi\sqrt{M/k}$.

3. $\vec{F}_{R_1 \rightarrow (S)} = -k_1(x - l_0)\vec{i}$, $\vec{F}_{R_2 \rightarrow (S)} = -k_2(x - l_0)\vec{i}$.

4. $M\ddot{x} = -(k_1 + k_2)(x - l_0)$.

5. $k_{eq} = k_1 + k_2$.

6. $\vec{F}_{R_2 \rightarrow (S)} = \vec{F}_{R_1 \rightarrow R_2}$.

7. $l_{0eq} = l_{01} + l_{02}$ et $\frac{1}{k'_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$.

Explications :

1. La seule force à considérer, d'après l'énoncé, est celle exercée par le ressort sur la masse M soit $\vec{F}_{R \rightarrow (S)} = -k(x - l_0)\vec{i}$. Le référentiel du laboratoire est supposé galiléen et l'application du principe fondamental de la dynamique y est donc possible ; elle conduit à $M\vec{a} = \vec{F}_{R \rightarrow (S)}$, avec $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i}$, d'où, en projection sur \vec{i} , l'équation différentielle du mouvement $M\ddot{x} = -k(x - l_0)$.

2. L'équation précédente peut s'écrire $\ddot{x} = -\frac{k}{M}(x - l_0)$ dont la pulsation ω_0 est donnée par $\omega_0^2 = \frac{k}{M}$. Or, par définition de la pulsation, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ d'où $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$.

3. D'après le rappel théorique de l'ex. 25, la force que le ressort R_1 exerce sur (S) est $\vec{F}_{R_1 \rightarrow (S)} = -k_1(x - l_0)\vec{i}$; l'adaptation au ressort R_2 dont la longueur instantanée vaut, lorsque la position de la masse est x , $l = 2l_0 - x$, d'où $\vec{F}_{R_2 \rightarrow (S)} = -k_2(2l_0 - x - l_0) \cdot (-\vec{i}) = -k_2(x - l_0)\vec{i}$.

4. L'application du principe fondamental de la dynamique à la masse M donne, en désignant par \vec{a} l'accélération de son centre d'inertie :

$$M\vec{a} = \vec{F}_{R_1 \rightarrow (S)} + \vec{F}_{R_2 \rightarrow (S)}.$$

Comme l'accélération n'a de composante non nulle que suivant (O, \vec{i}) , $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i}$; l'équation obtenue par l'application du principe fondamental de la dynamique projetée sur \vec{i} se traduit donc mathématiquement par $M\ddot{x} = -k_1(x - l_0) - k_2(x - l_0)$.

5. L'équation précédente est de la forme $M\ddot{x} = -k_{eq}(x - l_0)$ avec, par identification des termes entre eux, $k_{eq} = k_1 + k_2$.

6. Considérons le point géométrique J , sans masse, de jonction entre les deux ressorts : il est soumis aux deux forces opposées $\vec{F}_{R_1 \rightarrow R_2}$ et $\vec{F}_{R_2 \rightarrow R_1}$. Or $\vec{F}_{R_2 \rightarrow R_1}$, force

que le ressort R_2 exerce à une de ses extrémités, est l'opposée de celle qu'il exerce à son autre extrémité. Comme cette autre extrémité exerce sa force sur la masse M , il vient que $\vec{F}_{R_2 \rightarrow R_1} = -\vec{F}_{R_2 \rightarrow (S)}$ et donc que $\vec{F}_{R_1 \rightarrow R_2} = -\vec{F}_{R_2 \rightarrow R_1} = -(-\vec{F}_{R_2 \rightarrow (S)}) \vec{i}$. D'où l'identité des forces.

7. Appelons x_J l'abscisse du point J ; la longueur du ressort R_1 est alors x_J et donc $\vec{F}_{R_1 \rightarrow R_2} = -k_1(x_J - l_{01}) \vec{i}$; la longueur du ressort R_2 est $x - x_J$ et ainsi $\vec{F}_{R_2 \rightarrow (S)} = -k_2(x - x_J - l_{02}) \vec{i}$. Ces deux forces sont égales et l'on obtient la relation $k_1(x_J - l_{01}) = k_2(x - x_J - l_{02})$, d'où l'on exprime x_J en fonction des données : $(k_1 + k_2)x_J = k_2(x - l_{02}) + k_1l_{01}$, soit

$$x_J = \frac{k_2(x - l_{02}) + k_1l_{01}}{k_1 + k_2}.$$

En remplaçant x_J dans l'expression de la force $\vec{F}_{R_2 \rightarrow (S)}$, on obtient successivement

$$\begin{aligned} \vec{F}_{R_2 \rightarrow (S)} &= -k_2 \left(x - \frac{k_2(x - l_{02}) + k_1l_{01}}{k_1 + k_2} - l_{02} \right) \vec{i} \\ &= -\frac{k_2}{k_1 + k_2} ((k_1 + k_2)x - k_2(x - l_{02}) - k_1l_{01} - (k_1 + k_2)l_{02}) \vec{i} \\ &= -\frac{k_2}{k_1 + k_2} (k_1x + k_2l_{02} - k_1l_{01} - (k_1 + k_2)l_{02}) \vec{i} \\ &= -\frac{k_1k_2}{k_1 + k_2} (x - l_{01} - l_{02}) \vec{i}. \end{aligned}$$

Cette expression peut être alors identifiée à celle du ressort équivalent de raideur k'_{eq} et de longueur au repos l_{eq} , $\vec{F}_{R_2 \rightarrow (S)} = -k_{eq}(x - l_{eq}) \vec{i}$ si l'on pose $k_{eq} = \frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}$ et $l_{eq} = l_{01} + l_{02}$.

29

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| F | F | V | V |

1. Le référentiel dans lequel se produit l'expérience est supposé galiléen. L'application du théorème de l'énergie cinétique entre les instants où le solide ponctuel se trouve en A (avec une vitesse initiale nulle) et en B (avec une vitesse v_B) donne que la différence des énergies cinétiques entre ces deux instants est la somme des travaux des forces qui s'exercent sur le point matériel. Les deux seules forces qui s'exercent sur le point matériel sont, d'une part, son poids $m\vec{g}$ et, d'autre part, la réaction du quart de cercle \vec{R}_C , d'où la traduction mathématique du théorème :

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W_{AB}(m\vec{g}) + W_{AB}(\vec{R}_C).$$

Or, le point est censé, en l'absence de précision à ce sujet, glisser sans frottement sur le quart de cercle, donc la réaction que celui-ci exerce sur le point est orthogonale au déplacement élémentaire quel que soit le point de la trajectoire et, par conséquence, le travail de la réaction du quart de cercle est nul. Le travail du poids est égal pour sa part à mgr . Ainsi, le théorème de l'énergie cinétique donne $\frac{1}{2}mv_B^2 = mgr$ soit $v_B = \sqrt{2gr}$. Numériquement, $v_B = \sqrt{2 \times 10 \times 1} \approx 4,47 \text{ m.s}^{-1}$ et non les 6 m.s^{-1} annoncés.

2. La réaction normale du support sur la masse, entre B et C , s'oppose au poids de cette dernière et a donc pour norme mg . La norme de la force de frottement est donc égale à $F = \frac{1}{4}mg = 0,25 \times 1 \times 10 = 2,5 \text{ N}$, constante. Mais cette force de frottement est dirigée suivant $-\vec{BC}$ et donc son travail $W_{BC}(\vec{F}) = -F \cdot BC$, soit, numériquement $W_{BC}(\vec{F}) = -2,5 \times 2 = -5 \text{ J}$.

3. L'énergie cinétique en B était égale à $\frac{1}{2}mv_B^2 = mgr$; l'application du théorème de l'énergie cinétique entre B et C donne

$$\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = W_{BC}(\vec{F}),$$

le poids et la réaction normale du support ne travaillant pas. Ainsi,

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = mgr - F \cdot BC = mgr - \frac{1}{4}mg \cdot BC = mg \left(r - \frac{BC}{4} \right),$$

soit

$$v_C = \sqrt{2g \left(r - \frac{BC}{4} \right)}.$$

Numériquement, $v_C = \sqrt{2 \times 10 \times (1 - 2/4)} = \sqrt{10} \approx 3,15 \text{ m.s}^{-1}$.

4. Lorsque le ressort est comprimé par la masse arrivant sur lui, l'énergie cinétique de la masse se transforme graduellement en énergie potentielle élastique; au maximum de la compression, toute l'énergie cinétique de la masse est convertie. Ce fait se traduit par la relation mathématique :

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}kx^2,$$

x étant l'allongement du ressort, ici négatif, égal à 10 cm. Donc, $k = m \left(\frac{v_C}{x} \right)^2$.

Numériquement $k = 1 \times (10/0,1)^2 = 1000 \text{ N.m}^{-1}$.



Se rappeler que le travail d'une force de frottement est toujours négatif.

Thèmes du chapitre

Réseaux

Maille. Nœud. Branche. Dipôle. Convention de tension. Convention de courant. Convention courant-tension récepteur ou générateur. Caractéristique $u(i)$ ou $i(u)$ d'un dipôle : dipôle passif ou actif, linéaire ou non, symétrique ou non.

Évolution des circuits

Régimes continu, variable, permanent, transitoire, périodique, sinusoïdal ou alternatif.

Énergétique

Puissance reçue ou fournie par un dipôle. Puissance perdue par effet Joule dans une résistance. Énergie emmagasinée dans un condensateur ou une bobine.

Relations courant-tension aux bornes

En convention récepteur : pour une résistance $u_R(t) = Ri_R(t)$,

pour un condensateur $i_C(t) = C \frac{du_C}{dt}(t)$,

pour une bobine $u_L(t) = L \frac{di_L}{dt}(t)$.

Dispositifs classiques

Circuits R - L série, R - C série et R - L - C série.

Lois de l'électricité

Loi des mailles (la loi des mailles se décline aussi en loi d'addition des tensions $u_{AB}(t) = u_{AC}(t) + u_{CB}(t)$). Loi des nœuds.

Des savoir-faire à maîtriser

- Savoir utiliser les lois de l'électricité.
- Connaître le comportement général des bobines et des condensateurs aux basses et aux hautes fréquences.
- Connaître ou être capable de rapidement retrouver les unités et les dimensions des grandeurs physiques.

Des réflexes à avoir

Visualiser la (les) maille(s) de l'étude. Établir la (les) loi(s) des mailles en faisant attention aux orientations des conventions de tension. Établir les lois des nœuds si le circuit en comporte, susceptibles d'intervenir simultanément dans le circuit. Écrire la relation tension-courant pour chaque dipôle de la (des) maille(s). Repérer l'inconnue recherchée et travailler pour éliminer toutes les autres inconnues afin de ne plus avoir qu'une relation avec l'inconnue principale. Vérifier l'homogénéité de l'expression obtenue.

2.1 Circuits R-C

1 FESIC 2007

Vrai ou faux ?

Un condensateur de capacité C , initialement déchargé, est chargé grâce à un générateur idéal de courant d'intensité constante $I = 0,20 \text{ A}$. Une acquisition informatique a permis de tracer l'évolution temporelle de la tension u aux bornes du condensateur lors de sa charge. Hélas, ce document s'est mélangé à trois autres (figure 2.1) !

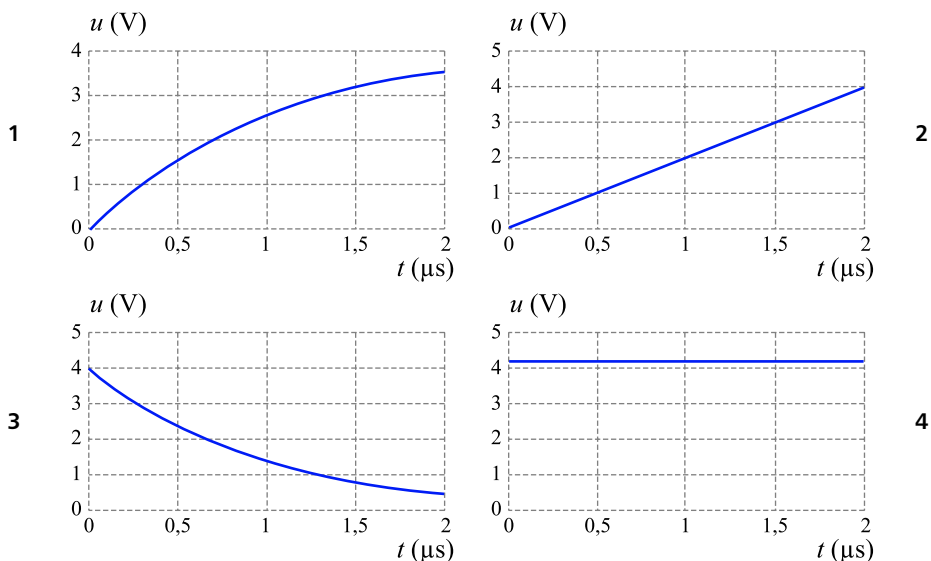


Figure 2.1

a. La figure 2.1-1 constitue le document recherché.

b. La capacité du condensateur est : $C = 0,10 \mu\text{F}$.

On arrête la charge du condensateur à l'instant t_1 lorsque celui-ci porte la charge $q(t_1) = 0,20 \mu\text{C}$.

c. La tension aux bornes du condensateur vaut alors $u(t_1) = 2,0 \text{ V}$.

d. L'énergie emmagasinée dans ce condensateur est alors $E = 4,0 \cdot 10^7 \text{ J}$.

2 ECE 2008

Vrai ou faux ?

On utilise le montage présenté sur la figure 2.2-1 pour déterminer la capacité C d'un condensateur. Pour cela, on réalise sa charge avec un générateur de courant qui débite un courant d'intensité $I = 0,5 \text{ mA}$. On réalise la saisie automatisée de la tension U_C aux bornes du condensateur en fonction du temps. À l'instant $t = 0 \text{ s}$ on ferme l'interrupteur K .

1. On a $I \times t = C \times U_C$

On enregistre la courbe $U_C(t)$ représentée sur la figure 2.2-2.

2. On peut en déduire que la capacité du condensateur est $C = 25 \cdot 10^{-3}$ F.

On veut étudier la charge d'un condensateur au travers d'une résistance à partir du montage schématisé sur la figure 2.2-3.

On utilise un générateur de tension idéal de force électromotrice E avec une saisie automatisée de la tension $u_C(t)$.

À l'instant initial, le condensateur est déchargé, on bascule alors l'interrupteur en position K_2 .

La figure 2.2-4 représente l'enregistrement de la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps.

3. La constante de temps du dipôle est $\tau = 1 \mu\text{s}$.

4. La force électromotrice s'écrit $E = RC \frac{du_C}{dt} + u_C$.

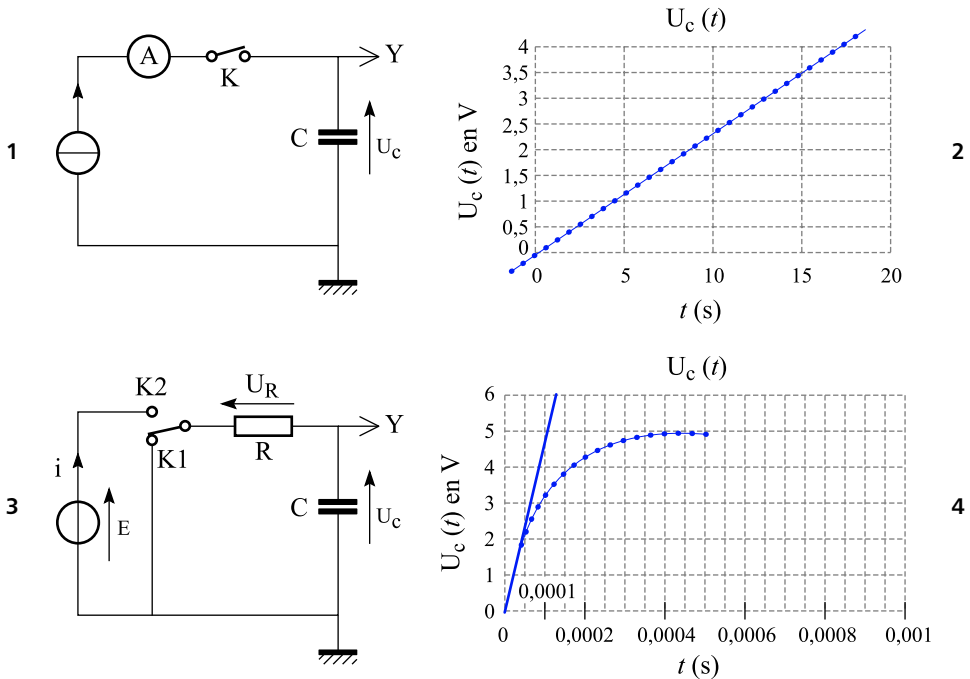


Figure 2.2

3 GEIPI 2007

Dans le problème suivant, on utilise un supercondensateur de capacité élevée $C = 1\,800\text{ F}$.

Ce condensateur de 400 g a un diamètre de 50 mm et une hauteur de 150 mm .

À l'instant $t = 0$, on place l'interrupteur en position 1. On charge alors ce condensateur à l'aide d'un générateur de courant qui permet de délivrer une intensité constante $I = 100\text{ A}$. On obtient la courbe de charge de la figure 2.3.

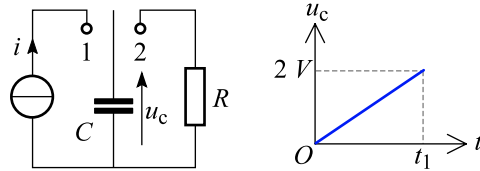


Figure 2.3

1. À quel instant t_1 la tension aux bornes du condensateur atteint $U_1 = 2\text{ V}$?

2. Quelle est l'énergie E_{c1} emmagasinée par ce condensateur à cet instant t_1 ?

À l'instant $t = t_1$, on place l'interrupteur en position 2.

On décharge ce condensateur à travers une résistance $R = 2\ \Omega$ jusqu'à l'instant t_2 où $u_C(t_2) = U_2 = 1,5\text{ V}$.

L'équation donnant la tension aux bornes du condensateur durant cette décharge est :

$$u_C(t) = A + B e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}.$$

3. Déterminer A , B et τ .

4. À quel instant t_2 la tension aux bornes du condensateur atteint $U_2 = 1,5\text{ V}$?

5. En supposant que la décharge du condensateur se passe sans pertes d'énergie, quelle est l'énergie E_R dissipée par effet Joule dans la résistance R entre t_1 et t_2 ?

En déduire la puissance moyenne P_R dissipée par effet Joule dans la résistance R entre t_1 et t_2 .

On définit le rendement comme le rapport entre l'énergie restituée lors de la décharge et l'énergie emmagasinée lors de la charge. Les accumulateurs traditionnels du type batterie de voiture ont un rendement de l'ordre de 50% . On mesure la puissance moyenne dissipée par R entre t_1 et t_2 . On obtient $1,4\text{ W}$.

6. Calculer le rendement η de ce supercondensateur. Comparer et conclure.

4 GEIPI - ENI 2007

Une seule réponse vraie

Un condensateur de charge initiale Q_0 , est déchargé à travers une résistance R . La constante de temps caractéristique de charge et décharge de ce condensateur, associé à la résistance R , est notée τ .

On rappelle que la tension aux bornes du condensateur durant la décharge est de la forme :

$$u_C = A + B e^{-\frac{t}{\gamma}}.$$

Au bout de combien de temps la charge du condensateur a-t-elle été divisée par 2 ?

- A. τ B. $\tau \ln 2$ C. τ/e D. $\tau/2$ E. $\ln 2/\tau$

5 ECE 2007

Vrai ou faux ?

Un circuit électrique comprend un condensateur de capacité C et une résistance électrique R . Le tout est alimenté par un générateur de tension continue constante U .

La charge de ce condensateur est d'autant plus lente que :

- R est grande
- C est petite
- U est petite
- Pendant la charge, le courant dans le circuit est d'autant plus grand que la différence de potentiel aux bornes du condensateur est grande.

6 ECE 2008

Vrai ou faux ?

Soit le circuit R - C figure 2.4 comprenant un générateur de tension continue $E = 10$ V, un interrupteur K , un condensateur de capacité C et une résistance R . u désigne la tension aux bornes du condensateur et i le courant circulant dans le circuit, $u(0) = u_2 = 2$ V avant la fermeture de l'interrupteur. L'interrupteur K est fermé et à $t = 10$ ms, $u = u_1 = 6$ V et $i = i_1 = 1$ mA. On fera l'approximation $\ln 2 \approx 0,5$.

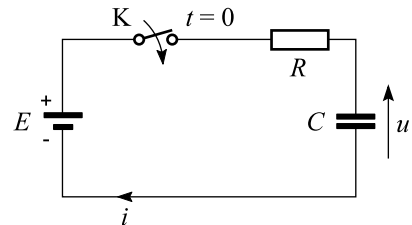


Figure 2.4

- L'intensité dans le circuit s'écrit $i = \frac{du}{dt}$.
- L'équation différentielle du circuit est $RC \frac{du}{dt}(t) - u(t) = E$.

La solution de cette équation différentielle avec second membre est $u(t) = V e^{-\frac{t}{RC}} + E$ où V doit être déterminée à l'aide des conditions initiales.

- La valeur de la résistance est $R = 4 \Omega$.
- La valeur de la capacité est $C = 5$ pF.

7 ECE 2008

Vrai ou faux ?

Un condensateur de capacité $C = 100 \mu\text{F}$ est préalablement chargé sous la tension $U = 1000 \text{ V}$. on installe ce condensateur dans un circuit comportant une résistance $R = 100 \text{ k}\Omega$ et un interrupteur. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 10 \text{ s}$.

1. À l'instant de la fermeture, la différence de potentiel entre les armatures du condensateur vaut 1000 V , et le courant dans le circuit a une intensité de 10^{-3} A .
2. À l'instant de la fermeture, la différence de potentiel entre les armatures du condensateur montre une tendance à la diminution, avec une perte de tension initiale de $10 \text{ V}\cdot\text{s}^{-1}$.
3. À l'instant $t = 20 \text{ s}$, la différence de potentiel aux bornes du condensateur n'est plus que de 370 V environ.
4. À l'instant $t = 60 \text{ s}$, le condensateur est virtuellement entièrement déchargé, et le courant dans le circuit négligeable.

8 FESIC 2007

Vrai ou faux ?

Lors de la charge, sous la tension constante E , d'un condensateur de capacité C à travers un conducteur ohmique de résistance R , de valeur $R = 100 \text{ k}\Omega$, on relève l'évolution de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur (figure 2.5). On appelle τ la constante de temps du circuit.

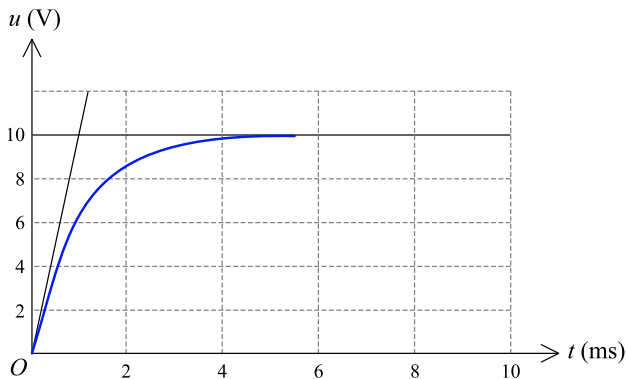


Figure 2.5

- a. L'intensité du courant a pour expression : $i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.
- b. À l'instant initial $t = 0^+$, l'intensité du courant a pour valeur $i = 0,10 \text{ mA}$.
- c. La valeur de la capacité du condensateur est égale à $10 \mu\text{F}$.
- d. C étant la capacité du condensateur, le générateur doit fournir l'énergie $W = 50 \times C$ pour que le condensateur soit chargé.

9 ECE 2007

Vrai ou faux ?

Un dipôle AB est constitué d'un résistor de résistance R en série avec un condensateur de capacité C (figure 2.6). Lorsque l'interrupteur K est en position (1), le dipôle est alimenté par une source de tension de f.é.m. E constante et de résistance r .

Les extrémités A et B du dipôle peuvent être court-circuitées en plaçant l'interrupteur en position (2). $i(t)$ désigne l'intensité instantanée du courant dans le dipôle AB et $u(t)$ la tension aux bornes du condensateur.

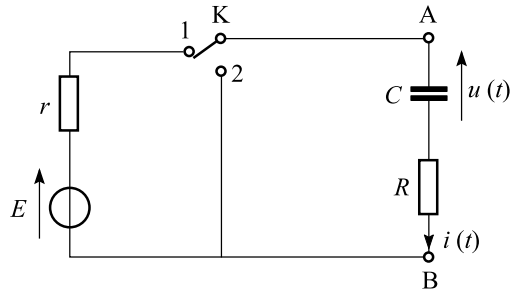


Figure 2.6

Le condensateur étant initialement déchargé, on place l'interrupteur K en position (1), à l'instant initial $t = 0$. On s'intéresse à la charge du condensateur.

1. $i(t) = \frac{E}{R+r} e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = (R+r)C$

Au bout d'un temps très long t' , on bascule l'interrupteur en position (2).

2. La tension aux bornes de la résistance devient $u(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$

3. l'expression de $i(t)$ est $i(t) = C \frac{du}{dt}(t) = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau' = \frac{R}{C}$.

4. La figure 2.7 représente les fonctions $u(t)$ et $i(t)$.

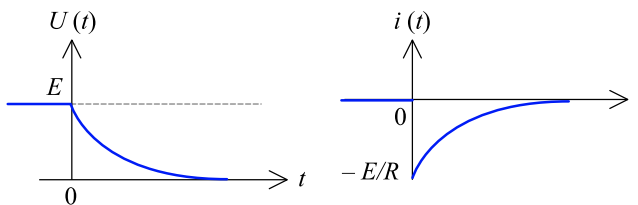


Figure 2.7

10 ECE 2007

Vrai ou faux ?

On considère le circuit R - C figure 2.8 avec $R = 500 \Omega$, $C = 10 \mu\text{F}$ et $E = 10 \text{ V}$.

Le générateur délivre une tension créneau $e(t)$ de période $T = 20 \text{ ms}$ telle que, n étant un nombre entier positif ou nul :

$$\begin{cases} nT < t < \left(n + \frac{1}{2}\right)T & e(t) = E \\ \left(n + \frac{1}{2}\right)T < t < (n+1)T & e(t) = 0 \end{cases}$$

Le condensateur est déchargé à $t = 0$ et on prendra $\alpha = e^{-2} \approx 0,135$.

1. La constante de temps est de l'ordre de 50 ms.
2. La tension à la demi-période $U_1 = (1 - \alpha) E$.
3. La tension pour $t = T$, $U_2 = (1 + \alpha) \alpha E$.
4. La tension pour $t = \frac{3T}{2}$,
 $U_3 = (\alpha^2 + \alpha + 1) E$.

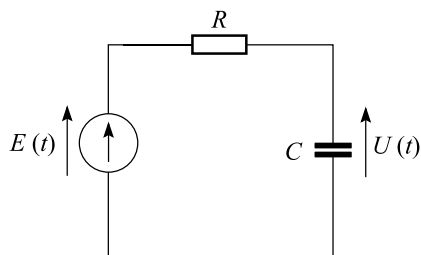


Figure 2.8

2.2 Circuits R-L

11 ECE 2007

Vrai ou faux ?

Soit le circuit figure 2.9 comprenant un générateur de tension idéal $E = 20 \text{ V}$, un interrupteur K, une bobine inductive ($L = 10 \text{ mH}$; $r = 10 \Omega$) et une résistance $R = 2 \text{ k}\Omega$. À l'instant $t = 0$ on ferme l'interrupteur K. On fera les approximations : $1990 \approx 2000 \approx 2010$.

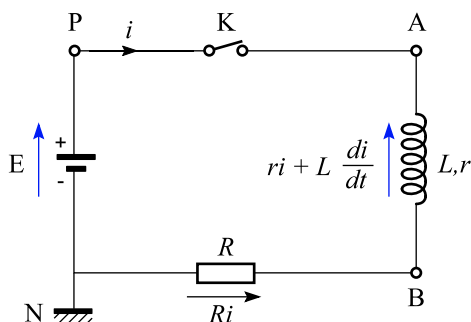


Figure 2.9

1. Juste après la fermeture de l'interrupteur K, l'intensité du courant dans la résistance est nulle.
2. Juste après la fermeture de l'interrupteur K, la tension aux bornes de la bobine est égale à 0 V.
3. La constante de temps du circuit est $\tau = 5 \mu\text{s}$.
4. L'intensité du courant en régime permanent est $I = 5 \text{ mA}$.

12 ECE 2007

Vrai ou faux ?

On considère le circuit représenté sur la figure 2.10 où $E = 10 \text{ V}$, $R = 18 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ et $r = 7 \Omega$.

1. On place l'interrupteur en position haute et on mesure, en régime permanent, l'intensité du courant électrique dans le circuit $I_0 = 4 \text{ A}$.

2. À l'instant $t = 0$, on place l'interrupteur en position basse et on peut alors écrire $i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ où $\tau = \frac{R+r}{L}$ est la constante de temps du circuit.

3. La tension aux bornes de la résistance R est $U_r = RI_0 e^{\frac{t}{\tau}}$.

À $t = 0$, la tension U_R est maximale $U_{Rmax} = RI_0$, à l'instant t_1 la tension chute à 90 % de sa valeur maximale et à l'instant t_2 la tension est passée à 10 % de sa valeur maximale. On note T la durée de la décharge.

4. La durée de la décharge est $T = t_2 - t_1 = \tau \ln 9$.

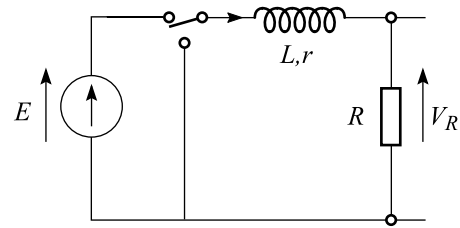


Figure 2.10

13 ECE 2008

Vrai ou faux ?

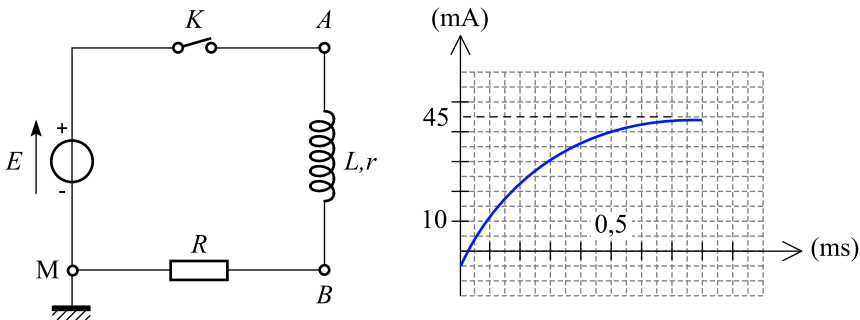


Figure 2.11

On étudie la réponse à un échelon de tension d'un circuit comportant une bobine inductive (L, r) et une résistance $R = 190 \Omega$. Le circuit considéré est donné sur la figure 2.11. La f.é.m. de l'alimentation stabilisée utilisée est $E = 9 \text{ V}$. L'interface reliée à l'ordinateur permet d'étudier les variations de $U_R(t)$. La constante de temps τ du circuit déduite de la courbe est proche de $\tau = 0,25 \text{ ms}$.

1. La valeur I_0 de l'intensité en régime permanent $I_0 = 45 \mu\text{A}$.

2. La valeur de la résistance interne de la bobine est $r = 10 \text{ k}\Omega$.

3. La valeur de l'inductance est $L = 10 \text{ H}$.

On ajoute au circuit une seconde bobine identique à la précédente. Les deux bobines sont placées en série.

4. La constante de temps a changé et est environ le double de τ .

14 FESIC 2006

Vrai ou faux ?

On réalise le circuit figure 2.12 comprenant un générateur (f.é.m. E , résistance interne r), une bobine (inductance L , résistance r'), un conducteur ohmique (résistance R) et un interrupteur K .

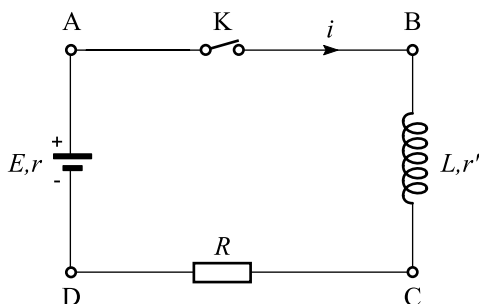


Figure 2.12

À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K . L'intensité s'établit progressivement. Lorsque le régime permanent est établi, l'intensité $I = 50 \text{ mA}$.

À $t = 0^-$, la bobine n'a pas emmagasinée d'énergie.

Données : $E = 5,0 \text{ V}$; $r = 10 \Omega$; $r' = 20 \Omega$; $L = 0,10 \text{ H}$.

- À $t = 0^+$, juste après la fermeture de l'interrupteur, $i = 0$.
- À $t = 0^+$, la tension u_{BC} aux bornes de la bobine est égale à 0 V .
- Le conducteur ohmique a une résistance $R = 70 \Omega$.
- La constante de temps du circuit est égale à $\tau = 1 \text{ ms}$.

15 FESIC 2007

Vrai ou faux ?

On réalise le circuit figure 2.13 comprenant un générateur de force électromotrice E et de résistance interne r en série avec une bobine (inductance L et résistance r'), et un conducteur ohmique de résistance R . On place un interrupteur K .

À $t = 0$, alors que la bobine n'a pas emmagasinée d'énergie, on ferme l'interrupteur K.

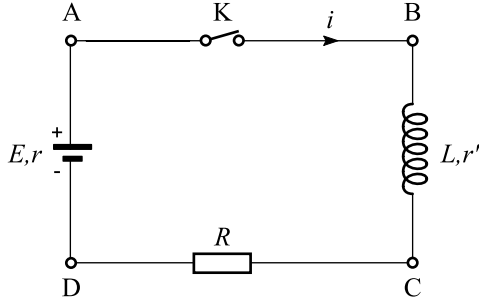


Figure 2.13

Données : $E = 9,0\text{V}$; $R = 87\ \Omega$; $r = 1,0\ \Omega$; $r' = 12\ \Omega$.

- La constante de temps du circuit est proportionnelle à la valeur de l'inductance L .
- L'expression de la tension aux bornes de la bobine est $u_{BC} = L \frac{di}{dt}$.
- À $t = 0^+$, la tension $u_{BC} = E$.
- Lorsque le régime permanent est établi, l'intensité $I = 90\text{ mA}$.

16 GEIPI 2006

Un dipôle est constitué de l'association en série d'une bobine présentant une inductance L et une résistance R_L avec un conducteur ohmique de résistance $R = 40\ \Omega$ (figure 2.14).

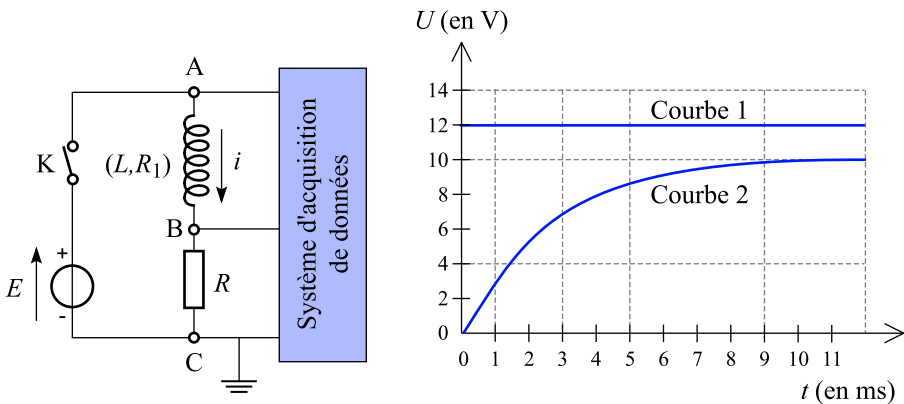


Figure 2.14

Ce dipôle est alimenté par un générateur de tension de f.é.m. E à travers un interrupteur K . Il est parcouru par un courant i .

Les bornes A , B et C sont reliées aux entrées d'une carte d'acquisition permettant d'enregistrer l'évolution des tensions.

À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K , l'enregistrement génère les courbes 1 et 2.

1. Quelle tension est représentée par la courbe 1 ?
2. Quelle tension est représentée par la courbe 2 ?
3. Quelle sera l'allure de la courbe de variation du courant i choisie parmi les cinq courbes ci-dessous ?

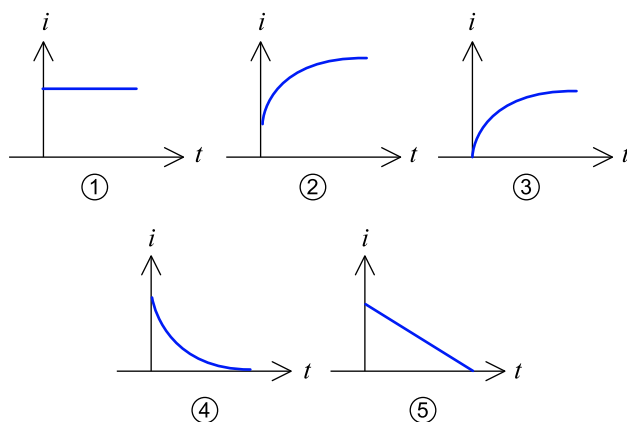
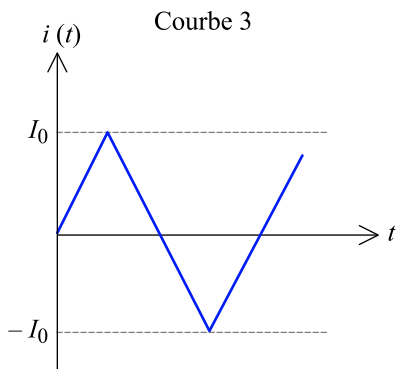


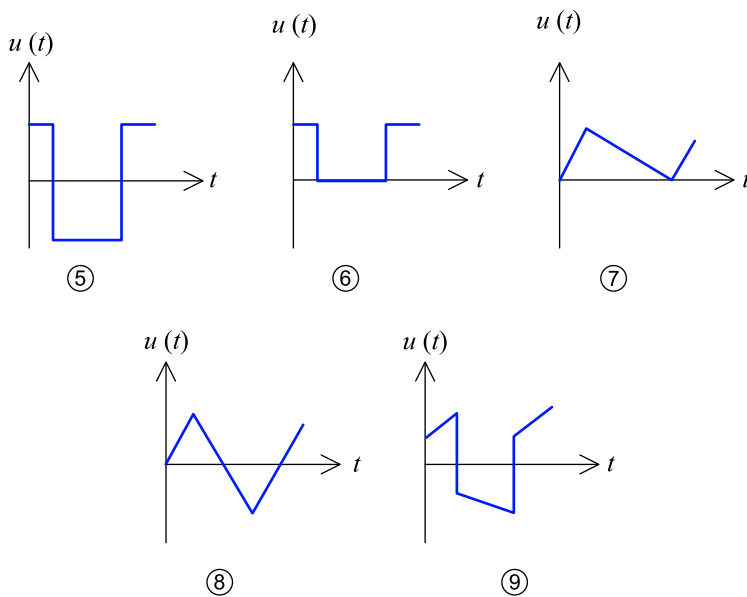
Figure 2.15

4. Tracer l'allure de la courbe de variation de la tension u_{AB} .
5. Donner la valeur E et l'intensité maximale I_{max} atteinte par i .
- 6.a. Donner l'équation différentielle définissant i . Cette équation sera présentée sous la forme d'une égalité où la f.é.m. E sera le seul terme du deuxième membre.
- 6.b. En déduire les valeurs de L et R_L .

On remplace maintenant le générateur de tension par un générateur de courant délivrant un courant en dents de scie (courbe 3, figure 2.16). On considérera ici que la résistance R_L de la bobine est nulle.



7. Quelle sera, parmi les cinq courbes ci-dessous, l'allure de la courbe de variation de la tension u_{AB} et de la courbe de variation de la tension u_{BC} ?



17 FESIC 2008

Vrai ou faux ?

On réalise le montage figure 2.18 comportant une bobine idéale d'inductance L , un conducteur ohmique de résistance $R = 500 \Omega$ et un générateur basses fréquences (G.B.F.) délivrant une tension triangulaire.

L'oscilloscope permet de visualiser les tensions u_{AB} sur la voie 1 et u_{CB} sur la voie 2.

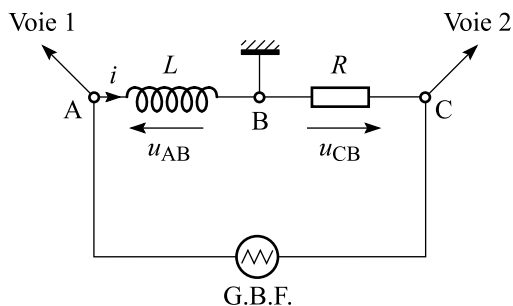


Figure 2.18

L'oscillogramme a l'allure suivante (figure 2.19) :

- Durée du balayage de l'oscilloscope 0,2 ms/carreau.
- Les voies 1 et 2 ont la même sensibilité verticale 2,0 V/carreau.
- La ligne médiane horizontale de l'écran correspond à 0 V.

Donnée : $\frac{6,0}{5,0} = 1,2$

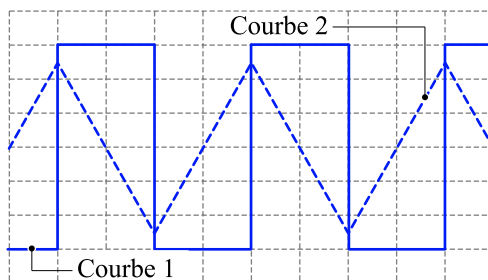


Figure 2.19

- La courbe 1 représente l'évolution de la tension aux bornes de la résistance.
- La tension aux bornes de la bobine est donnée par la relation : $u_{AB} = L \frac{di}{dt}$.
- L'amplitude de la tension aux bornes de la bobine est de 5,0 V.
- La valeur de l'inductance est $L = 0,12$ H.

18 GEIPI 2008

Dans le problème suivant, on veut étudier l'action d'une inductance sur la forme de l'intensité.

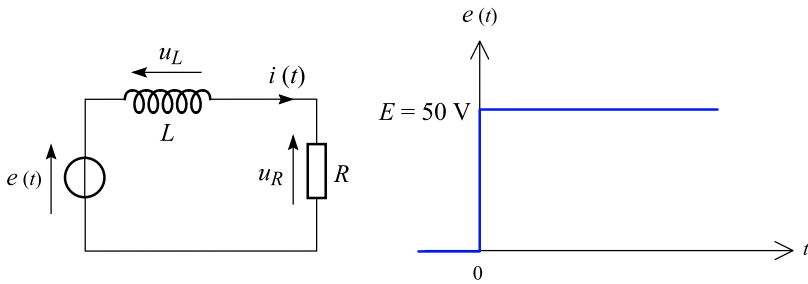


Figure 2.20

1. Écrire l'équation différentielle de variable $i(t)$ caractérisant le circuit ci-dessus. L'équation donnant l'intensité durant la charge est : $i(t) = A + B e^{-\frac{t}{\tau}}$.
2. Donner les expressions de A , B et τ en fonction de E , R et L .
3. À partir de l'enregistrement de $i(t)$ figure 2.21, trouver les valeurs de A , B et τ . En déduire R et L .

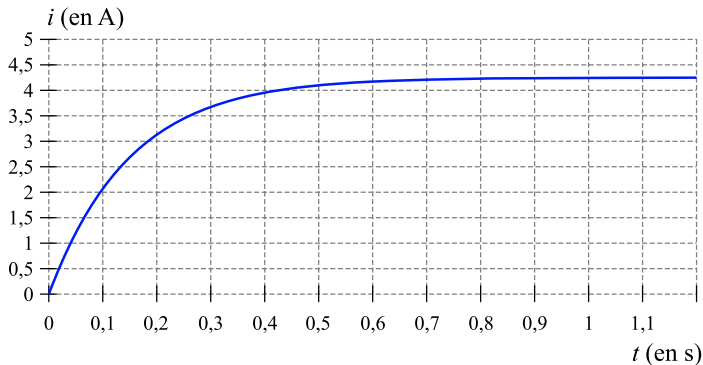


Figure 2.21

On remplace la tension $e(t)$ par la tension $e_1(t)$.

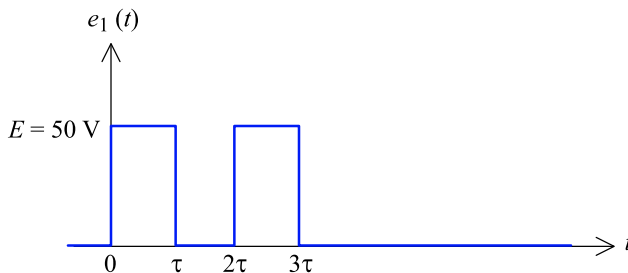


Figure 2.22

4. Tracer l'allure de l'évolution de $i(t)$ entre 0 et 1 s.
5. On considère l'évolution de $i(t)$ pour $0 < t \leq \tau$. Calculer la valeur de $i(\tau)$.
6. On considère maintenant l'évolution de $i(t)$ pour $\tau < t \leq 2\tau$. On pose $t' = t - \tau$. L'équation donnant l'intensité durant la décharge est $i(t') = A' + B' e^{-\frac{t'}{\tau}}$. Déterminer A' et B' . En déduire la valeur de $i(2\tau)$.
7. On considère maintenant l'évolution de $i(t)$ pour $2\tau < t \leq 3\tau$. Calculer la valeur de $i(3\tau)$.

19 GEIPI - ENI 2007

Une seule réponse vraie

Un système d'acquisition de données mesure les tensions u_{AM} (courbe 1) et u_{BM} (courbe 2). À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.

