

OSCILLATEURS

Plan (Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)

I.	Oscillateur harmonique.....	1
II.	Oscillateur amorti.....	3
III.	Portrait de phase des oscillateurs harmonique et amorti.....	4
IV.	Oscillations forcées.....	5
V.	Oscillations couplées.....	7
VI.	Analogie électromécanique.....	10

On s'intéresse à un système à un degré de liberté, noté ici x .

I. Oscillateur harmonique.

Il est régi par l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

ou

$$\dot{x} + \omega_0^2 x^2 = \text{cste} \quad (\text{forme « intégrale 1^{ère} »})$$

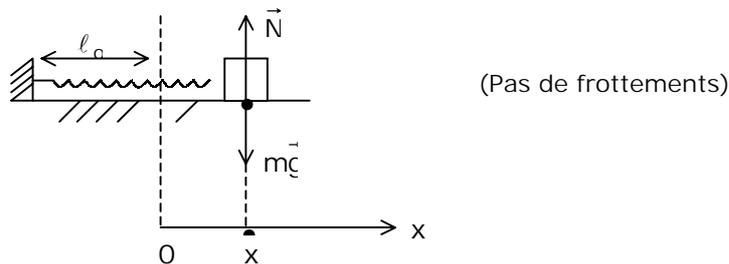
La solution étant sinusoïdale de pulsation ω_0 et période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (A \text{ et } \varphi \text{ déterminés à l'aide des C.I.)$$

I.1. Oscillateurs harmoniques « vrais » :

L'oscillation est harmonique, quelle que soit son amplitude.

Ex. : - pendule élastique (si on reste dans le domaine d'élasticité du ressort).



$$E_m = \text{cste} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \quad (E_p \text{ pesanteur} = \text{cste, donc n'intervient pas}).$$

Soit : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$

si

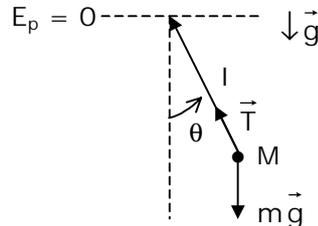
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Pendule cycloïdal (cf exercice)

1.2. Oscillateurs harmoniques « approchés » :

L'oscillation n'est harmonique que pour de faibles amplitudes.

Ex. : pendule simple



Il y a conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2} m (\dot{\theta})^2 - mgl \cos \theta = \text{cste}$$

Pour theta faible : $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$, donc :

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \omega_0^2 \theta^2 = \text{cste} , \quad \text{si} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

Rem. : dans le cas général, l'oscillation est périodique non sinusoïdale. L'intégrale 1^{ère} permet de calculer la période :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m (\dot{\theta})^2 - mgl \cos \theta &= - mgl \cos \theta_M \\ \Rightarrow \dot{\theta}^2 &= 2 \omega_0^2 (\cos \theta - \cos \theta_M) = 4 \omega_0^2 \left(\sin^2 \frac{\theta_M}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

Pendant la phase ascendante du pendule :

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = 2 \omega_0 \sqrt{\sin^2 \frac{\theta_M}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}} > 0$$

Par séparation des variables, on tire :

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_M}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = 2 \omega_0 dt$$

Puis en intégrant sur un quart de période (de 0 à θ_M) :

$$\int_{\theta=0}^{\theta_M} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_M}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = 2 \omega_0 \frac{T}{4} = \Pi \frac{T}{T_0}$$

Ainsi :

$$T = \frac{T_0}{\Pi} \int_0^{\theta_M} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_M}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

(Un logiciel mathématique permet alors de calculer numériquement T, pour une valeur donnée de θ_M).

II. Oscillateur amorti.

Reprenons l'exemple du pendule élastique, pour lequel on tient compte désormais d'une force de frottement fluide (« résistance de l'air ») proportionnelle à la vitesse ; on néglige toujours tout frottement solide.

L'équation du mouvement est cette fois :

$$m \ddot{x} = -kx - \underbrace{f \dot{x}}_{\text{frottement fluide}}$$

On obtient ainsi une équation différentielle linéaire du 2^e ordre à coefficients constants.

En posant :

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{k}{m} \\ \frac{\omega_0}{Q_0} = 2 \sigma \omega_0 = \frac{f}{m} \end{cases}$$

l'équation s'écrit sous forme canonique :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q_0} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Cette équation est strictement identique à celle obtenue dans le cours d'électrocinétique pour un système linéaire du 2^e ordre (type RLC).