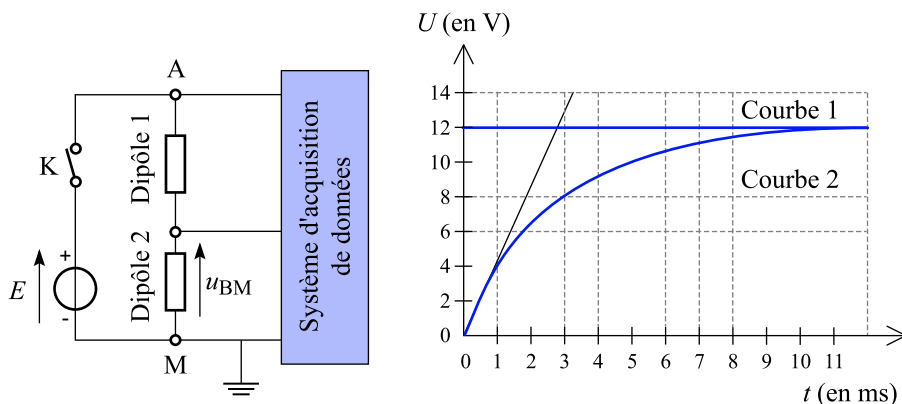


Figure 2.23

Donner l'association de dipôles correspondant à ces courbes :

- | | | |
|-----|--|--|
| A : | dipôle 1 : inductance $L = 300 \text{ mH}$ | dipôle 2 : résistance $R = 100 \Omega$ |
| B : | dipôle 1 : capacité $C = 200 \text{ nF}$ | dipôle 2 : résistance $R = 10 \text{ k}\Omega$ |
| C : | dipôle 1 : résistance $R = 100 \Omega$ | dipôle 2 : inductance $L = 300 \text{ mH}$ |
| D : | dipôle 1 : résistance $R = 10 \text{ k}\Omega$ | dipôle 2 : capacité $C = 100 \text{ nF}$ |
| E : | dipôle 1 : capacité $C = 200 \text{ nF}$ | dipôle 2 : résistance $R = 20 \text{ k}\Omega$ |

2.3 Circuits L-C**20** ECE 2007

Vrai ou faux ?

On considère le dipôle figure 2.24 composé d'un condensateur de capacité C et d'une inductance L de résistance interne r nulle.

L'interrupteur K étant ouvert, le condensateur est chargé initialement à $U_0 = 2 \text{ V}$. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K. On prendra $\pi^2 \approx 10$.

Un système d'enregistrement donne la tension $u(t) = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ en volt et l'intensité $i(t) = 10 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ en mA avec $\frac{2\pi}{T} = 10^4 \text{ s}^{-1}$.

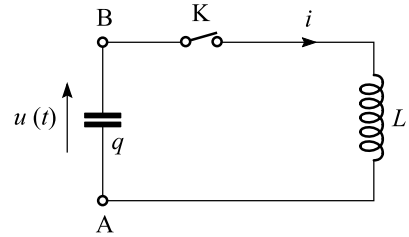


Figure 2.24

1. On a affaire à des oscillations libres amorties.

2. La capacité de ce dipôle est $C = 0,5 \mu\text{F}$.

3. La tension $u(t)$ obéit à l'équation différentielle suivante $LC \frac{d^2u}{dt^2}(t) + u(t) = 0$.

4. L'inductance est $L = 20 \text{ mH}$.

21 ECE 2008

Vrai ou faux ?

Soit le circuit ci-dessous comprenant un générateur de tension idéal $E = 10 \text{ V}$, deux interrupteurs K_1 et K_2 , une bobine inductive $L = 10 \text{ mH}$ (de résistance interne nulle), un conducteur ohmique $R = 1 \text{ k}\Omega$ et un condensateur de capacité $C = 10 \text{ nF}$. On prendra $\pi \approx 3$.

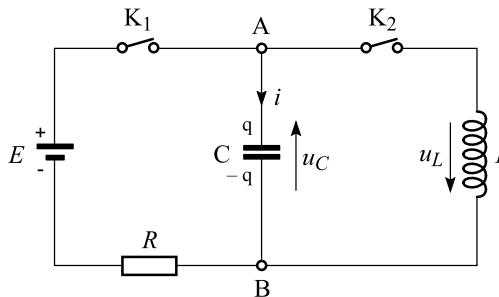


Figure 2.25

Le condensateur étant chargé, on ouvre l'interrupteur K_1 et on ferme K_2 à l'instant $t_0 = 0$.

1. La tension aux bornes du condensateur obéit à l'équation différentielle suivante :

$$LC \frac{d^2u_c}{dt^2}(t) - u_c(t) = 0.$$

2. La solution de cette équation différentielle est $u_c(t) = 10 \cos(10^5 t + \pi)$.

3. La période des oscillations qui prennent naissance dans le circuit est d'environ $T_0 = 6 \cdot 10^{-5} \text{ s}$.

4. L'énergie électromagnétique E du circuit étudié est $E = 0,5 \cdot 10^{-7} \text{ J}$.

22 GEIPI - ENI 2007

Une seule réponse vraie

Initialement, K était en position 0 depuis un temps très long. À $t = 0$ on bascule l'interrupteur K de 0 vers 1.

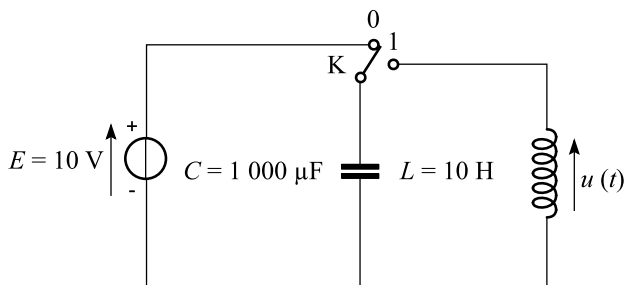


Figure 2.26

Indiquer l'allure de la tension $u(t)$.

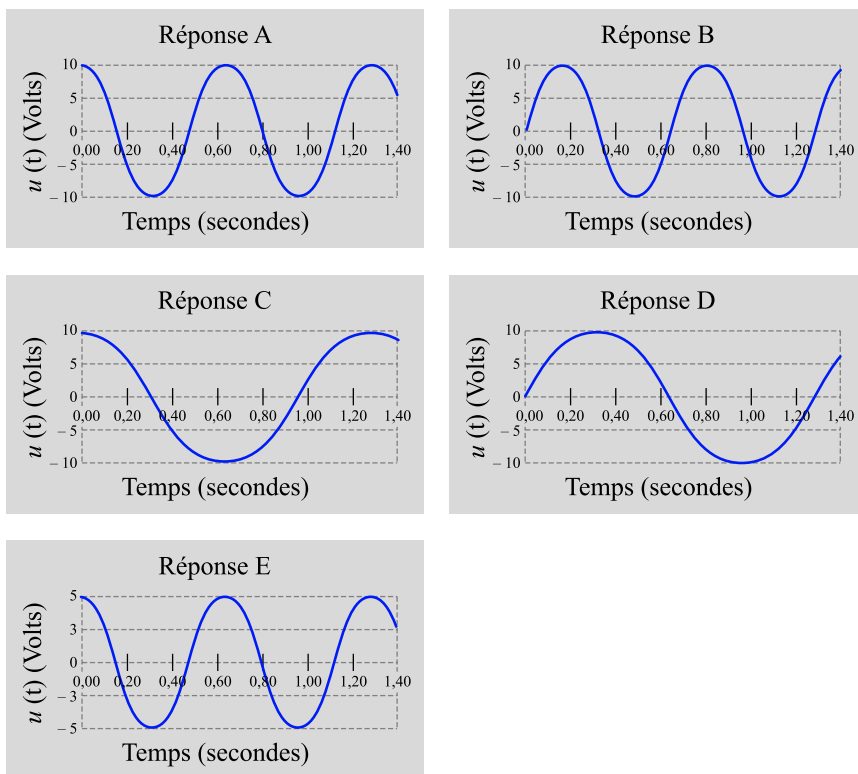


Figure 2.27

23 GEIPI - ENI 2007 (suite de l'ex. 22)

Une seule réponse vraie

Donner l'amplitude I_{max} de l'intensité du courant $i(t)$ circulant dans le condensateur et l'inductance. On rappelle que pour $t > 0$:

$$i(t) = I_{max} \cos\left(2\pi\frac{t}{T} + \theta\right)$$

- A. 0,1 A B. 0,5 A C. 1 A D. 5 A E. 10 A

24 FESIC 2007

Vrai ou faux ?

Le circuit ci-après est constitué d'une source de tension continue E , d'une bobine d'inductance L , d'un condensateur de capacité C , d'un conducteur ohmique de résistance R et d'un interrupteur K. Initialement, la bobine idéale et le condensateur idéal ne possèdent pas d'énergie.

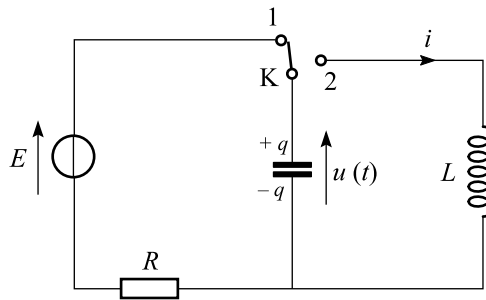


Figure 2.28

Dans un premier temps, on positionne l'interrupteur K en position 1. Lorsque la tension $u(t)$ atteint la valeur E , on bascule l'interrupteur K en position 2; cet instant est choisi comme origine des temps. Il s'établit alors dans le circuit (L, C) un courant sinusoïdal $i(t)$ et l'évolution de la charge du condensateur au cours du temps s'écrit :

$$q(t) = Q \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right).$$

Données : $E = 10,0 \text{ V}$; $L = 0,10 \text{ H}$; $C = 0,10 \mu\text{F}$.

- L'intensité i a pour expression : $i = \frac{dq}{dt}$.
- À l'instant $t = 0^+$, l'intensité du courant est maximale.
- La période des oscillations a pour valeur $T = 628 \mu\text{s}$.
- Dans l'expression de $q(t)$, $Q = CE$ et $\varphi = 0$.

2.4 Circuits R-L-C

25 ECE 2008

Vrai ou faux ?

On considère le circuit de la figure ci-dessous, R est la résistance d'un conducteur ohmique, L est l'inductance d'une bobine dont la résistance est négligeable, C est la capacité d'un condensateur. On étudie la décharge du condensateur dans la bobine et les oscillations qui en résultent.

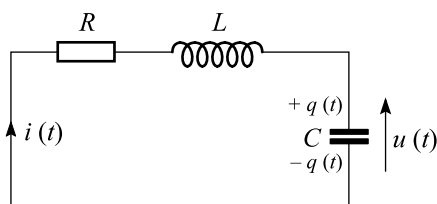


Figure 2.29

On désigne par $q(t)$ la charge instantanée du condensateur à la date t . $i(t)$ est l'intensité instantanée dans le circuit et $u(t)$ est la tension instantanée aux bornes du condensateur, à la date t .

1. L'expression de $i(t)$ en fonction de $u(t)$ s'écrit $i(t) = \frac{du}{dt}(t)$.
2. L'équation différentielle à laquelle satisfait $u(t)$ est

$$L \frac{di}{dt}(t) - u(t) = LC \frac{d^2u}{dt^2}(t) - u(t) = 0.$$

On suppose d'abord que la résistance R est nulle. La tension initiale est $u(0) = E$.

3. L'expression de $u(t) = E \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$ est solution de l'équation différentielle dans ce circuit avec $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$.
4. L'expression de $i(t)$ est $C \frac{du}{dt}(t) = -CE \frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$.

26 ECE 2007

Vrai ou faux ?

Un condensateur de capacité C est déchargé dans une bobine d'inductance L et de résistance R .

1. L'équation différentielle à laquelle obéit la tension aux bornes du condensateur est :

$$LC \frac{d^2u_c}{dt^2} - RC \frac{du_c}{dt} - u_c = 0.$$

2. L'expression de l'énergie aux bornes de l'inductance est : $E_L = Li^2$.

3. L'énergie électromagnétique à travers le circuit en fonction de la tension aux bornes du condensateur s'exprime

$$E_t = \frac{1}{2}LC \left(\frac{du_c}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}Cu_c^2.$$

4. Lorsque l'on s'intéresse à l'évolution de l'énergie totale au cours du temps, on peut exprimer alors

$$\frac{dE_t}{dt} = -Ri^2.$$

27 ECE 2008

Vrai ou faux ?

On considère le circuit de la figure 2.30, R est la résistance d'un conducteur ohmique, L est l'inductance d'une bobine dont la résistance est négligeable, C est la capacité d'un condensateur.

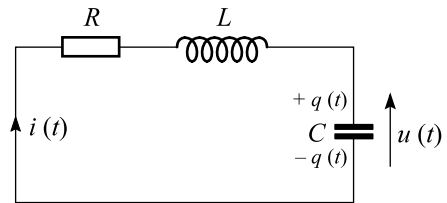


Figure 2.30

On étudie la décharge du condensateur dans la bobine et les oscillations qui en résultent.

On désigne par $q(t)$ la charge instantanée du condensateur à la date t . $i(t)$ est l'intensité instantanée dans le circuit et $u(t)$ est la tension instantanée aux bornes du condensateur, à la date t . On a $u(0) = E$.

1. L'expression de la valeur maximale atteinte par la tension u aux bornes du condensateur en fonction de l'énergie emmagasinée E_c et de la capacité C est

$$E = u_{max} = \sqrt{\frac{2E_c}{C}}.$$

2. L'équation différentielle à laquelle satisfait $u(t)$ est

$$\frac{d^2u}{dt^2}(t) + \frac{R}{L} \frac{du}{dt}(t) + \frac{u(t)}{LC} = 0.$$

On pose $\lambda = \frac{R}{2L}$.

3. L'équation différentielle à laquelle satisfait $u(t)$ peut s'écrire alors

$$\frac{d^2u}{dt^2}(t) + 2\lambda \frac{du}{dt}(t) + \frac{4\pi^2}{T_0^2} u(t) = 0.$$

Une équation différentielle peut avoir trois types de solutions possibles suivant les racines de l'équation $r^2 + 2\lambda r + \frac{4\pi^2}{T_0^2} = 0$. Si le discriminant réduit est nul, on parle de régime critique.

4. La résistance critique R_c en fonction de L et de C est $R_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

28 FESIC 2006

L'étude d'un circuit R, L, C série est effectuée à l'aide d'un oscilloscope numérique qui permet de suivre l'évolution de la tension u_c aux bornes du condensateur et l'intensité i du courant dans le circuit.

L'interrupteur K est d'abord placé en position 1 : le condensateur, de capacité $C = 10^{-8}$ F, se charge grâce à la source de tension de force électromotrice $E = 3$ V.

À l'instant $t = 0$, l'interrupteur est basculé vers la borne 2 et simultanément on lance l'acquisition.

Donnée : $\pi^2 \approx 10$.

Vrai ou faux ?

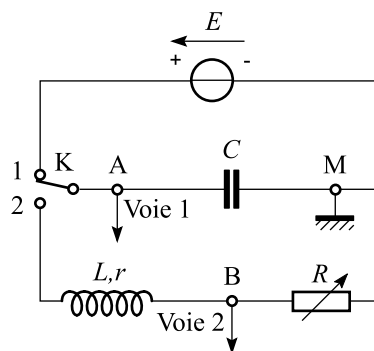


Figure 2.31

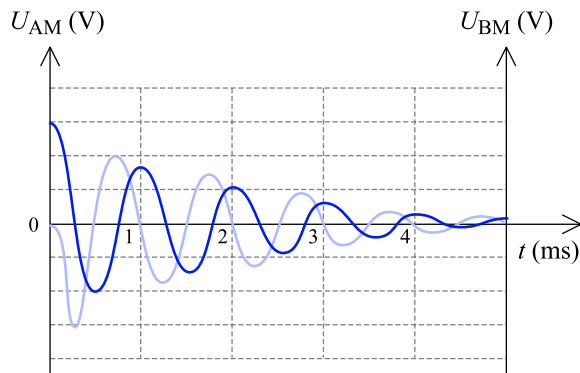


Figure 2.32

- On observe des oscillations électriques libres amorties.
- À l'instant $t = 0^+$, la tension aux bornes de la résistance est égale à $u_R = 3$ V.
- L'inductance de la bobine a une valeur proche de $L = 2,5$ H.
- Au bout de 2 pseudo-périodes, le circuit a dissipé $8/9$ de son énergie électrique initiale.

29 FESIC 2008

Vrai ou faux ?

L'étude d'un circuit R, L, C série est effectuée à l'aide d'un dispositif d'acquisition relié à un ordinateur qui permet de suivre l'évolution de la tension u_c aux bornes du condensateur.

On obtient l'enregistrement de la figure 2.33. Dans un premier temps, l'interrupteur K est en position 1. Lorsque la tension $u_c(t)$ atteint la valeur E , l'interrupteur est basculé en position 2.

À cet instant choisi comme origine, la bobine n'a pas stocké d'énergie.

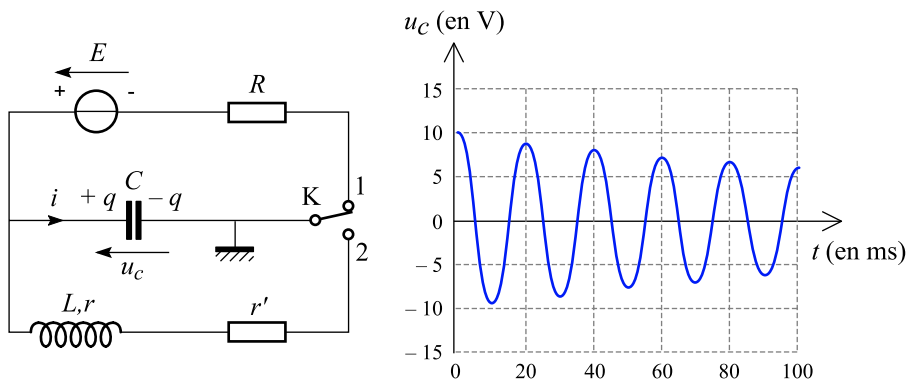


Figure 2.33

Données : $L = 0,10 \text{ H}$; $\pi^2 \approx 10$.

- La force électromotrice du générateur est égale à 10 V.
- À l'instant $t = 0^+$, l'intensité est nulle.
- Durant les dix premières millisecondes, le courant circule en sens contraire de celui indiqué sur la figure.
- Le condensateur a une capacité d'environ 0,1 mF.

30 GEIPI - ENI 2006

Charge d'un condensateur - circuit oscillant.

Tout au long du problème, on prendra : $E = 5 \text{ V}$, $r = 30 \text{ k}\Omega$, $R = 5 \Omega$, $C = 50 \mu\text{F}$, $L = 50 \text{ mH}$.

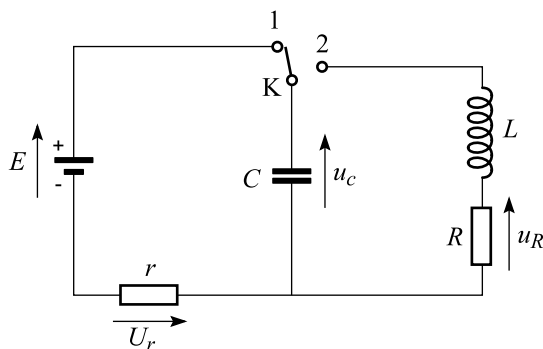


Figure 2.34

Première partie :

On s'intéresse tout d'abord à la charge du condensateur de capacité C par un générateur de tension dont la f.é.m. vaut E (figure 2.34). Pour ce faire, à l'instant $t = 0$, on place l'interrupteur K en position 1. L'évolution au cours du temps de la tension u_c aux bornes du condensateur et de la tension u_r aux bornes du conducteur ohmique de résistance r est représentée figure 2.35.

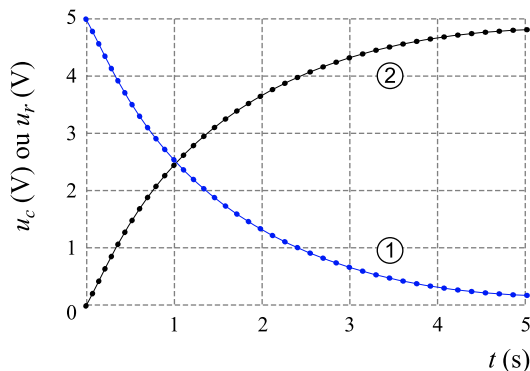


Figure 2.35

1. Quelle est, des courbes 1 et 2, celle qui illustre l'évolution de u_c ? Justifier obligatoirement la réponse.
2. Quelle serait la charge q du condensateur à la fin du processus de charge ?
3. Sachant que l'on définit la constante de temps τ du circuit comme la durée au bout de laquelle le condensateur a acquis 63% de sa charge maximale, déterminer graphiquement la valeur de τ .
4. Déterminer la valeur de l'intensité à l'instant $t = \tau$.

Seconde partie :

On suppose maintenant que le condensateur a acquis sa charge maximale. On place alors l'interrupteur en position 2. On observe, à l'aide d'un oscilloscope, la tension u_c sur la voie A et la tension u_R sur la voie B.

Les oscillogrammes obtenus sont les suivants :

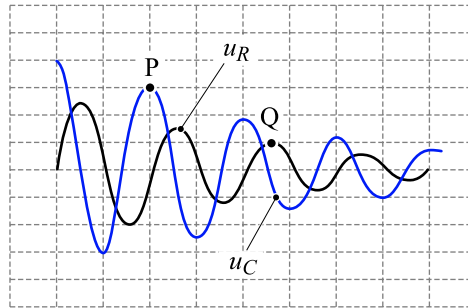


Figure 2.36

Les réglages de l'oscilloscope sont :

- balayage horizontal : 5 ms / division ;
- sensibilité verticale de la voie A : 1 V / division ;
- sensibilité verticale de la voie B : 250 mV / division.

5. Rappeler les expressions littérales de l'énergie E_c emmagasinée à tout instant par le condensateur et celle, E_L , emmagasinée par la self. Calculer ces énergies aux instants correspondant aux points P et Q repérés sur les oscillogrammes de la figure.

6. Comparer les énergies totales emmagasinées par le circuit en chacun des deux points P et Q. Interpréter ce résultat.

7. Tracer l'allure générale qu'aurait eu l'évolution de u_c si la résistance R avait été très grande.

2.1 Circuits R-C

1

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| F | V | V | F |

- a.** La loi d'Ohm généralisée entre l'intensité du courant électrique qui traverse le condensateur et la tension à ses bornes est, en convention récepteur, $I = C \frac{du_C}{dt}$; si l'intensité est constante, la pente $\frac{du_C}{dt}$ doit l'être aussi. Ce qui signifie que la courbe de $u_C(t)$ ne peut être que celle de la figure 2.1-2.
- b.** La courbe $u_C(t)$ de la figure 2.1-2 permet de déterminer la valeur de la capacité du condensateur. En effet, elle doit être égale à

$$C = \frac{I}{\frac{du_C}{dt}},$$

avec $I = 0,20 \text{ A}$ et $\frac{du_C}{dt}$ pente de la droite, égale à 4 V sur $2 \mu\text{s}$, soit $2 \cdot 10^6 \text{ V.s}^{-1}$. Ainsi, $C = 0,2/2 \cdot 10^6 = 0,10 \mu\text{F}$.

c. La relation entre la charge et la tension est $q = Cu_C$; soit, $u_C = q/C$; numériquement, $u_C = 0,20 \cdot 10^{-6} / 0,1 \cdot 10^{-6} = 2 \text{ V}$.

d. L'énergie E emmagasinée par un condensateur entre les armatures duquel règne une tension u_C et ayant accumulé une charge q est égale à $\frac{1}{2}Cu_C^2$ ou $\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$; numériquement, $E = 0,5 \times (0,20 \cdot 10^{-6})^2 / (0,1 \cdot 10^{-6}) = 2 \cdot 10^{-7} \text{ J}$.

Un condensateur est fondamentalement constitué de deux armatures métalliques dont les charges électriques opposées qu'elles portent respectivement sont en interaction électrostatique, d'autant plus intense qu'est petite la distance qui sépare les armatures. En première approximation, chaque armature porte une charge opposée à celle que porte l'autre. Ainsi, quand il est dit qu' « un condensateur porte une charge q valant tant de coulombs », il faut toujours comprendre qu'une des deux armatures porte la charge q (qu'elle soit positive ou négative) et l'autre, sa charge opposée, $-q$. Celle qui porte la charge positive est celle qui est au potentiel électrique le plus élevé. Une autre manière de présenter le fait est de dire que le signe de la charge de l'armature portant q est celui de la tension u_C . D'où l'importance à attacher aux conventions qui entourent le condensateur :

L'armature portant la convention de charge q est du côté de la pointe de la flèche de la convention de tension u_C : si u_C est positive (resp. négative), c'est cette

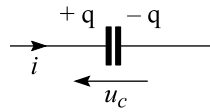


Figure 2.37

armature qui porte la charge $q = Cu_C$ positive (resp. négative) (figure 2.37). Le coefficient C de proportionnalité entre la charge et la tension désigne la capacité du condensateur, exprimée en farads (F) ; l'importance de la capacité traduit l'aptitude du condensateur à accumuler (à condenser) le système $(q, -q)$ de charges sur les armatures, à tension égale.

Lorsque le régime devient variable au cours du temps, dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires, cadre qui est celui de la validité des lois de l'électrocinétique, lois des mailles et des nœuds, la relation entre la charge et la tension demeure la même qu'en régime statique et la dérivation par rapport au temps donne la relation

$$i(t) = \frac{dq}{dt}(t) = \frac{d(Cu_C)}{dt}(t) = C \frac{du_C}{dt}(t).$$

La flèche de la convention de l'intensité du courant électrique $i(t)$ doit alors être dirigée vers l'armature qui porte la convention de charge q : si $i(t)$ est positif, la charge q augmente, donc le débit de charge doit être dirigé vers l'armature qui voit sa charge augmenter au sens algébrique du terme.

Le système des charges sur les armatures est en interaction électrostatique attractive de part et d'autre de l'espace séparant les armatures. À cette interaction peut être associée une énergie électrostatique E dont la variation entre l'instant initial et un instant t quelconque est

$$\begin{aligned} \Delta E &= \int_0^t u_C(t') \cdot i(t') dt' = \int_0^t u_C(t') \cdot C \frac{du_C}{dt}(t') dt' \\ &= \left[\frac{1}{2} C u_C^2(t') \right]_0^t = \frac{1}{2} C (u_C^2(t) - u_C^2(0)) \end{aligned}$$

L'expression précédente est la différence — comme en mécanique, le travail d'une force conservative — de deux termes ayant la même forme et dont la valeur ne dépend que de l'état du condensateur aux instants $t = 0$ et t quelconque. Il est de ce fait acceptable de considérer que le terme générique $\frac{1}{2} C u_C^2$ représente une énergie semblant avoir une propriété similaire à une énergie potentielle. On la désigne comme « l'énergie électrostatique accumulée dans le condensateur ». En fait, elle n'est qu'une partie de l'énergie potentielle du système des charges accumulées sur les armatures du condensateur, énergie potentielle liée au caractère conservatif des forces électrostatiques qui s'exercent entre elles.

2

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| V | F | F | V |

- De la relation, en convention récepteur, entre I et U_C , $I = C \frac{dU_C}{dt}$, on tire par intégration entre $t = 0$ et l'instant t quelconque, I étant constant, $I dt = C dU_C$ puis, le condensateur étant déchargé à l'instant initial comme l'indique la courbe de la figure, $I \times t = C \times (U_C(t) - U_C(0))$, soit la relation annoncée, $U_C(0)$ étant nulle.
- La caractéristique $U_C(t)$ peut être approchée par une droite passant par les points de coordonnées $(0, 0)$ et $(15 \text{ s}, 3,5 \text{ V})$; la pente de cette droite, $\frac{dU_C}{dt}$, est donc $3,5/15 \text{ V.s}^{-1}$. La capacité C s'en déduit : $C = I / (dU_C/dt)$, numériquement égale à $C = 0,5 \cdot 10^{-3} \times 15/3,5 \approx 2,14 \text{ mF}$.
- Tracez la tangente à la courbe à l'origine. La tangente intersecte l'asymptote horizontale à la courbe, ici 5 V , au bout de la constante de temps caractérisant le circuit R - C . Ici $\tau = 10^{-4} \text{ s}$ soit $100 \mu\text{s}$.
- L'équation proposée est l'équation différentielle qui régit la tension $u_C(t)$. Elle est obtenue en écrivant la loi des mailles pour ce circuit : $E = u_C + u_R$, et en traduisant les lois d'Ohm généralisées aux bornes de la résistance et du condensateur, en convention récepteur, $u_R = Ri$ et $i = C \frac{du_C}{dt}$ d'où $u_R = RC \frac{du_C}{dt}$. Le remplacement de u_R par cette dernière relation donne l'équation proposée.

L'équation différentielle régissant l'évolution de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur chargé à travers une résistance sous une tension E ,

$$E = RC \frac{du_C}{dt} + u_C$$

a pour solution $u_C(t) = E + Be^{-\frac{t}{\tau}}$ où les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiales du circuit. Il est fréquent que le condensateur soit initialement déchargé : alors, $u_C(0) = 0 = E + B$ d'où $B = -E$ et

$$u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

La tangente à l'origine de cette courbe a pour équation $u_C = \frac{du_C}{dt}(0)t$ avec $\frac{du_C}{dt}(0) = \frac{E}{\tau}$. Ainsi, la tangente coupe-t-elle l'asymptote $u_C = E$ pour $t = \tau$. Cette propriété est une méthode classique d'identification d'un processus du premier ordre, c'est-à-dire régi par une équation différentielle similaire à celle que doit satisfaire u_C dans le circuit R - C série.

Une seconde méthode possible, similaire à celle de mesure de la demi-vie d'un radionucléide, est fondée par la détermination du temps t_0 au bout duquel la tension $u_C(t_0)$ vaut la moitié de la tension finale, $E/2$. D'où il vient que $t_0 = \tau \ln 2$.



L'équation obtenue à la question 4 est caractéristique des circuits R - C série et sa forme mérite d'être retenue.

3 Réponses : 1. $t_1 = CU_1/I$, $t_1 = 36$ s.

2. $E_{C_1} = \frac{1}{2}CU_1^2$, $E_{C_1} = 3,6$ kJ.

3. $A = 0$, $B = U_1$, $\tau = RC$.

4. $t_2 = t_1 + RC \ln(U_1/U_2)$, $t_2 \approx 1070$ s.

5. $E_R = \frac{1}{2}C(U_1^2 - U_2^2)$, $E_R \approx 1,6$ kJ, $P_R = E_R/(t_2 - t_1)$, $P_R \approx 1,5$ W.

6. $\eta = 92\%$.

Explications :

1. D'après les conventions d'orientation entre I et u_C , il vient $I = C \frac{du_C}{dt}$, soit $dt = \frac{C}{I} du_C$ d'où par intégration entre l'instant initial et t_1 : $\int_0^{t_1} dt = \int_0^{U_1} \frac{C}{I} du_C$; ainsi, $t_1 = \frac{C}{I}U_1$. Application numérique : $t_1 = 1800 \times 2/100 = 36$ s.

2. L'énergie emmagasinée par le condensateur entre l'instant initial et l'instant t_1 vaut $E_{C_1} = \frac{1}{2}CU_1^2$. Application numérique : $E_{C_1} = \frac{1}{2} \times 1800 \times 2^2 = 3600$ J.

3. À l'instant t_1 , la tension u_C vaut U_1 , donc lorsque l'on remplace t par t_1 dans l'expression de u_C qui est donnée, on obtient : $A+B = U_1$. Au cours de la décharge du condensateur, la tension, au bout d'un temps suffisamment long tend vers 0 ; lorsque l'on prend la limite de l'expression de u_C lorsque t tend vers $+\infty$, il vient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u_C = A = 0.$$

D'où, $A = 0$ et $B = U_1$.

La constante de temps τ du circuit est égale à RC .

4. D'après la question précédente, $u_C(t) = U_1 \exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau}\right)$; on recherche donc l'instant t_2 tel que $u_C(t_2) = U_2$ d'où $U_1 \exp\left(-\frac{t_2-t_1}{\tau}\right) = U_2$. Isolant l'exponentielle, et prenant le logarithme, il vient $-\frac{t_2-t_1}{\tau} = \ln\left(\frac{U_2}{U_1}\right)$, soit $t_2 - t_1 = -RC \ln\left(\frac{U_2}{U_1}\right) = RC \ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right)$.

Application numérique :

$$t_2 = 36 + 1800 \times 2 \times \ln\left(\frac{2}{1,5}\right) \approx 1072 \approx 1,07 \cdot 10^3 \text{ s.}$$

5. L'énergie dissipée dans ces conditions par effet Joule dans la résistance, E_R , est la différence entre l'énergie initiale accumulée par le condensateur et l'énergie qu'il possède à l'instant t_2 : $E_R = E_{C_1} - E_{C_2}$, soit $E_R = \frac{1}{2}CU_1^2 - \frac{1}{2}CU_2^2$. Ainsi,

$$E_R = \frac{1}{2}C(U_1^2 - U_2^2).$$

Application numérique :

$$E_R = 0,5 \times 1800 \times (2^2 - 1,5^2) = 1575 \approx 1,6 \text{ kJ.}$$

La puissance moyenne, P_R , dissipée pendant cette durée $t_2 - t_1$ est le rapport de l'énergie dissipée à la durée pendant laquelle cette dissipation se produit. Ainsi,

$$P_R = \frac{E_R}{t_2 - t_1}. \text{ Application numérique : } P_R = 1575 / (1072 - 36) \approx 1,52 \text{ W.}$$

6. Le rendement, d'après la définition donnée, est donc le rapport de la puissance moyenne dissipée effectivement constatée au cours de l'expérience, $P_{R_{exp}}$, à la puissance moyenne théorique que l'on pourrait obtenir, P_R . Donc, $\eta = P_{R_{exp}} / P_R$. Application numérique : $\eta = 1,4 / 1,52 \approx 0,92$ soit 92 %.

Le rendement du supercondensateur est donc presque deux fois meilleur que celui de l'accumulateur.

4 Réponse : B

La forme $u_c(t) = \alpha + \beta \exp(-t/\tau)$, et la condition initiale donnée, conduisent à une première relation, $\alpha + \beta = u_c(0) = Q_0/C$; le condensateur se décharge par ailleurs complètement à travers la résistance donc sa tension doit tendre vers 0 lorsque le temps devient très grand devant la constante de temps, ce que nous pouvons traduire par la relation :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u_c(t) = 0 = \alpha.$$

Donc, $\alpha = 0$ et $\beta = Q_0/C$. Ainsi, $u_c(t) = \frac{Q_0}{C} \exp(-t/\tau)$. À l'instant t_0 , compté à partir de l'instant initial, où la charge initiale est divisée par 2, la tension aux bornes du condensateur est aussi divisée par 2 ; ainsi, l'instant t_0 est déterminé par la relation : $1/2 = \exp(-t_0/\tau)$, soit en prenant le logarithme des deux membres, $t_0 = \tau \ln 2$.



Il s'agit en quelque sorte de la « demi-vie » de la charge du condensateur dans le circuit $R-C$.

5

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| V | F | F | F |

1. La constante de temps d'un tel circuit est évidemment $\tau = RC$, or, on peut considérer que la charge est en pratique achevée après une durée de l'ordre de 5τ . Ainsi, si R est grande, τ l'est aussi et la charge en est d'autant ralentie.
2. Pour la même raison que précédemment, plus la capacité C du condensateur est élevée, plus la charge est lente.
3. Le temps de charge d'un condensateur à travers une résistance est indépendant de la valeur de la tension sous laquelle on le charge.
4. Lorsque le condensateur se charge, la tension aux bornes de la résistance diminue, donc l'intensité du courant électrique dans le circuit électrique diminue aussi. Tout se passe comme si, au fur et à mesure qu'un réservoir se remplissait, le robinet se refermait de lui-même.

6

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| F | F | F | F |

1. L'intensité du courant dans le circuit, eu égard aux orientations relatives de i et u , vaut $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$.
2. L'application de la loi des mailles dans le circuit et la loi d'Ohm aux bornes de la résistance conduisent à la relation $E = Ri + u$; avec l'expression de i de la question précédente, l'équation différentielle régissant la tension u aux bornes du condensateur est $E = RC \frac{du}{dt} + u$.
3. Lorsque t vaut 10 ms, la tension aux bornes du condensateur vaut 6 V, ce qui signifie que la tension aux bornes de la résistance vaut $E - u_1$, soit 4 V; or, à ce même instant, l'intensité du courant dans le circuit vaut $i_1 = 1$ mA. Ainsi, la valeur de la résistance R vaut-elle $(E - u_1)/i_1$, soit 4 k Ω .
4. La forme de la tension solution de l'équation différentielle précédente est $u(t) = A + B \exp(-t/\tau)$ avec comme condition initiale, $u(0) = u_0 = 2$ V et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = E = 10 \text{ V.}$$

Ainsi, $A + B = 2$ V et $A = 10$ V, soit $B = -8$ V. À l'instant $t_0 = 10$ ms, la tension aux bornes du condensateur vaut $u(t_0) = u_1 = 6$ V = $10 - 8 \exp(-t_0/\tau)$ V.

D'où $-4 = -8 \exp(-t_0/\tau)$, $1/2 = \exp(-t_0/\tau)$, soit $t_0 = \tau \ln 2$, et $\tau = t_0/\ln 2$. Numériquement, $\tau = 10 \cdot 10^{-3}/0,5 = 20 \cdot 10^{-3}$ s. Comme $C = \tau/R$, il vient $C = 20 \cdot 10^{-3}/4 \cdot 10^3 = 5 \cdot 10^{-6}$ F = 5 μ F.



Ici, il n'y a pas d'autre solution, pour déterminer la capacité C , que de passer par la détermination de la constante de temps et donc il faut connaître la forme générale de la tension aux bornes d'un condensateur se chargeant sous tension constante à travers une résistance.

7

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| F | F | V | V |

1. Si la tension entre les armatures du condensateur est effectivement de 1 000 V, c'est aussi la tension aux bornes de la résistance dans ce circuit. Ainsi, le courant dans le circuit à l'instant de la fermeture de l'interrupteur est U/R , soit numériquement $10^3/10^5 = 10^{-2}$ A.

2. L'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur est $RC \frac{du}{dt} + u = 0$. Ainsi, $\frac{du}{dt} = -u/RC$. À l'instant initial,

$$\frac{du}{dt} = -10^3/(10^5 \times 100 \cdot 10^{-6}) = -10^2 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3. L'équation différentielle satisfaite par u a pour solution : $u(t) = A \exp(-t/\tau)$, avec $\tau = RC$ et A déterminée à l'instant de référence. Or, dans le cas étudié, $RC = 10$ s. À l'instant $t = 20$ s, il y a 10 s, soit une durée égale à τ , que l'interrupteur est fermé et la tension initiale est ainsi divisée par e . Il ne reste plus alors qu'environ 37 % de la tension à l'instant de référence, soit environ 370 V.

4. L'instant $t = 60$ s correspond à une durée de 5τ depuis l'instant de la fermeture du circuit. Il est donc légitime de considérer que la décharge est achevée à cette date.

8

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| F | V | F | F |

a. De manière classique, la tension u entre les armatures du condensateur vérifie l'équation différentielle $RC \frac{du}{dt} + u = E$. Le condensateur étant déchargé à l'instant initial, en posant $\tau = RC$, la tension s'exprime en fonction du temps

par $u(t) = E(1 - \exp(-t/\tau))$ et l'intensité du courant électrique dans le circuit $i = (E - u)/R = \frac{E}{R} \exp(-t/\tau)$.

b. D'après la question précédente, à l'instant initial, $i = E/R$. Or, E est la valeur asymptotique de la tension aux bornes du condensateur, soit, à partir du graphique de $u(t)$, $E = 10 \text{ V}$ et $i = 10/10^5 = 10^{-4} \text{ A}$.

c. La constante de temps τ est donnée par l'abscisse du point d'intersection entre la tangente à l'origine à la courbe $u(t)$ et l'asymptote. On vérifie aisément que $\tau = 1 \text{ ms}$. Ainsi, $C = \tau/R$, soit, numériquement, $C = 10^{-3}/10^5 = 10^{-8} \text{ F}$ donc 10 nF .

d. Le générateur doit fournir une puissance instantanée égale à $Ei(t) = E \frac{dq}{dt}$. L'énergie totale fournie au cours de la charge du condensateur est donc

$$W = \int_0^{+\infty} E i dt = \int_0^{+\infty} E dq = EQ$$

où Q est la charge acquise par le condensateur au cours du processus. Or, $Q = CE$, d'où $W = CE^2$, soit numériquement $W = 100 \times C$.

9

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| V | F | F | V |

1. La situation est la même que celle de la question a. de l'exercice précédent, mais avec une résistance totale du circuit égale à $R + r$. Donc, dans les formules, il suffit de remplacer R par $R + r$.

2. L'expression est fautive car la tension entre les armatures du condensateur augmenterait au cours du temps ! En fait, $u(t) = E \exp(-t/\tau')$ avec $\tau' = RC$ puisque la résistance interne de la source de tension, r , n'intervient plus.

3. L'expression de l'intensité du courant électrique pendant cette seconde phase serait exacte mais avec $\tau' = RC$ et non R/C .

4. L'allure des graphes correspond aux expressions $u(t) = E \exp(-t/\tau')$ et $i(t) = -\frac{E}{R} \exp(-t/\tau')$ avec $\tau' = RC$.

10

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| F | V | F | F |

1. La constante de temps $\tau = RC$ vaut $5.10^2 \times 10.10^{-6} = 5.10^{-3}$ s, soit 5 ms.
2. Dans cette première phase de fonctionnement, la tension entre les bornes du condensateur est donnée par l'expression $u(t) = E(1 - \exp(-t/\tau))$. Ainsi à l'instant $t = T/2$, $u(T/2) = E(1 - \exp(-T/2\tau))$; or, numériquement $T/2\tau = 20.10^{-3}/(2 \times 5.10^{-3}) = 2$; donc, $u(T/2) = E(1 - e^{-2})$.
3. Pendant cette phase $u(t)$ est régie par $RC \frac{du}{dt} + u = 0$ et par conséquent, entre $T/2$ et T , $u(t) = U_1 \exp(-(t - T/2)/\tau)$. Ainsi, $u(T) = U_1 e^{-2} = E\alpha(1 - \alpha)$.
4. Au cours de cette troisième demi-période, la tension est donnée par

$$u(t) = E + B \exp(-(t - T)/\tau),$$

avec $u(T) = E\alpha(1 - \alpha)$. Donc, $B = E(\alpha - \alpha^2 - 1)$; et $u(3T/2) = E(1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3)$.

2.2 Circuits R-L

11

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| V | F | V | F |

1. Avant le fermeture de l'interrupteur, il ne peut y avoir de courant électrique dans le circuit. La continuité du courant électrique qui traverse la bobine d'auto-induction fait que son intensité doit être nulle juste après sa fermeture.
2. L'intensité du courant électrique étant nulle juste après la fermeture de l'interrupteur, les tensions aux bornes des éléments ohmiques (r_i et R_i) sont, elles aussi, nulles. L'équation électrique du circuit à cet instant est donc $E = L \frac{di}{dt}$.

3. La constante de temps du circuit R-L série est $\tau = \frac{L}{R+r}$; soit, numériquement,

$$\tau = 10.10^{-3}/(2.10^3 + 10) \approx 5.10^{-6} \text{ s.}$$

4. Lorsque le régime permanent est atteint, l'intensité du courant électrique dans le circuit est constante et le terme d'auto-induction $L \frac{di}{dt}$ est nul. La bobine se comporte comme un fil très légèrement résistif. L'intensité du courant électrique en régime permanent est $I = \frac{E}{R+r}$, soit, numériquement,

$$I = \frac{20}{2.10^3 + 10} \approx 10.10^{-3} \text{ A, soit } 10 \text{ mA.}$$

En convention récepteur, la tension aux bornes d'une bobine auto-inductive, d'inductance L et de résistance r est égale à $u = ri + L \frac{di}{dt}$. La puissance instantanée fournie à la bobine est donc de ce fait égale à $p = ri^2 + Li \frac{di}{dt} = ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)$.

Une discontinuité de courant électrique rendrait infini le terme $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)$ et donc la puissance instantanée reçue par la bobine : une telle situation est dépourvue de sens physique. Ainsi, l'intensité du courant électrique qui traverse une bobine auto-inductive ne peut qu'être continue.

Ce fait conditionne la conception des circuits électriques comportant une bobine : la continuité du courant électrique qui la traverse doit toujours être assurée, sous peine de faire apparaître des surtensions aux bornes du dispositif interrompant le courant électrique dans la branche inductive d'un circuit.

En régime permanent, une bobine se comporte comme un fil de faible résistance.

Un circuit constitué par une bobine auto-inductive de résistance r et d'inductance L , en série avec une résistance principale R , l'association étant alimentée par une source de tension E est régi par l'équation différentielle suivante, portant sur l'intensité du courant électrique $i(t)$:

$$E = L \frac{di}{dt} + (R + r)i, \quad \text{ou, en divisant par } R + r, \quad \frac{E}{R + r} = \frac{L}{R + r} \frac{di}{dt} + i.$$

Le membre de gauche de l'équation fait ainsi apparaître l'intensité du courant électrique en régime permanent, $I_0 = \frac{E}{R + r}$. L'homogénéité du membre de droite impose que la dimension du terme $\frac{L}{R + r}$ soit celle d'un temps : on pose ainsi cette quantité égale à τ , que l'on appelle la constante de temps du circuit inductif.

Ainsi, l'intensité du courant électrique dans ce circuit sera-t-elle, en prenant comme instant initial l'instant de la fermeture de l'interrupteur,

$$i(t) = I_0 (1 - \exp(-t/\tau)),$$

la tension aux bornes de la résistance R , $U_R(t) = Ri(t)$ et la tension aux bornes de la bobine d'auto-induction $U_B(t) = ri(t) + L \frac{di}{dt}(t)$, soit

$$U_B(t) = rI_0 + \left(\frac{L}{\tau} - r \right) I_0 \exp(-t/\tau).$$

Si la résistance de la bobine peut être négligée devant R , l'intensité de régime permanent devient $I_0 = E/R$ et l'expression de la tension aux bornes de la bobine devient alors $U_B(t) = E \exp(-t/\tau)$. On remarquera que, dans les deux cas, $U_B(t)$ est discontinue à l'instant initial.

12

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| F | F | F | V |

1. En régime permanent, le circuit se comporte comme s'il était constitué d'une source de tension et de deux résistances : r , la résistance de la bobine, et R en série.

Ainsi, $I = \frac{E}{R+r}$, soit, numériquement, $I = \frac{10}{18+7} = 0,4 \text{ A}$.

2. L'expression de la constante de temps est fautive ($\tau = \frac{L}{R+r}$) ainsi que celle de $i(t)$ car, dans la manipulation, la continuité du courant électrique dans la bobine n'a pas pu être assurée. Il est certainement apparu une surtension au niveau de l'interrupteur et l'on ne peut rien dire de quantitatif sur l'évolution du courant dans le circuit final constitué de la résistance R et de la bobine.

3. L'expression est manifestement fautive puisque l'intensité augmenterait indéfiniment au fil du temps alors qu'il n'y a plus de source d'énergie active dans le circuit.

4. Les instants t_1 et t_2 sont définis par $i(t_1) = 0,9I_0$ et $i(t_2) = 0,1I_0$. À supposer que l'expression de l'intensité du courant dans le circuit puisse être prise égale à $i(t) = I_0 \exp(-t/\tau)$ avec $I_0 = \frac{E}{R+r}$ et $\tau = \frac{L}{R+r}$, on aura $\exp(-t_1/\tau) = 0,9$ et $\exp(-t_2/\tau) = 0,1$, soit, en faisant le rapport membre à membre des deux équations,

$$\exp((t_2 - t_1)/\tau) = 9.$$

en prenant le logarithme des deux membres de l'égalité, il vient

$$t_2 - t_1 = \tau \ln 9.$$



Les conditions de réalisation de l'expérience n'autorisent en fait aucune expression sur les tensions ou l'intensité du courant électrique dans le circuit car, à l'instant du basculement de l'interrupteur, un arc électrique (une étincelle) apparaîtra au point d'ouverture du circuit, qui dissipera l'énergie électromagnétique accumulée dans la bobine ($\frac{1}{2}Li^2$). Par conséquent, les affirmations assénées sur la tension U_R sont fausses.

Il est par ailleurs maladroit de parler de décharge dans cette situation, cette expression étant plutôt réservée à l'évolution de la tension aux bornes d'un condensateur, en ce qu'elle exprime effectivement une diminution en valeur absolue des charges portées par chacune des armatures. Il serait aussi simple de parler « d'extinction du courant dans le circuit ».

13

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| F | F | F | F |

1. La lecture de la courbe de $i(t)$ indique que I_0 , valeur asymptotique de $i(t)$, vaut $I_0 = 45 \text{ mA}$.

2. D'après le rappel théorique de l'exercice 11, l'intensité de régime permanent a pour expression : $I_0 = \frac{E}{R+r}$. D'où $r = \frac{E}{I_0} - R$, soit, numériquement, $r = \frac{9}{45 \cdot 10^{-3}} - 190 = 200 - 190 = 10 \Omega$.

3. La constante de temps τ de ce type de circuit a pour expression (cf. le même rappel théorique) $\tau = \frac{L}{R+r}$, d'où $L = \tau(R+r)$. Numériquement, $L = 0,25 \cdot 10^{-3} \times 200 = 50 \cdot 10^{-3} \text{ H}$.

4. Si les deux bobines ont la même inductance et si elles sont placées suffisamment loin l'une de l'autre, l'inductance totale du circuit est approximativement égale à la somme des inductances de chacune des bobines, alors que la résistance totale du circuit est passée de 200Ω à 210Ω . Il est ainsi plausible de constater que la constante de temps a pratiquement doublé. On serait donc tenter de considérer l'assertion comme vraie.

En revanche, si les bobines sont très voisines l'une de l'autre, la manière dont elles sont connectées (même sachant qu'elles constituent une portion d'un circuit série) ou disposées l'une par rapport à l'autre peut faire varier l'inductance totale du circuit dans une fourchette non négligeable, et l'affirmation être infondée.

14

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| V | F | V | V |

a. L'affirmation est exacte par continuité du courant dans la bobine et donc dans la maille unique que constitue ce circuit.

b. À la fermeture d'un circuit inductif à une maille, c'est la bobine qui prend le choc de tension et $u_{BC}(0^+) = E$.

c. Comme précédemment, I_0 l'intensité de régime permanent est donnée par $I_0 = \frac{E}{R+r+r'}$ d'où $R = \frac{E}{I_0} - r - r'$.

Numériquement, $R = \frac{5}{50 \cdot 10^{-3}} - 10 - 20 = 70 \Omega$.

d. Dans ce type de circuit à une maille, τ est toujours donnée par le rapport de l'inductance du circuit sur la résistance totale de la maille. Donc, $\tau = \frac{L}{R+r+r'}$, soit, numériquement $\tau = \frac{0,10}{70+10+20} = 10^{-3}$ s.

15

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| V | F | V | V |

a. $\tau = \frac{L}{R+r+r'}$. (cf. exercice précédent).

b. $u_{BC} = r'i + L \frac{di}{dt}$, puisqu'on est en convention récepteur et que la bobine possède une résistance non négligée.

c. À $t = 0^+$, l'intensité du courant électrique est nulle dans le circuit et donc les tensions dues aux résistances sont elles aussi nulles. Il ne reste plus que $E = u_{BC}(0^+) = L \frac{di}{dt}(0^+)$.

d. L'intensité du courant électrique en régime permanent vaut $I = \frac{E}{R+r+r'}$.

Numériquement, $I = \frac{9}{87+1+12} = 90$ mA.



Il n'y a pas incompatibilité entre les réponses aux questions b et c, car, pour la question c, l'expression de u_{BC} qui apparaît n'est vraie qu'à l'instant initial dans la mesure où aucun courant ne circule dans le circuit.

16 Réponses : 1. u_{AC} .2. u_{BC} .

3. courbe III.

4. cf schéma donné dans le corrigé.

5. $E = 12$ V, $I_{max} = 250$ mA,6.a. $E = L \frac{di}{dt} + (R + R_L) i$, 6.b. $L = 0,144$ H, $R_L = 8 \Omega$,7. courbe V pour u_{AB} et courbe VIII pour u_{BC} .**Explications :**

1. La courbe 1 représente de manière évidente la tension aux bornes de la source de tension E , donc u_{AC} .

2. La courbe 2 représente une tension ayant une évolution similaire à celle de l'intensité du courant électrique dans le circuit : c'est donc une tension proportionnelle à $i(t)$, donc celle aux bornes de la résistance R , soit u_{BC} .

3. D'après la remarque faite à la question précédente, la courbe représentative de $i(t)$ ne peut être que la courbe III.

4. $u_{AB} = E - u_{BC}$. Elle part de 12 V et décroît exponentiellement jusqu'à sa valeur asymptotique de 2 V. Elle a donc l'allure suivante :

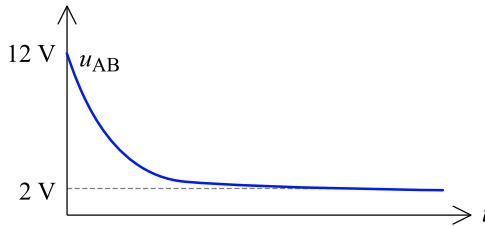


Figure 2.38

5. Sur le graphe de l'acquisition, on lit : $E = 12 \text{ V}$ et la valeur asymptotique de la tension aux bornes de la résistance R , RI_{max} , égale à 10 V. On en déduit que

$$I_{max} = \frac{10}{40} = 0,25 \text{ A.}$$

6.a. La loi des mailles donne $E = u_{AB} + u_{BC}$. La loi d'Ohm aux bornes de la résistance donne $u_{BC} = Ri(t)$, la loi d'Ohm généralisée aux bornes de la bobine

$$u_{AB} = R_L i(t) + L \frac{di}{dt}(t). \text{ D'où}$$

$$E = (R + R_L) i(t) + L \frac{di}{dt}(t).$$

6.b. Soit $u_{AB\infty}$ la valeur asymptotique de u_{AB} ; elle est égale à $R_L I_{max}$, d'où $R_L = \frac{u_{AB\infty}}{I_{max}}$. Numériquement, $R_L = \frac{2}{0,25} = 8 \Omega$.

Pour déterminer la valeur de l'inductance L , il faut, en l'absence d'autres informations, passer par la détermination expérimentale de τ . Cette dernière s'effectue, sur la courbe 2 donnée, en traçant la tangente à l'origine et en mesurant ensuite l'abscisse du point d'intersection de cette tangente à l'origine avec l'asymptote de la courbe 2, située à 10 V : le temps ainsi déterminé correspond à la constante de temps τ du circuit. On mesure de la sorte $\tau = 3 \text{ ms}$. Comme $L = \tau(R + R_L)$, il vient ainsi $L = 3 \cdot 10^{-3} \times (40 + 8) = 0,144 \text{ H}$.

7. La courbe correspondant à la tension $u_{AB} = L \frac{di}{dt}$, en négligeant la résistance de la bobine, doit être proportionnelle à la dérivée de $i(t)$ par rapport au temps, donc constante par morceau, positive au départ, ensuite négative puis positive à nouveau, de même valeur qu'au début. La seule courbe satisfaisant à ces exigences est la courbe V.

u_{BC} est proportionnelle à $i(t)$: la seule possibilité est la courbe VIII.

17

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| F | V | F | V |

a. La tension aux bornes de la résistance est proportionnelle à l'intensité du courant électrique dans le circuit. Comme le circuit comprend une bobine d'auto-induction, le courant électrique doit y être continu. La courbe 1 représente donc la tension u_{AB} aux bornes de la bobine.

b. Les conventions courant-tension sont réceptrices et donc, la bobine étant considérée comme idéale, la relation proposée est correcte.

c. Comme la courbe 1 représente la tension aux bornes de la bobine, que les valeurs extrémales de la tension correspondent à ± 3 carreaux par rapport au zéro des tensions et que la sensibilité verticale est de $2,0 \text{ V/division}$, l'amplitude de u_{AB} , U_{ABM} est donc de 6 V .

d. La valeur absolue des pentes de la tension u_{BC} est liée à $\left| \frac{di}{dt} \right|$. En effet, si nous appelons U_{BCM} et U_{BCm} les valeurs maximale et minimale de la tension aux bornes de la résistance, les valeurs maximale et minimale de l'intensité du courant électrique dans le circuit valent respectivement $I_M = -U_{BCm}/R$ et $I_m = -U_{BCM}/R$ (Attention ! pour la résistance, la convention courant-tension est génératrice). Numériquement, $I_M = -(-5)/500 = 10 \text{ mA}$ et $I_m = -10 \text{ mA}$. Les pentes étant constantes par morceau, $\left| \frac{di}{dt} \right| = \left| \frac{I_M - I_m}{\Delta t} \right|$, avec $\Delta t = 2 \times 0,2 \cdot 10^{-3} = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ s}$. Donc,

$$a = \left| \frac{di}{dt} \right| = 20 \cdot 10^{-3} / 0,4 \cdot 10^{-3} = 50 \text{ A} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Ainsi, $L = U_{ABM}/a$, soit, numériquement $L = 6/50 = 0,12 \text{ H}$.

18 Réponses : 1. $E = L \frac{di}{dt} + Ri$.

2. $A = \frac{E}{R}$, $B = -A$ et $\tau = L/R$.

3. $A = -B = 4,24 \text{ A}$ et $\tau = 0,15 \text{ s}$, $R = 11,8 \Omega$ et $L = 1,77 \text{ H}$.

4. Voir le graphe correspondant ci-dessous.

5. $i(\tau) = \frac{E}{R} (1 - \exp(-1)) \approx 2,68 \text{ A}$.

6. $A' = 0$, $B' = i(\tau)$, $i(2\tau) = i(\tau) \exp(-1) = 0,99 \text{ A}$.

7. $i(3\tau) = i(\tau) + i(2\tau) \exp(-1) = 3,04 \text{ A}$.

Explications :

1. La loi des mailles appliquée au circuit donne $E = u_L + u_R$; les lois d'Ohm généralisées aux bornes de la résistance et de la bobine idéale sont $u_L = L \frac{di}{dt}$ et $u_R = Ri$.

D'où l'équation $E = L \frac{di}{dt} + Ri$.

2. En remplaçant dans l'équation précédente $i(t)$ par l'expression qui est donnée, il vient $E = R(A + B \exp(-t/\tau)) + L \left(-\frac{B}{\tau}\right) \exp(-t/\tau)$, soit

$$E = RA + B \left(R - \frac{L}{\tau}\right) \exp(-t/\tau).$$

Pour que l'équation soit satisfaite à tout instant $t \geq 0$, il faut que le facteur devant l'exponentielle soit nul, ce qui se traduit par la relation $\tau = L/R$. Il s'ensuit que $A = E/R$.

À l'instant initial, l'intensité du courant dans le circuit est nulle par continuité, d'où $A + B = 0$, soit $A = -B$.

3. La valeur asymptotique de $i(t)$ qui correspond à A vaut 4,24 A. La constante de temps du circuit τ est déterminée par la méthode de la tangente à l'origine, on obtient $\tau = 0,15$ s.

Comme $R = E/A$, numériquement $R = 50/4,24 \approx 11,8 \Omega$. $L = R\tau$, soit, numériquement, $L = 11,8 \times 0,15 \approx 1,77$ H.

4.

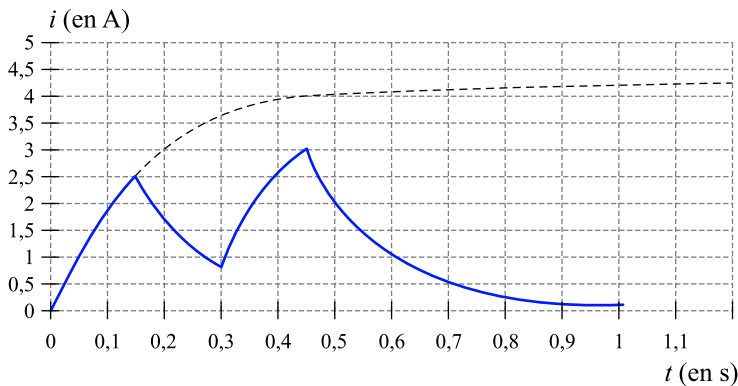


Figure 2.39

5. Sur l'intervalle considéré, l'expression obtenue grâce à la question 2 demeure valable : $i(t) = \frac{E}{R} (1 - \exp(-t/\tau))$. Donc, $i(\tau) = \frac{E}{R} (1 - \exp(-1))$. Numériquement, $i(\tau) = \frac{50}{11,8} (1 - e^{-1}) \approx 2,68$ A.

6. La méthode de résolution sur l'intervalle considéré est la même qu'au début : il suffit de prendre $E = 0$. Ainsi, $A' = 0$ et à $t = \tau$, $B' = i(\tau)$. D'où $i(2\tau) = i(\tau) \exp(-1)$; numériquement, $i(2\tau) = 2,68 \times e^{-1} \approx 0,99 \text{ A}$.

7. Sur cet intervalle de temps, $i(t)$ peut être pris égal à $A'' + B'' \exp(-(t - 2\tau)/\tau)$. Le régime permanent conduit à $A'' = E/R$; la condition initiale au début de cet intervalle conduit à $i(2\tau) = A'' + B''$, d'où $B'' = i(2\tau) - \frac{E}{R}$. Ainsi,

$$i(t) = \frac{E}{R} + \left(i(2\tau) - \frac{E}{R} \right) \exp\left(-\frac{t - 2\tau}{\tau}\right).$$

Il en résulte que $i(3\tau) = \frac{E}{R} + \left(i(2\tau) - \frac{E}{R} \right) \exp(-1)$, soit en réarrangeant les termes, $i(3\tau) = i(\tau) + i(2\tau) \exp(-1)$. Numériquement, $i(3\tau) = 2,68 + 0,99 \times e^{-1} \approx 3,04 \text{ A}$.

19 Réponse : A.

La courbe 2 ne peut être que celle de la tension aux bornes d'un condensateur se chargeant dans un circuit R - C série ou la tension aux bornes de la résistance dans un circuit R - L série. Seules les combinaisons A et D peuvent correspondre à la situation. Les valeurs des constantes de temps de chacune de ces combinaisons sont respectivement $L/R = 3 \text{ ms}$ pour A et $RC = 1 \text{ ms}$ pour D. La détermination de cette constante de temps par le tracé de la tangente à l'origine à la courbe 2 montre que cette dernière vaut 3 ms . La combinaison correcte est donc A.

2.3 Circuits L-C

20

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| F | V | V | V |

1. En l'absence d'élément dissipatif, tel une résistance, les oscillations sont libres mais harmoniques, c'est-à-dire purement sinusoïdales et non amorties.

2. C'est la loi d'Ohm généralisée pour le condensateur qui donne la relation entre $i(t)$ et $u(t)$. D'après le schéma, les conventions courant-tension sont génératrices, donc, à partir des relations $i = \frac{dq}{dt}$ et $u = -\frac{q}{C}$, vous obtiendrez $i = -C \frac{dq}{dt}$. Avec $u(t)$ de la forme $u(t) = U_m \cos(\omega t)$, $i(t)$ devient dans ce cas : $i(t) = C\omega U_m \sin(\omega t)$. Il est évident que $C\omega U_m$ représente l'amplitude maximale de l'intensité du courant électrique dans le circuit, à savoir 10 mA , $\omega = \frac{2\pi}{T} = 10^4 \text{ s}^{-1}$ et $U_m = 2 \text{ V}$. $C = \frac{I_m}{\omega U_m}$, soit, numériquement, $C = 10 \cdot 10^{-3} / (10^4 \times 2) = 5 \cdot 10^{-7} \text{ F}$ soit $0,5 \mu\text{F}$.

3. Il s'agit bien sûr de l'équation canonique régissant la tension $u(t)$ aux bornes de la bobine ou du condensateur dans le circuit L - C .
4. La pulsation des oscillations est donnée par la relation : $\omega = 1/\sqrt{LC}$, d'où $L = 1/C\omega^2$. Numériquement, $L = 1/(0,5 \cdot 10^{-6} \times 10^8) = 20 \cdot 10^{-3}$ H.

Ce type de circuit où un condensateur se décharge à travers une bobine idéale est régi par une équation différentielle du second ordre (c'est-à-dire dans laquelle interviennent la fonction recherchée et ses dérivées première — éventuellement — et seconde — obligatoirement) qui a toujours la même forme. Cette équation est obtenue en utilisant l'égalité des tensions aux bornes du condensateur et de la bobine et en écrivant les lois d'Ohm généralisées pour chacun d'eux. Il convient de remarquer qu'alors, les conventions courant-tension sont obligatoirement réceptrices pour un des deux dipôles et génératrices pour l'autre.

Dans le cas qui nous préoccupe, elles sont réceptrices pour la bobine d'auto-induction parfaite et génératrices pour le condensateur. Ainsi,

$$u(t) = L \frac{di}{dt} \quad \text{et} \quad i = -C \frac{du}{dt},$$

d'où :

$$u = -LC \frac{d^2u}{dt^2}$$

soit l'équation qui était proposée à la question 2. Il est habituel de mettre cette équation sous la forme :

$$0 = \frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

ω_0 est appelée la pulsation propre du circuit ; elle est liée à la fréquence propre f_0 et à la période propre T_0 des oscillations libres du circuit par :

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}.$$

Les mathématiques nous apprennent qu'une équation différentielle de cette nature possède seulement deux solutions indépendantes. La recherche de ces solutions s'effectue en se demandant si $u(t) = U_0 \exp(rt)$ avec r constante pourrait convenir et à quelle condition sur r cela se pourrait. Alors,

$$\frac{du}{dt}(t) = rU_0 \exp(rt) \quad \text{et} \quad \frac{d^2u}{dt^2}(t) = r^2 U_0 \exp(rt).$$

En remplaçant $u(t)$ et $\frac{d^2u}{dt^2}(t)$ dans l'équation différentielle par leurs expressions respectives, il vient, après mise en facteur de l'exponentielle et de U_0 ,

$$0 = (r^2 + \omega_0^2) U_0 \exp(rt).$$

Cette relation n'est vraie pour tout $t \geq 0$ que si $r^2 + \omega_0^2 = 0$ ou si $U_0 = 0$: cette seconde éventualité rend la solution sans intérêt, donc la condition sur r est $r^2 + \omega_0^2 = 0$, soit $r = i\omega_0$ ou $r = -i\omega_0$ avec $i^2 = -1$. Ainsi les deux solutions indépendantes sont : $u_1(t) = U_{01} \exp(i\omega_0 t)$ et $u_2(t) = U_{02} \exp(-i\omega_0 t)$. D'après la définition de $\exp(i\theta)$ égale à $\cos \theta + i \sin \theta$, on comprend que, par une combinaison appropriée, les deux solutions indépendantes puissent aussi s'écrire $u_1(t) = U_1 \cos(\omega_0 t)$ et $u_2(t) = U_2 \sin(\omega_0 t)$. La solution complète de l'équation qui ordonne le fonctionnement du circuit est ainsi : $u(t) = U_1 \cos(\omega_0 t) + U_2 \sin(\omega_0 t)$.

Nous voyons de la sorte apparaître deux constantes, U_1 et U_2 , à déterminer à partir des « conditions initiales » ; par exemple, au moment où l'on ferme le circuit : la tension initiale aux bornes du condensateur et la nullité du courant par continuité du courant électrique dans la bobine.

21

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| F | F | V | F |

1. cf. le rappel théorique de l'exercice précédent. L'équation différentielle du circuit est obtenue en écrivant les lois d'Ohm généralisées $i = C \frac{du_c}{dt}$ car les conventions courant-tension sont réceptrices pour le condensateur et $u_L = L \frac{di}{dt}$ pour la même raison en ce qui concerne la bobine et la loi des mailles $u_c + u_L = 0$. Au final, il résulte l'équation différentielle du circuit $0 = LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + u_c$.

2. La pulsation propre du circuit, ω_0 est donnée par $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, soit, numériquement, $\omega_0 = 1/\sqrt{10 \cdot 10^{-3} \times 10 \cdot 10^{-9}} = 10^5 \text{ rad.s}^{-1}$. La pulsation propre est donc correcte. Recherchons $u_c(t)$ sous la forme $u_c(t) = U_1 \cos(\omega_0 t) + U_2 \sin(\omega_0 t)$ avec comme conditions initiales, à l'instant de la fermeture de l'interrupteur K_2 , pris comme instant $t = 0$, $u_c(0) = E = 10 \text{ V}$ et $i(0) = 0$, et donc $\frac{du_c}{dt}(0) = 0$, par continuité du courant dans le circuit ainsi créé, imposée par la présence de la bobine d'auto-induction.

Ainsi, $u_c(0) = E = U_1$ et $\frac{du_c}{dt}(0) = 0 = \omega_0 U_2$; d'où $U_1 = E = 10 \text{ V}$ et $U_2 = 0$. Par conséquent, l'expression de la tension aux bornes du condensateur est $u_c(t) = 10 \cos(10^5 t) \text{ V}$.

3. D'après la relation entre la période et la pulsation $T_0 = 2\pi/\omega_0$; soit, numériquement, $T_0 \approx 2 \times 3/10^5 = 6 \cdot 10^{-5} \text{ s}$.

4. Le circuit est conservatif au sens où aucun élément ne vient dissiper l'énergie qu'il avait initialement accumulée. Or, cette énergie initiale est amenée par le condensateur et s'exprime $E = \frac{1}{2} C (u_c(0))^2$. Numériquement, $E = 0,5 \times 10 \cdot 10^{-9} \times 10^2 = 5 \cdot 10^{-7}$ J.

Une manière très simple de montrer que l'énergie électromagnétique emmagasinée par un tel circuit se conserve et de considérer la loi des mailles : $0 = L \frac{di}{dt} + u_c$ et de la multiplier par i . Il vient : $0 = Li \frac{di}{dt} + u_c i = Li \frac{di}{dt} + C \frac{du_c}{dt} u_c$. On reconnaît dans le terme $Li \frac{di}{dt}$ le terme $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)$ et dans $C \frac{du_c}{dt} u_c$ celui $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu_c^2 \right)$. Ainsi, l'équation peut être écrite :

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu_c^2 \right),$$

soit

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} Cu_c^2 \right).$$

On reconnaît dans l'expression entre parenthèses la somme, à tout instant, de l'énergie magnétique accumulée dans la bobine et de l'énergie électrique accumulée dans le condensateur. L'équation précédente nous apprend ainsi que la dérivée par au temps de la somme de ces deux énergies, en tant qu'elle est potentiellement fonction du temps, est nulle.

Ainsi, l'énergie électromagnétique

$$E = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} Cu_c^2$$

est conservée lorsque la bobine est idéale.

22 Réponse : A.

À l'instant initial, lorsque l'on bascule l'interrupteur de 0 vers 1, le condensateur est supposé chargé sous la tension $E = 10$ V. Le graphe de la tension $u(t)$, tension aux bornes du condensateur ou de la bobine débute donc à 10 V pour $t = 0$. Seuls les graphes A et C satisfont cette exigence. La différence entre eux vient de la période propre des oscillations. Déterminons cette dernière : $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{LC}$. Numériquement, $T_0 = 2\pi\sqrt{10 \times 1000 \cdot 10^{-6}} = 2\pi \times 0,1 \approx 0,63$ s. Le graphe C présente une période propre de l'ordre de 1,2 s alors que le graphe A présente une période propre légèrement supérieure à 0,6 s. C'est donc le graphe A qui représente $u(t)$.

23 Réponse : A.

Si $u(t) = U_m \cos(\omega_0 t)$ comme établi précédemment, avec $U_m = 10 \text{ V}$ et $\omega_0 = 10 \text{ rad.s}^{-1}$, alors $i = \pm C \frac{du}{dt}$, le signe étant déterminé par la nature réceptrice ou génératrice de la convention tension - courant. Ainsi, $I_{max} = C \omega_0 U_m$, soit, numériquement, $I_{max} = 1\,000 \cdot 10^{-6} \times 10 \times 10 = 0,1 \text{ A}$.

24

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| F | F | V | V |

- a. La convention d'intensité du courant électrique dans le circuit part de l'armature du condensateur portant la charge q ; la relation entre q et i est donc $i = -\frac{dq}{dt}$.
- b. À l'instant considéré, l'intensité du courant dans le circuit est nulle à cause de la présence de la bobine qui impose la continuité de cette intensité et parce que, à $t = 0^-$, le circuit constitué par le condensateur et la bobine était ouvert et donc que $i(0^-) = 0$.
- c. Par définition cette période vaut $T = 2\pi\sqrt{LC}$; numériquement, elle vaut : $T = 2\pi\sqrt{0,1 \times 0,1 \cdot 10^{-6}} \approx 628 \text{ } \mu\text{s}$.
- d. Au facteur C près $u(t)$ et $q(t)$ sont identiques puisque $q(t) = Cu(t)$. Vous vérifierez aisément que la considération des conditions initiales de fonctionnement du circuit conduit à $u(t) = E \cos(\omega_0 t)$. Les affirmations sur Q et φ s'en déduisent directement.

2.4 Circuits R-L-C**25**

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| F | F | V | V |

1. La loi d'Ohm généralisée pour le condensateur en convention récepteur s'écrit $i = C \frac{du}{dt}$.
2. La loi des mailles dans ce circuit donne $Ri + L \frac{di}{dt} + u = 0$, soit, avec l'expression de i précédente,

$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u = 0.$$

3. On est ramené par hypothèse aux cas étudiés à la section II-3. Il s'agit de la résolution classique d'un circuit L - C avec les conditions initiales $u(0) = E$ et $i(0) = 0$. L'expression de la période est par ailleurs correcte.

4. L'expression de i affirmée est la conséquence de la question précédente, obtenue dans le cadre de l'approximation faite.

26

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| F | F | F | V |

1. L'équation régissant la tension aux bornes des armatures du condensateur dans ce type de situation ne peut qu'être de la forme (cf. réponse à la question 2 de l'exercice précédent) :

$$LC \frac{d^2u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u = 0.$$

2. L'énergie électromagnétique accumulée par une bobine est $E_L = \frac{1}{2}Li^2$. (cf. ex. 11).

3. Comme $i = \pm C \frac{du_c}{dt}$, il vient que l'énergie magnétique accumulée dans la bobine vaut

$$\frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}LC^2 \left(\frac{du_c}{dt} \right)^2,$$

et donc que

$$E_t = \frac{1}{2}LC^2 \left(\frac{du_c}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}Cu_c^2.$$

4. La relation proposée est la conséquence de la loi des mailles multipliée par $i = C \frac{du_c}{dt}$:

$$0 = Li \frac{di}{dt} + Ri^2 + u_c C \frac{du_c}{dt},$$

soit

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_c^2 \right) + Ri^2,$$

et, au final,

$$\frac{dE_t}{dt} = -Ri^2.$$

27

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| V | V | V | F |

- En effet, la tension aux bornes du condensateur est maximale à l'instant initial, eu égard à ce que, à cet instant, le condensateur seul a emmagasiné de l'énergie, en l'occurrence $\frac{1}{2}CE^2$.
- Il s'agit de l'équation classique d'un tel circuit (cf. la question 1 de l'exercice précédent), divisée par LC .
- Il suffit de remplacer R/L par 2λ dans l'équation donnée à la question précédente et de prendre $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.
- Le discriminant réduit vaut $\Delta' = \lambda^2 - \frac{4\pi^2}{T_0^2}$; lorsqu'il est nul, ce qui définit le régime critique, $\lambda = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. D'où $R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Avec le rapport $\lambda = R/2L$ introduit et $\omega_0^2 = 1/LC$, l'équation différentielle régissant la tension aux bornes des armatures du condensateur devient :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\lambda \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0.$$

Si, comme on l'a fait au rappel théorique de l'exercice 20, on se demande si une fonction du type $u(t) = U_0 \exp(rt)$ peut être solution d'une telle équation, alors, après avoir remplacé les dérivées première et seconde par leurs expressions respectives, on aboutit à :

$$(r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2) U_0 \exp(rt) = 0,$$

qui ne peut être satisfaite à tout instant positif que si r est solution de l'équation $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$.

Si le discriminant est positif, les deux valeurs de r sont négatives et distinctes : les deux solutions indépendantes de l'équation différentielle sont de la forme $u_1(t) = U_{01} \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)$ et $u_2(t) = U_{02} \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)$ avec $\tau_1 = -1/r_1$ et $\tau_2 = -1/r_2$. On constate alors que la tension u revient vers 0 de manière monotone : on parle alors de régime aperiodique.

Si le discriminant est nul, les deux valeurs de r sont négatives et égales toutes deux à $-\omega_0$. Les deux solutions indépendantes sont alors : $u_1(t) = U_{01} \exp(-\omega_0 t)$ et $u_2(t) = U_{02} \omega_0 t \exp(-\omega_0 t)$. On parle de régime aperiodique critique ou de

régime critique. Le comportement de u est difficile à distinguer de ce qui se produit au cours d'un régime apériodique. La caractéristique essentielle du régime critique est celle d'être le régime le plus rapide de dissipation de l'énergie initiale emmagasinée dans le circuit, cette dissipation se produisant par effet Joule dans la résistance.

Enfin, si le discriminant est négatif, les deux racines sont complexes conjuguées à partie réelle négative :

$$r_1 = -\lambda + i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \quad \text{et} \quad r_2 = -\lambda - i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}, \quad \text{où} \quad i^2 = -1.$$

On peut poser ces racines égales à $-\frac{1}{\tau} \pm i\Omega$. Il s'ensuit que les deux solutions indépendantes sont alors de la forme $u_1(t) = U_{01} \exp(-t/\tau) \cos(\Omega t)$ et $u_2(t) = U_{02} \exp(-t/\tau) \sin(\Omega t)$. Ce régime est ainsi caractérisé par des oscillations de la tension aux bornes du condensateur dont l'amplitude diminue. On désigne ce régime du nom de pseudo-périodique.

28

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| V | F | V | V |

a. Il s'agit d'une constatation fondée sur les représentations des tensions acquises.

b. Après le basculement de l'interrupteur vers la position 2, le condensateur est chargé sous la tension $E = 3 \text{ V}$. L'intensité du courant est nulle à l'instant $t = 0^+$, puisqu'elle l'était auparavant et qu'il y a une bobine d'auto-induction en série dans le circuit, qui en empêche la discontinuité. Par conséquent, la tension aux bornes de la résistance à cet instant est nulle. La courbe en bleu foncé représente u_{AM} , celle en bleu clair, u_{BM} .

c. Si on considère que la pseudo-période des pseudo-oscillations est voisine de la période propre du circuit, alors $T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$, soit $L \approx T^2/(4\pi^2C)$. Sur les acquisitions, on constate que la pseudo-période T vaut 1 ms. Numériquement, $L \approx 10^{-6}/(4 \times 10 \times 10^{-8}) = 2,5 \text{ H}$.

d. Au bout de deux pseudo-périodes, c'est-à-dire à l'instant $t = 2 \text{ ms}$, on constate que la tension aux bornes du condensateur u_{AM} vaut environ 1 V, c'est-à-dire un tiers de la tension initiale et que u_{BM} donc i sont nulles à cet instant. Il en résulte que l'énergie accumulée dans le circuit (dans la bobine et dans le condensateur) à cet instant l'est entièrement dans le condensateur ; égale à $\frac{1}{2}C(u_{AM})^2$, elle n'est plus que d'un neuvième de l'énergie initiale.

29

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| V | V | V | V |

a. La tension $u_c(0)$ sur le graphe désigne la valeur de initiale de la tension aux bornes du condensateur, avant que sa décharge n'ait débuté. Donc, $E = 10 \text{ V}$.

b. Les mêmes arguments valident l'assertion : la présence, en série, d'une bobine dans le circuit, la continuité du courant électrique dans la maille à cause de la bobine et la nullité du courant avant le basculement de l'interrupteur en position 2.

c. Durant les dix premières millisecondes, nous voyons sur le graphe que la tension entre les armatures du condensateur décroît ; comme l'intensité du courant électrique vaut $i = C \frac{du_c}{dt}$, i est donc négatif et le courant électrique circule donc en sens contraire du sens indiqué par la convention sur le schéma électrique du montage.

d. Nous adoptons la même démarche qu'à la question c. de l'exercice précédent : la pseudo-période des pseudo-oscillations, T est supposée proche de la période propre T_0 des oscillations libres de l'oscillateur harmonique associé, soit $T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$. Ainsi, $C \approx T^2/(4\pi^2L)$; or, sur le graphe de u_c , on relève que la pseudo-période T est égale à 20 ms, d'où $C \approx (20 \cdot 10^{-3})^2 / (4 \times 10 \times 0,1) = 10^{-4} \text{ F}$, soit 0,1 mF.

30 Réponses : 1. courbe 2, U_c tend vers E .

2. $q = CE = 0,25 \text{ mC}$.

3. $\tau = 1,5 \text{ s}$.

4. $i(\tau) = 61,7 \mu\text{A}$.

5. $E_c = \frac{1}{2}CU_c^2$, $E_L = \frac{1}{2}Li^2$; en P : $E_c = 0,225 \text{ mJ}$, $E_L = 0$; en Q : $E_c = 0$, $E_L = 62,5 \mu\text{J}$.

6. $E(P) > E(Q)$ diminution de l'énergie par dissipation dans la résistance.

7. cf. le schéma ci-après.

1. À la fin de la charge du condensateur, la tension entre les armatures du condensateur tend vers celle de la source utilisée. C'est le cas de la courbe 2.

2. À la fin de sa charge, la tension entre les armatures du condensateur vaut $U_c = E = 5 \text{ V}$. La charge portée par l'armature du condensateur qui est du côté de la flèche de convention de la tension U_c vaut par conséquent $q = CU_c$; numériquement, $q = 50 \cdot 10^{-6} \times 5 = 0,25 \text{ mC}$.

3. D'après la définition de la constante de temps qui est donnée, $U_c(\tau) = 0,63E = 3,15 \text{ V}$. On trace sur le graphe la droite parallèle à l'axe des abscisses, d'ordonnée 3,15 V ; l'abscisse de son point d'intersection avec la courbe 2 donne directement la valeur de la constante de temps. On trouve $\tau = 1,5 \text{ s}$.

4. À cet instant, la valeur de la tension U_r lue sur le graphe vaut $U_r = 1,85 \text{ V}$. L'intensité du courant électrique de charge $i(\tau) = U_r/r$; ainsi,

$$i(\tau) = 1,85/30 \cdot 10^3 \approx 61,7 \text{ } \mu\text{A}.$$

5. Classiquement, l'énergie E_c que le condensateur possède à un instant t est $\frac{1}{2}C(U_c(t))^2$, abrégée en $\frac{1}{2}CU_c^2$ et l'énergie E_L emmagasinée par la bobine au même instant vaut $\frac{1}{2}L(i(t))^2$, ou $\frac{1}{2}Li^2$.

Sur l'oscillogramme, on lit au point P , $U_c = 3 \text{ V}$ et $U_R = 0 \text{ V}$, donc $i = 0 \text{ A}$; par conséquence, $E_c = 0,5 \times 50 \cdot 10^{-6} \times 3^2 = 0,225 \text{ mJ}$ et $E_L = 0$.

En Q , $U_c = 0 \text{ V}$ et $U_R = 0,250 \text{ V}$. Or, $i = U_R/R$, soit, numériquement, $i = 0,250/5 = 0,05 \text{ A}$. Ainsi, $E_c = 0$ et $E_L = 0,5 \times 50 \cdot 10^{-3} \times 0,05^2 = 62,5 \text{ } \mu\text{J}$.

6. Au point P la somme des énergies emmagasinées dans le condensateur et dans la bobine, $E(P)$ vaut donc $225 \text{ } \mu\text{J}$. En Q , la même somme vaut $62,5 \text{ } \mu\text{J}$. Par conséquence, $E(P) > E(Q)$. Il y a une diminution de l'énergie emmagasinée par dissipation par effet Joule dans la résistance.

7.

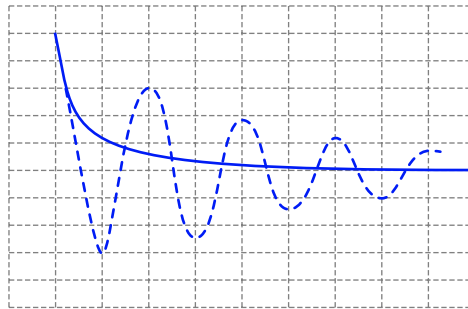


Figure 2.40



Dès qu'il y a des mesures à réaliser à partir d'un graphique, ne pas hésiter à prendre la règle, à faire des mesures sur le graphe (le demi-millimètre de précision est accessible) et à procéder à des règles de trois avec l'échelle pour accéder aux valeurs désirées.

Phénomènes ondulatoires

Thèmes du chapitre

Propagation d'un signal

Milieu de propagation. Signal mécanique, acoustique ou lumineux. Caractère longitudinal ou transversal des perturbations du milieu de propagation pour le signal considéré. Temps et célérité de propagation. Énergie transportée par un signal. Superposition des signaux dans les milieux linéaires de propagation.

Cas des signaux périodiques

Ondes progressives monochromatiques. Ondes incidente, réfléchie, transmise. Fréquence, longueur d'onde et déphasage entre ondes sinusoïdales de même fréquence. Trains d'ondes : fréquence de répétition. Superposition d'ondes : ondes stationnaires, résonance d'ondes stationnaires, nœuds et ventres de vibration. Interférences et diffraction.

Dispositifs classiques

Vibreurs(s) pour la génération d'ondes à la surface d'une cuve à ondes et leur interférence. Fente ou trou unique pour la diffraction lumineuse. fentes ou trous d'Young pour les interférences lumineuses. Émetteurs et récepteurs d'ultrasons, haut-parleurs et microphones. Corde de Melde pour les résonances d'ondes stationnaires.

Lois de la propagation

Superposition des signaux, périodiques ou non, dans les milieux linéaires. Relation $\lambda = c/f = cT$.

Des savoir-faire à maîtriser

- Savoir calculer une célérité de propagation, une longueur d'onde ou une fréquence.
- Savoir calculer une distance, un temps de propagation ou un déphasage entre signaux.
- Savoir retrouver les unités des grandeurs physiques.

Des réflexes à avoir

Déterminer la nature de l'onde étudiée (lumineuse, acoustique, mécanique), son caractère transversal ou longitudinal, le chemin qu'elle emprunte pour se propager. Rassembler les informations connues à son sujet : fréquence, longueur d'onde ou vitesse de propagation. Repérer les grandeurs recherchées et leurs liens avec les informations précédentes. Vérifier l'homogénéité des expressions obtenues.

3.1 Propagation de signaux non périodiques

1 ECE 2007

Vrai ou faux ?

Une petite bille de forme parfaitement sphérique de rayon 5 mm et de masse volumique $\rho = 2,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, tombe au centre d'un tuyau cylindrique de rayon 50 cm rempli d'eau.

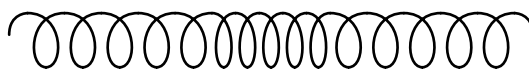
La bille est initialement à 1 m au dessus de la surface de l'eau. On néglige les frottements de l'air. L'origine des temps est prise à l'instant du contact avec l'eau. Le niveau de référence pour l'énergie potentielle est la surface de l'eau. On prendra $g \approx 10 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$; $\pi \approx 3$; $\sqrt{20} \approx 4,5$.

1. L'énergie potentielle de pesanteur initiale de la bille est 1 J.
2. La vitesse de la bille à l'instant où elle touche l'eau est de l'ordre de $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
L'énergie cinétique perdue par la bille au cours du choc est transférée au milieu liquide. On observe des ondes progressives transversales à la surface de l'eau se propageant dans toutes les directions à partir du point d'impact. L'onde touche le bord de la cuvette à l'instant $t = 0,1 \text{ s}$.
3. La célérité des ondes à la surface de l'eau est de $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
4. La célérité de l'onde est modifiée si la goutte tombait de 50 cm de haut au lieu de 1 m.

2 FESIC 2008

Vrai ou faux ?

L'extrémité d'un ressort à spires non jointives, considéré infiniment long, est comprimée, puis relâchée brusquement au temps $t_0 = 0$. Une onde se propage alors le long du ressort.



Zone de compression

Figure 3.1

- a. C'est une onde mécanique progressive.
- b. L'onde est une onde transversale.
- c. La célérité c de l'onde est constante au cours de la propagation.
Au temps t_1 , la célérité a pour valeur $c = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
- d. Au temps $t_1 = 10,0 \text{ ms}$, la zone de compression se situe à la distance $d = 150 \text{ m}$ de l'origine.

3 FESIC 2007

Vrai ou faux ?

Deux ondes se propagent dans la même direction et en sens contraire sur une corde. La valeur commune de la célérité des deux ondes est $c = 5,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

À l'instant $t_0 = 0$, la corde a l'aspect suivant :

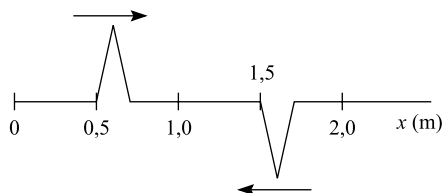


Figure 3.2

a. Au temps $t_1 = 0,10 \text{ s}$, l'aspect de la corde est celui de la figure ci-dessous :

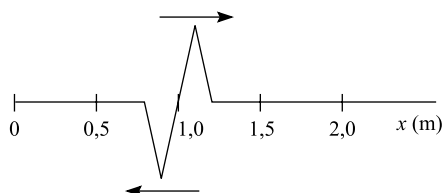


Figure 3.3

b. L'onde est une onde transversale.

c. Il existe un instant t pour lequel la corde ne présente pas de déformation.

d. Cet instant est $t_2 = 0,080 \text{ s}$.

4 FESIC 2006

Vrai ou faux ?

Une perturbation transversale, d'amplitude y , est créée en un point S d'une corde dont la direction est initialement confondue avec l'axe Sx . L'allure simplifiée de la perturbation au point S donnée en fonction du temps est représentée sur la figure ci-dessous.

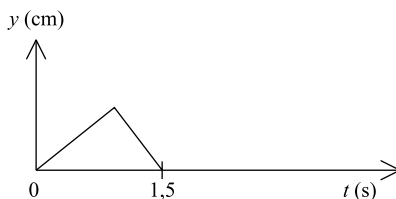


Figure 3.4

À la date $t = 0$, le front de la perturbation quitte l'extrémité S de la corde.

À la date t , on prend une photographie instantanée de la corde :

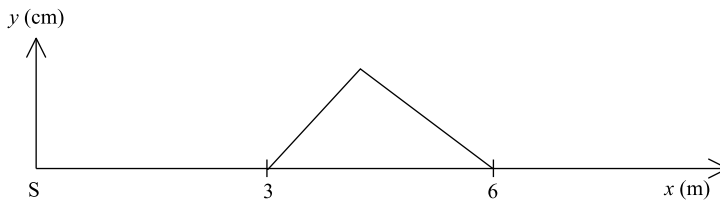


Figure 3.5

- L'énergie cinétique est une des formes d'énergie transportées par l'onde.
- La célérité de l'onde a pour valeur $2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.
- L'allure de la corde est photographiée à l'instant $t = 3 \text{ s}$.
- Si l'on augmente la tension de la corde, la célérité de l'onde sera augmentée.

3.2 Signaux périodiques et trains d'ondes

5 FESIC 2006

Vrai ou faux ?

On émet, à l'aide d'un haut-parleur, un signal sonore sinusoïdal. L'onde se propage à la célérité $c = 340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, sa fréquence est $f = 425 \text{ Hz}$, et on note λ sa longueur d'onde.

Données : $\frac{340}{425} = 0,80$; $\frac{425}{340} = 1,25$; $340 \times 425 = 1,45 \times 10^5$.

- λ , f et c sont liées par la relation : $\lambda = \frac{f}{c}$.
 - La longueur d'onde λ est indépendante du milieu de propagation.
 - Deux points situés à $d = 40,0 \text{ cm}$ l'un de l'autre dans la direction de propagation sont en phase.
- L'onde se réfléchit sur un obstacle situé à $d' = 34,0 \text{ m}$ de la source.
- L'écho de l'onde sonore est entendu $1,0 \text{ s}$ après l'émission du signal.

6 FESIC 2007

Vrai ou faux ?

Dans l'approximation de la houle (vague d'amplitude très inférieure à la longueur d'onde) en eau profonde, la célérité de l'onde de la houle s'exprime par la relation :

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}},$$

dans laquelle g est l'accélération de la pesanteur et λ la longueur d'onde de la houle.

Données : $g \approx 10 \text{ m.s}^{-2}$; $\pi^2 \approx 10$

- Une onde se propageant à la surface de l'eau est une onde longitudinale.
- Le milieu de propagation est dispersif pour ce type d'ondes.
- La célérité de l'onde est proportionnelle à l'inverse de la fréquence.
- Une onde sinusoïdale de fréquence 3,14 Hz a une célérité de $0,5 \text{ m.s}^{-1}$.

7 ECE 2008

Vrai ou faux ?

Une personne, assise au bord d'une piscine, bat du pied, régulièrement dans l'eau à une fréquence de 4 Hz et crée ainsi une onde périodique à la surface de l'eau de hauteur maximale 0,15 m. le déplacement des éléments du milieu peut être décrit par l'équation suivante $z(t) = a \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\left(t - \frac{x}{c}\right) + \phi\right)$, c vitesse de propagation de l'onde à la surface de l'eau est de 2 m.s^{-1} .

- a est l'amplitude, T_0 est la période propre et ϕ est la phase à l'origine.
- En prenant $\phi = 0$, l'expression de la vitesse de déplacement vertical d'un point du milieu est $v(t) = -a \frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}\left(t - \frac{x}{v}\right)\right)$.
- La hauteur de la vague à la date $t = 8 \text{ s}$ et à 8 m du pied est maximale.
- La vitesse du déplacement des éléments du milieu à la date $t = 2 \text{ s}$ et à 2 m du pied est nulle.

8 ECE 2007

Vrai ou faux ?

La longueur d'onde de la lumière jaune dans le vide est $\lambda_0 = 589 \text{ nm}$ et la célérité de la lumière dans le vide est $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

- La fréquence de cette radiation est d'environ $f \approx 5.10^{14} \text{ Hz}$.
- Sa longueur d'onde augmente lorsqu'elle traverse un bloc de verre d'indice $n = 1,5$.
- Sa longueur d'onde dans un bloc de verre d'indice $n = 1,5$ est $\lambda \approx 393 \text{ nm}$.
- La vitesse de propagation dans le bloc de verre diminue et devient $v \approx 2.10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

9 ECE 2007

Vrai ou faux ?

On considère le système de mesure qui est constitué d'un émetteur et d'un récepteur d'ultrasons fixés sur deux couvercles vissés aux deux extrémités d'un tube étanche, rempli d'eau. La distance « émetteur - récepteur » est notée $D = 1 \text{ m}$. On observe l'oscillogramme (correspondant à la même salve) des tensions émises et reçues.

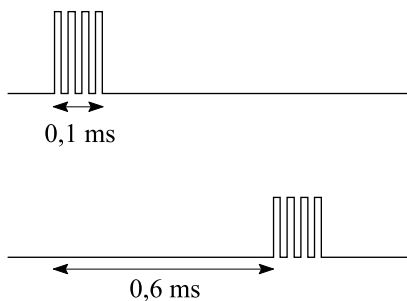


Figure 3.6

On remplace l'eau par un autre liquide et on constate que le décalage entre le début des oscillations émises et le début de la réception est $\Delta t = 0,9$ s. On prendra la célérité des ondes ultrasonores dans l'air de l'ordre de $300 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

1. La fréquence des ultrasons utilisés est $f = 2 \cdot 10^5$ Hz.
2. La célérité de propagation des ultrasons dans l'eau est de $1\,800 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.
3. La célérité de propagation des ultrasons dans le milieu liquide a augmenté par rapport à celle de l'eau.
4. On réalise une expérience identique dans un tube rempli d'air, le décalage temporel observé sera de 3 s.

10 GEIPI - ENI 2007

Une seule réponse vraie

Un télémètre ultrasonore est constitué :

- d'un émetteur produisant des ultrasons par salves ; la célérité des ultrasons dans l'air est proche de $340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$;
- d'un récepteur, disposé à côté de l'émetteur, permettant d'enregistrer les ultrasons réfléchis par l'objet dont on veut déterminer l'éloignement.

L'émetteur et le récepteur sont reliés aux deux voies d'un oscilloscope, ce qui permet de visualiser simultanément le signal émis et le signal reçu. Le dispositif est schématisé ci-dessous :

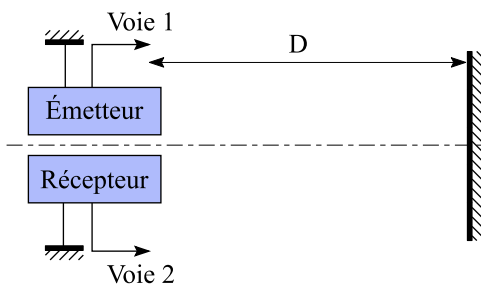


Figure 3.7

On observe à l'oscilloscope les signaux reproduits ci-dessous. Sensibilité horizontale $100 \mu\text{s} / \text{div}$.

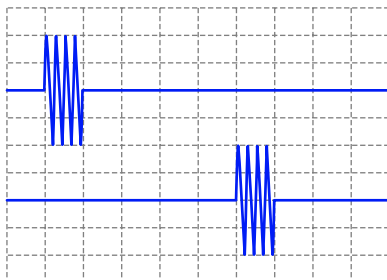


Figure 3.8

La fréquence des ultrasons est de :

- A. $25 \mu\text{s}$ B. 40 Hz C. $100 \mu\text{s}$ D. 25 kHz E. 40 kHz

11 GEIPI - ENI 2007 (suite de l'ex. 10)

Une seule réponse vraie

L'éloignement D de l'objet est :

- A. 8,5 mm B. 17 mm C. 8,5 cm D. 34 cm E. 340 m

12 FESIC 2008

Vrai ou faux ?

On attache une masse de 200 g à l'extrémité B d'une corde maintenue horizontale sur sa plus grande longueur, puis on produit une déformation sinusoïdale, de fréquence 100 Hz, à l'extrémité A de la corde, grâce à un vibreur.

La célérité des ondes le long de la corde est donnée par la relation : $V = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ où T est la tension de la corde et $\mu = 20 \text{ g.m}^{-1}$, sa masse linéique.

On prendra : $g = 10 \text{ N.kg}^{-1}$ et on admettra que la valeur de la tension de la corde est égale au poids de la masse suspendue.

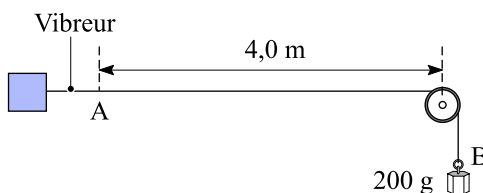


Figure 3.9

- a. La tension peut s'exprimer en kg.m.s^{-1} .
 b. La célérité de l'onde augmente avec la masse linéique de la corde.

- c. La corde est le siège d'oscillations forcées.
- d. La valeur de la longueur d'onde est $\lambda = 10$ cm.

13 GEIPI 2007

Qui n'a pas vu dans un western ou une bande dessinée, des bandits voulant attaquer un train coller leur oreille sur les rails pour percevoir l'arrivée du convoi ? À cette époque les trains étaient pourtant particulièrement bruyants et la locomotive signalait son arrivée par des coups de sifflet.

1. Dans un désert, écrasé de chaleur, un cow-boy tire (en l'air !) un coup de fusil. Avec quel retard τ_1 , un indien situé à une distance $d_1 = 1$ km du cow-boy entendra-t-il ce coup de fusil ? On considère que la célérité c_a des ondes sonores dans l'air sec du désert, à la température de 30°C est de $345 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

2. Un indien, furieux de voir son territoire envahi, s'attaque à coups de hache à la voie de chemin de fer. À une distance $d_2 = 2,5$ km de là, un soldat soupçonneux, l'oreille collée aux rails, détecte l'attaque avec un retard $\tau_2 = 0,5$ s.

Quelle est la valeur de la célérité c_r des ondes sonores dans le matériau dont sont formés les rails ?

3. Quel personnage utilise le moyen de communication le plus efficace ?

Pour étudier plus scientifiquement la propagation du son dans ce matériau, on place un émetteur d'ondes sonores sinusoïdales de fréquence variable f_e en un point O d'un rail d'une voie de chemin de fer désaffectée. Un détecteur peut se déplacer le long de ce rail, la distance entre l'émetteur et le détecteur est notée x .

L'émission des ondes est commandée par une tension sinusoïdale de même fréquence f_e , cette tension est visualisée sur la voie 1 d'un oscilloscope. La réponse du détecteur est aussi une tension sinusoïdale de fréquence f_e , elle est visualisée sur la voie 2 du même oscilloscope.

4. Quelle est la nature des ondes sonores ?

5. La fréquence f_e de l'émetteur est fixée à $2\,000$ Hz. Comment peut-on qualifier ce son ?

6. On déplace le détecteur du point O jusqu'au premier point où les tensions observées sur l'oscilloscope sont en phase. La distance entre émetteur et récepteur est alors $x_1 = 2,60$ m. Que représente cette valeur ?

7. Donner l'expression puis calculer la célérité c du son à $2\,000$ Hz dans le matériau.

8. La fréquence de l'émetteur étant toujours de $2\,000$ Hz, on déplace le détecteur jusqu'à une distance $x_2 = 6,5$ m de l'émetteur. Représenter ce qui est observé sur l'écran de l'oscilloscope, les sensibilités verticales des voies 1 et 2 sont ajustées pour que les tensions crête à crête correspondantes occupent les 8 divisions de l'écran, la sensibilité horizontale est de $100 \mu\text{s}/\text{div}$.

On revient à une distance émetteur - récepteur de $x_1 = 2,60$ m, les tensions observées sur l'oscilloscope sont en phase. on se propose d'étudier les variations éventuelles de la célérité des ondes sinusoïdales dans le rail avec leur fréquence.

9. Comment qualifie-t-on un milieu de propagation pour lequel la célérité dépend de la fréquence ?

10. Pour réaliser l'étude, on fait varier la fréquence f_e de l'émetteur dans cette gamme. On constate à l'oscilloscope que les tensions observées restent en phase quelle que soit la fréquence. Que peut-on en conclure ?

14 GEIPI 2008

L'écholocation est le dispositif qu'utilisent certains animaux pour détecter leurs proies et se repérer dans leur milieu naturel lorsque la vue ne leur permet pas de le faire. Ces animaux émettent des salves d'ultrasons et en reçoivent l'écho.

Les microchiroptères ou chauve-souris émettent, suivant leur espèce, des ondes de fréquence comprise entre 30 et 120 kHz, elles sont produites par leur larynx qui module un puissant courant d'air. La durée d'émission est de l'ordre de 1 à 5 ms, mais peut atteindre jusqu'à 50 ms pour certaines espèces. La fréquence de répétition de l'émission, de l'ordre de 10 Hz lors de la recherche de proie peut aller jusqu'à 60 Hz en phase de chasse.

1. Comment peut-on qualifier ces ondes ? (progressives, transversales, mécaniques, périodiques, stationnaires, longitudinales).

La fréquence d'émission est propre à chaque animal. Un grand rhinolophe émet à $f = 83$ kHz pendant 36 ms.

2. Calculer la période T . Combien de périodes n comporte la salve ?

Un animal d'une autre espèce, un murin, émet, en vol stationnaire, à $f' = 38$ kHz pendant $\Delta t = 3$ ms.

3. Combien de périodes n' comporte la salve ?

Un écho de cette salve lui parvient $\tau = 20$ ms après son émission.

4. À quelle distance D de la chauve-souris se trouve l'obstacle ayant provoqué cet écho ?

On rappelle que la célérité des ultrasons dans l'air est $v_0 = 340$ m.s⁻¹.

L'animal se dirige alors vers l'obstacle à une vitesse $V = 12$ km.h⁻¹ tout en émettant une nouvelle salve.

5. Après combien de temps τ' l'écho parviendra-t-il à l'animal si l'obstacle est immobile ?

6. La longueur d'onde de l'émission est proportionnée à la taille des proies. Si on admet que pour être détectée, une proie doit être trois fois plus grande que la longueur

d'onde utilisée, évaluer la taille minimale des proies du grand rhinolophe, a_{rhino} et celle des proies du murin, a_{murin} .

Certains mammifères aquatiques, comme les orques et les dauphins utilisent aussi le dispositif d'écholocation. Les orques émettent à 20 kHz des salves de 200 μs de durée. À la profondeur où les orques nagent, la célérité des ultrasons dans l'eau saline est de 1 500 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

7. Combien de périodes m comporte chaque salve ?

8. Si on prend toujours comme critère que pour être détectée, une proie doit être trois fois plus grande que la longueur d'onde utilisée, évaluer la taille minimale a_{orque} des proies de cet animal.

Chauve-souris et mammifères marins émettent aussi des sons perceptibles par l'homme. Ces « cris » servent à la communication sociale.

9. À quelle gamme de fréquence appartiennent-ils ?

10. Un son de fréquence 8 kHz a une longueur d'onde $\lambda_{air} = 4,25 \text{ cm}$ lorsqu'il se propage dans l'air, et une longueur d'onde $\lambda_{eau} = 18,75 \text{ cm}$ lorsqu'il se propage dans l'eau saline. Déterminer la célérité du son dans chacun de ces milieux. Quelle propriété des milieux est mise en évidence lorsque l'on compare les valeurs trouvées à celles de la célérité des ultrasons dans l'air et l'eau de mer ?

3.3 Diffraction

15 ECE 2007

Vrai ou faux ?

Un faisceau lumineux est issu d'une diode-laser qui émet un rayonnement quasi monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 805 \text{ nm}$ dans le vide.

1. Le rayonnement est situé dans le domaine infrarouge.

2. La diffraction est le phénomène d'élargissement des faisceaux lumineux et plus généralement des ondes progressives derrière des obstacles limitant leurs dimensions transversales.

3. L'onde diffractée a une fréquence double par rapport à l'onde incidente.

Ce faisceau lumineux parallèle monochromatique de longueur d'onde λ_0 éclaire en incidence normale un diaphragme formé dans un écran opaque plan par une fente infiniment longue de largeur b . Soit O un point origine au milieu de la fente et Ox l'axe perpendiculaire à la fente dans le plan de l'écran (figure 3.10).

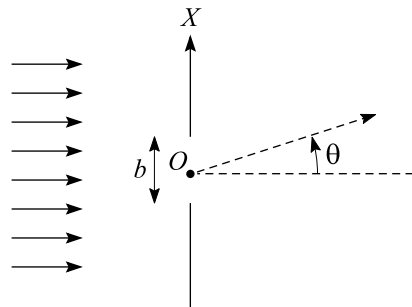


Figure 3.10

4. L'intensité lumineuse I décroît à partir de $\theta = 0$ et s'annule lorsque $\sin \theta_0 = \frac{\lambda_0}{b}$.

16 ECE 2008

Vrai ou faux ?

On utilise un laser à CO_2 produisant une lumière de longueur d'onde λ comprise entre $9 \mu\text{m}$ et $11,5 \mu\text{m}$ placé devant une fente de largeur a située à une distance D d'un écran E. On fait varier la largeur a de la fente tout en maintenant tous les autres paramètres constants et on mesure les dimensions d de la tache centrale correspondantes.

On sait que d est proportionnelle à la longueur d'onde de la lumière et à la distance fente - écran.

On peut alors représenter les courbes suivantes (figure 3.11) : la courbe 1 représente la distance d (en mm) fonction de $1/a^2$ en μm^{-2} ; la courbe 2 représente la distance d (en mm) fonction de $1/a$ en μm^{-1} .

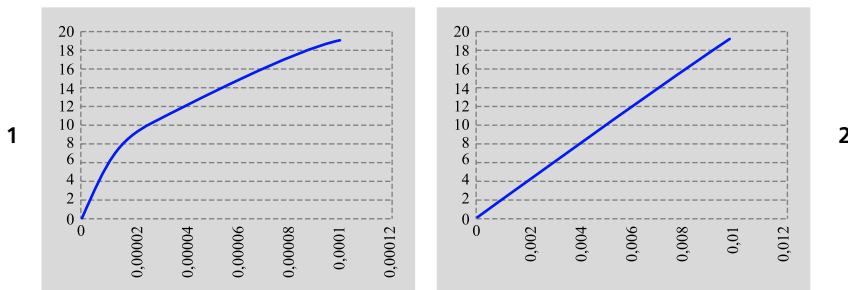


Figure 3.11

1. Une analyse de ces courbes permet d'écrire que $d = \frac{A\lambda D}{a^2}$ avec A étant une constante sans dimension.

On fixe λ et a et on fait varier D , on obtient la courbe figure 3.12 permettant de vérifier la relation entre d et D .

2. Le coefficient directeur de la droite est d'environ $15 \cdot 10^{-3}$.

On effectue des mesures pour $\lambda = 600 \text{ nm}$ et $a = 100 \mu\text{m}$.

3. On trouve la constante de proportionnalité $A = 1,8$.

On dispose d'un autre laser de longueur d'onde $\lambda = 700 \text{ nm}$ pour mesurer le diamètre a d'un fil placé

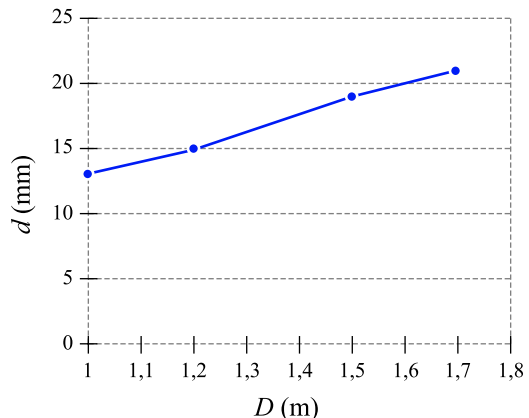


Figure 3.12

sur le support et on obtient une tache centrale de largeur $d = 20 \text{ mm}$ lorsque l'écran est à $D = 1,5 \text{ m}$ du fil en prenant comme valeur pour la constante A la valeur 2.

4. Le diamètre du fil est de $115 \text{ }\mu\text{m}$.

17 FESIC 2008

Vrai ou faux ?

Un faisceau de lumière parallèle monochromatique, de longueur d'onde $\lambda = 600 \text{ nm}$, produit par une source laser, arrive sur une fente de largeur $a = 0,10 \text{ mm}$. On place un écran perpendiculairement à la direction du faisceau à une distance $D = 2,0 \text{ m}$ de la fente (figure 3.13).

Donnée : $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

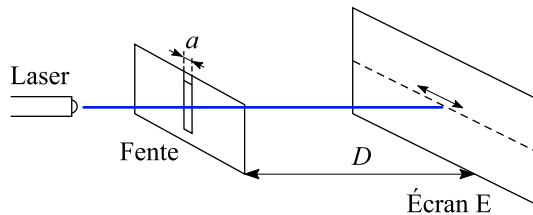


Figure 3.13

- La fréquence de l'onde lumineuse émise par ce laser est $5,00 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$.
- L'écart angulaire entre le milieu de la tache centrale et la première extinction est donné par la relation a/λ .
- La largeur de la tache centrale est de $1,2 \text{ cm}$.
- Lorsque cette onde lumineuse se propage dans de l'eau (indice de réfraction 1,33), la fréquence de cette onde ne change pas.

18 ECE 2007

Vrai ou faux ?

On éclaire un cheveu fin de diamètre d , avec un laser émettant une lumière rouge de longueur d'onde $\lambda = 600 \text{ nm}$. On observe sur un écran placé à 2 m du fil une tache centrale de largeur L entourée de taches latérales moitié moins larges que la tache centrale. La mesure de la largeur de la 10^{e} tache secondaire est de $0,25 \text{ cm}$.

- L'écart angulaire du faisceau augmente si le diamètre du fil utilisé augmente.
- L'écart angulaire augmente si la distance du fil à l'écran augmente.
- Le diamètre du fil mesure $2,4 \text{ mm}$.
- L'écart angulaire augmente en utilisant un laser émettant une lumière bleue.

19 GEIPI - ENI 2006

Un capteur fixé sur une bouée n°1 permet d'enregistrer le mouvement vertical de la surface de la mer dû à la houle. Ce capteur a permis de réaliser l'enregistrement figure 3.14, débutant à un instant choisi comme origine ($t = 0$) :

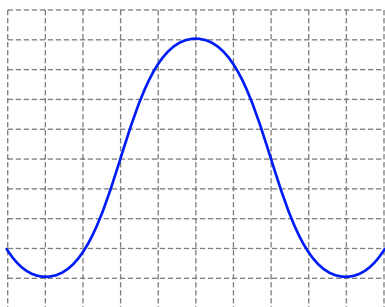


Figure 3.14

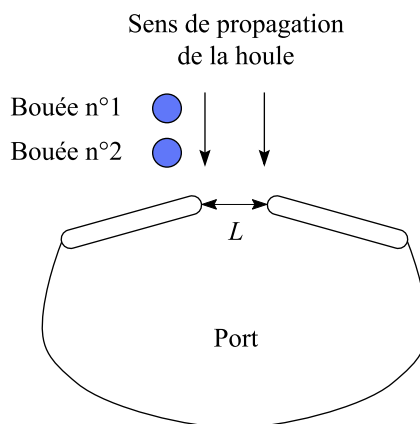


Figure 3.15

On dispose des caractéristiques suivantes :

- sensibilité du capteur : $S_{\text{capteur}} = 2,0 \text{ mV/cm}$;
- sensibilité verticale de l'enregistreur : $S_v = 50 \text{ mV/division}$;
- base de temps de l'enregistreur : $S_t = 0,50 \text{ s/division}$.

1. Comment nomme-t-on plus couramment la « période spatiale » d'une onde ?
2. Quelle est la période (temporelle) de cette houle ?
3. On observe que l'écart d entre les sommets de deux vagues successives est de 24 m.
Quelle est la vitesse de propagation de cette houle ?
4. Quelle est l'amplitude de cette houle ? (donner la réponse en mètre)
5. Sur des grilles quadrillées identiques à celle de la fig. 3.14, représenter :
 - a. l'enregistrement qu'on aurait obtenu si le capteur avait été déclenché à l'instant $t_1 = 3 \text{ s}$.
 - b. L'enregistrement qu'on aurait obtenu avec un second capteur placé sur la bouée n°2 située à une distance de 6 m de la première dans le sens de propagation de la houle.

6. La houle atteint l'entrée du port, limitée par deux digues séparées par un passage de largeur $L = 48$ m.

a. Quel phénomène se produit-il ?

b. Quelle est la zone du port qui ne sera pas abritée de la houle ? Représenter qualitativement cette zone sur le schéma et préciser la relation permettant de calculer l'angle θ correspond à la limite entre la zone abritée et la zone non abritée. Calculer θ .

3.4 Interférences

20 GEIPI - ENI 2008

Le « trombone » de König (physicien allemand du XIX^e siècle) est un dispositif permettant de mesurer des longueurs d'ondes acoustiques (figure 3.16). On se propose d'utiliser ce dispositif afin de déterminer la célérité d'ondes acoustiques dans l'argon.

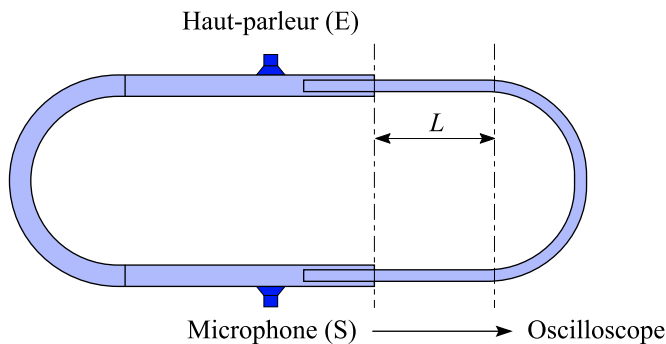


Figure 3.16

Un haut-parleur émet l'onde à l'entrée E . Un microphone placé à la sortie S permet de recueillir le signal après que l'onde s'est propagée dans les deux branches du « trombone ».

On appellera d_1 la distance parcourue dans la branche fixe (partie gauche) et d_2 la distance, réglable, parcourue par l'onde dans la branche mobile (partie droite).

Lorsque la partie mobile est glissée au maximum dans la partie fixe ($L = 0$), les distances sont égales dans les deux branches.

On réalise l'enregistrement figure 3.17 :

Base de temps : $100 \mu\text{s} / \text{div}$.

Sensibilité : $1 \text{ V} / \text{div}$.

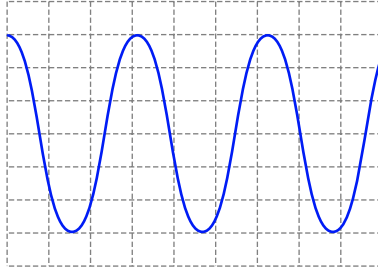


Figure 3.17

1. Déterminer la période et la fréquence des ondes acoustiques utilisées.
2. De quel type d'ondes s'agit-il ?
3. À quelle condition sur L l'onde arrivant par la branche droite est-elle en phase avec l'onde arrivant par la branche gauche ?
On admet que les signaux observés correspondent à la somme des ondes qui se sont propagées dans les deux branches.
4. Qu'observe-t-on si les deux ondes arrivent en opposition de phase en S ?
5. Qu'observe-t-on si les deux ondes arrivent en S en phase ?
6. On fait maintenant varier la longueur L ; on observe qu'il faut faire varier L de 5,4 cm entre deux positions où les ondes sont en phase. Déterminer la longueur d'onde des ondes utilisées.
7. En déduire la célérité des ondes utilisées dans cette étude.

3.1 Propagation de signaux non périodiques

1

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| F | F | V | F |

1. L'énergie potentielle de pesanteur de la bille, E_p , vaut mgh , avec $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ où $r = 5.10^{-3}$ m est le rayon de la bille et $h = 1$ m l'altitude de la bille par rapport au plan de référence (la surface de l'eau). Numériquement,

$$E_p = \frac{4}{3} \times \pi \times (5.10^{-3})^3 \times 2.10^3 \times 10 \times 1 \approx 10 \text{ mJ.}$$

2. Si nous supposons que le référentiel de l'expérience puisse considéré comme galiléen et que la bille dans le champ de pesanteur puisse être considérée comme un système conservatif, alors l'énergie mécanique de la bille est constante entre l'instant initial de son lâcher et celui où elle atteint la surface de l'eau. Aussi pouvons-nous écrire :

$$E_m = mgh = \frac{1}{2}mv^2,$$

avec v la vitesse au point d'impact de la bille dans l'eau. Donc, $v = \sqrt{2gh}$, ce qui donne numériquement $v = \sqrt{2 \times 10 \times 1} \approx 4,5 \text{ m.s}^{-1}$.

3. Il est clair que l'onde générée par l'impact de la bille dans l'eau parcourt la distance $D = 50$ cm entre le point d'impact (le centre du tuyau) et le bord du récipient en $\Delta t = 0,1$ s, ce qui conduit à une vitesse de propagation du signal, c , égale à $D/\Delta t$. Ainsi, numériquement, $c = 0,5/0,1 = 5 \text{ m.s}^{-1}$.

4. La célérité de propagation est une caractéristique du milieu de propagation et du type d'ondes concernées ici, ondes de surface sur l'eau. Ce qui dépend de la hauteur initiale d'où la bille est lâchée, c'est l'énergie de l'onde créée et donc son amplitude.



Pour être plus précis, il aurait fallu dire que le front de l'onde créée par la pénétration de la bille dans l'eau atteignait le bord du tuyau 0,1 s après sa création au centre du tuyau.

2

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| V | F | V | F |

- a.** Les conditions mêmes de l'expérience conduisent à la création d'une onde mécanique progressive, même s'il ne s'agit que d'une déformation temporaire, unique et non entretenue du ressort.
- b.** La déformation communiquée au ressort, ainsi que l'ébranlement qui en résulte, sont suivant la direction de propagation : il s'agit, par définition, d'une onde longitudinale.
- c.** L'assertion est *a priori* correcte si on pense simplement : à savoir que le ressort est homogène sur toute sa longueur, c'est-à-dire qu'il possède en tout point les mêmes propriétés physiques (masse linéique et raideur linéique) qui interviennent dans l'expression de la célérité des ondes susceptibles de se propager son long.
- d.** La zone de compression s'est déplacée de la distance $c t_1$, donc

$$15 \times 10.10^{-3} = 15 \text{ cm.}$$



Il faut faire attention au schéma donné pour la déformation du ressort, car on peut aussi exciter une onde transversale le long du ressort, par exemple en écartant perpendiculairement à la direction de propagation une extrémité du ressort par rapport à sa position d'équilibre puis en l'y ramenant.

3

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| F | V | V | F |

- a.** L'aspect proposé ne correspond à rien de réel sur la corde. En effet, le signal de déplaçant de gauche à droite, qui s'étale, à $t = 0$, entre les coordonnées 0,5 et 0,7 m se sera déplacé à $t_1 = 0,10$ s de $c t_1$, soit 0,5 m. Il s'étalera donc entre 1 et 1,2 m (ce qui est bien le cas sur la figure 2. En revanche, le signal qui se propage de la droite vers la gauche et qui s'étale, à l'instant initial, entre les coordonnées 1,5 et 1,7 m se sera déplacé de $-0,5$ m et devrait occuper ainsi sur la corde l'espace compris entre les coordonnées 1 et 1,2 m, au lieu de s'étaler entre 0,8 et 1 m comme sur la figure 2.
- b.** Les déformations du milieu sont effectivement perpendiculaires à la direction de propagation des signaux.
- c.** Les deux signaux correspondent manifestement à des déformations de la corde qui sont symétriques (mêmes étalement, forme et amplitude) ; comme ils se propagent en sens opposés, il existera nécessairement un instant où ils occuperont le même espace sur la corde. Les déformations étant de signes opposés, leur somme algébrique donnera alors à cet instant une déformation nulle de la corde.

d. D'après les conclusions auxquelles nous avons abouti en réponse à la question a., cet instant est $t_1 = 0,10$ s puisqu'alors, les deux signaux occupent le même intervalle de coordonnées le long de la corde.

La possibilité de prévoir « l'état de déformation » d'un milieu de propagation, à un instant t_0 , en effectuant, en tout point de ce milieu, la somme algébrique des « déformations » qu'y provoquent les différents signaux qui se propagent dans ce milieu, pour anodine et naturelle qu'elle paraisse, n'en caractérise pas moins une propriété fondamentale (et suffisamment répandue) de ces milieux de propagation. Cette propriété est la *linéarité* qui traduit la superposition algébrique des signaux dans ces milieux.

Cette propriété est observée en première approximation pour l'air vis-à-vis des ondes acoustiques, pour le vide et pour l'air vis-à-vis des ondes électromagnétiques en général, lumineuses en particulier, pour les solides vis-à-vis des ondes mécaniques, etc. Elle trouve une application très importante en radio- et télédiffusion et en radiotélécommunication en faisant que des signaux de fréquences différentes puissent se propager à travers le milieu sans agir les uns sur les autres.

4

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| F | V | V | V |

a. Si le mouvement de chaque point de la corde peut se traduire par une « énergie cinétique », celle-ci est affectée à un mouvement qui s'effectue perpendiculairement à la direction de propagation. Ce n'est donc pas à proprement parler de l'énergie cinétique qui est transportée par l'onde sur la corde, mais un état de déformation qui se déplace de proche en proche.

b. Les instants délimitant l'excitation en S de la corde sont $t_i = 0$ s et $t_f = 1,5$ s. Sur la figure 2, on constate que le début du signal a atteint la coordonnée $x_i = 6$ m alors que la fin de l'ébranlement est en $x_f = 3$ m. Le début de la perturbation a donc parcouru $x_i - x_f$ pendant la durée $t_f - t_i$. La célérité de l'onde en résulte : $c = \frac{x_i - x_f}{t_f - t_i}$, soit numériquement 2 m.s^{-1} .

c. Désignons par t l'instant auquel est prise la photographie de la corde. Le front d'onde s'est déplacé de x_i pendant la durée t , avec une onde qui se déplace à la vitesse $c = 2 \text{ m.s}^{-1}$. Ainsi, $t = x_i/c$, soit $t = 3$ s.

d. C'est une constatation expérimentale, confirmée par la théorie des cordes vibrantes qui nous apprend que :

$$c = \sqrt{\frac{T}{\lambda}},$$

où T est la tension de la corde, exprimée en newtons, et λ sa masse linéique, exprimée en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$.

3.2 Signaux périodiques et trains d'ondes

5

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| F | F | F | F |

a. Il est immédiat que la relation est dimensionnellement fautive f/c a la dimension de l'inverse d'une longueur. Par définition, λ , c et f sont liées par la relation $\lambda = c/f$.

b. Il est évident que, lorsqu'une onde peut se propager dans deux milieux distincts, la célérité de cette onde est probablement différente dans les deux milieux, la longueur d'onde sera différente dans chacun des deux milieux.

c. La longueur d'onde du signal de 425 Hz dans l'air vaut $\lambda = 340/425 = 0,80$ m. Le déphasage de la vibration au point B , distant de d du point A , dans la direction de propagation, est, par rapport à la vibration en A , égal à $\varphi_{B/A} = -2\pi d/\lambda$, soit numériquement, $\varphi_{B/A} = -2 \times \pi \times 0,40/0,80 = -\pi$. Les deux vibrations sont donc en opposition de phase.

d. L'onde émise du point A y retourne après avoir parcouru la distance $2d'$. Le temps de propagation nécessaire est donc $t_p = 2d'/c$, soit, numériquement, $t_p = 2 \times 34,0/340 = 0,2$ s.

6

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| F | V | V | V |

a. L'existence de la houle à la surface de l'eau, c'est-à-dire d'un déplacement perpendiculaire à la surface au repos, atteste du caractère essentiellement transversal de l'onde.

b. L'expression donnée dans cette approximation de la célérité des ondes montre une dépendance en fonction de la longueur d'onde et donc, de la fréquence. Le milieu de propagation est, par conséquent, effectivement dispersif.

c. $\lambda = c/f$, donc $c = \sqrt{gc/2\pi f}$, soit, en élevant au carré, et en simplifiant par c , $c = g/2\pi f$.

d. D'après l'expression précédente $c = 10/(2 \times \pi \times 3,14) \approx 1/2 = 0,5 \text{ m.s}^{-1}$.

Un milieu illimité est non dispersif lorsque la célérité de propagation est indépendante de la fréquence de l'onde ou de sa longueur d'onde. Dans tous les cas contraires, on dit que le milieu est dispersif.

Si un milieu illimité est non dispersif (par exemple l'air libre), en revanche, la célérité de propagation se met à dépendre de la fréquence lorsque le milieu devient limité : quiconque a assisté à un concert dans certaines églises ou abbayes a pu constater que, s'il était assez loin de l'orchestre, le son se brouillait, ruinant la compréhension du discours musical. Cela est dû essentiellement à la superposition des échos multiples qui se produisent sur les parois limitant l'espace de propagation, que l'on désigne sous le vocable de « réverbération ».

7

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| V | V | V | V |

1. Ce sont les désignations des grandeurs qui caractérisent une onde sinusoïdale.
2. La vitesse de déplacement vertical d'un point du milieu est :

$$v(x, t) = \frac{\partial z}{\partial t}(x, t) = -a \frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \left(t - \frac{x}{c}\right)\right).$$

3. Dans l'expression du déplacement des éléments du milieu, il suffit de remplacer les diverses grandeurs par leurs valeurs respectives $a = 0,15 \text{ m}$, $T_0 = 1/4 = 0,25 \text{ s}$, $t = 8 \text{ s}$, $x = 8 \text{ m}$, $\phi = 0 \text{ rad}$ et $c = 2 \text{ m.s}^{-1}$.

$$z(8, 8) = 0,15 \cos\left(\frac{2\pi}{0,25} \left(8 - \frac{8}{2}\right)\right) = 0,15 \text{ m}.$$

4. Même opération qu'à la question précédente, avec $t = 2 \text{ s}$ et $x = 2 \text{ m}$.

$$v(2, 2) = -0,15 \frac{2\pi}{0,25} \sin\left(\frac{2\pi}{0,25} \left(2 - \frac{2}{2}\right)\right) = 0 \text{ m.s}^{-1}.$$

Pour les deux dernières questions, il était possible de mener le raisonnement suivant. On constate d'abord que la longueur d'onde associée au signal créé par la personne vaut $\lambda = 2/4 = 0,5$ m. Cela signifie que les deux points situés à 2 et à 8 m de la personne, en sont distants d'un nombre entier de longueurs d'onde (respectivement 4 et 16 longueurs d'ondes). Par conséquent, ces points vibrent en phase avec le pied de la personne. Par ailleurs, les instants considérés (2 s et 8 s) correspondent à un nombre entier de périodes écoulées (respectivement 8 et 32 périodes) : ainsi, les amplitudes observées à ces points aux instants considérés, sont les mêmes que celle que l'on pourrait observer au pied de la personne, en début de période, c'est-à-dire à l'instant $t = 0$, qui d'après l'expression donnée vaut alors $a = 0,15$ m. Et, là où l'amplitude est maximale (ou minimale d'ailleurs), à un instant donné, la vitesse instantanée s'y annule.

8

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| V | F | V | V |

1. La fréquence est donnée par $f = c/\lambda_0$, soit, numériquement

$$f = 3.10^8/589.10^{-9} \approx 5.10^{14} \text{ Hz.}$$

2. Dans un matériau d'indice n , la célérité de propagation des ondes lumineuses devient $v = c/n$. Elle diminue et donc la longueur d'onde diminue elle aussi.

3. La longueur d'onde dans le bloc d'indice n devient : $\lambda = v/f = c/(nf) = \lambda_0/n$; numériquement, $\lambda = 589/1,5 \approx 393$ nm.

4. Voir la réponse à la question 2.

9

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| F | F | F | F |

1. On observe sur l'oscillogramme des tensions que les trains d'ondes comptent $N = 3,5$ périodes et durent $\delta t = 0,1$ ms. Ainsi, la période des ultrasons utilisés vaut $T = \delta t/N$ et leur fréquence $f = 1/T = N/\delta t$; numériquement, $f = 3,5/0,1.10^{-3} = 35$ kHz.

2. La distance $D = 1$ m entre l'émetteur et le récepteur est parcourue en $\Delta t = 0,6$ ms. Il en résulte que la célérité de propagation de ces ultrasons dans l'eau est $c = D/\delta t$, soit, numériquement, $c = 1/0,6.10^{-3} \approx 1\,670$ m.s⁻¹.

3. Le temps de propagation entre la source et le récepteur a augmenté, donc la célérité de propagation dans le nouveau milieu liquide a diminué.

4. Il sera en fait de $D/c = 1/300 \approx 3,33$ ms.

10 Réponse : E.

Il s'agit d'un raisonnement similaire à celui de la question 1 de l'exercice précédent avec $N = 4$ périodes par train d'ondes, chacun durant $\delta t = 100 \mu\text{s}$. Ainsi, leur fréquence est $f = N/\delta t$, soit, numériquement, $f = 4/0,1 \cdot 10^{-3} = 40$ kHz.

Il est évident que les réponses A et C devaient être éliminées immédiatement, n'étant pas, vu leurs unités, des fréquences. La réponse B aussi, car la fréquence considérée n'appartient pas au domaine des ultrasons.

11 Réponse : C.

Le délai de propagation Δt est la durée séparant le début de chacun des trains d'ondes captés sur les deux voies de l'oscillogramme : $\Delta t = 5 \times 100 \mu\text{s}$. Il représente le temps mis par un train d'ondes pour effectuer un aller-retour, soit une distance $2D$ parcourue. La vitesse étant $c = 340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, la distance D vaut $D = c \cdot \Delta t/2$, soit, numériquement, $D = 340 \times 0,5 \cdot 10^{-3}/2 = 0,085$ m, soit 8,5 cm.

12

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| F | F | V | V |

a. La tension du fil a la même dimension qu'une force, donc la même dimension que le produit d'une masse par une accélération, $[T] = \mathcal{M} \cdot \mathcal{L} \cdot \mathcal{T}^{-2}$. Son unité peut ainsi être le $\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

b. L'expression de la célérité de l'onde $V = \sqrt{T/\mu}$ montre qu'elle diminue avec l'accroissement de la masse linéique de la corde.

c. Les oscillations de chaque point de la corde sont le résultat du mouvement imprimé à la corde par le vibreur, en A. On peut donc considérer qu'il s'agit d'oscillations forcées.

d. La longueur d'onde λ vaut V/f , avec $f = 100$ Hz, $V = \sqrt{T/\mu}$ où $T = mg$. Ainsi, $T = 0,200 \times 10 = 2$ N, $V = \sqrt{2/0,020} = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et donc

$$\lambda = 10/100 = 0,10 \text{ m.}$$



Il serait plus exact de dire que la corde est le siège d'un système d'ondes stationnaires. En effet, il y a réflexions multiples de l'onde initiale qui se propage le long de la corde d'abord sur l'extrémité du côté de la masse (que l'on peut considérer comme fixe en première approximation), puis sur le vibreur et ainsi de suite. L'état final de la corde résulte de la superposition (l'interférence) de toutes ces ondes de même fréquence, qui se propagent dans des directions opposées le long de la corde : ainsi s'instaure une onde stationnaire ou pseudo-stationnaire. La résonance d'ondes stationnaires, qui se traduit par l'existence de ventres et de nœuds de vibration très marqués apparaît lorsque la longueur de la corde est un multiple entier de demi longueur d'onde, alors l'interférence de cette multiplicité d'ondes est constructive et on observe cette résonance.

13 Réponse : 1. $\tau_1 = 2,9$ s.

2. $c_r = 5\,000$ m.s⁻¹.
3. L'indien.
4. Progressives et longitudinales.
5. Son aigu.
6. Une longueur d'onde.
7. $c = x_1 f_e$, $c = 5\,200$ m.s⁻¹.
8. Tensions en opposition de phase.
9. Milieu dispersif.
10. Le milieu est dispersif.

Explications :

1. Le retard τ_1 avec lequel l'indien entend le coup de fusil est le temps de propagation de l'onde entre le cow-boy et l'indien. $\tau_1 = d_1/c_a$, soit, numériquement, $\tau_1 = 1\,000/345 \approx 2,9$ s.
2. La célérité de propagation des ondes sonores dans le matériau dont sont formés les rails, est $c_r = d_2/\tau_2$, soit, $c_r = 2\,500/0,5 = 5\,000$ m.s⁻¹.
3. L'indien prévient assurément plus rapidement le soldat de son ire !
4. Ce sont des ondes longitudinales, progressives.
5. Il s'agit d'un son aigu songer que le « la fondamental » - du diapason moderne est de 440 Hz et par conséquence, la fréquence f_e est située plus de deux octaves plus haut (deux octaves plus une tierce mineure).
6. Par définition, la distance x_1 représente la valeur de la longueur d'onde de l'onde de fréquence f_e se propageant sur le rail.

7. La longueur d'onde est aussi la distance parcourue par une onde pendant une période ($T_e = 1/f_e$), donc la célérité de propagation c est donnée par le rapport de cette distance sur le temps de parcours nécessaire. Ainsi, $c = x_1 f_e$, soit, numériquement, $c = 2,6 \times 2\,000 = 5\,200 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

8. Pour déterminer le déphasage de la tension détectée en x_2 par rapport à celle relevée en O , il suffit de calculer

$$\begin{aligned} \varphi &= -2\pi \frac{x_2}{\lambda} = -2\pi \frac{x_2}{x_1} \\ &= -5\pi \equiv \pi \text{ mod}(2\pi). \end{aligned}$$

Ainsi la tension en x_2 est-elle en opposition de phase par rapport à celle captée en O . D'où l'oscillogramme ci-contre.

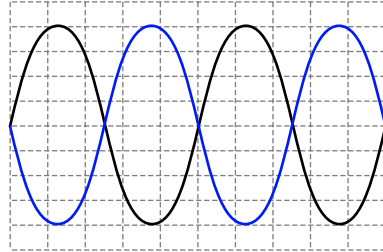


Figure 3.18

9. Par définition, on qualifie un tel milieu de dispersif (cf. les rappels théoriques de l'exercice 6).

10. Cela signifierait que la longueur d'onde serait la même, égale à x_1 , quelle que soit la fréquence f_e . Donc, $x_1 = c(f_e) \cdot f_e$: la célérité serait inversement proportionnelle à la fréquence, le milieu serait donc dispersif.



À la question 4, d'après la solution fournie par le bureau du concours, les caractères longitudinal et progressif des ondes étaient attendus comme réponse. Or, si le rail en question est très long, le milieu de propagation peut être effectivement supposé infini et l'onde émise se propage à partir de sa source sans être réfléchi aux extrémités : elle peut ainsi être considérée comme progressive. En revanche, ce ne pourrait pas être le cas si la portion de voie ferrée était finie : il y aurait, en effet, réflexion aux extrémités et instauration d'ondes stationnaires ou pseudo-stationnaires sur le rail. Par ailleurs, le caractère longitudinal de l'onde n'est nullement évident puisque les solides peuvent propager des ondes tant longitudinales que transversales. Le mode d'excitation de l'onde est alors déterminant : or, dans le problème, l'indien frappe sur le rail et provoque localement une déformation qui est certainement transversale par rapport à la direction de propagation. L'onde qui se propagera sera essentiellement une onde de surface, transversale, plutôt qu'une onde en volume, longitudinale.

14 Réponses : 1. progressives et longitudinales.

2. $T = 12 \mu\text{s}$, $n \approx 3\,000$.

3. $n' = f' \Delta t$, $n' = 114$.

4. $D = v_0 \tau / 2$, $D = 3,4 \text{ m}$.

5. $\tau' = 2D / (v_0 + V)$, $\tau' \approx 19,8 \text{ ms}$.

6. $a_{rhino} = 3v_0/f$, $a_{rhino} \approx 1,2$ cm et $a_{murin} = 3v_0/f'$, $a_{murin} \approx 2,7$ cm.

7. $m = 4$.

8. $a_{orque} \approx 22$ cm.

9. 20 Hz - 20 kHz,

10. $v_{air} = 340$ m.s⁻¹ et $v_{eau} = 1\,800$ m.s⁻¹.

Explications :

1. Les ultrasons sont de même nature que les ondes sonores et sont, de ce fait, progressives et longitudinales.

2. La période est l'inverse de la fréquence : $T = 1/f$, soit, numériquement, $T = 1/83.10^3 \approx 1,2.10^{-5}$ s. Le nombre de périodes par salve de durée t_s est alors $n = t_s/T$, soit $n \approx 36.10^{-3}/1,2.10^{-5} = 3\,000$.

3. De même que précédemment, $n' = f'\Delta t$; numériquement,

$$n' = 38.10^3 \times 3.10^{-3} = 114.$$

il y a donc 114 périodes par salve.

4. Le délai entre l'instant de réception de l'écho et celui de l'émission de la salve, τ représente le temps de propagation nécessaire à la salve pour effectuer un aller-retour, $2D$; ainsi, $2D = v_0\tau$, soit $D = v_0\tau/2$; numériquement, $D = 340 \times 20.10^{-3}/2 = 3,4$ m.

5. La durée τ' entre l'émission de la salve et la réception de l'écho représente le délai de propagation pour que la salve effectue un aller D et un retour de distance $D - V\tau'$, puisque pendant cette durée, la chauve-souris s'est dirigée vers l'obstacle et rapproché de $V\tau'$. Par conséquent, $2D - V\tau' = v_0\tau'$, d'où $\tau' = 2D/(v_0 + V)$; numériquement, $\tau' = 2 \times 3,4/(340 + 12/3,6) \approx 19,8$ ms.

6. La taille minimale des proies doit être égale à 3λ , d'où $a_{rhino} = 3v_0/f$ et $a_{murin} = 3v_0/f'$. Numériquement, $a_{rhino} = 3 \times 340/83.10^3 \approx 1,2.10^{-2}$ m et $a_{murin} = 3 \times 340/38.10^3 \approx 2,7.10^{-2}$ m.

7. Le raisonnement est le même qu'à la question 2, donc $m = 20.10^3 \times 200.10^{-6} = 4$. La salve comporte seulement 4 périodes.

8. Le raisonnement est le même qu'à la question 6, donc

$$a_{orque} = 3 \times 1\,500/20.10^3 = 0,225$$
 m.

9. S'ils sont perceptibles par l'homme, ces « cris » doivent avoir une fréquence qui appartient à la bande 20 Hz - 20 kHz.

10. Par définition, la célérité c est liée à la fréquence et à la longueur d'onde par $c = \lambda f$. Ainsi, Dans l'air, $c = 8.10^3 \times 4,25.10^{-2} = 340$ m.s⁻¹; dans l'eau, $c = 8.10^3 \times 18,75.10^{-2} = 1\,500$ m.s⁻¹.

Les célérités de propagation d'une onde appartenant au domaine sonore et d'une onde appartenant au domaine ultrasonore restent les mêmes dans chacun des deux milieux : on peut inférer que, s'il en est de même pour d'autres valeurs de la fréquence, les milieux sont non dispersifs.

3.3 Diffraction

15

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| V | V | F | V |

1. Le domaine infrarouge concerne les longueurs d'onde immédiatement supérieures à 800 nm dans le vide.
2. Nous tenons là une définition possible du phénomène de diffraction.
3. L'onde diffractée conserve la fréquence de l'onde incidente. Il ne s'agit pas d'un phénomène non linéaire qui modifierait la fréquence de l'onde incidente.
4. La relation $\sin \theta_0 = \lambda_0/b$ caractérise l'ouverture angulaire $2\theta_0$ du faisceau de lumière diffractée dans la tâche principale.



Cette dernière relation donne l'ordre de grandeur du phénomène de diffraction ; elle est fondamentale et doit être connue de ce fait par cœur.

16

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| F | F | F | F |

1. Il est clair que la courbe 1 de la figure 3.11 ne saurait être prise pour une droite, or c'est elle qui donne d en fonction de $1/a^2$. Il n'y a donc pas proportionnalité entre ces deux grandeurs comme l'exprime la formule proposée. La courbe 2 montre en revanche que $d = k\lambda D/a$
2. Les quatre points expérimentaux peuvent être considérés comme alignés. La meilleure droite passe par les deux points extrêmes de la distribution : ils ont pour coordonnées en m, $(1; 13 \cdot 10^{-3})$ et $(1,7; 21 \cdot 10^{-3})$. La pente de cette droite est donc : $(21 - 13) \cdot 10^{-3} / (1,7 - 1) \approx 11 \cdot 10^{-3}$.
3. Le coefficient directeur de la droite $k\lambda/a$ possède donc la valeur $11 \cdot 10^{-3}$. Il en résulte que le coefficient k vaut ainsi $11 \cdot 10^{-3} \times 100 \cdot 10^{-6} / 600 \cdot 10^{-9} \approx 1,9$.
4. $a = k\lambda D/d$ avec $k = 2$. Numériquement, $a = 2 \times 700 \cdot 10^{-9} \times 1,5 / 20 \cdot 10^{-3} = 105 \mu\text{m}$.

17

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| V | F | F | V |

a. La fréquence du LASER est $\nu = c/\lambda$, soit, numériquement

$$\nu = 3.10^8 / 600.10^{-9} = 5,00.10^{14} \text{ Hz.}$$

b. C'est bien entendu l'inverse λ/a qui fixe l'ordre de grandeur de l'écart angulaire entre le centre de la tache centrale et la première extinction. La relation exacte est $\sin \theta_0 = \lambda/a$.

c. La largeur angulaire de la tache est égale à $2\lambda/a$; l'écran étant situé à la distance D du plan de la fente, la largeur de la tache centrale est donc égale à $2\lambda D/a$, soit, numériquement $2 \times 600.10^{-9} \times 2/0,1.10^{-3} = 2,4 \text{ cm}$.

d. C'est en effet la longueur d'onde qui change puisque la célérité des ondes lumineuses v est différente de sa valeur dans le vide.

18

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| F | F | F | F |

1. L'écart angulaire du faisceau est toujours inversement proportionnel à la dimension caractéristique de l'obstacle. Il diminue donc avec l'accroissement du diamètre du fil.

2. L'écart angulaire est indépendant de la distance de l'écran au fil; il ne dépend que de la dimension caractéristique de l'obstacle et de la longueur d'onde de la lumière employée. C'est la dimension linéaire de la tache qui va être proportionnelle à cette distance.

3. La largeur angulaire de la tache principale est $2\lambda/a$, celle des autres taches est moitié moindre, soit λ/a . La largeur l de ladite tache vaudra donc en première approximation $\lambda D/a$, d'où $a = \lambda D/l$. Numériquement,

$$a = 600.10^{-9} \times 2/0,25.10^{-2} = 0,48 \text{ mm.}$$

4. La longueur d'onde diminue lorsque l'on substitue un laser de lumière bleue au laser de lumière rouge et donc avec elle l'écart angulaire diminue.

19 Réponses : 1. Longueur d'onde.

2. $T = 4 \text{ s}$.

3. $c = d/T$, $c = 6,0 \text{ m.s}^{-1}$.

4. $A = 4S_V/S_{\text{capteur}}$, $A = 1,0 \text{ m}$,

5.a. cf. figure.

5.b. cf. figure.

6.a. De la diffraction.

6.b. $\theta \approx d/L$, $\theta \approx 0,5$ rad soit environ 30 degrés, cf. figure.

Explications :

1. La période spatiale de l'onde est dénommée longueur d'onde.

2. On observe sur l'enregistrement que 8 divisions horizontales séparent deux minima de la houle et correspondent de ce fait à une période temporelle de la houle. La base de temps de l'enregistreur étant S_t , $T = 8S_t$; numériquement, $T = 8 \times 0,5 = 4,0$ s.

3. La longueur d'onde d , la célérité de propagation c et la période T sont reliées par la relation classique $c = d/T$; numériquement $c = 24/4 = 6,0$ m.s⁻¹.

4. L'enregistrement montre que l'amplitude A est représentée par $8/2 = 4$ divisions verticales. Or, la sensibilité verticale de l'enregistreur, S_v , indique que la tension délivrée par le capteur est $4S_v$ et l'amplitude de la houle A est donc $4S_v/S_{\text{capteur}}$. Numériquement, $A = 4 \times 50.10^{-3}/2,0.10^{-3} = 100$ cm ou 1 m.

5.a Si le capteur avait été déclenché à $t_1 = 3$ s, le déphasage de l'onde dont on aurait capté la trace aurait été de trois quarts de période en retard sur celle que l'enregistreur a recueillie (ou un quart en avance en terme de représentation congruente) : elle serait apparue en avance de 2 divisions horizontales sur celle que l'enregistreur montre. (figure 3.19)

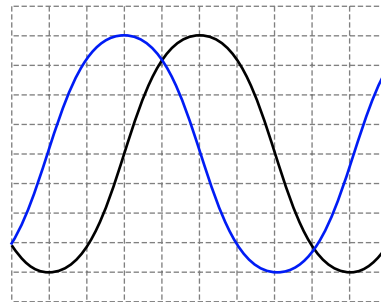


Figure 3.19

5.b Si la bouée n°2 est placée à 6 m de la bouée n°1, dans la direction de propagation, la houle qui lui parvient est celle de la première bouée en retard de $6/24$ de période, soit un quart de période. Le signal capté et transcrit sera donc en retard de 2 divisions horizontales sur celui déjà recueilli. (figure 3.20)

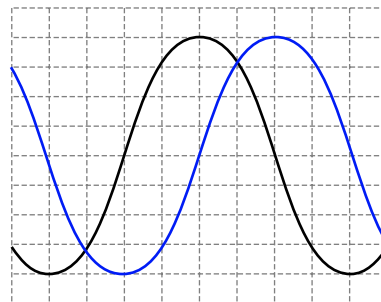


Figure 3.20

6.a La situation, à savoir la limitation du front d'une onde par un obstacle, est caractéristique de celles qui conduisent à l'apparition du phénomène de diffraction.

6.b À partir de chaque extrémité de l'entrée du port la houle s'élargit en faisant un écart angulaire $\theta = d/L$; soit, numériquement, $\theta = 24/48 = 0,5$ rad, soit environ 30°.

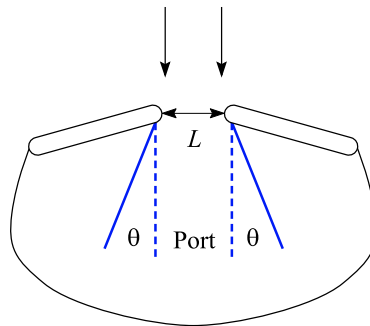


Figure 3.21

3.4 Interférences

20 Réponses : 1. $T = 314 \mu\text{s}$, $f = 3,18 \text{ kHz}$.

2. sons aigus, ondes longitudinales et stationnaires.

3. $L = k\lambda/2$.

4. annulation de la tension à la sortie du microphone.

5. Tension d'amplitude maximale à la sortie du microphone.

6. $\lambda = 2L$, $\lambda = 10,8 \text{ cm}$,

7. $c = \lambda/T$, $c = 344 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Explications :

1. La mesure de la longueur correspondant à 2,5 périodes est 4,35 cm ; les 9 divisions horizontales de l'écran mesurent 4,95 cm ; ainsi peut-on considérer qu'une période T correspond à $6,15 \times 9 / (2,5 \times 7,05)$ divisions, soit 3,16 divisions. La base de temps étant de $100 \mu\text{s}$ / division, la période T vaut donc $316 \mu\text{s}$. La fréquence $f = 1/T$ vaut 3,16 kHz.

2. Il s'agit d'un son aigu, créé par des ondes stationnaires longitudinales.

3. Il faut que la distance parcourue dans la branche de droite soit égale à celle parcourue dans la branche de gauche à un nombre entier de longueurs d'onde près. La condition s'exprime mathématiquement par la relation $d_2 - d_1 = 2L = k\lambda$ où k est entier.

4. On observera une quasi annulation de la tension délivrée par le microphone.

5. On observera *a contrario* une tension sinusoïdale de même fréquence que celle du son délivré par le haut-parleur et ayant une amplitude maximale.

6. La longueur d'onde λ vaut donc $2L$, soit, numériquement 10,8 cm.

7. La célérité c des ondes est donnée par λ/T , soit, numériquement,

$$c = 0,108 / 316 \cdot 10^{-6} \approx 342 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

4

Physique atomique et nucléaire

Thèmes du chapitre

Physique nucléaire

Élément, nucléide, isotope. Nombre de masses, unité de masse atomique. Réactions nucléaires, transmutation, fusion, fission. Défaut de masse et énergie associée.

Radioactivité

Naturelle ou artificielle. Rayonnements α , β et γ . Décroissance radioactive, demi-vie, période, constante radioactive. Loi cinétique d'ordre 1. Activité, unité d'activité. Famille radioactive. Datation, traçage, dosage en chimiothérapie.

Physique atomique

Niveaux d'énergie dans un atome. Transition entre niveaux d'énergie, excitation ou absorption et désexcitation ou émission d'un photon.

Désintégrations

Désintégrations α , β^+ et β^- .

Lois de la physique nucléaire et atomique

Conservation de la charge. Conservation du nombre de masses. Relation masse-énergie $E = mc^2$. Relation de Bohr $E_m - E_n = h\nu_{mn}$.

Des savoir-faire à maîtriser

- Savoir équilibrer une réaction nucléaire.
- Savoir calculer un défaut de masse.
- Savoir calculer l'activité d'un corps simple, d'un mélange de corps simples.
- Savoir calculer la fréquence ou la longueur d'onde du photon émis ou absorbé lors d'une transition entre niveaux d'énergie dans un atome.
- Connaître ou être capable de rapidement retrouver les unités des grandeurs physiques.

Des réflexes à avoir

Identifier le type général de réaction nucléaire proposée. Vérifier son équilibre. Pour ce qui est des désintégrations radioactives, vérifier que l'expression obtenue correspond effectivement à une baisse de l'activité du radioélément considéré. Vérifier l'homogénéité de l'expression obtenue.

4.1 Réactions nucléaires

1 ECE 2008

Vrai ou faux ?

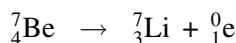
Le béryllium Be ne possède qu'un seul isotope stable qui est utilisé comme « générateur de neutrons » dans l'industrie nucléaire. Un atome de cet isotope fixe en effet une particule α , un neutron est libéré et il se forme un autre noyau.

1. La réaction peut s'écrire : ${}^9_4\text{Be} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^1_0\text{n} + {}^{12}_6\text{C}$.

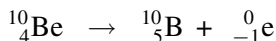
2. Il s'agit bien d'une réaction de fusion dans laquelle deux noyaux « légers » donnent un noyau plus « lourd ».

Il existe trois isotopes radioactifs du béryllium ${}^7\text{Be}$, ${}^8\text{Be}$ et ${}^{10}\text{Be}$. L'isotope ${}^8\text{Be}$ est émetteur de type α et les deux autres sont émetteurs de type β .

3. L'isotope instable ${}^7\text{Be}$ présente un « déficit » de neutrons, on peut donc écrire la réaction suivante :



4. L'isotope instable ${}^{10}\text{Be}$ présente un « excès » de neutrons, on peut donc écrire la réaction suivante :



2 ECE 2007

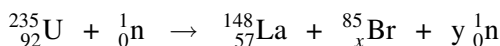
Vrai ou faux ?

On donne $1 \text{ uma} = 930 \text{ MeV}/c^2$; $N_A = 6.10^{23} \text{ mol}^{-1}$ et le défaut de masse pour le carbone est environ $0,11 \text{ uma}$.

1. Un radionucléide ayant un excès de neutrons est émetteur α .

2. L'énergie de liaison par nucléon du Carbone 14 est $E = 7,3 \text{ MeV}$.

Le défaut de masse de l'uranium au cours de la réaction suivante est d'environ $0,18 \text{ uma}$. Sachant que la réaction de fission de l'uranium 235 est la suivante :



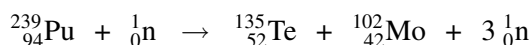
3. $x = 55$ et $y = 2$.

4. L'énergie libérée par la fission d'une mole d'atome d'uranium est d'environ 10^{36} MeV .

3 FESIC 2006

Vrai ou faux ?

Le nucléide ${}^{239}_{94}\text{Pu}$ du plutonium peut réagir avec un neutron selon la réaction :



Données : Masse des nucléides (MeV/c^2) :

$${}^{239}_{94}\text{Pu} : 222,655 \cdot 10^3 ; {}^1_0\text{n} : 932 ; {}^{135}_{52}\text{Te} : 125,662 \cdot 10^3 ; {}^{102}_{42}\text{Mo} : 94,920 \cdot 10^3 .$$

Masse atomique molaire de ${}^{239}_{94}\text{Pu}$: $M = 239 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Nombre d'Avogadro : $N_A = 6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

$$1 \text{ MeV}/c^2 = 1,6 \times 10^{-13} \text{ J} ; 209 \times 1,6 = 330 ; \frac{209}{1,6} = 130 .$$

- Cette réaction est une réaction de fusion nucléaire.
- La perte de masse dans la réaction est $\Delta m = -209 \text{ MeV}/c^2$.
- Cette réaction libère de l'énergie.
- L'énergie libérée par la réaction de 239 g de ${}^{239}_{94}\text{Pu}$ est $E = 2 \times 10^{13} \text{ J}$.

4 FESIC 2007

Vrai ou faux ?

La réaction de fusion entre un noyau de deutérium ${}^2_1\text{H}$ et un noyau de tritium ${}^3_1\text{H}$ conduit à la formation d'un noyau d'hélium ${}^4_2\text{He}$.

Données :

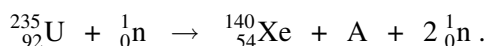
| Noyau | ${}^2_1\text{H}$ | ${}^3_1\text{H}$ | ${}^4_2\text{He}$ |
|-------------------------------|------------------|------------------|-------------------|
| $\frac{E_l}{A}$ (MeV/nucléon) | 1,183 | 2,825 | 7,074 |

- L'énergie de liaison d'un noyau est égale au produit du défaut de masse du noyau par la valeur de la célérité de la lumière dans le vide.
- L'énergie libérée lors de la formation d'un noyau de deutérium à partir des nucléons qui le constituent, initialement isolés, est de 1,183 MeV.
- La réaction de fusion entre un noyau de deutérium et un noyau de tritium s'accompagne de l'émission d'un neutron.
- L'énergie libérée par cette réaction est égale à 17,455 MeV.

5 FESIC 2007

Vrai ou faux ?

Lors de la fission de l'uranium ${}^{235}_{92}\text{U}$, l'équation d'une réaction de fission observée est :



Données :

La perte de masse de la réaction est 0,2 uma.

La vitesse de la lumière : $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

L'unité de masse atomique : $1 \text{ uma} = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

Un électron-volt : $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$.

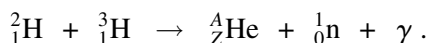
$3/1,6 \approx 2$; $1,6/3 \approx 0,55$; $1,66 \times 2 \times 9 \approx 30$; $1,66 \times 9/2 \approx 7,5$; $9 \times 2/1,66 \approx 11$.

- La fission nucléaire est une réaction nucléaire spontanée.
- Le bombardement neutronique permet de ne pas avoir à vaincre de répulsion électrique noyau-noyau lors du choc.
- Le noyau A est ${}_{38}^{93}\text{Sr}$ (s'aider d'une classification périodique des éléments).
- L'énergie libérée par la fission d'un noyau d'uranium ${}^{235}\text{U}$ est d'environ 20 MeV.

6 GEIPI - ENI 2008

On étudie la formation d'hélium à partir de deutérium et de tritium ; cette réaction nucléaire libère un neutron.

1. Équilibrer la réaction



- Comment appelle-t-on ce type de réaction nucléaire ?
- Comment peut-on qualifier les trois nucléides : deutérium, tritium et hydrogène ?
- Montrer que le système (hélium + neutron) est plus stable que le système (deutérium + tritium).
- Calculer l'énergie E_l libérée par cette réaction.
- Calculer l'énergie e_l libérée par kg de matière utilisée.
- Que représente γ ?
- En supposant que γ véhicule toute l'énergie libérée par la réaction, déterminer la fréquence et la longueur d'onde associées.

Données :

| particule | Deutérium | Tritium | Helium | Neutron |
|-------------|-----------|---------|---------|---------|
| Masse (uma) | 2,01355 | 3,01550 | 4,00150 | 1,00866 |

$$c = 2,998.10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

$$1 \text{ uma} = 1,66054.10^{-27} \text{ kg}$$

$$N_A = 6,023.10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

$$h = 6,626.10^{-34} \text{ J.s}$$

4.2 Désintégrations radioactives

7 ECE 2008

Vrai ou faux ?

Une des premières expériences de mise en évidence de la radioactivité a consisté à bombarder de l'aluminium ${}_{13}^{27}\text{Al}$ avec des particules α .

1. On récupère du phosphore ${}_{15}^{30}\text{P}$ et un neutron.
2. L'isotope du phosphore créé est radioactif et donne du silicium ${}_{14}^{30}\text{Si}$ et un positron.
Le radium ${}^{226}\text{Ra}$ est un des éléments de la famille radioactive de l'uranium 238, il a une demi-vie de 1600 ans et se désintègre par émission α .
3. Il reste de l'uranium sur Terre car sa période, d'environ 10^9 ans, est du même ordre de grandeur que celle de la Terre.
4. Un noyau de ${}^{226}\text{Ra}$ a 4 chances sur 10 000 de se désintégrer.

8 FESIC 2006

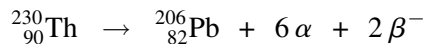
Vrai ou faux ?

Le thorium ${}_{90}^{230}\text{Th}$ subit une série de désintégrations α et β^- conduisant à la formation de plomb ${}_{82}^{206}\text{Pb}$ stable.

La constante de cette désintégration radioactive est $\lambda = 8,7 \times 10^{-6} \text{ an}^{-1}$.

Données : $\ln 2 \approx 0,7$; $\frac{1}{8,7 \times 10^{-6}} \approx 11,5 \times 10^4$; $\frac{0,7}{8,7 \times 10^{-6}} \approx 8,0 \times 10^4$;
 $\frac{\ln 4}{8,7 \times 10^{-6}} \approx 16 \times 10^4$

a. L'équation globale de la désintégration subie par le thorium est



b. La demi-vie du thorium ${}_{90}^{230}\text{Th}$ est $t_{1/2} = 11,5 \times 10^4$ ans.

c. La quantité de thorium ${}_{90}^{230}\text{Th}$ désintégré au cours d'une durée t est proportionnelle à cette durée t .

Un échantillon contient 0,25 mmol de ${}_{90}^{230}\text{Th}$ et 0,75 mmol de ${}_{82}^{206}\text{Pb}$.

d. L'échantillon est âgé de $2,4 \cdot 10^5$ ans.

9 ECE 2008

Vrai ou faux ?

On veut déterminer le temps de demi-vie du « radon 222 » de symbole chimique Rn. Pour cela, on effectue différentes mesures sur une durée totale de plus de 200 heures, cela nous permet d'obtenir la courbe figure 4.1 représentant l'évolution de \ln de l'activité moyenne A du Rn par m^3 en fonction du temps. L'appareil de détection du radon a une sensibilité maximale tel que $\ln(A_{\min}) = 3,2$.

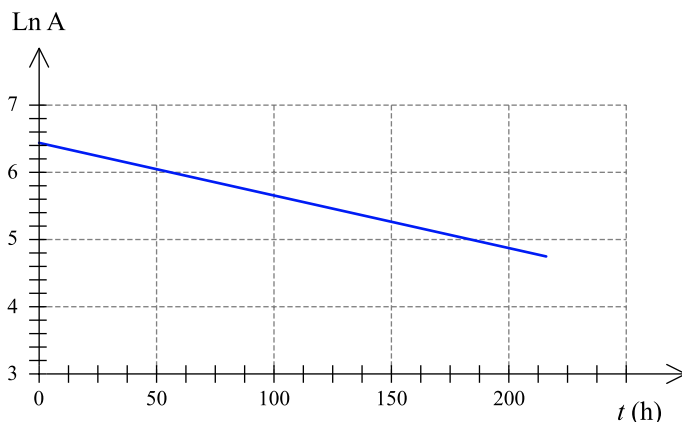


Figure 4.1

1. Cette courbe est en accord avec la loi de décroissance radioactive $\ln A = -\lambda t + \ln A_0$ car elle représente une droite de pente négative $-\lambda$.
2. La valeur de la constante radioactive de cet élément est $\lambda = 7,50 \cdot 10^{-3} \text{ h}^{-1}$.
3. Le temps de demi-vie $t_{1/2}$ du Rn est d'environ 40 jours.
4. L'appareil ne détectera plus d'activités au bout de 100 heures.

10 FESIC 2008

Vrai ou faux ?

Un échantillon de l'isotope $^{107}_{48}\text{Cd}$ du cadmium a une activité initiale de $1,8 \cdot 10^7 \text{ Bq}$. Le nouveau noyau formé est l'isotope $^{107}_{49}\text{In}$ de l'indium. Le graphe figure 4.2 montre l'évolution du logarithme népérien de l'activité de l'échantillon pendant une journée.

Données : $\ln 2 \approx 0,7$; $\ln 1,8 \cdot 10^7 \approx 16,7$

- a. Le cadmium 107 et l'Indium 107 sont isomères.
- b. Le cadmium 107 est un émetteur β^- .
- c. La constante de temps du phénomène est la durée au bout de laquelle l'activité est divisée par $\exp(1)$.

d. La demi-vie du cadmium 107 est proche de 7 heures.

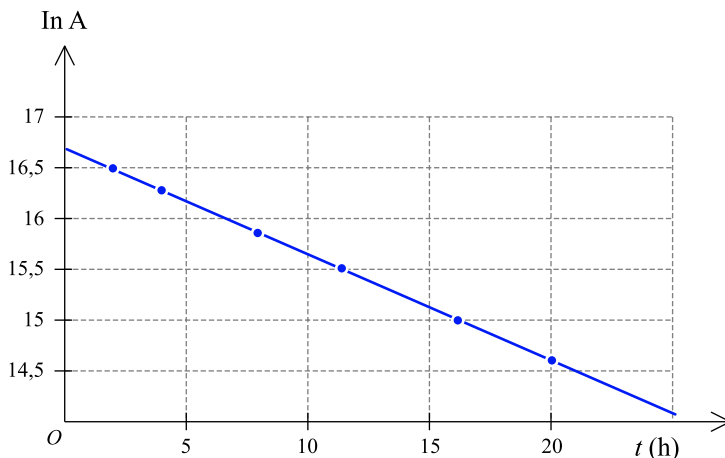


Figure 4.2

11 ECE 2008

Vrai ou faux ?

Un pacemaker cardiaque est formé d'une boîte hermétique contenant 119 mg d'un isotope 238 du plutonium émetteur α de demi-vie 84 ans. Ce stimulateur produit une puissance électrique à la suite de l'énergie libérée par chaque désintégration.

On donne ${}_{90}\text{Th}$; ${}_{91}\text{Pa}$; ${}_{93}\text{Np}$; ${}_{94}\text{Pu}$. La masse molaire du plutonium est de $238 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$. Le nombre d'Avogadro est $N_A = 6.10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

On prendra $\ln 2 \approx e^{-1/3} \approx 0,7$

1. L'équation de chaque désintégration s'écrit ${}_{94}^{238}\text{Pu} \rightarrow {}_2^4\text{He} + {}_{92}^{234}\text{U}^*$.
2. Le nombre de noyaux initialement présents dans le stimulateur est $N_0 = 3.10^{20}$.
3. L'activité initiale du pacemaker est $A_0 \approx 10^8 \text{ Bq}$.

On considère que le pacemaker fonctionne correctement jusqu'à une diminution de 40 % de son activité, ce qui correspond à une durée de vie de 40 ans.

4. Le nombre de noyaux de plutonium 238 restants est de 10^{10} .

12 GEIPI - ENI 2006

Une seule réponse vraie

Une substance radioactive contient de l'iode 131 de demi-vie 8 jours et du césium 137 de demi-vie 30 ans.

La part de l'activité due à l'iode est de 200 kBq. La part de l'activité due au césium est de 50 kBq.

Quelle sera l'activité de cette substance dans un mois ?

- A : 10 kBq B : 50 kBq C : 65 kBq D : 80 kBq E : 100 kBq.

13 GEIPI - ENI 2007

Une seule réponse vraie

On désire étudier l'activité d'une source ponctuelle de strontium ${}^{90}_{38}\text{Sr}$.

Cet élément radioactif produit des noyaux d'yttrium ${}^{90}_{39}\text{Y}$.

La durée de demi-vie du strontium est de 29 ans.

Quelle est la nature de la radioactivité ?

A : α B : β^- C : β^+ D : γ E : fission.

14 GEIPI - ENI 2007 (suite de l'ex. 13)

Une seule réponse vraie

En 2007, on utilise un compteur Geiger dont la fenêtre d'entrée a une surface de 50 mm^2 .

On place cette fenêtre du capteur à 10 cm en face d'une source de strontium ${}^{90}_{38}\text{Sr}$.

Ce capteur ne mesure qu'une fraction de l'activité de la source. il indique 100 Bq.

On retrouve dans une armoire un ancien compte rendu d'expérience effectuée avec la même source. Le capteur de l'époque possédait une fenêtre d'entrée de surface 100 mm^2 . Lorsque la source était placée à 10 cm du capteur, celui-ci indiquait 400 Bq.

En quelle année ce compte rendu a-t-il été écrit ?

A : 2006 B : 1978 C : 1949 D : 1920 E : 1891

15 GEIPI 2006

La T.E.P., tomographie par émission de positons (ou positrons) est une technologie de médecine nucléaire qui utilise des molécules marquées avec un isotope émetteur de positons pour imager le fonctionnement ou le dysfonctionnement d'organismes vivants. On utilise principalement le fluorodesoxyglucose FDG marqué au fluor 18 pour ce type d'examen.

I. Production du radio-isotope émetteur de positon

Le ${}^{18}_9\text{F}$ ou fluor 18 est produit dans un cyclotron en bombardant par des protons de haute énergie une cible contenant du ${}^{18}_8\text{O}$, un isotope de l'oxygène. Le fluor 18 se désintègre par émission β^+ , produisant de l'oxygène dans son état fondamental.

a. Écrire la réaction nucléaire correspondant à la formation de ${}^{18}\text{F}$ et nommer les produits de la réaction.

b. Donner la composition du noyau de fluor 18.

c. Écrire la réaction nucléaire de désintégration β^+ du ${}^{18}\text{F}$ et nommer les produits de cette réaction.

d. Le ${}^{18}\text{F}$ a une demi-vie $t_{1/2}$ de 110 minutes. Définir et calculer sa constante radioactive λ .

II. Préparation du FDG marqué au fluor 18 et injection au patient

Un automate permet de remplacer un groupement OH du glucose par du fluor 18, la molécule marquée obtenue a des propriétés analogues au glucose normal que l'on injecte au patient. Un tissu organique anormal (par exemple une tumeur cancéreuse) consomme plus de glucose qu'un tissu sain et concentre donc la radioactivité.

- On injecte au patient à 10 h une dose de solution glucosée présentant une activité de 300 Mbq. Calculer le nombre de noyaux de fluor 18 qu'il reçoit.
- On ne laisse sortir le patient que lorsque son activité n'est plus que 1 % de sa valeur initiale. À quelle heure pourra-t-il quitter la salle d'examen ?

III. Détection des positons émis

Les positons émis avec une vitesse initiale non nulle sont freinés par collisions avec les atomes et s'arrêtent après quelques millimètres. Un positon au repos s'annihile avec un électron produisant une paire de photons de même énergie se propageant dans des directions opposées.

Le dispositif détecte les photons émis en coïncidence avec une caméra spéciale entourant la tête ou le corps du patient. Un traitement mathématique permet de remonter à la concentration en fluor 18.

- Écrire l'équation d'annihilation du positon.
- Calculer l'énergie en MeV de chacun des photons.

IV. Radioprotection du personnel hospitalier

Il faut une couche de plomb d'épaisseur $x_{1/2} = 4$ mm pour diminuer de moitié le rayonnement γ produit. Le patient est placé dans une enceinte de plomb d'épaisseur 5 cm.

Quel est le pourcentage de rayonnement transmis à l'extérieur ?

Données :

Masse du positon et de l'électron : $9,1 \cdot 10^{-31}$ kg

Vitesse de la lumière dans le vide $c = 3 \cdot 10^8$ m.s⁻¹

1 eV = $1,6 \cdot 10^{-19}$ J

16 ECE 2008

Vrai ou faux ?

Le Commissariat à l'Énergie Atomique donne les informations suivantes sur le pouvoir de pénétration des rayonnements ionisants considérés comme isotropes :

- Les particules α caractérisées par une pénétration très faible dans l'air : une simple feuille de papier peut les arrêter.
- Les particules β^- caractérisées par une pénétration faible : une feuille d'aluminium de quelques millimètres peut les arrêter.

c. Les rayonnements γ et X caractérisés par une pénétration très grande : une forte épaisseur de béton ou de plomb permet de s'en protéger.

On se propose de déterminer la dose radioactive reçue par un chercheur durant des manipulations d'une durée de deux heures. On considère que l'expérimentateur a une surface exposée aux radiations de $0,75 \text{ m}^2$, qu'il pèse 70 kg et qu'il est situé en moyenne à 2 m de la source durant les deux heures de manipulations (figure 4.3). L'activité de la source est $A = 1,85 \cdot 10^5$ désintégrations par seconde. On donne $1 \text{ MeV} = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$.

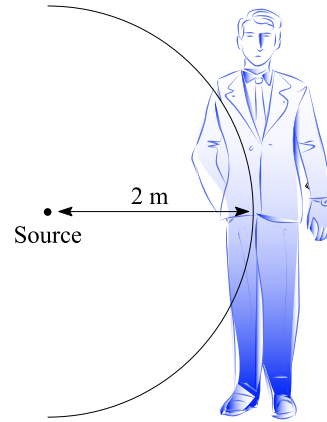


Figure 4.3

1. Seuls les rayons bêta moins, gamma et X peuvent atteindre l'expérimentateur.
2. Le nombre de particules qui atteignent l'élève pendant les deux heures est de l'ordre de $2 \cdot 10^{10}$.

On considère que les particules atteignant le manipulateur ont une énergie de $0,622 \text{ MeV}$.

3. L'énergie de ces particules est d'environ $1,24 \cdot 10^7 \text{ MeV}$.
4. La dose absorbée est d'environ $3 \cdot 10^{-15} \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$. Cette source ne présente aucun danger dans le cadre d'une utilisation normale.

4.3 Niveaux d'énergie atomiques

17 ECE 2007

Vrai ou faux ?

1. Pour passer directement d'un niveau d'énergie E_p à un niveau d'énergie supérieur E_n , un atome doit fournir une quantité d'énergie bien définie en émettant un photon.
2. Pour passer directement d'un niveau d'énergie E_p à un niveau d'énergie inférieur E_n , un atome doit recevoir une quantité d'énergie bien définie en absorbant un photon.
3. À toute transition électronique possible $n \rightarrow p$ ($E_n > E_p$) correspond un photon de longueur d'onde

$$\lambda_{n \rightarrow p} = \frac{hc}{E_p - E_n}$$

avec $h \approx 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ constante de Planck.

4. Les raies brillantes des spectres d'émission correspondent aux transitions électroniques au cours desquelles l'énergie de l'atome augmente.

18 ECE 2008

Vrai ou faux ?

On prendra les valeurs suivantes pour tous les calculs :

célérité de la lumière dans le vide : 3.10^8 m.s^{-1} ;

constante de Planck : $h = 6.10^{-34} \text{ J.s}$;

charge élémentaire : $e = 1,5.10^{-19} \text{ C}$.

1. La fréquence d'un photon émis ou absorbé est reliée aux énergies E_n et E_p par la relation de Bohr

$$\Delta E = |E_p - E_n| = h\gamma = h\frac{c}{\lambda}$$

avec E l'énergie, h la constante de Planck, γ la fréquence en Hertz, c la célérité de la lumière et λ la longueur d'onde.

2. L'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène est l'énergie qu'il faut fournir pour arracher l'électron soit 13,6 eV.

L'atome d'hydrogène passe du niveau d'énergie correspondant à $n = 5$ au niveau $p = 3$.

3. La longueur d'onde de la radiation émise est $\lambda \approx 12 \mu\text{m}$.

4. La radiation émise appartient au domaine de l'infrarouge.

19 FESIC 2006

Vrai ou faux ?

Une radiation de longueur d'onde $\lambda = 112 \text{ nm}$ est émise dans le vide par un atome d'hydrogène excité.

Données : Célérité du son dans l'air : $v = 340 \text{ m.s}^{-1}$;

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$;

Constante de Planck : $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J.s}$;

$\frac{340}{112} = 3,04$; $\frac{300}{112} = 2,68$; $3,04 \times 6,62 \approx 20$; $2,68 \times 6,62 \approx 17,7$.

a. Cette radiation se situe dans l'infrarouge.

b. La fréquence de cette radiation est $f = 2,68 \times 10^{15} \text{ Hz}$.

c. L'énergie du photon correspondant est $E = 2 \times 10^{-42} \text{ J}$.

d. Le spectre de la lumière émise par un ensemble d'atomes d'hydrogène excités est un spectre de raies d'absorption.

20 FESIC 2007

Vrai ou faux ?

Les ions hydrogénoïdes sont des ions formés à partir d'atomes de nombre de charge Z , auxquels on n'a laissé qu'un seul électron du cortège électronique (ex. He^+ , Li^{2+} , Be^{3+} ...). En 1913, Niels Bohr a montré que ces ions avaient des niveaux d'énergie quantifiés par la relation suivante :

$$E_n = -\frac{13,6 Z^2}{n^2},$$

avec n entier strictement positif et E_n exprimée en électronvolts (eV).

Le niveau 1 correspond à l'état fondamental. Le niveau énergétique le plus élevé est pris par convention égal à zéro.

Données : $13,6 \times 2 = 27,2$; $13,6 \times 3 = 40,8$; $13,6 \times 4 = 54,4$;
 $13,6 \times 9 = 122$; $13,6 \times 12 = 163$; $13,6 \times 16 = 218$.

- Les ions hydrogénoïdes possèdent chacun Z niveaux d'énergie.
- Le niveau fondamental de l'ion béryllium (III) Be^{3+} a pour énergie $E_1 = -218$ eV.
- Lors du passage du niveau fondamental au niveau excité immédiatement supérieur, la variation d'énergie de l'ion Be^{3+} est, en valeur absolue, $|\Delta E| = 163$ eV.
- Ce passage se fait avec émission d'un rayonnement électromagnétique.

21 FESIC 2005

Vrai ou faux ?

Soit l'ion lithium ${}^7_3\text{Li}^{2+}$, pour lequel les niveaux d'énergie possibles exprimés en électronvolt sont donnés par la relation

$$E_n = -13,6 \frac{Z^2}{n^2}$$

où Z est le numéro atomique de l'élément et n le niveau d'énergie.

Données : $\frac{122,4 \times 1,6}{6,62} \approx 30$; $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$;

Constante de Planck : $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J.s}$;

Célérité de la lumière : $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$;

- L'ion Li^{2+} possède 1 électron.
- L'énergie nécessaire pour arracher l'électron à l'ion est de 122,4 eV.
- Pour passer du niveau fondamental au premier état excité, l'ion Lithium doit recevoir une énergie égale à 1/4 de l'énergie précédente.
- Pour arracher un électron à l'ion, il faut un photon ayant une longueur d'onde égale à 10 nm.

22 ECE 2007

Vrai ou faux ?

On considère une cellule photoélectrique (dispositif qui produit du courant électrique quand il est exposé à de la lumière) fonctionnant avec des photons de $\lambda = 600 \text{ nm}$.

On prendra $h \approx 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ constante de Planck et $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ la valeur absolue de la charge d'un électron.

1. L'énergie de l'électron susceptible d'interagir avec les atomes de la cellule est $1,1 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.
2. L'énergie de l'électron susceptible d'interagir avec les atomes de la cellule est 7 eV .
3. Les photons de $\lambda_1 = 500 \text{ nm}$ engendrent un courant.
4. Les photons de $\lambda_2 = 400 \text{ nm}$ n'engendrent pas de courant électrique.

4.1 Réactions nucléaires

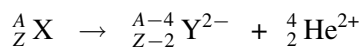
1

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| V | V | V | V |

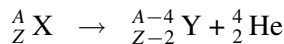
1. L'équation respecte la conservation des nombres de charges et de masses. L'élément de nombre de charges égal à 6 est effectivement le carbone.
2. Il s'agit de la définition que l'on peut donner d'une fusion nucléaire, même si ce n'est pas la plus commune ou la plus recherchée.
3. Un proton du noyau de cet isotope du béryllium se transforme en neutron en éjectant un positron, le nombre de charges diminue de un et un noyau de numéro atomique 3 est effectivement celui d'un isotope de l'élément lithium.
4. Un neutron du noyau de cet isotope du béryllium se transforme en proton en éjectant un électron, le nombre de charges augmente de un et un noyau de numéro atomique 5 est effectivement celui d'un isotope de l'élément bore.

Il existe trois grands types de radioactivités naturelles :

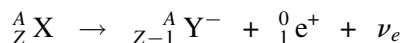
- la radioactivité α , au cours de laquelle une particule α , c'est-à-dire un noyau d'hélium (comportant 2 protons et 2 neutrons) ${}^4_2\text{He}$, est éjectée (en fait l'ion ${}^4_2\text{He}^{2+}$). Le numéro atomique ou nombre de charges de l'élément X diminue de deux (Z devient $Z-2$) et le nombre de masses A est diminué de quatre (A devient $A-4$) ; L'élément X est transformé de la sorte en élément Y. L'équation canonique de cette désintégration est :



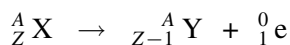
conventionnellement écrite sans les charges :



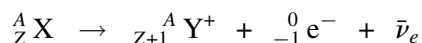
- la radioactivité β^+ , au cours de laquelle un positron ${}^0_1\text{e}$ (antiparticule de l'électron), emportant une charge élémentaire positive, est éjecté en même temps qu'un neutrino de l'électron, noté ν_e . Le numéro atomique Z de l'élément X diminue d'une unité, alors que le nombre de masses A reste identique, conduisant à l'élément Y. Le neutrino de l'électron est une des particules les plus fondamentales de la physique, au même titre que l'électron ou les quarks. Il est dépourvu de charge et la question de savoir s'il possède ou non une masse est encore ouverte. Son émission assure notamment la conservation de l'impulsion et de l'énergie. L'équation canonique de l'émission β^+ est :



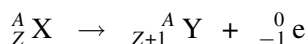
conventionnellement écrite sans les charges et sans le neutrino :



• la radioactivité β^- , au cours de laquelle un électron ${}^0_{-1} e$, emportant une charge élémentaire négative, est éjecté en même temps qu'un antineutrino de l'électron, noté $\bar{\nu}_e$. Le numéro atomique Z de l'élément X augmente d'une unité, alors que le nombre de masses A reste identique, conduisant à l'élément Y . L'antineutrino de l'électron possède les caractéristiques de charge et de masse du neutrino de l'électron et joue un rôle symétrique dans cette désintégration à celui du neutrino dans la désintégration β^+ . L'équation canonique de l'émission β^- est :



conventionnellement écrite sans les charges et sans le neutrino :



Une réaction nucléaire quelconque conserve le nombre de charges : les sommes des indices inférieurs de chacun des deux membres de la réaction doivent être égales ; et conserve le nombre de masses : les sommes des indices supérieurs de chacun des deux membres de la réaction doivent être égales.



Il est bon de se munir d'une classification périodique des éléments pour vérifier les correspondances entre les numéros atomiques et les éléments.

2

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| F | V | F | F |

1. Faux en général, la radioactivité naturelle α n'est observée, sauf quelques rares exceptions, que pour les éléments lourds $A > 208$. Or, il existe des radionucléides à excès de neutrons de faibles nombres de masses, qui se désintègrent en émettant un rayonnement β^- .
2. L'énergie de liaison par nucléon E_l d'un isotope est égale à $\Delta m c^2/A$, où Δm représente le défaut de masse de l'isotope, c'est-à-dire la différence entre la masse totale des nucléons qui le constituent et la masse du noyau, c la célérité de la lumière dans le vide et A le nombre de nucléons ou nombre de masses. Ainsi, pour le carbone 14, l'énergie de liaison vaut $E_l = 0,11 \times 930/14 \approx 7,3$ MeV.
3. La conservation du nombre de charges impose que $92 + 0 = 57 + x$ soit $x = 35$. La conservation du nombre de masses impose que $235 + 1 = 148 + 85 + y$, soit $y = 3$.

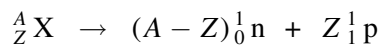
4 Physique atomique et nucléaire

4. Le défaut de masse pour la réaction de capture d'un neutron par un noyau d'uranium 235 est de 0,18 u.m.a., donc l'énergie libérée par la réaction d'un atome en question est $E = 0,18 \times 930 = 167,4 \text{ MeV}$. Par conséquent, pour une mole d'uranium 235, l'énergie libérée sera EN_A , soit environ 10^{26} MeV , ce qui représente tout de même 16 TJ ($1 \text{ TJ} = 10^{12} \text{ J}$).

Le défaut de masse exprimant l'énergie de liaison par nucléon E_l est toujours positif : la somme des masses des nucléons après séparation est toujours supérieure à la masse du noyau atomique qu'ils constituaient. Cela peut se traduire par la conservation de l'énergie suivante :

$$AE_l + M_X c^2 = ((A - Z)M_n + ZM_p) c^2,$$

où M_X est la masse du noyau X de numéro atomique Z et de nombre de masses A , M_n et M_p les masses au repos respectives du neutron et du proton. Elle établit le bilan énergétique de la réaction suivante :



où le noyau X, les protons et les neutrons libérés seraient tous au repos dans le référentiel du laboratoire et signifie concrètement qu'il faut fournir l'énergie AE_l au noyau pour le séparer en ses constituants « élémentaires ».



L'énergie libérée par la fission d'une mole d'uranium 235 (16 TJ environ) est à comparer à la combustion d'une mole de méthane qui donne environ 0,8 MJ, soit un rapport de un à vingt millions.

3

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| F | V | V | V |

- a. Il s'agit d'une réaction de fission nucléaire au cours de laquelle un noyau lourd se scinde en deux noyaux plus légers de numéros atomiques voisins.
 b. En effet, la perte de masse de la réaction est

$$\Delta m = (3M_n + M_{\text{Mo}} + M_{\text{Te}}) - (M_n + M_{\text{Pu}});$$

soit, numériquement, $\Delta m = 2 \times 932 + 94\,920 + 125\,662 - 222\,655 = -209 \text{ MeV} / c^2$.

c. Le défaut de masse est négatif donc l'énergie de masse du système des produits est inférieure à celle du système des réactifs. Il y a perte d'énergie : la réaction libère donc effectivement de l'énergie.

d. L'énergie libérée par une mole de plutonium 239 est $E = -N_A \Delta m c^2$. Or $\Delta m c^2$ vaut -209 MeV, 1 MeV vaut $1,6 \cdot 10^{-13}$ J, donc

$$E = 209 \times 1,6 \cdot 10^{-13} \times 6 \cdot 10^{23} \approx 2 \cdot 10^{13} \text{ J.}$$

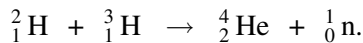
4

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| F | F | V | V |

a. Attention, $E = \Delta m \cdot c^2$.

b. Le deutérium possède deux nucléons, donc l'énergie libérée lors de la formation d'un noyau de deutérium à partir du proton et du neutron qui le constituent est de $2 \times 1,183$ MeV.

c. En effet, le bilan de la fusion est :



d. Le bilan énergétique de la fusion s'obtient à partir des énergies de liaison des différents noyaux : la séparation de ${}^2_1\text{H}$ en son proton et son neutron absorbe $E_1 = 2 \times 1,183$ MeV, celle de ${}^3_1\text{H}$ en ses deux neutrons et son proton absorbe $E_2 = 3 \times 2,825$ MeV et la formation de ${}^4_2\text{He}$ à partir des deux protons et de deux des trois neutrons disponibles libère $E_3 = 4 \times 7,074$ MeV. Ainsi le bilan énergétique de la réaction est-il $E = E_3 - E_1 - E_2$, soit, numériquement, $E = 17,455$ MeV.

5

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| F | V | F | F |

a. Non, c'est une réaction *a priori* provoquée, puisqu'il faut un neutron initiateur.

b. Ainsi, contrairement à ce qui se produit pour une fusion nucléaire pour laquelle il faut créer des conditions extrêmes de température et de pression pour réussir à fusionner les deux noyaux légers à cause de cette répulsion coulombienne (*cf.* le « Tokamak »), la fission est relativement « accessible » en comparaison.

c. La conservation du nombre de charges indique bien que le numéro atomique de l'élément A doit être $Z = 92 - 54 = 38$ et que d'après la classification périodique des éléments, il s'agit bien du strontium, Sr. En revanche, la conservation du nombre de masses au cours de la réaction implique que le nombre de masses du noyau de

strontium doit être de $A = 235 + 1 - 140 - 2 \times 1 = 94$. Il s'agit donc de l'isotope 94 et non 93 du strontium.

d. Le défaut de masse de la réaction étant 0,2 u.m.a., l'énergie libérée par la fission d'un atome d'uranium 235 est $0,2 \times 1,66 \cdot 10^{-27} \times (3 \cdot 10^8)^2 \approx 3 \cdot 10^{-11}$ J, soit $3 \cdot 10^{-11} / 1,6 \cdot 10^{-19} \approx 2 \cdot 10^8$ eV donc 200 et non 20 MeV.

6 Réponses : 1. $A = 4, Z = 2$.

2. Réaction de fusion nucléaire.

3. Ils sont isotopes.

4. $\Delta m = -0,01889$ u.m.a. négatif donc système des produits plus stable que le système des réactifs.

5. $E_l = -\Delta m c^2, E_l = 2,819 \cdot 10^{-12}$ J.

6. $e_l = E_l / (M_D + M_T), e_l = 3,376 \cdot 10^{14}$ J.kg⁻¹.

7. photon ou rayonnement électromagnétique de très haute énergie.

8. $\nu = E_l / h, \nu = 4,255 \cdot 10^{21}$ Hz, $\lambda = c / \nu, \lambda = 70,47$ fm.

Explications :

1. La conservation du nombre de charges impose $1 + 1 = Z + 0$, soit $Z = 2$. La conservation du nombre de masses impose que $2 + 3 = A + 1$, soit $A = 4$.

2. Il s'agit d'une fusion nucléaire, condensation de deux noyaux légers en un noyau plus lourd.

3. Ils possèdent tous trois le même nombre de charges, ils sont donc isotopes.

4. Il suffit de montrer que le défaut de masse est négatif et donc que la réaction libère de l'énergie. Le défaut de masse Δm est la différence entre la somme des masses des produits et celle des masses des réactifs.

$$\begin{aligned} \Delta m &= 4,00150 + 1,00866 - 2,01355 - 3,01550 \\ &= -0,01889 \text{ u.m.a. ou } 3,13676 \cdot 10^{-29} \text{ kg.} \end{aligned}$$

5. L'énergie libérée par la réaction est $E_l = -\Delta m c^2$, soit, numériquement $E_l = 3,13676 \cdot 10^{-29} \times (2,998 \cdot 10^8)^2 \approx 2,819 \cdot 10^{-12}$ J ou 17,597 MeV.

6. La masse des réactifs utilisés au cours d'une réaction est $M_r = M_{\text{D}}^2\text{H} + M_{\text{T}}^3\text{H}$, soit, numériquement $M_r = (2,01355 + 3,01550) \times 1,66054 \cdot 10^{-27} = 8,35094 \cdot 10^{-27}$ kg. Par kilogramme de mélange initial, il y a $1/M_r$ réactions potentielles et donc l'énergie libérée par kilogramme de matière employée est $e_l = E_l/M_r$. Numériquement, $e_l = 2,819 \cdot 10^{-12} / 8,35094 \cdot 10^{-27} \approx 3,376 \cdot 10^{14}$ J ou 337,6 TJ.

7. Le symbole γ représente un photon emportant une large partie de l'énergie libérée par la réaction. Il s'agit toujours d'un photon très hautement énergétique.

8. La relation d'Einstein entre l'énergie E d'un photon et sa fréquence ν est $E = h\nu$ où h est la constante de Planck. Ici, $\nu = E_l/h$, soit, numériquement,

$$\nu = 2,819 \cdot 10^{-12} / 6,626 \cdot 10^{-34} \approx 4,255 \cdot 10^{21} \text{ Hz.}$$

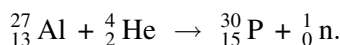
Sa longueur d'onde λ est donnée par la relation $\lambda = c/\nu$, soit, numériquement, $\lambda = 2,998 \cdot 10^8 / 4,255 \cdot 10^{21} \approx 7,047 \cdot 10^{-14} \text{ m}$, ou 70,47 fm (de l'ordre de grandeur des rayons nucléaires).

4.2 Désintégrations radioactives

7

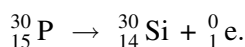
| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| V | V | V | V |

1. Les particules α sont des noyaux d'hélium ${}^4_2\text{He}$, avec deux protons et deux neutrons ; l'équation-bilan de la capture est :



Le bilan de charges est bien $13 + 2 = 15 + 0$, celui des masses $27 + 4 = 30 + 1$. La réaction est donc plausible.

2. Le radiophosphore ainsi créé peut effectivement se désintégrer et transmuter en l'isotope 30 du silicium, ${}^{30}_{14}\text{Si}$, en émettant un positon. Les bilans des charges et des masses l'autorisent. L'équation de la réaction est :



3. En effet, la très longue période de l'uranium et l'âge approximatif de la Terre (4,5 milliards d'années), fait qu'on peut estimer qu'il reste environ $\exp(-4,5) \approx 0,01$, soit 1 %, de l'uranium 238 originel.

4. En effet, sa demi-vie, $T_{\frac{1}{2}}$ de 1 600 ans implique que sa constante de désintégration λ soit alors de $\ln 2/T_{\frac{1}{2}}$, soit numériquement environ $4,3 \cdot 10^{-4} \text{ an}^{-1}$. Cette constante de désintégration peut alors effectivement s'interpréter comme une probabilité de désintégration sur une année d'environ 4 pour 10 000.

L'étude des radioactivités naturelles ou artificielles ($X^* \rightarrow Y + \text{rayonnement } \alpha$ ou β) conduit à une loi cinétique de désintégration du premier ordre de constante λ . La vitesse de la réaction élémentaire est donnée par :

$$v(t) = -\frac{dN}{dt} = \lambda N$$

où N est le nombre de noyau radioactifs X^* à un instant t . Par intégration, on obtient immédiatement la loi cinétique classique de la radioactivité :

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t)$$

N_0 étant le nombre de noyaux radioactifs à l'instant choisi comme instant initial $t = 0$.

La demi-vie est la durée $T_{\frac{1}{2}}$ comptée à partir de $t = 0$ au bout de laquelle la moitié des noyaux X^* s'est désintégrée. Ainsi,

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \exp(-\lambda T_{\frac{1}{2}}) \quad \text{soit} \quad T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Nous pouvons écrire la loi de désintégration en fonction de la demi-vie :

$$N(t) = N_0 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}.$$

Nous pouvons aussi interpréter ce qui se produit lors de la désintégration en terme de probabilité. Pour cela, appelons dp la probabilité que possède un atome de se désintégrer entre l'instant t et l'instant $t + dt$. Si le nombre de noyaux est suffisamment grand, cette probabilité peut s'évaluer par le rapport du nombre de noyaux désintégrés entre t et $t+dt$ au nombre de noyaux encore présents à l'instant t . Ainsi, dp peut être définie par la relation :

$$dp = \frac{N(t) - N(t + dt)}{N(t)},$$

que l'on peut transformer, si l'on accepte la loi cinétique de la désintégration, donnée ci-dessus, en :

$$dp = \frac{\exp(-\lambda t) - \exp(-\lambda(t + dt))}{\exp(-\lambda t)} = 1 - \exp(-\lambda dt).$$

Si λdt est petit devant 1, c'est-à-dire si on considère un intervalle de temps dt petit devant l'inverse de la constante de désintégration, donc devant la demi-période, alors $\exp(-\lambda dt) \approx 1 - \lambda dt$ et la probabilité dp devient alors convenablement approchée par

$$dp = \lambda dt \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{dp}{dt}.$$

Cette dernière relation définit ainsi clairement la constante de désintégration comme étant la probabilité de désintégration d'un noyau par unité de temps.

Ce qui précède se fonde uniquement sur l'acceptation de la loi cinétique du premier ordre et donne donc un guide d'interprétation pour penser ce qui se produit dans un processus chimique élémentaire en cinétique chimique.



La réaction dont il est question en 1 est celle par laquelle de 1933 à 1935, Irène et Frédéric Joliot-Curie découvrirent la radioactivité artificielle ce qui leur valut de recevoir en 1935 le prix Nobel de chimie.

L'assertion de la question 4 peut être vraie mais elle n'en est pas moins ambiguë sans précision de la durée sur laquelle on évalue cette possibilité. Ainsi faudrait-il préciser « ... a quatre chances sur dix mille de se désintégrer dans l'année qui vient ». En effet, si on considère un atome isolé de radon, ce dernier possède alors (*cf.* les rappels théoriques) la probabilité énoncée dans les termes qui précèdent de se désintégrer.

8

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| F | F | F | F |

a. Le bilan des masses est correct $230 = 206 + 6 \times 4 + 2 \times 0$; en revanche, le bilan des charges ne l'est pas $90 \neq 82 + 6 \times 2 + 2 \times (-1)$. Il faut quatre électrons pour que le bilan soit convenable.

b. La demi-vie du thorium est donnée par l'expression : $T_{\frac{1}{2}} = \ln 2 / \lambda$, soit, numériquement, $T_{\frac{1}{2}} \approx 0,7/8,7 \cdot 10^{-6} \approx 8,0 \cdot 10^4$ ans.

c. L'interprétation probabiliste (*cf.* Rappels théoriques de l'exercice précédent) rend l'assertion acceptable uniquement lorsque la durée t est petite devant la demi-vie, mais pas dans le cas général sur les longues durées pour lesquelles il faut revenir à la loi cinétique.

d. La composition de l'échantillon, à supposer qu'il ne contenait originellement que du thorium, est telle qu'il y avait alors 1 mmol de thorium à l'origine et que les trois-quarts se sont déjà désintégrés. Il ne reste plus à l'instant où l'on étudie l'échantillon qu'un quart du nombre de noyaux originels. Ainsi, $1/4 = \exp(-\lambda t)$ soit $t = \ln 4 / \lambda$; numériquement l'âge de l'échantillon est donc $\ln 4 / 8,7 \cdot 10^{-6} \approx 16 \cdot 10^4$ ans.

9

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| V | V | F | F |

1. La courbe observée $\ln A = f(t)$ est effectivement une droite de pente négative, elle peut donc correspondre à une loi de décroissance radioactive.

2. D'après ce qui précède, la pente de la droite est égale à l'opposée de la constante radioactive. La droite passe par les deux points (0 h, 6,45) et (200 h, 4,95) ; la pente $-\lambda = (4,95 - 6,45) / (200 - 0) = -7,5 \cdot 10^{-3} \text{ h}^{-1}$. La constante radioactive possède donc la valeur annoncée.

3. La demi-vie de l'isotope 222 du radon est $\ln 2 / \lambda$, soit, numériquement, $T_{\frac{1}{2}} = \ln 2 / 7,5 \cdot 10^{-3} \approx 93 \text{ h}$ soit environ 3 jours 21 h.

4. Le seuil de détection du radon pour cet échantillon, avec l'appareil utilisé, est atteint lorsque le logarithme de l'activité est égal à 3,2. Cela survient à l'instant t_d tel que $3,2 = -\lambda t_d + 6,45$, soit, $t_d = 3,25 / \lambda$; numériquement, $t_d \approx 433 \text{ h}$.

10

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| F | V | V | V |

a. Deux noyaux de même nombre de masses sont isobares. L'isométrie, en chimie, est la propriété pour deux corps composés d'avoir la même formule brute, mais des formules développées différentes.

b. Le bilan des masses indique que la masse de la particule émise est nulle (les noyaux père et fils sont isobares) : il s'agit donc d'une émission β . Le bilan du nombre de charges indique que la particule émise doit avoir une charge égale à $48 - 49 = -1$. La particule éjectée du noyau est donc un électron. Le cadmium ^{107}Cd est donc un émetteur β^- .

c. Cette constante de temps est l'inverse de la constante radioactive $\tau = 1/\lambda$. $N(\tau) = N_0 \exp(-\lambda\tau) = N_0 \exp(-1)$.

d. L'opposé de la pente de la droite donnant $\ln A = f(t)$ est la constante radioactive. D'après la question précédente, la mesure de son inverse peut être déterminée par la durée correspondant à une diminution de 1 du logarithme de l'activité, par exemple en prenant les instants t_1 auquel $\ln A = 16,5$ et t_2 auquel $\ln A = 15,5$. Cette durée $t_2 - t_1 = 1/\lambda$ est ainsi égale à environ 10 h. Il en résulte que la demi-vie du cadmium 107 est $\ln 2 \times (t_2 - t_1)$, soit, numériquement, $T_{\frac{1}{2}} = 0,7 \times 10 = 7 \text{ h}$.

11

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| V | V | F | F |

1. La nature de la particule α , les bilans des charges et des masses sont cohérents avec ce qui est annoncé.

2. Le nombre N_0 de noyaux de plutonium initialement introduits dans le pacemaker cardiaque est $m_{\text{Pu}} N_A / M_{\text{Pu}}$, où m_{Pu} désigne la masse de plutonium introduite, N_A le nombre d'Avogadro et M_{Pu} la masse molaire du plutonium. Ainsi, $N_0 = 0,119 \times 6.10^{23} / 238 = 3.10^{20}$.

3. L'activité initiale (cf. rappel théorique ci-après) est égale à $N_0 \lambda = N_0 \ln 2 / T_{1/2}$, soit numériquement, $3.10^{20} \times 0,7 / (84 \times 365 \times 24 \times 3600) \approx 7,9.10^{10}$ Bq.

4. Au bout de quarante ans, il ne reste plus que $N = N_0 \exp\left(-\ln 2 \frac{t(\text{an})}{T_{1/2}}\right)$, soit numériquement

$$\begin{aligned} N &\approx 3.10^{20} \times \exp\left(-0,7 \times \frac{40}{84}\right) = 3.10^{20} \times \exp(-1/3) \\ &\approx 3.10^{20} \times 0,7 = 2,1.10^{20} \text{ noyaux de plutonium 238.} \end{aligned}$$

L'activité radioactive $A(t)$ d'une source, à un instant t , est le nombre de désintégration par seconde que produit cette source à cet instant. Elle est par essence égale au produit du nombre de noyaux susceptibles de se désintégrer à l'instant t , $N(t)$, par la probabilité que possède chaque noyau de le faire par unité de temps, égale à, d'après les rappels théoriques de l'exercice 7, λ . Ainsi,

$$A(t) = \lambda N(t) = \lambda N_0 \exp(-\lambda t),$$

où l'on pose l'activité initiale $A_0 = \lambda N_0$. L'activité s'exprime en becquerel (symbole (Bq), un becquerel correspondant à une désintégration par seconde.

12 Réponse : C.

L'activité de la substance sera à l'instant t :

$$A(t) = A_0 \text{I} \exp(-\lambda_I t) + A_0 \text{Cs} \exp(-\lambda_{\text{Cs}} t),$$

où $A_0 \text{I}$ et $A_0 \text{Cs}$ désignent respectivement les activités initiales de l'iode et du césium et λ_I et λ_{Cs} les constantes radioactives de chacune des deux substances. Ainsi, numériquement, $A = 200 \times 2^{-30/8} + 50 \times 2^{-1/(12 \times 30)} \approx 64,8$ kBq.

13 Réponse : B.

Le bilan de masses et de charges au cours de la désintégration montre que la particule émise est sans masse ($90 = 90$) et porte une charge négative élémentaire ($38 - 39 = -1$). Il s'agit donc d'une radioactivité β^- .

14 Solution : B.**Corrigé :**

La source de strontium est supposée ponctuelle, ce qui implique que le rayonnement émis est isotrope, c'est-à-dire uniformément réparti dans toutes les directions de l'espace. Soit s la surface de la fenêtre d'entrée du compteur Geiger de 2007 et S celle du compteur utilisé lors du compte rendu, soit d la distance à la source. Appelons A_{2007} l'activité totale de la source en 2007 et A_0 son activité totale à la date du compte rendu. Chaque compteur a reçu respectivement $sA_{2007}/(4\pi d^2)$ et $SA_0/(4\pi d^2)$ électrons par seconde aux instants respectifs auxquels les mesures ont été faites. Les activités mesurées sont donc $A_{m\ 2007} = sA_{2007}/(4\pi d^2) = 100$ Bq et $A_{m\ 0} = SA_0/(4\pi d^2) = 400$ Bq.

Il en résulte que :

$$\frac{A_{2007}}{A_0} = \frac{S A_{m\ 2007}}{s A_{m\ 0}},$$

soit, numériquement, $A_{2007}/A_0 = (100/50) \times (100/400) = 1/2$. L'activité de la source a donc été réduite de moitié entre les deux mesures. Il s'est donc écoulé une demi-vie entre elles. Le compte rendu date donc de $2007 - 29 = 1978$.

15 Réponses : I.a ${}^{18}_8\text{O} + {}^1_1\text{p} \rightarrow {}^{18}_9\text{F} + {}^1_0\text{n}$, fluor 18, neutron.

I.b 9 protons et 9 neutrons.

I.c ${}^{18}_9\text{F} \rightarrow {}^{18}_8\text{O} + {}^0_1\text{e}$, oxygène 18, positon.I.d $\lambda = \ln 2/t_{1/2}$, $\lambda = 1,05 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.II.a $N_0 = A_0/\lambda$, $N_0 = 2,86 \cdot 10^{12}$.

II.b 22 h 11 mn.

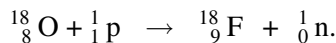
III.a ${}^0_1\text{e} + {}^0_{-1}\text{e} \rightarrow 2 {}^0_0\gamma$.

III.b 0,51 MeV.

IV. 0,017 %.

Explications :

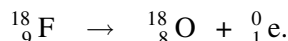
I.a Le proton bombardant l'oxygène porte une masse et une charge, donc l'équation bilan de la réaction nucléaire de formation du fluor 18 est :



Les produits de cette réaction sont le fluor 18 et un neutron.

I.b Le nombre de charges du noyau est 9, donc, le fluor 18 possède 9 protons et, le nombre de masses étant 18, il possède $18 - 9 = 9$ neutrons.

I.c La désintégration β^+ produit un positon ${}^0_1\text{e}$. L'équation de la réaction nucléaire est donc :



Les produits en sont un noyau d'oxygène 18 et un positon.

I.d La constante radioactive λ est définie par $\lambda = \ln 2/t_{1/2}$. Numériquement, $\lambda = \ln 2/(110 \times 60) \approx 1,05 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

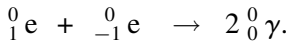
II.a Notons A_0 l'activité initiale de la solution de glucose. Le nombre de noyaux injectés, N_0 , est égal à A_0/λ , soit, $N_0 = 300 \cdot 10^6 / 1,05 \cdot 10^{-4} \approx 2,86 \cdot 10^{12}$ noyaux.

II.b La durée T écoulée entre l'injection et l'instant où l'activité n'est plus que de 1 % de l'activité initiale est donnée par la relation

$$\frac{A_0}{100} = A_0 \exp(-\lambda T),$$

soit $T = \ln 100/\lambda$. Numériquement, $T = \ln 100 / 1,05 \cdot 10^{-4} \approx 4,4 \cdot 10^4 \text{ s}$, ou 12 h 11 mn environ. Par conséquent le patient ne sortira pas avant 22 h 11 mn.

III.a La réaction d'annihilation du positon avec son antiparticule s'écrit :



III.b Soit E l'énergie de chaque photon et m la masse commune à l'électron et au positon. La conservation de l'énergie donne alors : $2E = 2mc^2$, soit $E = mc^2$. Numériquement, $E = 9,1 \cdot 10^{-31} \times (3 \cdot 10^8)^2 / 1,6 \cdot 10^{-19} \approx 0,512 \text{ MeV}$.

IV. Le rayonnement émis à travers la couche de plomb est donc $2^{-50/4}$ du rayonnement produit, soit $1,73 \cdot 10^{-4}$ ou 0,017 % environ.

16

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| V | F | V | F |

1. Les indications fournies l'attestent.

2. La source étant isotrope, les rayonnements qu'elle émet sont uniformément répartis dans toutes les directions de l'espace et l'expérimentateur reçoit la fraction $S/(4\pi d^2)$ du rayonnement total émis, où $S = 0,75 \text{ m}^2$ est la surface de l'expérimentateur exposée aux radiations et d sa distance à la source. Si l'on suppose que pendant toute la durée T de l'expérimentation l'activité de la source peut être considérée comme constante, alors le nombre de particules atteignant l'expérimentateur est

$$N = \left(\frac{S}{4\pi d^2} \right) A T.$$

Soit, numériquement,

$$N = 0,75 \times 1,85 \cdot 10^5 \times 2 \times 3600 / (4 \times \pi \times 2^2) \approx 2 \cdot 10^7 \text{ particules.}$$

3. En effet, $E = N \times 0,622 \approx 2 \cdot 10^7 \times 0,622 = 1,24 \cdot 10^7 \text{ MeV}$.

4. La dose absorbée E/M où M est la masse de l'expérimentateur vaut

$$1,24 \cdot 10^7 \times 10^6 \times 1,6 \cdot 10^{-19} / 70 \approx 2,8 \cdot 10^{-8} \text{ J.kg}^{-1}.$$

4.3 Niveaux d'énergie atomiques

17

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| F | F | F | F |

- Non, pour passer d'un niveau d'énergie E_p à un niveau d'énergie E_n supérieure, l'atome doit absorber de l'énergie apportée par un photon. Il y a excitation de l'atome.
- De même, dans le cas contraire où l'atome se désexcite, il perd de l'énergie en émettant un photon.
- Dans ce cas, il y a émission d'un photon et sa longueur d'onde est :

$$\lambda_{n \rightarrow p} = \frac{hc}{E_n - E_p}.$$

- S'il s'agit d'un spectre d'émission, les raies brillantes correspondent aux transitions électroniques au cours desquelles l'énergie de l'atome diminue, puisqu'il se désexcite pour émettre les photons correspondants.

18

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| V | V | F | V |

- Les notations sont classiques : E_n et E_p désignent respectivement l'énergie de deux niveaux d'énergie électronique dans l'atome, caractérisés par les nombres quantiques n et p .
- Il s'agit de la définition de l'énergie d'ionisation.
- Les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont en première approximation donnés par la formule de Bohr $E_n = -13,6/n^2$ en eV. Ainsi, en se désexcitant du niveau d'énergie $n = 5$ au niveau $n = 3$, l'atome émet un photon d'énergie $E_5 - E_3$ dont la longueur d'onde est :

$$\lambda_{5 \rightarrow 3} = \frac{hc}{E_5 - E_3}$$

soit, numériquement,

$$\lambda_{5 \rightarrow 3} = 6.10^{-34} \times 3.10^8 \times 3^2 \times 5^2 / (13,6 \times (5^2 - 3^2) \times 1,5.10^{-19}) \approx 1,24 \mu\text{m}.$$

- Cette radiation de longueur d'onde supérieure à 800 nm appartient effectivement à l'infrarouge proche.

19

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| F | V | F | F |

a. La longueur d'onde en question est très inférieure à 400 nm, donc la radiation appartient au domaine de l'ultraviolet lointain.

b. En effet, $f = c/\lambda$, soit, numériquement, $f = 3.10^8/112.10^{-9} \approx 2,68.10^{15}$ Hz.

c. L'énergie du photon correspondant est $E = hf$, soit, numériquement,

$$E = 6,62.10^{-34} \times 2,68.10^{15} \approx 17,7.10^{-19} \text{ J.}$$

d. Non, il s'agit bien entendu d'un spectre de raies d'émission.

20

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| F | V | V | F |

a. Ils possèdent tous une infinité de niveaux d'énergie, déterminée par la possibilité pour n de prendre toutes les valeurs entières de un à l'infini.

b. Le béryllium a pour numéro atomique $Z = 4$, donc son niveau fondamental possède une énergie $E_1 = -13,6 \times 4^2/1^2 = -13,6 \times 16 \approx -218$ eV.

c. En effet, $E_2 - E_1 = -218/2^2 - (-218/1^2) = 218 \times 3/4 \approx 163$ eV.

d. Non, il se fait avec absorption d'un rayonnement électromagnétique puisque l'on passe du niveau fondamental au premier niveau excité de l'ion hydrogénoïde Be^{3+} .

21

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| V | V | F | V |

a. Le numéro atomique du lithium est $Z = 3$; l'ion Li^{2+} possède donc un seul électron. C'est un ion hydrogénoïde, c'est-à-dire un système ayant un seul électron et un noyau à Z charges.

b. Le niveau fondamental $n = 1$ possède une énergie

$$E_1 = -13,6 \times 3^2/1^2 = -122,4 \text{ eV.}$$

L'énergie d'ionisation de cet ion est donc $E_\infty - E_1 = -E_1$, soit 122,4 eV.

c. L'énergie nécessaire est $E_2 - E_1 = E_1/2^2 - E_1 = -3E_1/4$. Il lui faut donc absorber une énergie égale à trois quarts de l'énergie d'ionisation pour passer de l'état fondamental au premier niveau excité.

d. En effet, la longueur d'onde du photon absorbé doit être $\lambda = -hc/E_1$, soit, numériquement,

$$\lambda = 6,62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8 / (122,4 \times 1,6 \cdot 10^{-19}) = 3 \cdot 10^8 / 30 \cdot 10^{15} = 10^{-8} = 10 \text{ nm.}$$

22

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|----|----|----|----|
| F | F | V | F |

1. Ce sont des photons qui sont susceptibles d'interagir avec les atomes de la cellule, et leur énergie minimale doit être de hc/λ , soit, numériquement, $6,6 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8 / 600 \cdot 10^{-9} = 3,3 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

2. Cette énergie minimale est de $3,3 \cdot 10^{-19} / 1,6 \cdot 10^{-19} \approx 2,1 \text{ eV}$. Un photon d'énergie 7 eV interagirait avec les atomes de la cellule. Mais on évoque un « électron ».

3. En effet, leur longueur d'onde étant inférieure à 600 nm, l'énergie de ces photons est supérieure à celle de seuil de la cellule et ils pourront interagir avec les atomes de la cellule pour participer à la création d'un courant électrique.

4. Si, pour la même raison que précédemment.



De l'utilité de bien faire attention à l'assertion proposée...

Thèmes du chapitre

Généralités

Élément, corps simple, corps composé, molécule, ion. Réaction : réactifs, produits, coefficients stœchiométriques. Stœchiométrie d'un mélange.

Méthodes de mesure

Conductimétrie, spectrophotométrie, *pH*-métrie.

Chimie des solutions

Solvant, soluté. Concentrations molaire et massique. Dissociation, coefficient ou taux de dissociation. Quotient de réaction. Constante d'équilibre. Acide et base au sens de Brønsted. *pH*. Autoprotolyse.

Oxydoréduction

Oxydation, réduction. Oxydant, réducteur. Couple redox, demi-pile. Pile : force électromotrice et polarités d'une pile ; anode, cathode. Électrolyse, électrolyseur, polarités.

Cinétique chimique

Vitesse de réaction. temps de demi-réaction. Facteurs cinétiques.

Lois de la chimie

Conservation de la matière. Conservation de la charge.

Des savoir-faire à maîtriser

- Savoir écrire et équilibrer une réaction chimique.
- Calculer les quantités initiales introduites, le quotient initial de réaction, prédiction du sens d'évolution.
- Savoir écrire la constante d'équilibre. Savoir calculer une concentration d'équilibre à l'aide de la constante d'équilibre.
- Pour l'oxydoréduction, savoir déterminer les pôles d'une pile, savoir calculer la quantité d'électricité ayant circulé dans cette pile lors de son fonctionnement.
- Savoir calculer la quantité d'électricité ayant été échangée lors d'une réaction entre couples redox. Savoir calculer une vitesse de réaction à partir d'un graphe.
- Connaître ou être capable de retrouver rapidement les unités des grandeurs chimiques.

Des réflexes à avoir

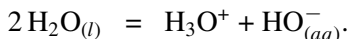
Identifier la catégorie à laquelle appartient la réaction proposée (acido-basique ou redox). Vérifier son équilibrage. Repérer la force des acides et des bases, des oxydants et des réducteurs. Se demander si la réaction est totale ou non. Se demander quel est le réactif limitant s'il n'y a pas stœchiométrie du mélange initial. Vérifier l'homogénéité de l'expression obtenue.

5.1 Acides et bases en solution aqueuse

1 FESIC-Ch 2006

Vrai ou faux ?

On considère la réaction d'autoprotolyse de l'eau



Sa constante d'équilibre est $K_e(25\text{ °C}) = 1,0 \cdot 10^{-14}$ à 25 °C et $K_e(60\text{ °C}) = 1,0 \cdot 10^{-13}$ à 60 °C .

Données : $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$; $\mu_{eau} = 1,0 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ à 25 °C .

- L'eau est un ampholyte.
- Il y a plus de molécules d'eau dissociées en ions à 60 °C qu'à 25 °C .
- Dans un litre d'eau à 25 °C , il y a $6,0 \cdot 10^{16}$ molécules d'eau qui sont dissociées en ions.
- À 60 °C , une solution de $\text{pH} = 7$ est acide.

2 FESIC-Ch 2008

Vrai ou faux ?

On prépare 500 mL d'une solution d'acide chlorhydrique S en dissolvant 0,24 L de chlorure d'hydrogène gazeux de formule $\text{HCl}_{(g)}$ dans de l'eau.

Données : $0,020 = 10^{-1,7}$

Volume molaire dans les conditions de l'expérience $V_m = 24 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$.

- La concentration molaire de la solution aqueuse S est égale à $20 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1}$.

On mesure le pH de la solution S , on trouve 1,7.

- Le chlorure d'hydrogène n'est pas totalement dissocié dans l'eau.

On obtient une solution S' en mélangeant 20 mL d'une solution d'acide chlorhydrique de concentration molaire en soluté apporté $1,0 \cdot 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et 20 mL d'une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium de concentration molaire en soluté apporté $5,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

- Le pH du mélange est égal à 3.
- On dilue 5 fois la solution S' , le pH augmente alors d'une unité.

3 FESIC-Ch 2006

Vrai ou faux ?

On prépare une solution aqueuse à $5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ d'acide méthanoïque. La conductivité de la solution mesurée à 25 °C a pour valeur $\sigma = 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$.

Données : $4,05 \times 8,1 \approx 33$

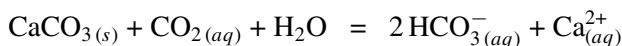
Conductivité molaire ionique ($\text{S} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1}$) à 25 °C : H_3O^+ $\sigma_h = 35 \cdot 10^{-3}$; $\text{HCOO}^-_{(aq)}$ $\sigma_m = 5,5 \cdot 10^{-3}$.

- L'ancien nom de l'acide méthanoïque est acide acétique.
- Les ions méthanoate et les ions oxonium sont quasiment en même quantité dans la solution.
- La concentration molaire en ions oxonium est égale à $0,81 \text{ mmol.L}^{-1}$.
- Le taux d'avancement de la réaction est égal à 16% .

4 FESIC-Ch 2006

Vrai ou faux ?

Dans les grottes, les concrétions (stalactites et stalagmites), constituées de calcaire CaCO_3 , peuvent se dissoudre en présence du dioxyde de carbone CO_2 dégagé par la respiration des visiteurs. L'équation de la réaction qui se produit est :



La constante d'équilibre de cette réaction a pour valeur $K = 3,5 \cdot 10^{-6}$.

- L'expression de la constante est :

$$K = \frac{[\text{HCO}_3^-(aq)]_{eq}^2 [\text{Ca}^{2+}(aq)]_{eq}}{[\text{CO}_{2(aq)}]_{eq}}$$

L'eau qui ruisselle sur les stalactites contient des ions calcium Ca^{2+} , des ions hydrogénocarbonate HCO_3^- et du dioxyde de carbone aqueux. Les concentrations molaires initiales sont :

$$[\text{HCO}_3^-(aq)]_0 = 8,0 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}, [\text{Ca}^{2+}(aq)]_0 = 3,8 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1} \text{ et}$$

$$[\text{CO}_{2(aq)}]_0 = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}.$$

- Le quotient initial de la réaction est $Q_{ri} = 3,0 \cdot 10^{-5}$.
- Dans ces conditions, c'est la réaction de dissolution du carbonate de calcium qui se produit.
- Le pH de la solution initiale est égal à $7,5$.

Données : $\text{pH} = \text{pK}_a + \log \frac{[\text{base}]}{[\text{acide}]}$; $8,0 \times 3,8 = 30$; $8,0^2 \times 3,8 = 240$;
 $\log 8,0 \cdot 10^{-2} = -1,1$.

Couple : $\text{CO}_{2(aq)}, \text{H}_2\text{O} / \text{HCO}_3^-(aq)$; $\text{pK}_a(\text{CO}_{2(aq)}, \text{H}_2\text{O} / \text{HCO}_3^-(aq)) = 6,4$.

5 FESIC-Ch 2007

Vrai ou faux ?

Dans un bécher, on dissout, dans de l'eau pure :

- $n_1 = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$ d'acide éthanóïque $\text{CH}_3\text{-CO}_2\text{H}$;
- $n_2 = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$ d'éthanoate de sodium ($\text{CH}_3\text{-CO}_2^- + \text{Na}^+$);

- $n_3 = 1,0 \cdot 10^{-3}$ mol d'acide méthanoïque HCO_2H ;
- $n_4 = 1,0 \cdot 10^{-3}$ mol de méthanoate de sodium ($\text{HCO}_2^- + \text{Na}^+$).

Données : $\text{CH}_3-\text{CO}_2\text{H} / \text{CH}_3-\text{CO}_2^-$ $K_{a1} = 1,8 \cdot 10^{-5}$
 $\text{HCO}_2\text{H} / \text{HCO}_2^-$ $K_{a2} = 1,8 \cdot 10^{-4}$

- La réaction qui se produit est une réaction d'oxydoréduction.
- Cette transformation est modélisée par l'équation chimique :

$$\text{CH}_3-\text{CO}_2\text{H}_{(aq)} + \text{HCO}_2^-_{(aq)} = \text{CH}_3-\text{CO}_2^-_{(aq)} + \text{HCO}_2\text{H}_{(aq)}$$
- La constante d'équilibre de cette réaction vaut $K = 10$.
- La réaction se produit dans le sens de la formation de l'acide éthanoïque.

6 FESIC-Ch 2007

Vrai ou faux ?

On prépare 1,00 L de solution aqueuse (S) d'acide monochloroacétique, de formule chimique ClCH_2COOH . Le pK_a du couple acide-base associé est égal à 2,8 et le pH de la solution obtenue est 1,9. Lors du dosage d'un prélèvement de 20,0 mL de cette solution par de l'hydroxyde de sodium de concentration molaire apportée $0,50 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, le volume équivalent mesuré est de 8,0 mL.

Données : $pK_e = 14$; $M_{Cl} = 35,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

- La constante de la réaction de dosage est égale à $10^{-11,2}$.
- À l'équivalence, le pH est basique.
- La concentration de la solution (S) est égale à $20 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1}$.
- La solution (S) a pu être préparée en diluant 18,9 g d'acide monochloroacétique dans de l'eau distillée.

7 FESIC-Ch 2006

Vrai ou faux ?

L'éthanamine (ou éthylamine), de formule chimique $\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2$ est une base de Brønsted. L'acide conjugué est l'ion éthylammonium $\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+$.

On prépare une solution aqueuse d'éthanamine à $2,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Le pH de cette solution est mesuré à 11,9.

Données : $pK_a(\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+ / \text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2) = 10,7$; $pK_e = 14$;
 $\log 5,0 \cdot 10^{-4} = -3,3$; $\log 5,0 \cdot 10^{-13} = -12,3$.

- L'éthanamine possède un isomère.
- L'éthanamine est complètement dissociée dans l'eau.
- La constante de réaction de l'éthanamine avec l'eau est $K = 5,0 \cdot 10^{-4}$.

On dose 20 mL de la solution d'éthanamine préparée par une solution d'acide chlorhydrique à $0,025 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

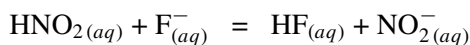
d. Le volume à l'équivalence est $V_E = 16 \text{ mL}$.

8 FESIC-Ch 2007

Vrai ou faux ?

Dans un volume $V = 100,0 \text{ mL}$, on a mis en solution une quantité égale $n_0 = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$ des espèces chimiques suivantes : acide nitreux $\text{HNO}_{2(aq)}$, nitrite de sodium ($\text{Na}_{(aq)}^+ + \text{NO}_{2(aq)}^-$), acide fluorhydrique $\text{HF}_{(aq)}$ et fluorure de sodium ($\text{Na}_{(aq)}^+ + \text{F}_{(aq)}^-$).

La transformation qui se produit est modélisée par l'équation chimique :



Sa constante d'équilibre vaut $K = 0,74$.

a. L'expression littérale de cette constante d'équilibre est

$$K = \frac{[\text{HF}_{(aq)}]_{eq} [\text{NO}_{2(aq)}^-]_{eq}}{[\text{F}_{(aq)}^-]_{eq} [\text{HNO}_{2(aq)}]_{eq}}$$

b. Le quotient initial de réaction vaut $Q_{r,i} = 1,0$.

c. La réaction évolue dans le sens de la formation de l'acide fluorhydrique $\text{HF}_{(aq)}$.

d. L'expression de la constante d'équilibre en fonction de l'avancement final x_f est :

$$K = \frac{x_f^2}{(n_0 - x_f)^2}$$

9 FESIC-Ch 2008

Vrai ou faux ?

Le rouge de méthyle est un indicateur coloré dont le pK_a est égal à 5,2. Sa teinte est rouge en milieu très acide et jaune en milieu basique. On a représenté figure 5.1 la formule topologique des espèces chimiques présentes dans une solution de cet indicateur coloré.

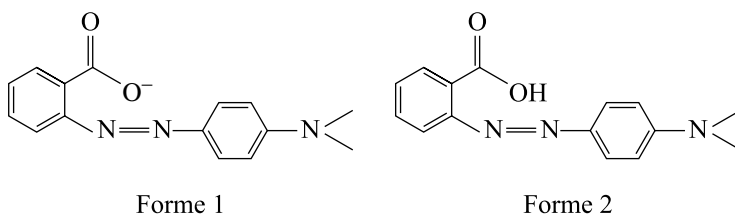


Figure 5.1

- a. La masse molaire de la forme 1 est égale à $268 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$.
- b. Lorsque la forme 2 est prépondérante, la solution a une teinte jaune.
- c. L'absorbance de la forme 1 est nulle dans le jaune.
- d. À $\text{pH} = 4,2$

$$\frac{[\text{forme 2}]}{[\text{forme 1}]} = \frac{1}{10}$$

10 GEIPI - ENI 2008

L'acide butyrique, de formule semi-développée $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{COOH}$, est connu pour son odeur désagréable de beurre rance. Sa réaction avec le méthanol CH_3OH permet d'obtenir un composé E , dont l'odeur et le goût sont au contraire très agréables, d'où son utilisation dans l'industrie alimentaire ou la parfumerie.

1. Donner le nom systématique de l'acide butyrique.
2. Écrire l'équation bilan de la réaction entre l'acide butyrique et le méthanol.
3. Donner le nom de la fonction chimique caractéristique du composé E . Nommer E .
On souhaite réaliser la synthèse du composé E ; pour cela, on dispose d'une masse $m_A = 330 \text{ g}$ d'acide butyrique.

4. Calculer la masse de méthanol qu'il faut mettre en œuvre pour mener la réaction dans des conditions stœchiométriques.

L'acide butyrique et le méthanol sont introduits dans le réacteur et le mélange est porté à ébullition. Le volume total est $V = 400 \text{ mL}$.

Il est possible de suivre l'évolution de la réaction par le dosage de l'acide butyrique restant. Pour ce faire, on réalise périodiquement des prélèvements de $1,00 \text{ mL}$ du mélange réactionnel. Chaque prélèvement est alors dilué dans de l'eau glacée, puis dosé par une solution de soude à $0,20 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

5. Écrire la réaction de dosage de l'acide butyrique par la soude.
6. Calculer la constante d'équilibre de la réaction de dosage.
7. Quel volume de soude faut-il verser pour doser l'acide du premier prélèvement à l'instant $t = 0$?

Au bout de 120 heures, le système n'évolue plus ; les dosages à la soude permettent de déterminer l'avancement de la réaction : $x_{\text{max}} = 2,50 \text{ mol}$.

8. Calculer le rendement en produit E par rapport à la quantité de réactif de départ.
Il est recommandé, pour mener ce type de réaction, d'ajouter quelques millilitres d'acide sulfurique au mélange réactionnel.
9. Préciser le rôle de l'acide sulfurique dans la réaction chimique.

Données : $M(\text{H}) = 1 \text{ g.mol}^{-1}$; $M(\text{C}) = 12 \text{ g.mol}^{-1}$; $M(\text{O}) = 16 \text{ g.mol}^{-1}$;
 pK_a (acide butyrique/butyrate) = 4,9 ; pK_a ($\text{H}_2\text{O}/\text{HO}^-$) = 14.

11 GEIPI 2006

L'acide benzoïque, de formule semi-développée $\text{C}_6\text{H}_5\text{COOH}$, est utilisé comme conservateur dans l'industrie alimentaire. On le notera dans l'exercice AH.

On peut déterminer la concentration d'une solution S d'acide benzoïque en menant un dosage acide-base par une solution d'hydroxyde de sodium (soude) fraîchement préparée, de concentration connue : $[\text{NaOH}] = 0,05 \text{ mol.L}^{-1}$.

Pour ce faire, on prélève à l'aide d'une pipette graduée 50,0 mL d'une solution d'acide benzoïque, que l'on verse dans un bécher. Après avoir équipé ce dernier d'un système d'agitation et d'un $p\text{H}$ -mètre, on introduit progressivement la solution de soude à l'aide d'une burette graduée et on porte la valeur indiquée par le $p\text{H}$ -mètre en fonction du volume de soude ajouté (figure 5.2).

1. Calculer le $p\text{H}$ de la solution titrante de soude.
2. Écrire l'équation de la réaction de dosage en faisant apparaître les formules semi-développées des réactants.

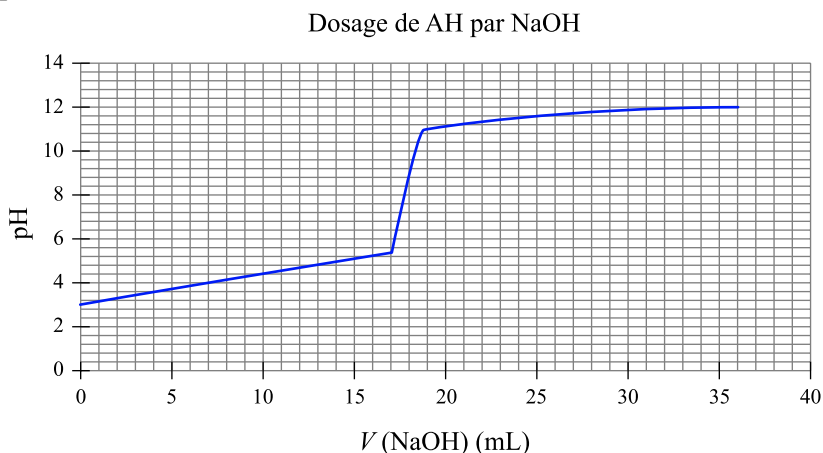


Figure 5.2

3. Déterminer le pK_a du couple AH / A^- .
4. Calculer la constante d'équilibre de la réaction de dosage.
5. Peut-on considérer la réaction : rapide, lente, totale, équilibrée, athermique, exothermique ?
6. Le $p\text{H}$ à l'équivalence est-il acide, neutre, basique ou non défini ?

7. Parmi la liste ci-dessous, quel serait le meilleur indicateur coloré pour ce dosage ?

| Nom | teinte acide | teinte basique | zone de virage (pH) |
|---------------------|--------------|----------------|-------------------------|
| Hélianthine | rouge | jaune | 3,1 - 4,4 |
| Rouge de méthyle | rouge | jaune | 4,2 - 6,2 |
| Bleu de bromothymol | jaune | bleu | 6,0 - 7,6 |
| Rouge de crésol | jaune | rouge | 7,2 - 8,8 |
| Phénolphtaléine | incolore | rose | 8,2 - 10,0 |
| Rouge d'alizarine | violet | jaune | 10,0 - 12,0 |

8. Déterminer la concentration en acide benzoïque de la solution S .

9. Exprimer cette concentration en g.L^{-1} d'acide benzoïque (concentration massique).

10. Indiquer qualitativement de façon graphique l'allure de la courbe qu'on aurait obtenu si on avait dilué la prise d'essai au départ en y ajoutant de l'eau pure.

Données : ${}^1_1\text{H}$ ${}^{12}_6\text{C}$ ${}^{16}_8\text{O}$ ${}^{23}_{11}\text{Na}$

$pK_a(\text{H}_2\text{O}/\text{HO}^-) = 14$ $pK_a(\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2\text{O}) = 0$.

5.2 Oxydoréduction et piles

12 GEIPI - ENI 2007

Une seule réponse vraie

On réalise le montage suivant :

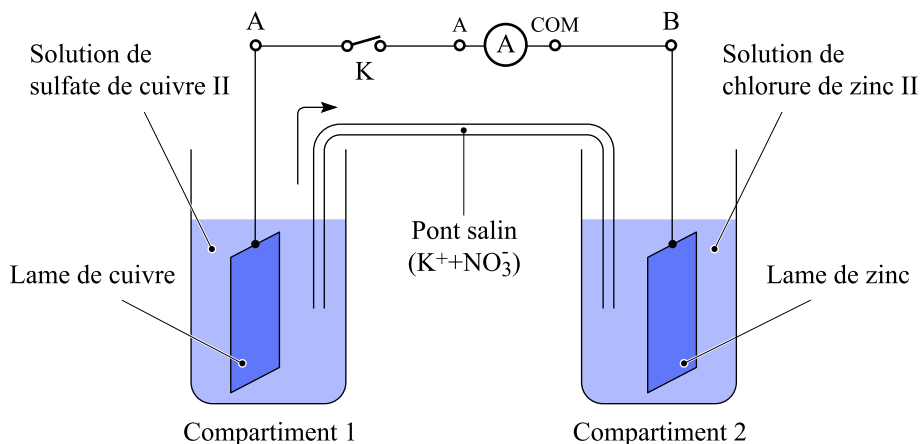


Figure 5.3

On sait par ailleurs que :

- Lorsqu'une lame de zinc est plongée dans une solution de sulfate de cuivre, elle se recouvre d'un solide rougeâtre.
- Aucune observation n'est à mentionner lorsqu'on plonge une lame de cuivre dans le chlorure de zinc.

Électrodes

- A. A est le pôle + ; B est l'anode ; le zinc subit l'oxydation.
- B. Il y a oxydation du cuivre à l'anode ; les ions Zn^{2+} subissent une réduction ; B est le pôle -.
- C. A est le pôle - ; l'électrode du compartiment 2 est l'anode ; le cuivre subit une réduction.
- D. Il y a oxydation du zinc à la cathode ; B est le pôle - ; les ions Cu^{2+} sont réduits.
- E. Le zinc subit l'oxydation ; A est la cathode ; B est le pôle +.

13 GEIPI - ENI 2007 (suite de l'ex. 12)

Une seule réponse vraie

Évolution du système

- A. L'intensité du courant diminue dans le temps ; la concentration en Zn^{2+} reste constante ; la masse de Cu augmente.
- B. La concentration de Cu^{2+} diminue avec le temps ; la masse de Cu reste constante ; la masse de Zn diminue.
- C. La concentration des ions Zn^{2+} augmente avec le temps ; la masse de Cu augmente ; le compartiment 2 se concentre en ions Cu^{2+} .
- D. Les deux concentrations en Cu^{2+} et Zn^{2+} tendent à s'égaliser ; la masse de Cu diminue ; la masse totale du système reste constante.
- E. L'intensité tend à s'annuler ; la masse de Zn diminue ; la concentration en ions Cu^{2+} diminue.

14 GEIPI - ENI 2007 (suite de l'ex. 13)

Une seule réponse vraie

Charges

- A. Des électrons circulent dans le pont salin du compartiment 1 vers le compartiment 2 ; on mesure $I < 0$; l'intensité décroît dans le temps.
- B. On mesure $I > 0$; un courant électrique circule dans le pont salin du compartiment 2 vers le compartiment 1 ; les ions NO_3^- circulent en sens inverse du courant.

- C. Les ions K^+ suivent le sens du courant ; l'intensité décroît avec le temps ; des électrons circulent dans le pont salin du compartiment 2 vers le compartiment 1.
- D. L'intensité du courant dans le pont salin est égale à celle du courant mesuré par l'ampèremètre ; les ions NO_3^- suivent le sens du courant ; des électrons circulent dans le segment AB de B vers A .
- E. L'intensité augmente si la concentration en $CuCl_2$ augmente ; des électrons circulent dans le segment AB de A vers B ; on mesure $I < 0$.

15 GEIPI - ENI 2007 (suite de l'ex. 14)

Une seule réponse vraie

Lorsqu'on ouvre l'interrupteur K

- A. Le pont salin devient le siège d'une électrolyse ; la tension $U_{AB} = 0$; l'intensité dans le segment AB est nulle.
- B. Aucune réaction électrochimique n'est observée ; la tension $U_{AB} > 0$; l'intensité mesurée est nulle.
- C. L'intensité mesurée $I = 0$; les deux électrodes adoptent le même potentiel ; la composition chimique des deux demi-piles reste constante.
- D. Le système électrochimique retrouve l'état d'équilibre ; la tension $U_{AB} < 0$; aucun courant ne parcourt le pont salin.
- E. Les concentrations en ions restent constantes dans les deux compartiments ; la tension U_{AB} s'annule ; le système est à l'équilibre.

16 FESIC-Ch 2008

Vrai ou faux ?

Soient A et B deux solutions aqueuses ioniques dont les caractéristiques sont données ci-dessous :

| Solution A | Solution B |
|--|---|
| Iodure de potassium : $K^+_{(aq)} + I^-_{(aq)}$ | Peroxodisulfate de potassium : $2 K^+_{(aq)} + S_2O_8^{2-}_{(aq)}$ |
| incolore | incolore |

À l'instant $t = 0$, on mélange les deux solutions A et B, on observe progressivement l'apparition d'une couleur jaune-orangée. On suit l'évolution de l'absorbance A du mélange à une longueur d'onde donnée.

Données : Couples d'oxydoréduction I_2 / I^- $S_2O_8^{2-} / SO_4^{2-}$
 $M(I) = 127 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

- a. C'est la formation de diiode qui colore la solution en jaune-orangé.

b. À l'instant $t = 0$, l'absorbance est nulle.

L'absorbance du mélange est $A = 0,50$ pour une concentration molaire en espèce chimique colorée $c = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

c. On mesure une absorbance $A = 1,0$ pour le même mélange mais à une concentration molaire en espèce chimique colorée $c/2$.

On mesure une absorbance maximale $A_{max} = 2,0$.

d. La concentration massique maximale en diiode est égale à $0,10 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

17 FESIC-Ch 2006

Vrai ou faux ?

Le cadmium métallique est produit industriellement par électrolyse d'une solution acidifiée de sulfate de cadmium II. Cette électrolyse est réalisée sous une tension de 3,1 V. On considère un électrolyseur qui produit une tonne de cadmium par 24 heures.

Données : couples redox pouvant intervenir dans l'électrolyse : $\text{Cd}_{(aq)}^{2+} / \text{Cd}_{(s)}$
 $\text{H}_{(aq)}^{+} / \text{H}_{2(g)}$ $\text{O}_{2(g)} / \text{H}_2\text{O}_{(l)}$

$$M(\text{Cd}) = 112,4 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \quad 1 \text{ F} = 96,5 \cdot 10^3 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1} \quad \frac{96,5}{112,4 \times 24 \times 36} \approx 1,0 \cdot 10^{-3}$$

a. L'électrode où se forme le cadmium est reliée à la borne négative du générateur.

b. Il se forme du dihydrogène à l'anode.

c. Il se forme du dioxygène à l'anode.

d. L'intensité du courant a une valeur d'environ $25 \cdot 10^3 \text{ A}$.

18 FESIC-Ch 2008

Vrai ou faux ?

Dans l'industrie monétaire, on cuivre une rondelle d'acier pour obtenir certaines pièces de monnaie comme les pièces de 1, 2 et 5 centimes d'euros. Le cuivrage s'effectue par électrolyse d'une solution aqueuse de nitrate de cuivre (II) de formule chimique : $\text{Cu}_{(aq)}^{2+} + 2 \text{NO}_3^{-}_{(aq)}$.

L'une des électrodes de l'électrolyseur est constituée par un très grand nombre de rondelles à cuivrer, l'autre est en cuivre.

Données : 1 faraday = $96\,500 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$ $M(\text{Cu}) = 63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

a. Il s'agit d'une transformation forcée.

b. Les rondelles d'acier se trouvent à l'anode de l'électrolyseur.

c. La concentration de l'électrolyte en ions cuivre diminue pendant l'électrolyse.

d. Une intensité de 1 000 A doit circuler pendant 9 650 s pour déposer 3,175 kg de cuivre sur les rondelles.

19 FESIC-Ch 2007

Vrai ou faux ?

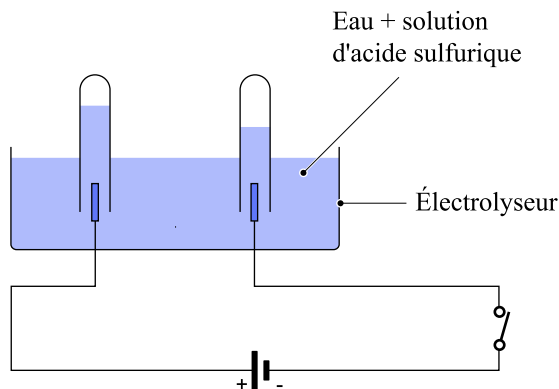


Figure 5.4

On réalise l'électrolyse d'une solution aqueuse d'acide sulfurique dans un électrolyseur. En portant des gants, on retourne sur chaque électrode un tube à essais rempli de la solution. On ferme l'interrupteur, on observe du gaz qui s'échappe à chaque électrode (figure 5.4). On poursuit l'expérience pendant 27 s sous une intensité égale à 360 mA. L'équation globale de cette transformation est la décomposition de l'eau.

Données :

Volume molaire gazeux dans les conditions de l'expérience : $V_m = 22 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$

Les couples oxydant / réducteur intervenant dans cette électrolyse sont : $\text{H}_{(aq)}^+ / \text{H}_{2(g)}$ et $\text{O}_{2(g)} / \text{H}_2\text{O}_{(l)}$.

$965/36 \approx 27 \quad 1 \text{ F} = 96500 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$.

- Il s'échappe deux fois plus de dioxygène que de dihydrogène.
- Le gaz produit à la cathode ravive la flamme d'une buchette n'ayant qu'un point rouge incandescent.
- Il s'est formé 1,1 mL de gaz dans le tube relié à la borne négative.
- La transformation étudiée est spontanée.

20 FESIC-Ch 2008

Vrai ou faux ?

On introduit dans un tube en U, 100 mL d'une solution aqueuse de chlorure de sodium. Le tube en U est placé sous la hotte du fait d'un dégagement gazeux de dichlore. On branche deux électrodes de graphite inattaquables A et B à un générateur de tension continue. La quantité d'électricité traversant le circuit est alors égale à 965 C. Le résultat observé est représenté figure 5.5.

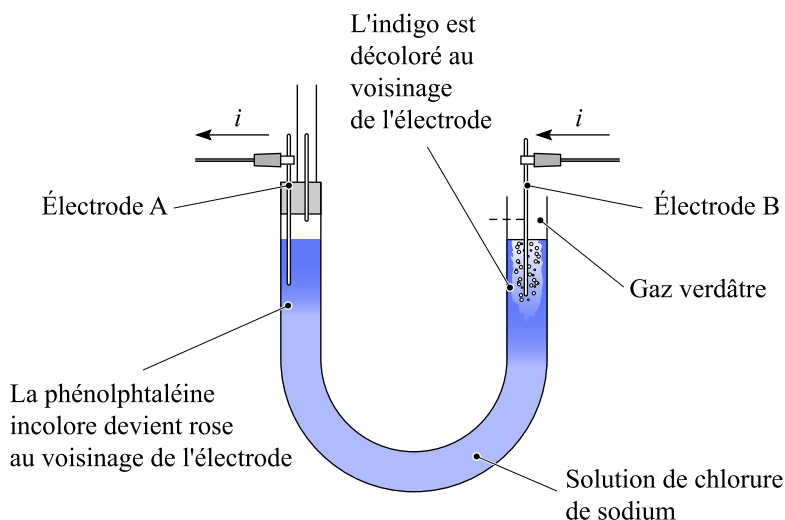


Figure 5.5

Données : couple n°1 : $\text{H}_2\text{O}_{(l)} / \text{H}_{2(g)}$ couple n°2 : $\text{Na}_{(aq)}^+ / \text{Na}_{(s)}$

couple n°3 : $\text{O}_{2(g)} / \text{H}_2\text{O}_{(l)}$ couple n°4 : $\text{Cl}_{2(g)} / \text{Cl}_{(aq)}^-$

Zone de virage de la phénolphthaléine en fonction du pH : incolore / 8,2 - 10 / rose

Volume molaire gazeux dans les conditions de l'expérience : $V_m = 22 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$

$1 \text{ F} = 96\,500 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$

- La réaction susceptible de se produire à l'électrode B fait intervenir le couple n° 3.
- La quantité de gaz formée à l'électrode A est double de celle formée à l'électrode B.
- La concentration des ions responsables du rosissement de la phénolphthaléine est égale à $1,0 \cdot 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.
- On recueille 11 mL de gaz dans le tube disposé sur l'électrode A.

5.3 Cinétique chimique

21 FESIC-Ch 2008

Vrai ou faux ?

On étudie en fonction du temps l'évolution d'un mélange obtenu à partir de 100 mL de solution aqueuse d'acide oxalique de concentration molaire en soluté apporté $6,00 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et 100 mL d'une solution acidifiée de dichromate de potassium de concentration molaire en soluté apporté $1,66 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

On obtient la courbe figure 5.6 qui représente l'évolution de la concentration molaire en ions chrome (III) en fonction du temps :

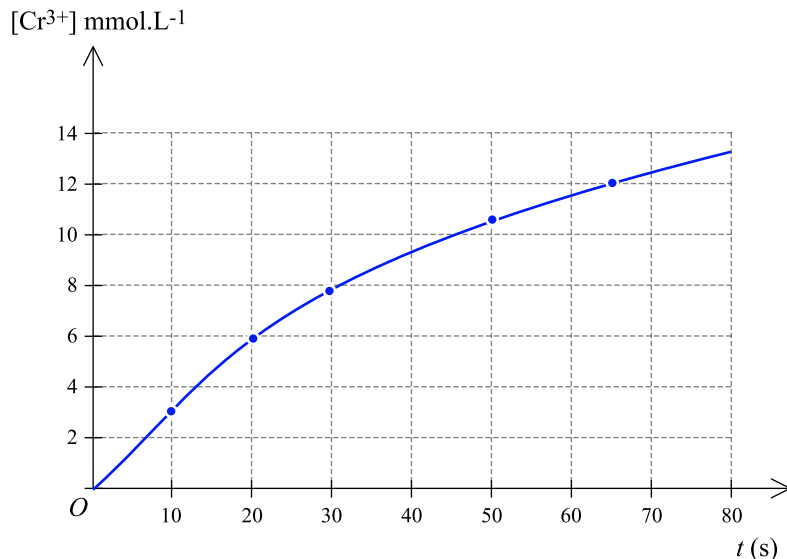


Figure 5.6

Données :

Couples intervenant dans la réaction : $CO_2/H_2C_2O_4$ et $Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+}$.

- Le dioxyde de carbone est l'acide conjugué de l'acide oxalique $H_2C_2O_4$.
- Le mélange initial est dans les proportions stœchiométriques.
- L'acide oxalique est le réactif limitant.
- Quand $t \rightarrow \infty$, la courbe tend vers une limite asymptotique d'équation $[Cr^{3+}] = 16,6 mmol.L^{-1}$.

22 FESIC-Ch 2007

Vrai ou faux ?

En solution dans le tétrachlorométhane, le pentaoxyde de diazote N_2O_5 se décompose en dioxyde d'azote NO_2 et en dioxygène. La courbe donnant la concentration C du pentaoxyde de diazote au cours du temps est donnée figure 5.7. L'étude a été réalisée à partir de 1 L de solution.

Données :

Volume molaire gazeux dans les conditions de l'expérience : $V_m = 25 L.mol^{-1}$.

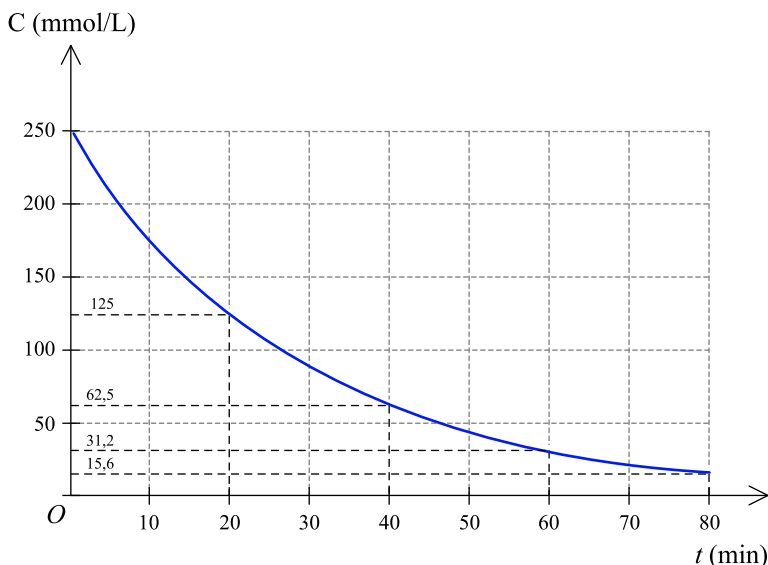


Figure 5.7

- Le pentaoxyde de diazote N_2O_5 est l'oxydant du couple N_2O_5 / NO_2 .
- Le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ vaut environ 20 mn.
- La concentration en pentaoxyde de diazote décroît exponentiellement.
- À t_∞ le volume de dioxygène dégagé est égal à 6,25 L.

23 GEIPI - ENI 2006

Une seule réponse vraie

On réalise un mélange équimolaire d'acétate de propyle (éthanoate de propyle) et d'eau pure et on suit la quantité de l'ester en fonction du temps (figure 5.8).

Parmi les cinq réponses, choisir celle dont toutes les affirmations correspondent à l'expérience.

- A**
- la réaction est une hydrolyse ;
 - le rendement peut être estimé à 66 % ;
 - l'un des produits est CH_3COOH ;
 - l'ajout d'un acide fort H_2SO_4 augmenterait la vitesse de la réaction.
- B**
- la vitesse initiale de la réaction est comprise entre $8 \cdot 10^{-3}$ et $10 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{h}^{-1}$;
 - l'un des produits est $CH_3CH_2CH_2OH$;
 - le rendement peut être estimé à 33 % ;
 - une élévation de température augmente la vitesse de la réaction.

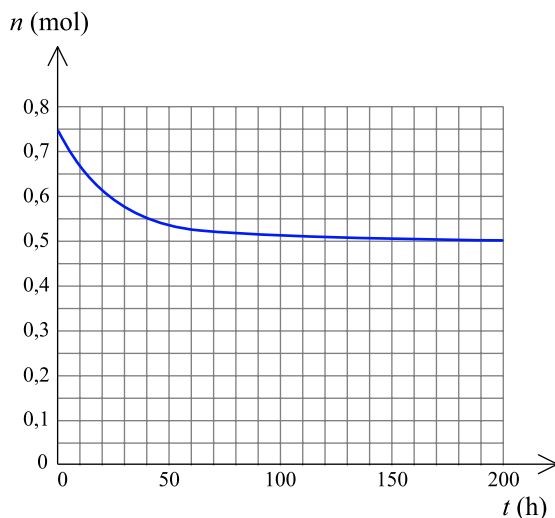


Figure 5.8

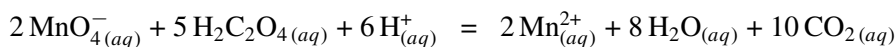
- C** – la réaction est une estérification ;
 – l'un des produits est l'acide acétique (éthanoïque) ;
 – l'ajout d'un acide fort H_2SO_4 est sans effet sur l'état d'équilibre.
 – La vitesse initiale est comprise entre $3 \cdot 10^{-3}$ et $4 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{h}^{-1}$.
- D** – l'acétate de propyle a pour formule semi-développée $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{COOCH}_2\text{CH}_3$;
 – l'avancement maximal est de 0,25 mol ;
 – l'équilibre est atteint à $t = 180 \text{ h}$;
 – la réaction est athermique.
- E** – la vitesse moyenne pendant les 40 premières heures vaut $5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{h}^{-1}$;
 – l'un des produits de la réaction est H_2O ;
 – un ajout d'acide acétique tendrait à diminuer le rendement ;
 – la température est sans influence sur l'état d'équilibre.

24 FESIC-Ch 2006

Vrai ou faux ?

On réalise le mélange de $V_1 = 20,0 \text{ mL}$ de permanganate de potassium acidifié de concentration molaire en soluté apporté $C_1 = 2,00 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $V_2 = 20,0 \text{ mL}$ d'acide oxalique $\text{HOOC}-\text{COOH}$ (solution incolore) de concentration molaire en soluté apporté $C_2 = 5,00 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

La réaction mise en jeu est lente et considérée comme totale, son équation est :



On suit son évolution par spectrophotométrie. On mesure l'absorbance A du mélange réactionnel placé dans la cuve du spectrophotomètre. Par un logiciel approprié, on obtient la courbe suivante :

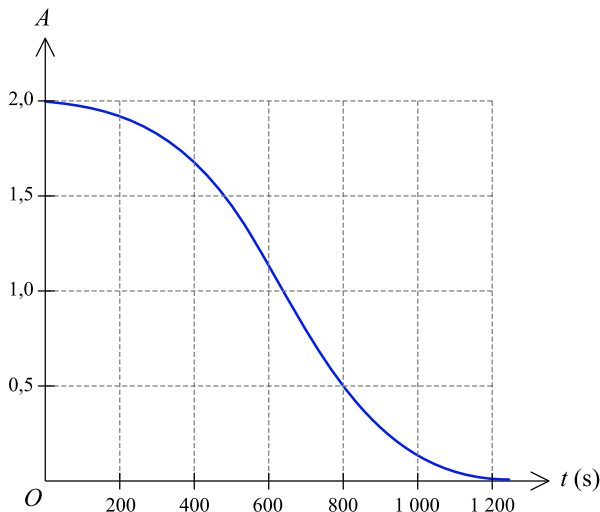


Figure 5.9

Dans ces conditions, la concentration molaire en ions permanganate est proportionnelle à la valeur de l'absorbance A mesurée. L'absorbance $A(t)$ et l'avancement de la réaction $x(t)$ sont reliés par la relation :

$$x(t) = (2.10^{-5} - A(t).10^{-5}) \text{ mol.}$$

a. L'un des couples d'oxydoréduction mis en jeu dans la réaction chimique est $\text{CO}_{2(aq)} / \text{H}_2\text{C}_2\text{O}_{4(aq)}$.

b. Le temps de demi-réaction est égal à environ 650 s.

On recommence l'expérience précédente en prenant le même volume V_2 d'une nouvelle solution d'acide oxalique de concentration molaire apportée

$$C'_2 = 2,50.10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}.$$

c. La solution finale n'est plus incolore.

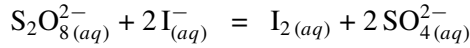
d. L'absorbance finale vaut 1.

25 FESIC-Ch 2007

Vrai ou faux ?

Par spectrophotométrie, on suit la cinétique de la réaction des ions iodure $\text{I}^-_{(aq)}$ avec les ions peroxydisulfate $\text{S}_2\text{O}_8^{2-}_{(aq)}$ qui conduit à la formation de diiode (jaune en solution) et d'ions sulfate. Cette réaction est lente et totale.

La transformation est modélisée par l'équation chimique :



Les concentrations et volumes des réactifs introduits sont les suivants :

$$\text{S}_2\text{O}_8^{2-}(\text{aq}) : C_1 = 0,50 \text{ mol.L}^{-1}; \quad V_1 = 10,0 \text{ mL}$$

$$\text{I}^-(\text{aq}) : C_2 = 0,020 \text{ mol.L}^{-1}; \quad V_2 = 10,0 \text{ mL}$$

On a mesuré l'absorbance au cours du temps et obtenu la courbe de la figure 5.10.

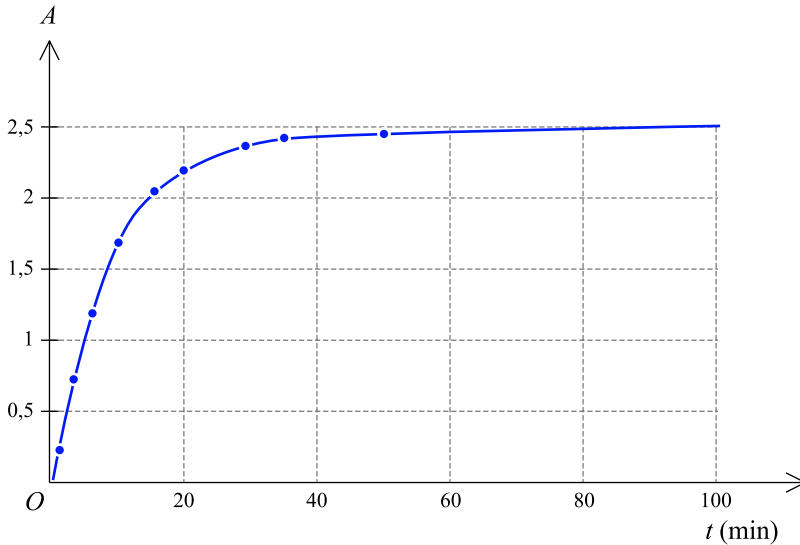


Figure 5.10

On rappelle la loi de Beer Lambert aux faibles concentrations : $A = k \cdot [\text{I}_2]$ où k est un coefficient de proportionnalité.

- Le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ vaut environ 30 mn.
- L'ion peroxydisulfate est le réactif limitant.
- La réaction étudiée étant totale, la concentration finale doit être

$$[\text{I}_2]_{\text{max}} = 10 \text{ mmol.L}^{-1}.$$

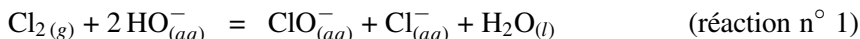
- La valeur du coefficient k pour la longueur d'onde choisie est égale à

$$5,0 \cdot 10^2 \text{ L.mol}^{-1}.$$

26 FESIC-Ch 2006

Vrai ou faux ?

L'eau de javel est un désinfectant, elle est fabriquée en solution aqueuse selon la réaction quasi-totale :



Le degré chlorométrique ($^\circ\text{Chl}$) est le volume (exprimé en L) de dichlore gazeux qui a été utilisé pour préparer un volume de 1,00 L d'eau de javel.

Dans les conditions opératoires, le volume molaire gazeux est $V_m = 22,4 \text{ L}\cdot\text{mol}^{-1}$.

On considère de l'eau de javel à $48,0 \text{ }^\circ\text{Chl}$.

a. Dans ces conditions, 60 L de dichlore gazeux sont nécessaires pour préparer 500 mL d'eau de javel.

b. La concentration molaire en ions hypochlorite $\text{ClO}^-_{(aq)}$ est environ égale à $2,1 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

La teneur en ions hypochlorite $\text{ClO}^-_{(aq)}$ diminue au cours du temps car les ions se transforment lentement en ions chlorures avec dégagement de dioxygène selon l'équation bilan :



Cette réaction montre que le degré chlorométrique d'une eau de javel est susceptible de varier au cours du temps. On étudie la cinétique de la réaction de décomposition. Deux séries d'expériences ont permis de tracer les courbes des figures 5.11 et 5.12.

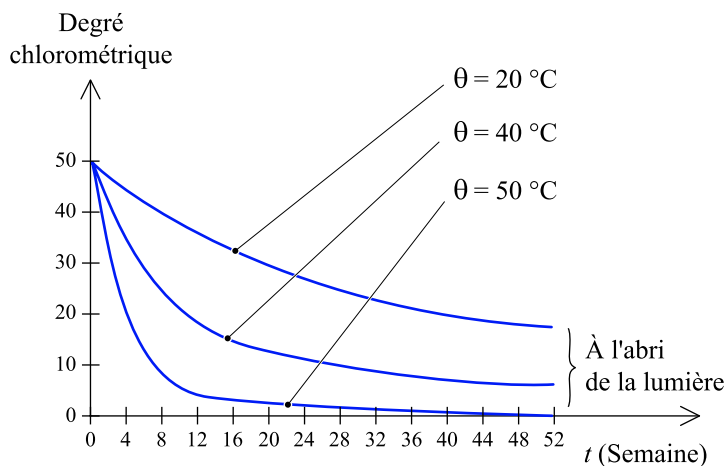


Figure 5.11

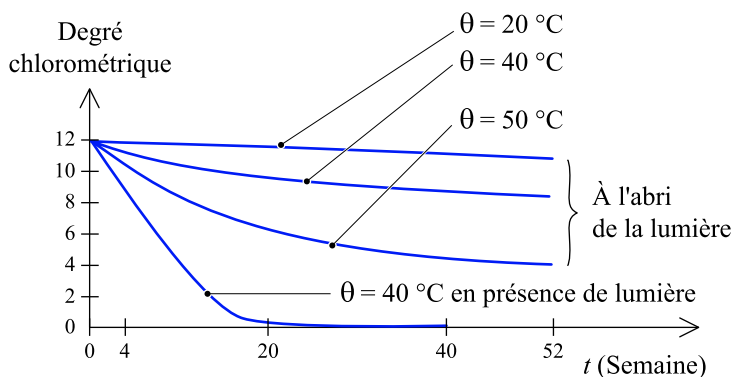


Figure 5.12

c. La température et l'absence de lumière sont des facteurs cinétiques faisant évoluer le système dans le même sens.

Lors de sa fabrication, un berlingot d'eau de javel contient 0,50 mol d'ions $\text{ClO}^-_{(aq)}$. Lors de son utilisation, six mois plus tard, il n'en contient plus que 0,48 mol. Le volume d'un berlingot est 250 mL.

d. La vitesse volumique moyenne de la réaction n° 2 est égale à $3 \text{ mol.L}^{-1}.\text{mois}^{-1}$.

27 GEIPI 2008

En milieu acide, le peroxyde d'hydrogène réagit avec les ions iodure. L'étude expérimentale montre que la réaction est totale, lente, et permet d'obtenir une mole de diiode (I_2) par mole de peroxyde d'hydrogène consommée.

1. Écrire pour chacun des couples ($\text{H}_2\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$) et (I_2/I^-) la demi-équation d'oxydoréduction associée.

On se propose d'étudier la cinétique de cette réaction. Pour ce faire, on mélange à l'instant initial les solutions suivantes :

- 50 mL d'iodure de potassium de concentration $0,02 \text{ mol.L}^{-1}$;
- 100 mL d'acide sulfurique (H_2SO_4) de concentration $0,05 \text{ mol.L}^{-1}$;
- 50 mL de peroxyde d'hydrogène de concentration $0,02 \text{ mol.L}^{-1}$.

2. Écrire l'équation-bilan de la réaction du peroxyde d'hydrogène sur l'iodure de potassium.

3. Dans cette réaction, quelle est l'espèce chimique oxydante ? L'espèce réductrice ?

4. Calculer la quantité minimale de peroxyde d'hydrogène nécessaire pour oxyder tout l'iodure. Quel est le réactif limitant ?

La spectroscopie visible permet de suivre l'évolution de la réaction, le diiode étant la seule espèce absorbante, ce qui permet d'établir la variation de $[I_2]$ en fonction du temps (figure 5.13).

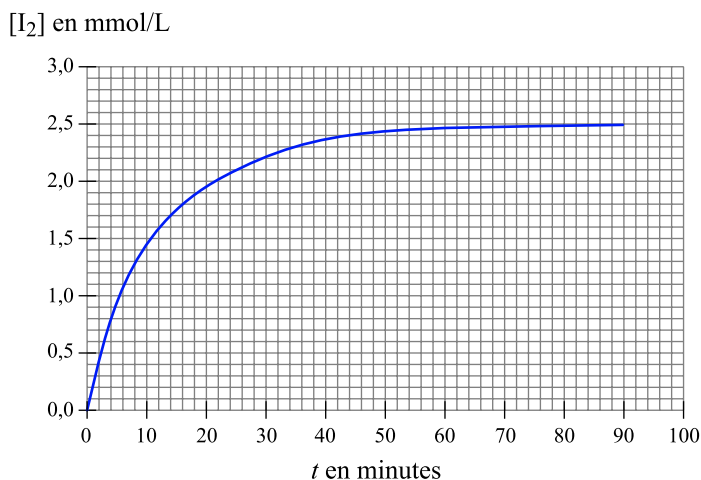


Figure 5.13

5. À partir des données, déterminer la vitesse volumique initiale : v_0 .
6. Calculer l'avancement maximal de cette réaction : x_{max} .
7. Déterminer le temps de demi-réaction : $t_{1/2}$.
8. Sachant que le diiode apparaît jaune-orangé, choisir parmi les longueurs d'onde celle qui est la mieux adaptée à la mesure de sa concentration par spectrophotométrie visible (5 560 nm, 212 nm, 32 nm, 796 nm, 415 nm).

28 GEIPI 2007

Un ester E de formule semi-développée $CH_3COOCH(CH_3)CH_3$ est mis à réagir à $25^\circ C$ avec une quantité $n_0 = 5,0 \cdot 10^{-2}$ mol de soude (hydroxyde de sodium) et on suit au moyen d'un conductimètre la conductance G d'une cellule conductimétrique plongée dans le mélange, en fonction du temps (figure 5.14).

On rappelle que G est proportionnelle à la conductivité de la solution $G = k \cdot \sigma$.

1. Donner le nom de l'ester E en nomenclature officielle.
2. Écrire avec les formules semi-développées l'équation de la réaction chimique qui intervient.
- 3.a. Donner les noms et les formules développées des produits formés.
- 3.b. Pour chacun des produits, entourer sa fonction chimique et la nommer.

4. On désire opérer en présence d'un excès de E , quelle masse minimale m_{min} de E doit-on mettre en œuvre ?

On réalise l'expérience avec 0,1 mol de l'ester E .

5. Sachant que la réaction peut être considérée comme totale, porter graphiquement l'évolution de la quantité de chaque espèce en solution en fonction de l'avancement x . Échelle : 1 unité = 10^{-2} mol.

6. La conductivité σ est reliée aux concentrations des différents ions (exprimées en $\text{mol}\cdot\text{m}^{-3}$) par leur conductivité molaire ionique λ . Donner l'unité de λ .

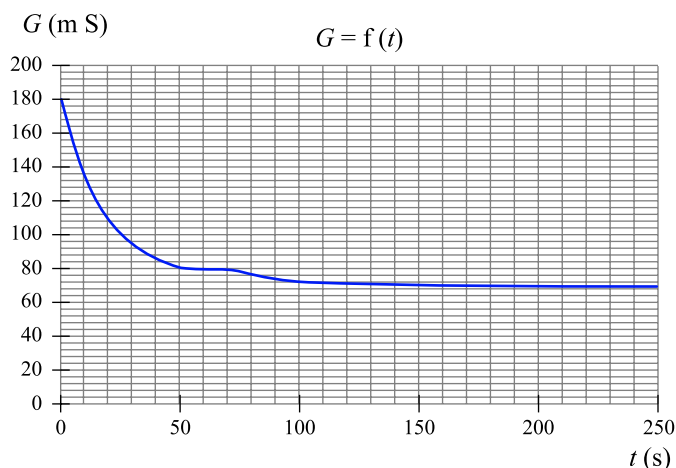


Figure 5.14

7. Donner l'expression correcte de $G(t)$ en fonction de :

- k , constante de la cellule ;
- G_0 , conductivité initiale à l'instant $t = 0$;
- conductivités molaires ioniques λ_{a^-} des anions a^- présents ;
- x , avancement de la réaction ;
- V , volume total (constant).

NB : toutes les grandeurs sont exprimées dans les unités du système international.

8. On peut exprimer l'avancement x en fonction de $G(t)$, G_0 et G_∞ (G_∞ est la conductance au bout d'un temps supposé infini) :

$$x = n_0 \frac{G_0 - G}{G_0 - G_\infty}.$$

Déterminer le temps de demi-réaction.

Données : ^1_1H , $^{12}_6\text{C}$, $^{16}_8\text{O}$, $^{23}_{11}\text{Na}$.

29 FESIC-Ch 2008

Vrai ou faux ?

L'étude d'un mélange équimolaire d'acide méthanoïque et de pentan-1-ol, placé sous un reflux dans un chauffe ballon, a permis de déterminer la quantité n_A d'acide méthanoïque restant au cours du temps. Le graphe obtenu est donné figure 5.15 :

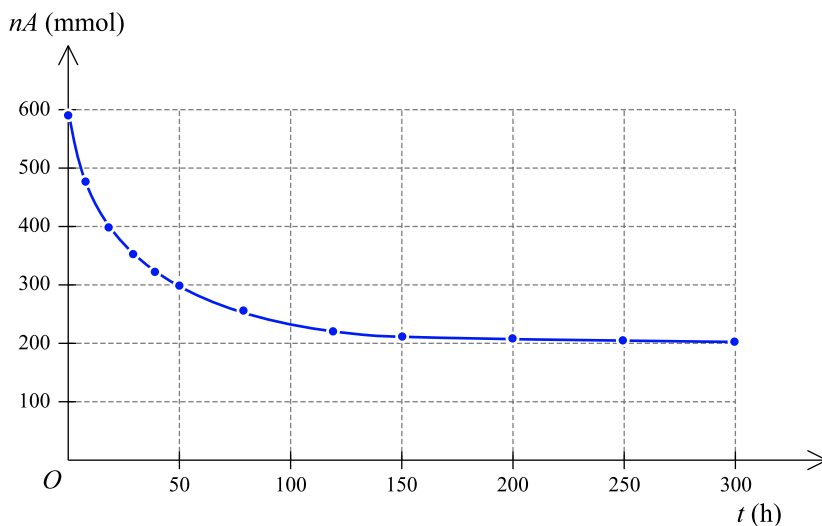


Figure 5.15

- Il s'agit d'une réaction d'hydrolyse.
- Le produit de la réaction est le méthanoate de pentyle.
- Le temps de demi-réaction est égal à 50 heures.
- Le taux d'avancement final est égal à 33 %.

5.1 Acides et bases en solution aqueuse

1

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| V | V | V | F |

a. L'eau est l'acide du couple $\text{H}_2\text{O}/\text{HO}^-$ et la base du couple $\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2\text{O}$: c'est la définition même d'un ampholyte. On trouve aussi l'expression « amphotère »- les deux termes étant souvent employés dans un sens synonymique.

b. En effet, dans de l'eau pure, les concentrations en ions hydroxyde et oxonium sont égales : $[\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{HO}^-] = \sqrt{K_e}$. Or, à 60°C , le produit ionique de l'eau (la constante de l'équilibre de dissociation) est supérieur à ce qu'il est à 25°C , donc il y a effectivement plus de molécules d'eau dissociées à 60°C qu'à 25°C .

c. La concentration en ions hydroxyde et oxonium à 25°C vaut

$$\sqrt{K_e} = \sqrt{10^{-14}} = 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}.$$

Il y a donc $10^{-7} \times 6,02 \cdot 10^{23} \approx 6,0 \cdot 10^{16}$ molécules d'eau dissociées.

d. Une solution de $\text{pH} = 7$ à 60°C , contient une concentration en ions oxonium de $10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$. Or, la limite des domaines de prédominance des espèces à cette température est donnée par la concentration $\sqrt{K_e} = \sqrt{10^{-13}} \approx 3,2 \cdot 10^{-7}$; ainsi, à $\text{pH} = 7$, on est déjà dans le domaine de prépondérance des ions hydroxyde et la solution est par conséquent déjà basique.

Par définition, le pH d'une solution est lié à la concentration en ions oxonium par les relations :

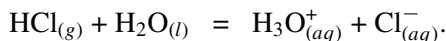
$$\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]_{eq} \text{ ou } [\text{H}_3\text{O}^+]_{eq} = 10^{-\text{pH}}.$$

2

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| V | F | F | F |

a. La dissolution de 0,24 L de chlorure d'hydrogène gazeux dans 500 mL d'eau, dans les conditions de l'expérience, conduit à une concentration en soluté égale à $0,24/(0,5 \times 24) = 0,02 \text{ mol.L}^{-1}$.

b. La réaction de dissociation du chlorure d'hydrogène gazeux dans l'eau est symbolisée par l'équation bilan :

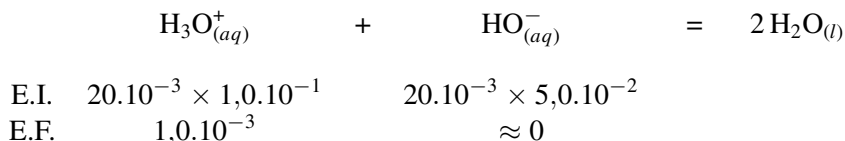


Si $\text{pH} = 1,7$, alors la concentration en ions oxonium vaut

$$10^{-\text{pH}} = 10^{-1,7} = 0,020 \text{ mol.L}^{-1}$$

Cela signifie que tout le chlorure d'hydrogène dissout dans l'eau est dissocié.

c. La réaction qui se produit au cours du mélange des deux solutions est une réaction de neutralisation acido-basique entre les ions oxonium apportés par la solution d'acide chlorhydrique et les ions hydroxyde apportés par celle d'hydroxyde de sodium. La réaction en question est l'inverse de celle de dissociation de l'eau, réaction considérée comme totale en première analyse ; l'équation bilan de la réaction et le bilan de matière donnent :



Il reste donc $1,0 \cdot 10^{-3}$ mol d'ions oxonium dans un volume total de 40 mL de solution, soit une concentration $[\text{H}_3\text{O}^+] = c = 0,025 \text{ mol.L}^{-1}$. Le pH de cette solution vaut donc $\text{pH} = -\log 2,5 \cdot 10^{-2} \approx 1,6$.

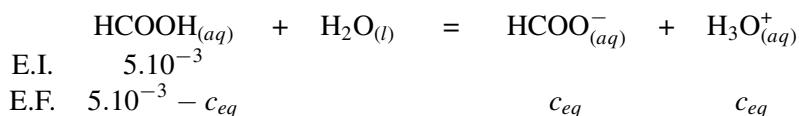
d. La dilution par 5 de la solution S' provoque en première approximation une dilution de même facteur de la concentration en ion oxonium. Par conséquent, le pH de S' passe de $\text{pH}_0 = -\log c$ à $\text{pH}_1 = -\log(c/5)$, soit $\text{pH}_1 = \text{pH}_0 + \log 5$ et donc $\text{pH}_1 = 2,3$.

3

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| F | V | V | V |

a. L'ancien nom de l'acide méthanoïque est acide formique, sécrété notamment par la fourmi. Acide acétique était l'ancien nom de l'acide éthanoïque.

b. En effet, la réaction de mise en solution de l'acide méthanoïque peut être traduite par l'équation bilan et le bilan de concentration suivants :



où l'on voit que les ions méthanoate et oxonium sont en concentrations pratiquement identiques dans la solution.

c. Servons-nous de l'indication de la conductivité de la solution. En désignant respectivement par λ_{met} et λ_{ox} les conductivités molaires ioniques des ions méthanoate et oxonium, la conductivité de la solution vaut :

$$\sigma = c_{eq} (\lambda_{met} + \lambda_{ox}),$$

soit

$$c_{eq} = \frac{\sigma}{\lambda_{met} + \lambda_{ox}}.$$

Numériquement, $c_{eq} = 3,3 \cdot 10^{-2} / (35 \cdot 10^{-3} + 5,5 \cdot 10^{-3}) \approx 0,81 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}$, ou $0,81 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1}$.

d. Effectivement, $\tau = c_{eq} / c_0$, soit, numériquement $\tau = 0,81 / 5 \approx 0,16$ soit 16 %.



À la question b, les concentrations des deux ions ne sont pas rigoureusement identiques car il y a en plus l'autoprotolyse de l'eau qui fait imperceptiblement augmenter la concentration en ions oxonium par rapport à celle des ions méthanoate.

À la question c, il faut se rappeler que, dès que la conductimétrie est en jeu, les concentrations qui interviennent dans les formules sont exprimées dans l'unité du Système International, à savoir en $\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$.

4

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| V | F | V | F |

a. En effet, la formule proposée correspond à la manière même de construire la constante d'équilibre d'un équilibre chimique. (cf. Rappels théoriques ci-après).

b. Le quotient initial de réaction (cf. Rappels théoriques ci-dessous) vaut

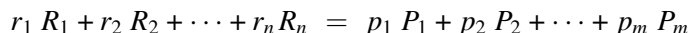
$$\frac{(8,0 \cdot 10^{-4})^2 \times 3,8 \cdot 10^{-4}}{1,0 \cdot 10^{-2}} = 2,4 \cdot 10^{-8}.$$

c. En effet, d'après le résultat de la question précédente, le quotient initial de réaction est inférieur à la constante d'équilibre de la réaction $Q_{r,i} < K_e$, donc c'est le sens de l'avancement positif de la réaction qui est favorisé, à savoir, celui de la dissolution du carbonate de calcium.

d. La relation $\text{pH} = \text{p}K_a + \log \frac{[\text{acide}]}{[\text{base}]}$, appliquée aux conditions initiales pour le couple gaz carbonique / ion hydrogénocarbonate, donne

$$\text{pH} = 6,4 + \log \frac{8,0 \cdot 10^{-4}}{1,0 \cdot 10^{-2}} = 6,4 - 1,1 = 5,3.$$

Soit l'équilibre chimique suivant :



où R_k et r_k , avec $k = 1, 2, \dots, n$ sont les réactifs et leurs coefficients stœchiométriques respectifs, et P_l et p_l , avec $l = 1, 2, \dots, m$ les produits et leurs coefficients stœchiométriques respectifs dans l'équation bilan.

Les principes généraux de la thermodynamique appliquées à la chimie montrent que le système évolue de façon à minimiser son énergie, eu égard aux conditions dans lesquelles la réaction se produit, et que cette évolution conduit à un état d'équilibre final, plus ou moins rapidement atteint par ailleurs, où les quantités de matière finales en chacun des produits et réactifs doivent satisfaire à une condition qu'impose la constante d'équilibre de la réaction. Cette constante d'équilibre K_e est construite de la manière suivante :

$$K_e = \frac{a_{P_1}^{p_1} \times a_{P_2}^{p_2} \times \dots \times a_{P_m}^{p_m}}{a_{R_1}^{r_1} \times a_{R_2}^{r_2} \times \dots \times a_{R_n}^{r_n}},$$

a_{P_l} ou a_{R_k} désignant l'activité du produit l ou celle du réactif k .

Lorsque l'on est en solution et que les réactifs et les produits ne sont pas trop concentrés, c'est-à-dire lorsque le solvant fournit les molécules en nombre beaucoup plus grand que tous les solutés, les activités sont confondues avec les concentrations à l'équilibre, l'activité du solvant étant prise égale à 1. Il en résulte ainsi l'expression classique de la constante d'équilibre en fonction des concentrations que vous avez déjà rencontrée.

Si l'on n'est pas en solution aqueuse, une telle constante d'équilibre existe, mais fait intervenir soit les pressions partielles des gaz s'il y en a, soit les concentrations des solutés dans les solutions solides.

Le quotient initial de réaction $Q_{r,i}$ est construit selon un procédé similaire, mais avec les activités initiales (donc, en nous limitant aux solutions avec solvant prépondérant, les concentrations) et non celles à l'équilibre. Si le quotient initial de réaction est inférieur à la constante d'équilibre $Q_{r,i} < K_e$, le système évolue de façon à ce que le quotient augmente jusqu'à devenir égal à la constante d'équilibre. Cela se produit lorsque les quantités des réactifs diminuent et celles des produits augmentent : le système évolue vers une « production des produits ». Dans le cas contraire, si le quotient initial de réaction est supérieur à la constante d'équilibre, ce qui signifie qu'on a introduit initialement des produits en même temps que les réactifs, $Q_{r,i} > K_e$, alors le système doit évoluer dans le sens d'une diminution des quantités des produits et d'une augmentation des quantités des réactifs pour que la valeur du quotient de réaction puisse égaler la constante d'équilibre.

5

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| F | F | F | V |

a. Il est évident que ce sont des couples acide-base qui interviennent et donc que les seules réactions sont des réactions acido-basiques, c'est-à-dire des échanges de protons et non d'électrons.

b. L'équation proposée est celle entre l'acide le plus faible, en l'occurrence l'acide éthanoïque, et la base la plus faible, en l'espèce le méthanoate, parmi les deux couples.

c. La constante d'équilibre de la réaction donnée est :

$$K_e = \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-]_{eq} [\text{HCOOH}]_{eq}}{[\text{CH}_3\text{COOH}]_{eq} [\text{HCOO}^-]_{eq}}$$

Elle est égale à

$$\frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-]_{eq} [\text{HCOOH}]_{eq} [\text{H}_3\text{O}^+]_{eq}}{[\text{CH}_3\text{COOH}]_{eq} [\text{HCOO}^-]_{eq} [\text{H}_3\text{O}^+]_{eq}},$$

soit

$$K_e = \frac{K_{a1}}{K_{a2}}$$

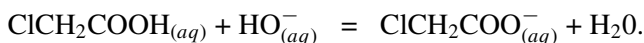
Numériquement, $K_e = 10^{-1}$.

d. Le quotient initial de la réaction vaut $Q_{r,i} = \frac{1,0 \cdot 10^{-3} \times 1,0 \cdot 10^{-3}}{2,0 \cdot 10^{-3} \times 1,0 \cdot 10^{-3}} = \frac{1}{2}$.
 $Q_{r,i} < K_e$ donc la réaction évolue dans le sens de la production de l'acide éthanoïque et du méthanoate.

6

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| F | V | F | V |

a. La réaction de dosage acido-basique est :



L'expression de la constante d'équilibre K de la réaction est :

$$K = \frac{[\text{ClCH}_2\text{COO}^-]_{eq}}{[\text{ClCH}_2\text{COOH}]_{eq} [\text{HO}^-]_{eq}}$$

qui, multipliée au numérateur et au dénominateur par la concentration en ions oxonium à l'équilibre dans la solution peut alors s'écrire, en utilisant les définitions de la constante d'acidité K_a et du produit ionique de l'eau (autoprotolyse) K_e :

$$K = \frac{K_a}{K_e}$$

Numériquement $K = 10^{-2,8}/10^{-14} = 10^{11,2}$.

b. Cf. Rappels théoriques ci-dessous.

c. À l'équivalence $c_a v_a = c_b v_b$, en désignant par c_a , la concentration initiale en acide faible, v_a , le volume de solution acide dosée, c_b la concentration de la solution de base titrante et v_b le volume de cette solution basique versée pour obtenir l'équivalence. Ainsi, $c_a = c_b v_b / v_a$. Numériquement, $c_a = 0,5 \times 8,0 \cdot 10^{-3} / 20 \cdot 10^{-3} = 200 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1}$.

d. En effet, la masse molaire de l'acide monochloroéthanique est

$$M = 35,5 + 2 \times 16 + 2 \times 12 + 3 \times 1 = 94,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

La solution de concentration en acide $c_a = 0,2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ a pu être ainsi fabriquée en diluant $c_a M$ grammes d'acide, soit, numériquement, $0,2 \times 94,5 = 18,9 \text{ g}$ dans l'eau distillée.

Le dosage d'un acide faible par une base forte est une réaction quasi totale qui conduit, lorsque l'équivalence est atteinte, à une solution contenant essentiellement la base conjuguée de l'acide faible, les ions neutralisant la base forte (ici Na^+), une quantité résiduelle d'acide en solution et les ions oxonium et hydroxyde provenant de l'autoprotolyse de l'eau. La présence de la base de Brønsted rend le milieu basique.

Le phénomène est réciproque pour le dosage d'une base faible par un acide fort : à l'équivalence, le milieu réactionnel est acide.

7

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| F | F | V | V |

a. Il suffit d'écrire la formule développée de l'éthanamine pour s'en rendre compte.

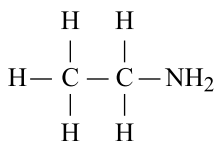
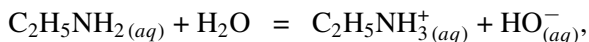


Figure 5.16

b. L'éthylamine est une molécule neutre qui ne peut que gagner un proton en solution aqueuse : elle ne se dissocie donc pas.

c. La réaction de passage en solution aqueuse de l'éthanamine est :



sa constante d'équilibre est :

$$K = \frac{[\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+(aq)]_{eq} [\text{HO}^-(aq)]_{eq}}{[\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2(aq)]_{eq}},$$

qui, multipliée au numérateur et au dénominateur par la concentration en ions oxonium à l'équilibre dans la solution peut alors s'écrire, en utilisant les définitions de la constante d'acidité K_a et du produit ionique de l'eau (autoprotolyse) K_e :

$$K = \frac{K_e}{K_a}.$$

Numériquement $K = 10^{-14}/10^{-10,7} = 10^{-3,3} = 5,0 \cdot 10^{-4}$. La base sera même faiblement protonée.

d. À l'équivalence $c_a v_a = c_b v_b$, en désignant par c_a , la concentration initiale en acide fort titrante, v_a , le volume de solution acide versée pour obtenir l'équivalence, c_b la concentration de la solution de base faible dosée et v_b le volume de cette solution basique. Ainsi, $v_a = V_E = c_b v_b / c_a$. soit, numériquement, $V_E = 2,0 \cdot 10^{-2} \times 20 \cdot 10^{-3} / 2,5 \cdot 10^{-2} = 16 \cdot 10^{-3}$ L ou 16 mL.

8

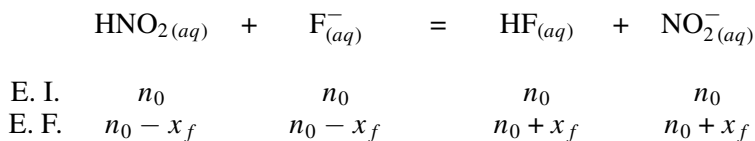
| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| V | V | F | F |

a. Il s'agit de l'expression de la constante d'équilibre obtenue de la manière rappelée (cf. Rappels théoriques 4).

b. L'assertion est évident avec la définition du quotient initial de réaction et les concentrations initiales.

c. $Q_{r,i} > K$ donc la réaction évolue de droite à gauche, donc, dans le sens de la disparition de l'acide fluorhydrique.

d. Le tableau d'avancement de la réaction est le suivant :



Par conséquent, la constante d'équilibre aura pour expression :

$$K = \frac{(n_0 + x_f)^2}{(n_0 - x_f)^2}$$

L'expression obtenue montre clairement que l'avancement x_f de la réaction doit être négatif pour que la constante puisse être égale à 0,74.

9

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| F | F | V | F |

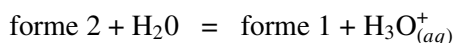
a. La masse molaire de la forme basique du rouge de méthyle est

$$M = 2 \times 16 + 3 \times 14 + 13 \times 12 + 10 \times 1 = 240 \text{ g.mol}^{-1}$$

b. La forme 2 est la forme acide du rouge de méthyle, prépondérante lorsque le milieu est acide.

c. La forme 1 du rouge de méthyle, basique, ayant une teinte jaune, cela signifie qu'elle n'absorbe pas dans le jaune et donc que son absorbance est nulle.

d. La mise en solution du rouge de méthyle donne lieu à la réaction :



dont la constante d'acidité $K_a = 10^{-5,2}$ a pour expression :

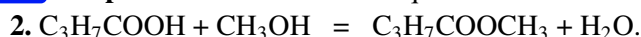
$$K_a = \frac{[\text{forme 1}]_{eq} [\text{H}_3\text{O}_{(aq)}^+]_{eq}}{[\text{forme 2}]_{eq}}$$

donne ainsi :

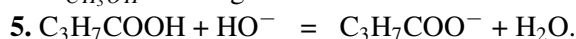
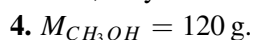
$$\frac{[\text{forme 2}]_{eq}}{[\text{forme 1}]_{eq}} = \frac{[\text{H}_3\text{O}_{(aq)}^+]_{eq}}{K_a}$$

soit, numériquement, un rapport égal à $10^{-4,2} / 10^{-5,2} = 10$.

10 Réponses : 1. Acide butanoïque.



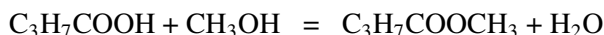
3. ester, butyrate de méthyle.



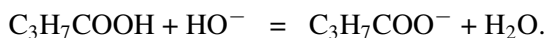
6. $K = K_a/K_e$, $K = 10^{9,1}$.
 7. $v_{b1} = c_{a0}v_p/c_b$, $v_b = 46,9$ mL.
 8. $r = 2/3$.
 9. diminuer le temps de demi-réaction.

Explications :

1. Il s'agit d'un acide en C_4 à chaîne linéaire, donc sa dénomination systématique est acide butanoïque.
 2. L'équation bilan de la réaction entre l'acide butyrique et le méthanol est



3. La réaction d'un acide carboxylique sur un alcool donne un ester et de l'eau ; le composé E est donc un ester : il s'agit du butanoate (ou butyrate) de méthyle.
 4. Le nombre de moles de méthanol doit être identique à celui, n_A , d'acide butyrique. Or, ce dernier est égal au rapport de la masse m_A par la masse molaire M_A de l'acide en question, $n_A = m_A/M_A$. D'après sa formule chimique, la masse molaire de l'acide butanoïque vaut $M_A = 2 \times 16 + 4 \times 12 + 8 \times 1 = 88$ g.mol⁻¹. Ainsi, $n_A = 330/88 = 3,75$ mol. En désignant par M_m la masse molaire du méthanol, la masse de méthanol, m_m , nécessaire pour opérer dans des conditions stœchiométriques vaut donc : $m_m = n_A M_m$. Comme la masse molaire du méthanol est de $16 + 12 + 4 \times 1 = 32$ g.mol⁻¹, la masse de méthanol vaudra donc $m_m = 3,75 \times 32 = 120$ g de méthanol.
 5. La réaction de dosage de l'acide butyrique, non encore transformé en ester, par la soude est :



6. L'expression de la constante d'équilibre K de la réaction de dosage est :

$$K = \frac{[C_3H_7COO^-]_{eq}}{[C_3H_7COOH]_{eq}[HO^-]_{eq}}.$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par la concentration en ion oxonium, et en remarquant que K_e , le produit ionique de l'eau (ou la constante de l'équilibre d'autoprotolyse) vaut $[H_3O^+]_{eq} \cdot [HO^-]_{eq}$, la constante de l'équilibre de dosage vaudra K_a/K_e . Numériquement, $K = 10^{-4,9}/10^{-14} = 10^{9,1}$.

7. Pour neutraliser l'acide restant à un instant t quelconque, il faut apporter un nombre de moles d'ions hydroxyde égal à celui de l'acide. Or, à l'instant initial, l'acide n'a pas eu le temps de réagir et donc sa concentration initiale c_{a0} dans le mélange réactionnel est : $c_{a0} = n_A/V$, soit, $c_{a0} = 3,75/0,400 = 9,375$ mol.L⁻¹. En désignant par v_p le volume de prélèvement, égal à 1,00 mL, la quantité de soude qui neutralise l'acide présent dans le prélèvement doit être $c_{a0}v_p$; en appelant $c_b = 0,20$ mol.L⁻¹, la concentration de la soude titrante, le volume de solution de soude, v_b , versé doit donc être $v_b = c_{a0}v_p/c_b$. Numériquement, $v_b = 9,375 \times 1,00 \cdot 10^{-3}/0,2 \approx 46,9$ mL.

8. Le rendement r de la réaction est égal x_{max}/n_A .

Numériquement, $r = 2,5/3,75 = 2/3$; le rendement est de l'ordre de 67 %.

9. L'acide sulfurique intervient dans la réaction comme catalyseur, ce qui l'accélère et en diminue le temps de demi-réaction.



La dilution du prélèvement dans de l'eau glacée est une trempe du mélange réactionnel visant à ralentir de manière drastique la vitesse d'estérification en diminuant simultanément température et concentrations.

11 Réponses : 1. $pH = -\log[H_3O^+] = 12,7$.

2. $C_6H_5COOH + HO^- = C_6H_5COO^- + H_2O$.

3. $pK_a = 4,2$.

4. $K = 10^{9,8}$.

5. Réaction rapide, totale et exothermique.

6. pH basique.

7. rouge de crésol, 8. $c_a = 0,018 \text{ mol.L}^{-1}$.

9. $c = 2,2 \text{ g.L}^{-1}$,

10. Cf. figure ci-dessous.

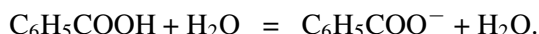
Explications :

1. La concentration de la soude $c_b = 0,05 \text{ mol.L}^{-1}$. La soude étant une base forte, elle est totalement ionisée dans l'eau et la concentration des ions hydroxyde vaut ainsi $[HO^-] = 0,05 \text{ mol.L}^{-1}$. L'équilibre d'autoprotolyse implique, par conséquence, que la concentration en ions oxonium soit :

$$[H_3O^+] = \frac{K_e}{[HO^-]}$$

Numériquement, $[H_3O^+] = 10^{-14}/0,05 = 2 \cdot 10^{-13} \text{ mol.L}^{-1}$. Par la suite, comme, par définition, nous avons la relation $pH = -\log[H_3O^+]$, il vient, numériquement que $pH = 12,7$.

2. L'équation bilan de la réaction de dosage est :



3. Cf. les rappels théoriques ci-après. À partir de la courbe, on constate que le point d'équivalence est obtenu lorsque l'on a versé un volume de soude, v_{be} , égal à 18 mL, et, par suite, le volume du point de demi-équivalence est $v_{be/2} = 9 \text{ mL}$. Pour ce volume, la courbe fournit une indication de pH égale environ à 4,2. Donc, le pK_a du couple acide benzoïque / benzoate vaut 4,2.

4. La constante d'équilibre K de la réaction de dosage, transcrite d'après l'équation bilan de la question 2, vaut :

$$K = \frac{[\text{C}_6\text{H}_5\text{COO}^-]_{eq}}{[\text{C}_6\text{H}_5\text{COOH}]_{eq}[\text{HO}^-]_{eq}}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par la concentration en ion oxonium, et en remarquant que K_e , le produit ionique de l'eau (ou la constante de l'équilibre d'autoprotolyse) vaut $[\text{H}_3\text{O}^+]_{eq} \cdot [\text{HO}^-]_{eq}$, la constante de l'équilibre de dosage vaudra K_a/K_e . Numériquement, $K = 10^{-4,2}/10^{-14} = 10^{9,8}$.

5. La réaction est rapide, totale et exothermique.

6. Cf. Rappels théoriques de l'exercice 6. Le $p\text{H}$ de la solution à l'équivalence est basique.

7. D'après ce qui précède, il est nécessaire que l'indicateur vire autour d'un $p\text{H}$ supérieur à 7, tout en étant proche. C'est le rouge de crésol qui satisfait le mieux à cette exigence.

8. À l'équivalence $c_a v_a = c_b v_{be}$, en désignant par c_a , la concentration initiale en acide faible de la solution S , v_a , le volume de solution acide dosée, c_b la concentration de la solution de base titrante et v_{be} le volume de cette solution basique versée pour obtenir l'équivalence. Ainsi, $c_a = c_b v_{be}/v_a$. Numériquement, $c_a = 0,05 \times 18,0 \cdot 10^{-3}/50 \cdot 10^{-3} = 18 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1}$.

9. Soit M_a la masse molaire de l'acide benzoïque, égale à

$$2 \times 16 + 7 \times 12 + 6 \times 1 = 122 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

La concentration massique de la solution S initiale d'acide est $c_{am} = M_a c_a$, soit, numériquement, $c_{am} = 122 \times 0,018 \approx 2,2 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$.

10. La nouvelle courbe de dosage (figure 5.17) se situerait avec les modifications suivantes par rapport à celle donnée dans l'énoncé : le $p\text{H}$ initial serait légèrement supérieur, à la demi-équivalence, il vaudrait pK_a , la position du point d'équivalence correspondrait au même volume versé de soude, la courbe suivrait la première courbe de dosage mais avec une valeur plus faible de $p\text{H}$, dû à ce que la concentration finale des ions hydroxydes serait plus faible à cause de la dilution et donc le $p\text{H}$ aussi.

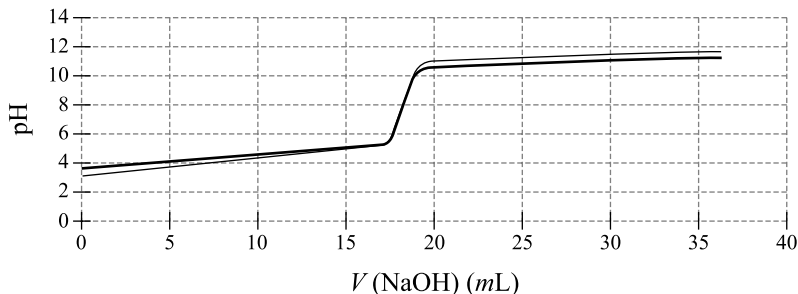


Figure 5.17

Au cours du dosage (celui d'un acide faible par une base forte ou la réciproque, le dosage d'une base faible par un acide fort), le point de demi-équivalence jouit de deux particularités :

1. Le pH de la solution y est égal au pK_a du couple AH/A^- ou BH^+/B dosé. En effet, la constante d'acidité du couple permet de déduire

$$pH = pK_a + \log \frac{[base]}{[acide]}.$$

Ainsi, la réaction de dosage étant quasi totale, le bilan des espèces, à l'équilibre, au point de demi-équivalence, est le suivant : il ne reste que des traces d'ions hydroxyde (si on dose un acide faible), et l'acide en solution et sa base conjuguée sont en quantités égales, d'où l'affirmation que $pH = pK_a$.

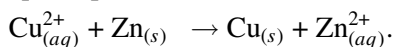
2. C'est un point d'inflexion de la courbe de dosage pour lequel le pH varie très peu par rapport à un apport ou un retrait d'ions hydroxyde. Cette propriété de relative immunité du pH par rapport aux phénomènes acido-basiques ou de dilution est appelée « pouvoir tampon ». On l'utilise lorsque l'on souhaite disposer d'un milieu de pH déterminé — au moins dans certaines limites —. Cela se fait en fabriquant un mélange équimolaire d'acide et de sa base conjuguée d'un couple dont le pK_a correspond au pH désiré.

5.2 Oxydo-réduction et piles

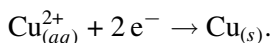
12 Réponse : A.

L'énoncé doit être traduit par le fait que Cu^{2+} est un oxydant plus fort que Zn^{2+} et Zn un réducteur plus fort que Cu .

La réaction rédox globale qui se produit est donc



Le pôle + de la pile est donc la demi-pile Cu^{2+}/Cu , c'est par définition la cathode où se produit la réaction de réduction des ions Cu^{2+} :



La demi-pile Zn^{2+}/Zn est le pôle -, par définition l'anode, où le zinc s'y oxyde ce qui signifie concrètement que la masse de la lame de zinc diminue, consommée dès que la pile débite dans un circuit extérieur. Il s'y produit la réaction $Zn_{(s)} \rightarrow Zn_{(aq)}^{2+} + 2e^-$.

A. Toutes les assertions sont exactes et correspondent aux éléments du cours à connaître.

B. Deux assertions sont fausses : c'est le cuivre (II) qui se réduit à la cathode et le zinc qui s'oxyde à l'anode.

C. La seule assertion fautive est le fait que A soit le pôle -.

D. La seule assertion fautive est l'oxydation du zinc à la cathode : l'oxydation du zinc se produit bien, mais c'est à l'anode.

E. La seule assertion fautive est le fait que B soit le pôle +, alors que c'est le pôle -.

13 Réponse : E.

A. La seule assertion fautive est le fait que la concentration en ion Zn^{2+} reste constante : l'électrode de zinc étant consommée pendant que la pile débite, la concentration des ions en question augmente.

B. La seule assertion fautive est le fait que la masse de Cu reste constante, alors qu'elle augmente au cours de la réaction.

C. La seule assertion fautive est le fait que le compartiment 2 se concentre en ion Cu^{2+} : d'une part, les ions Cu^{2+} ne migrent pas du compartiment 1 vers le compartiment 2 et d'autre part leur concentration diminue dans le compartiment 1 en participant à l'augmentation de la masse de la lame de cuivre.

D. La seule assertion vraie est la constance de la masse totale du système.

E. Toutes les assertions sont exactes.

14 Réponse : B.

A. La seule assertion vraie est la tendance à la décroissance de l'intensité I dans le temps. En revanche, vu le branchement de l'ampèremètre et ce qui a été affirmé précédemment, l'intensité $I > 0$ et il ne peut y avoir d'électrons libres que dans les métaux et les fils extérieurs aux deux demi-piles et au pont salin. Dans ce dernier, la conduction ne résulte que de la mobilité des ions K^+ et NO_3^- .

B. Toutes les assertions sont vraies.

C. La seule assertion fautive est celle relative aux électrons (*cf.* la réponse à A).

D. La seule assertion inexacte est celle relative à la migration des ions NO_3^- : ils se déplacent au sein du pont salin en sens inverse du courant.

E. La seule assertion exacte concerne l'augmentation de l'intensité du courant électrique dans la pile avec l'augmentation de la concentration du chlorure de cuivre (II).

15 Réponse : B.

A. La seule assertion exacte est celle sur la nullité de l'intensité dans le segment AB et dans toute la pile, d'ailleurs. Il ne se produit rien dans le pont salin et la tension $U_{AB} > 0$, égale à la différence des potentiels d'électrodes des demi-piles au moment où l'interrupteur a été ouvert.

B. Toutes les affirmations sont exactes.

C. Non, les électrodes n'ont pas le même potentiel : c'est lorsque la pile débite que la différence de potentiel entre les électrodes tend vers zéro. Lorsque la tension entre les pôles de la pile est nulle, la pile cesse de débiter. Les deux autres assertions sont correctes.

- D. La seule assertion fautive est celle portant sur la tension.
 E. Il en est de même qu'à la réponse précédente.

16

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| V | V | F | V |

- a. Sa couleur jaune-orangée est effectivement un des signes caractéristiques de la présence de diiode dans la solution.
- b. À l'instant où on mélange les solutions, si la cinétique de l'oxydation des ions iodure est lente, aucune réaction n'aura eu le temps de se produire et la solution demeurera incolore, par la suite, son absorbance sera nulle.
- c. Cf. rappels théoriques ci-après. Si l'absorbance a doublé entre les deux expériences, alors la concentration a doublé et elle vaut de ce fait $2c$ et non $c/2$.
- d. D'après les rappels théoriques, nous pouvons écrire $\frac{A_{max}}{A} = \frac{c_{max}}{c}$, soit, $c_{max} = c \cdot \frac{A_{max}}{A}$. Ainsi, $c_{max} = \frac{2}{0,5} \times 1,0 \cdot 10^{-4} = 4,0 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. La masse molaire du diiode, M_{I_2} , étant égale $2 \times 127 = 254 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, la concentration massique maximale en diiode dans la solution est égale à $M_{I_2} c_{max}$, soit, numériquement $254 \times 4,0 \cdot 10^{-4} \approx 0,1 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$.

L'absorbance $A(\nu)$ d'une solution est définie comme le logarithme du rapport de l'intensité lumineuse d'un faisceau lumineux de fréquence ν , de référence, I_0 , sur l'intensité lumineuse, I_t , de ce même faisceau après qu'il a traversé une certaine longueur l de solution de concentration c en espèce absorbante ; I_t que l'on nomme l'intensité lumineuse transmise. Ainsi :

$$A(\nu) = \log \frac{I_0(\nu)}{I_t(\nu)}$$

Cette absorbance est une fonction de la fréquence de la lumière dont on étudie la transmission à travers la solution.

L'étude du comportement de $A(\nu)$ en fonction de la concentration c de la solution, d'une part, et de la longueur traversée l , d'autre part, a montré qu'elle était proportionnelle à c et à l . Nous pouvons exprimer l'absorbance à la fréquence ν par la loi suivante :

$$A(\nu) = \varepsilon(\nu) \cdot c \cdot l,$$

où $\varepsilon(\nu)$, coefficient d'absorption molaire, caractérise la capacité de la substance à absorber le rayonnement lumineux de fréquence ν . Cette loi, connue sous le nom de loi de Beer-Lambert, est purement empirique ; cependant, sa forme peut trouver une interprétation simple.

Considérons un faisceau lumineux se propageant suivant la direction Ox , pénétrant dans la solution en $x = 0$ avec une intensité $I(0)$ et émergeant en $x = l$, avec une intensité $I(l)$. Appelons $I(x)$, son intensité à l'abscisse x quelconque entre 0 et l , et $I(x + dx)$, celle qu'il a après avoir parcouru le trajet élémentaire supplémentaire dx . On peut faire l'hypothèse simple suivante sur l'atténuation du faisceau lumineux : la variation de l'intensité entre les deux abscisses voisines, $I(x + dx) - I(x)$, est proportionnelle au nombre de molécules absorbantes présentes dans la solution sur le trajet du faisceau, donc à $N_A \cdot c \cdot dx$ et à l'intensité du faisceau en x . Ainsi, $I(x + dx) - I(x) = -\kappa N_A \cdot c \cdot dx \cdot I(x)$, κ caractérisant l'interaction d'une molécule avec le champ du rayonnement. Or $I(x + dx) - I(x) = \frac{dI}{dx}(x) \cdot dx$, d'où

$$\frac{dI}{dx} = -\kappa \cdot N_A \cdot c \cdot I,$$

que l'on peut réaménager en

$$\frac{dI}{I} = -\kappa \cdot N_A \cdot c \cdot dx;$$

pour sommer cet effet sur toutes les tranches d'épaisseur dx , il suffit d'intégrer sur x de 0 à l et pour I , de $I(0)$ à $I(l)$, il vient :

$$\int_{I(0)}^{I(l)} \frac{dI}{I} = -\kappa \cdot N_A \cdot c \cdot \int_0^l dx,$$

d'où

$$\ln \left(\frac{I(l)}{I(0)} \right) = -\kappa \cdot N_A \cdot c \cdot l.$$

Ainsi, en notant $\varepsilon = \kappa \cdot N_A$ et en remarquant que le membre de gauche de l'égalité précédente est égale à $-A$, on retrouve la loi de Beer-Lambert.

17

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| V | F | V | F |

- a.** En effet, la formation du cadmium métallique est le résultat de la réduction des ions Cd^{2+} présents dans la solution, réduction qui se produit par définition à la cathode du générateur, c'est-à-dire sa borne négative.
- b.** À l'anode du générateur se produit une oxydation qui ne peut être que celle de l'eau dans le couple $\text{O}_2(g)/\text{H}_2\text{O}(l)$: il se dégage donc du dioxygène à l'anode.
- c.** Voir explication à la réponse précédente.

d. La réduction des ions cadmium (II) se traduit par la réaction : $\text{Cd}_{(aq)}^{2+} + 2e^- \rightarrow \text{Cd}_{(s)}$. La production d'une mole de cadmium implique la circulation de deux moles d'électrons dans l'électrolyseur. Par conséquent, y produire une masse m (une tonne) de cadmium (de masse molaire M) en une durée t (24 h) nécessite qu'une charge égale à $2\mathcal{F}m/M$ ait circulé, où \mathcal{F} est un faraday. L'intensité moyenne du courant électrique I est donc $2\mathcal{F}m/(Mt)$, soit, numériquement $I = 2 \times 96,5 \cdot 10^3 \times 10^6 / (112,4 \times 24 \times 3600) \approx 2,0 \cdot 10^4 \text{ A}$.



Les réactions de réduction et d'oxydation sont associées respectivement à la cathode et à l'anode, qu'il s'agisse d'une pile ou d'un électrolyseur.

La relation $I = n_e \mathcal{F} m / (Mt)$ est générale, n_e étant la différence du nombre d'oxydation entre l'oxydant et le réducteur.

18

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| V | F | V | V |

a. En effet, elle est provoquée par la tension qu'un générateur extérieur impose aux bornes de l'électrolyseur.

b. Cf. réponse a. de l'exercice 17. Qui dit « dépôt métallique » à partir des ions dit réduction donc cathode.

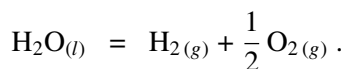
c. Cela est évident puisque les ions cuivre (II) sont consommés par le cuivrage des pièces.

d. La relation générale liant l'intensité du courant électrique, le faraday, la masse de métal déposée, sa masse molaire, le nombre d'électrons impliqués dans la réaction et le temps pendant lequel se fait l'opération permet de déduire $m = ItM / (n_e \mathcal{F})$. Numériquement, $m = 10^3 \times 9650 \times 63,5 \cdot 10^{-3} / (2 \times 96,5 \cdot 10^3) = 6,35 / 2 = 3,175 \text{ kg}$.

19

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| F | F | V | F |

a. C'est naturellement le contraire, la réaction de décomposition de l'eau ayant pour bilan global



b. Le gaz qui produit un tel effet est naturellement l'oxygène. Or, à la cathode se produit la réduction des ions $\text{H}_{(aq)}^+$ en dihydrogène.

c. Le nombre n de moles gazeuses produites à la borne négative du générateur est $n = It/(n_e \mathcal{F})$. Soit, numériquement, $n = 0,360 \times 27 / (2 \times 96,5 \cdot 10^3) \approx 0,5 \cdot 10^{-4}$ mol de $\text{H}_2(\text{g})$. Donc, il s'est dégagé un volume de $nV_m = 1,1$ mL à la cathode.

d. Non, elle est provoquée par le générateur.

20

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| F | F | V | F |

a. L'électrode B, d'après le sens du courant, est l'anode ; il s'y produit une oxydation, celle des ions $\text{Cl}_{(\text{aq})}^-$. Le gaz verdâtre qui se dégage à l'anode est le dichlore qui décolore l'indigo (demandez-vous comment décolorer vos jean's...).

b. Cette électrolyse n'est pas de celle de l'eau. Les deux réactions qui se produisent : à l'anode (électrode B), $2\text{Cl}_{(\text{aq})}^- = \text{Cl}_{2(\text{g})} + 2\text{e}^-$ et à la cathode (électrode A), $2\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})} + 2\text{e}^- = \text{H}_{2(\text{g})} + 2\text{HO}_{(\text{aq})}^-$, les ions hydroxyde étant responsables du virage au rose de la phénolphthaléine. Les demi-bilans montrent que pour une même quantité d'électricité ayant circulé dans l'électrolyseur, autant de dichlore que de dihydrogène a été produit.

c. Si une quantité q d'électricité a traversé le circuit, il y a eu production de $n = q/\mathcal{F}$ moles d'ions hydroxyde qui sont contenus dans le volume $V = 100$ mL du tube. Leur concentration est donc égale à $c = [\text{HO}_{(\text{aq})}^-] = q/(V\mathcal{F})$. Numériquement, $c = 965 / (0,100 \times 96,5 \cdot 10^3) = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$.

d. Il s'est produit moitié moins de moles de dihydrogène ou de dichlore, $n/2$, donc 0,005 mol. Ainsi, en A, il s'est dégagé nV_m , soit 110 mL.



Les ions $\text{Na}_{(\text{aq})}^+$ n'interviennent pas car ils sont d'extrêmement faibles oxydants, incapables de fait de capter les électrons qui leur permettraient de se réduire en $\text{Na}_{(\text{s})}$. Cela vaut d'ailleurs mieux, car le sodium décompose violemment l'eau dès la température ambiante.

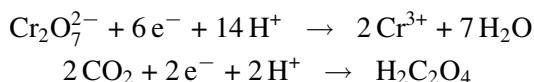
5.3 Cinétique chimique

21

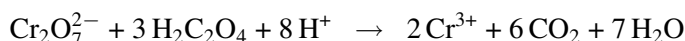
| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| F | F | F | V |

a. Le dioxyde de carbone ne peut qu'être l'oxydant du couple redox $\text{CO}_2/\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$.

b. Les demi-équations redox de chacun des couples sont :



L'équation bilan de la réaction est donc :



$6,00 \cdot 10^{-3}$ mol d'acide oxalique sont apportées dans le mélange alors qu'il n'y a que $1,66 \cdot 10^{-3}$ mol d'ions dichromate dans le mélange initial. La stœchiométrie en aurait nécessité $2,00 \cdot 10^{-3}$ mol.

c. D'après ce qui précède, il est clair que ce sont les ions dichromate qui sont limitants.

d. La réaction est effectivement totale, tous les ions dichromate vont être réduits par l'acide oxalique et le mélange final contiendra $2 \times 1,66 \cdot 10^{-3}$ mol d'ions chrome (III) dans les 200 mL. La concentration finale de ces ions sera donc $16,6 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1}$: la courbe d'évolution de leur concentration dans la solution doit donc tendre vers cette valeur.

22

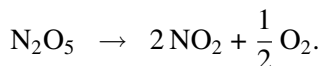
| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| V | V | V | F |

a. En effet, le degré d'oxydation des atomes d'azote dans le pentaoxyde de diazote est +5 ; il n'est que de +4 dans le dioxyde d'azote.

b. Par définition du temps de demi-réaction, on lit sur la courbe que la moitié du réactif initial a disparu au bout de 20 min.

c. L'allure de la courbe invite à le penser ; la constatation que, toutes les vingt minutes, la concentration est divisée par 2, le confirme.

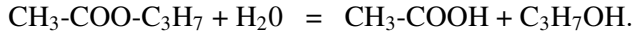
d. L'équation bilan de la réaction est :



Or, on lit sur la courbe que la concentration initiale de pentaoxyde de diazote en solution dans le tétrachlorométhane est $250 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1}$ et on sait qu'on a pris 1 L d'une telle solution. La réaction se produit donc avec $n_i = 250$ mmol initiales en N_2O_5 ; elle produit moitié moins de dioxygène, soit $n_i/2 = 125$ mmol ; eu égard au volume molaire dans les conditions de l'expérience, le volume de dioxygène dégagé est $V_m n_i/2$, soit numériquement $0,125 \times 25 = 3,125 \text{ L}$.

23 Réponse : B.

La réaction en question est traduite par l'équation bilan :



A. La seconde assertion est fausse : sur le graphe de l'évolution de la quantité d'ester qu'elle passe de 0,75 à 0,5. On peut donc estimer que le rendement est de 0,25/0,75 soit 33 %.

B. La tangente à l'origine de la courbe — soit à partir du point de coordonnées (0 min, 0,75 mol) intersecte l'axe du temps vers 85 h ; la valeur absolue du coefficient de cette tangente est égale à la vitesse initiale de la réaction ; soit, numériquement, environ $\left\| \frac{0 - 0,75}{85 - 0} \right\| \approx 8,8 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{h}^{-1}$.

L'hydrolyse de l'éthanoate de propyle conduit à la formation d'acide éthanoïque et de propan-1-ol, alcool *a priori* primaire.

Cf. la justification de la fausseté de A.

La température est effectivement un facteur cinétique qui agit en général dans le sens de l'accroissement de la vitesse de réaction.

C. La réaction est une hydrolyse et la vitesse initiale n'est pas comprise dans l'intervalle donné. Les deux assertions restantes sont vraies.

D. La formule donnée est celle du propanoate d'éthyle. Les autres assertions sont exactes.

E. Une des assertions fausses porte sur l'indifférence de l'état d'équilibre avec la température. En effet, cette dernière intervient à la fois dans la dynamique de la réaction, en l'accélérant, et sur l'état d'équilibre final atteint en modifiant la valeur de la constante. L'eau est un réactif.

On peut se rappeler qu'une réaction exothermique, donc fortement déplacée dans le sens de la formation des produits, voit sa constante d'équilibre diminuer lorsque la température augmente. Cela provient de ce que l'élévation de température due à son caractère exothermique est redondante avec l'élévation de température imposée par les conditions expérimentales ; le système réactionnel réagit donc en diminuant son avancement.

Une réaction endothermique voit, au contraire, l'élévation de température favoriser son avancement, le système réactionnel étant demandeur d'énergie pour réagir.

24

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| V | V | V | V |

a. L'autre couple est $\text{MnO}_4^-_{(aq)} / \text{Mn}^{2+}_{(aq)}$.

b. Le temps de demi-réaction est aussi la durée nécessaire pour atteindre la moitié de l'avancement maximal. La courbe de l'absorbance en fonction du temps et la relation entre l'avancement et l'absorbance permettent d'affirmer que $x_{max} = 2 \cdot 10^{-5}$ avec $A = 0$. Pour un avancement moitié moindre, l'absorbance vaut 1 et le temps au bout duquel elle est effectivement atteinte, est d'environ 650 s.

c. En effet, dans la première expérience, l'acide oxalique est très largement en excès (10^{-3} mol initiales contre $4 \cdot 10^{-5}$ mol pour le permanganate), alors que, dans les nouvelles conditions, il se trouve être le réactif limitant ($5 \cdot 10^{-5}$ mol). Cela signifie que tout le permanganate n'aura pas réagi. La solution conservera une teinte violette plus ou moins intense.

d. L'avancement maximal de la réaction sera $x_{max} = 5 \cdot 10^{-5} / 5 = 10^{-5}$. La concentration initiale et le volume de la solution initiale de permanganate n'ayant pas changé, la relation entre l'avancement de la réaction et l'absorbance demeure la même, puisque l'absorbance n'est modifiée que par cette dernière espèce chimique. Ainsi l'absorbance vaut-elle, d'après la formule, 1.

25

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| F | F | F | V |

a. La réaction étant totale, la valeur asymptotique de l'absorbance est proportionnelle à la valeur maximale de la concentration de diiode formé, c_{max} . Le temps de demi-réaction est donc celui pour lequel on constate que la moitié de la concentration maximale de diiode est atteinte, et par conséquent, celui pour lequel la valeur de l'absorbance est la moitié de la valeur asymptotique, soit $A = 1,25$. Il est égal à environ 6 min.

b. Il y a $C_1 V_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ mol d'ions peroxydisulfate et $C_2 V_2 = 2 \cdot 10^{-4}$ mol d'ions iodure introduites dans le mélange initial.

c. Les $2 \cdot 10^{-4}$ mol d'ions iodure initialement introduites vont former 10^{-4} mol de diiode qui se trouvent dans une solution de volume total égal à $V_1 + V_2 = 20$ mL. La concentration maximale de diiode c_{max} est donc égale à

$$10^{-4} / 20 \cdot 10^{-3} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

d. En se fondant sur la valeur asymptotique, $k = A_{asym} / c_{max}$; soit, numériquement, $k = 2,5 / 5 \cdot 10^{-3} = 500 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$.

26

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| F | V | F | F |

- a. Si le degré chlorométrique est $48,0 \text{ }^\circ\text{Chl}$, 48 L de dichlore ont été nécessaires pour la préparation d'un litre d'eau de javel. Pour 500 mL, il est évident que seuls 24 L auront été nécessaires.
- b. Le nombre de moles d'ions hypochlorite dans un volume donné d'eau de javel est le même que celui de dichlore gazeux utilisé pour la fabriquer. Or, les $V = 48 \text{ L}$ de Cl_2 nécessaires représentent $V/V_m \approx 2,1 \text{ mol}$. Ainsi, pour un litre, $[\text{ClO}_{(aq)}^-] = 2,1 \text{ mol.L}^{-1}$.
- c. L'interprétation des deux séries de courbes est claire : la température accélère la diminution du degré chlorométrique, qu'il y ait ou non de la lumière, alors que l'absence de lumière la ralentit.
- d. Il est clair que la vitesse volumique moyenne de disparition des ions hypochlorite est $0,02/(6 \times 0,250) \approx 13,3 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{mois}^{-1}$.

27 Réponses : 1. $\text{H}_2\text{O}_2 + 2\text{e}^- + 2\text{H}^+ \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}$ et $\text{I}_2 + 2\text{e}^- \rightarrow 2\text{I}^-$.

2. $\text{H}_2\text{O}_2 + 2\text{I}^- + 2\text{H}^+ \rightarrow 2\text{H}_2\text{O} + \text{I}_2$.

3. oxydant : H_2O_2 , réducteur : I^- .

4. quantité de H_2O_2 minimale $0,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$, espèce limitante : I^- .

5. $0,25 \text{ mmol.L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$.

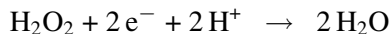
6. $x_{\text{max}} = 10^{-3}/2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ mol}$.

7. 8 min.

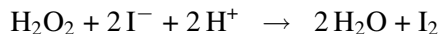
8. 415 nm.

Explications :

1. Les deux demi-équations d'oxydoréduction sont :



2. L'équation-bilan, obtenue en faisant se compenser les deux électrons échangés est :



3. L'espèce chimique oxydante est le peroxyde d'hydrogène, la réductrice est l'ion iodure.

4. La quantité introduite en solution d'ions iodure $50 \cdot 10^{-3} \times 0,02 = 10^{-3} \text{ mol}$. Il faut moitié moins de peroxyde d'hydrogène, donc, $5 \cdot 10^{-4} \text{ mol}$. Or, il a été introduit la même quantité de peroxyde d'hydrogène que d'ions iodure. Le réactif limitant est donc I^- .

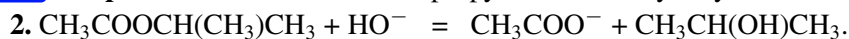
5. La vitesse volumique initiale est donnée par la pente de la tangente à l'origine de la courbe donnant la concentration en diiode en fonction du temps. Sur le graphe, on constate que la tangente passe par l'origine, évidemment, et par le point de coordonnées (10 min, $2,5 \text{ mmol.L}^{-1}$). La vitesse initiale v_0 est donc égale à $2,5 \cdot 10^{-3}/10 = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$.

6. L'avancement maximal de la réaction, considérée comme totale, est par conséquence donné par le rapport du nombre de moles du réactif limitant introduit sur son coefficient stoechiométrique dans l'équation-bilan de la réaction. Ainsi, $x_{max} = 10^{-3}/2 = 5 \cdot 10^{-4}$ mol.

7. Le temps de demi-réaction, parce que la réaction est totale, est aussi celui nécessaire à la formation de la moitié de la quantité finale de diiode, que la réaction permet d'obtenir. En concentration, c'est le temps nécessaire pour atteindre la concentration en diiode $[I_2] = 1,25 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1}$. $t_{1/2} = 8$ min.

8. S'il paraît jaune-orangé, le diiode absorbe donc les lumières verte et bleue, donc les courtes longueurs d'onde du visible. Parmi les longueurs d'onde proposées, 415 nm convient.

28 Réponses : 1. éthanoate de 2-propyle ou de méthyléthyle.



3.a Cf. formules semi-développée ci-après, 3.b fonction carboxylate et fonction alcool.

4. 5,1 g.

5. cf. schéma ci-après.

6. $\text{S} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1}$.

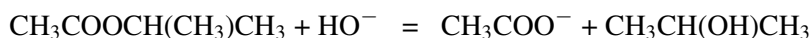
7. $G(t) = G_0 + kx (\lambda_{B^-} - \lambda_{\text{HO}^-}) / V$.

8. 15 s.

Explications :

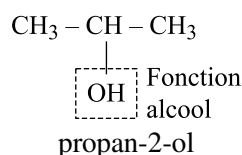
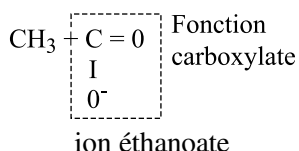
1. La base conjuguée éthanoate est liée au radical fourni par l'alcool par l'atome de carbone central de sa chaîne carbonée. Il peut être dénommé éthanoate d'isopropyle ou éthanoate de méthyléthyle ou de 1-méthyléthyle.

2. L'équation bilan de la réaction entre l'ester et la soude est :



la séparation se produisant au niveau de la base conjuguée acétate.

3.a



3.b Les fonctions intervenant sur chacun des produits sont la fonction carboxylate sur l'ion éthanoate et la fonction alcool sur l'isopropanol.

4. La formule de l'ester *E* conduit à une masse molaire égale à $102 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. La réaction se fait mole à mole, donc il faut au moins 0,05 mol de l'ester, soit une masse minimale égale à $102 \times 0,05 = 5,1$ g.

5. Désignons par BA l'ester, B⁻ l'ion acétate et AOH, l'alcool. L'équation bilan de la réaction est son tableau d'avancement associé donne

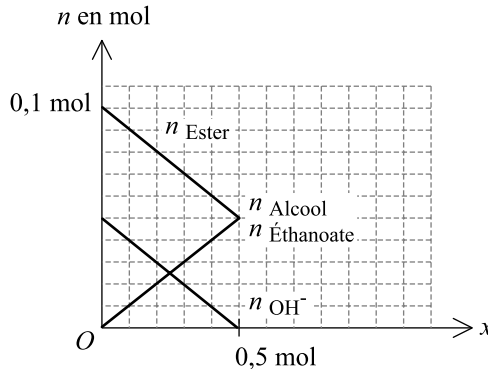
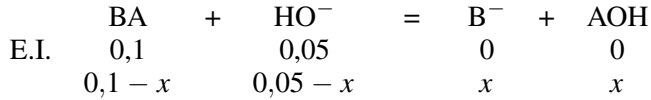


Figure 5.18

6. La conductance est l'inverse de la résistance. Or, la résistance a la dimension de l'inverse du produit d'une longueur par une conductivité. Cette dernière s'exprime en S.m⁻¹. Par ailleurs, la conductivité a la dimension du produit de la conductivité molaire ionique λ et de la concentration molaire c . λ s'exprime donc en S.m².mol⁻¹.

7. La conductance $G(t)$ vaut $k\sigma(t)$, avec $\sigma(t)$ la conductivité de la solution. Or, celle-ci est égale à $c_{B^-} \cdot \lambda_{B^-} + c_{HO^-} \cdot \lambda_{HO^-}$; d'après le tableau d'avancement la concentration en ions acétate est x/V , celle en ions hydroxyde, $(0,05 - x)/V$. D'où

$G(t) = k \left(\frac{x}{V} \lambda_{B^-} + \frac{0,05 - x}{V} \lambda_{HO^-} \right)$. Comme à $t = 0$, le degré d'avancement est nul, $G_0 = k \cdot 0,05 \cdot \lambda_{HO^-} / V$. La formule donnée en solution en découle.

8. La linéarité de la conductance G avec l'avancement de la réaction, si on désigne par x_{max} l'avancement maximal de la réaction, permet d'écrire les relations suivantes :

$$G_{\infty} = G_0 + \frac{kx_{max}}{V} (\lambda_{B^-} - \lambda_{HO^-}),$$

et

$$G_{t/2} = G_0 + \frac{kx_{max}}{2V} (\lambda_{B^-} - \lambda_{HO^-}).$$

Il en résulte

$$\frac{G_{\infty} - G_0}{G_{t/2} - G_0} = 2,$$

soit

$$G_{t_{1/2}} = \frac{1}{2}(G_{\infty} + G_0).$$

Or, $G_0 \approx 180 \text{ mS}$, $G_{\infty} \approx 68 \text{ mS}$, d'où $G_{t_{1/2}} = 124 \text{ mS}$. Il suffit de repérer sur la courbe l'antécédent de 124 mS , soit environ 15 s .

29

| a. | b. | c. | d. |
|----|----|----|----|
| F | V | V | F |

- a.** La réaction d'un acide avec un alcool est une estérification.
- b.** L'acide fournit sa base conjuguée, le méthanoate, et l'alcool fournit le radical, radical -pentyl, qui vient se greffer sur le méthanoate pour former l'ester.
- c.** L'expérience commence avec 600 mmol d'acide méthanoïque. Le temps de demi-réaction, étant celui au bout duquel la moitié d'un des réactifs a disparu, est effectivement de 50 h .
- d.** 400 mmol d'acide méthanoïque ayant réagi, le taux d'avancement final est égal à $400/600 \approx 0,67$, soit 67% .