Rappelons donc simplement les résultats suivants :

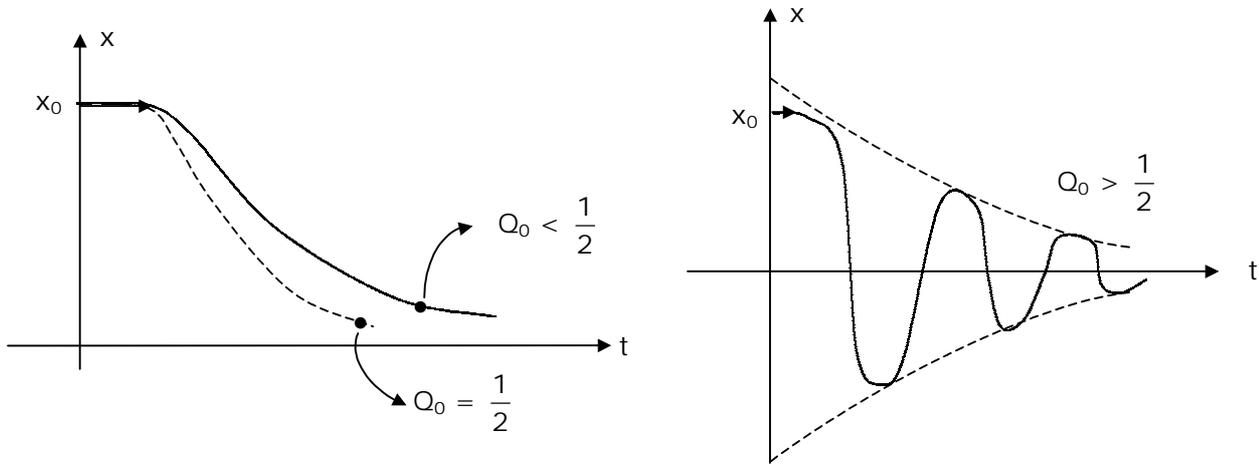
- i) $Q_0 < \frac{1}{2}$: amortissement fort, régime apériodique (non oscillatoire)
- ii) $Q_0 = \frac{1}{2}$: régime critique
- iii) $Q_0 > \frac{1}{2}$: amortissement faible (cas usuel dans l'air), régime pseudopériodique (oscillatoire).

De plus, le système est ici dissipatif : $E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ diminue au cours du temps.

Si $Q_0 \gg 1$, on a :

$$\begin{cases} Q_0 = 2 \Pi \left(\frac{E_m}{\Delta E_m} \right) \\ E_m(t) \approx E_m(0) e^{-2t/\tau}, \text{ si } \tau = \frac{2 Q_0}{\omega_0} \end{cases} \quad (\Delta E_m = E_m(t) - E_m(t + T), \text{ pertes d'énergie pendant une pseudopériode}).$$

On peut rappeler enfin l'allure des courbes $x(t)$, pour $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$:



III. Portrait de phase des oscillateurs harmonique et amorti.

III.1. Définition :

Pour un point M en mouvement unidimensionnel, on appelle portrait de phase la courbe décrite dans le plan $(x, \overset{\circ}{x})$ par ce point au cours du temps.

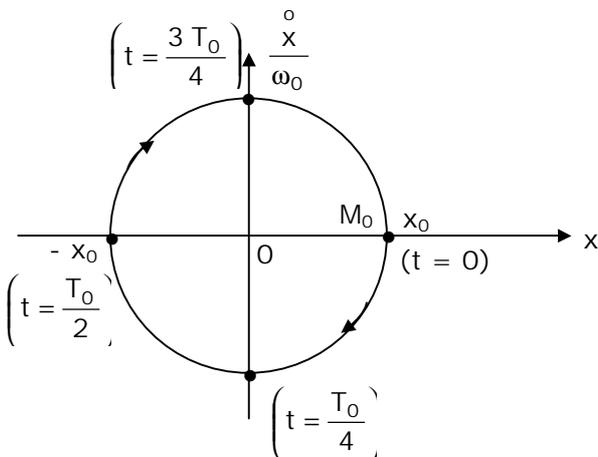
III.2. Cas de l'oscillateur harmonique.

On a : $\overset{\circ}{x}^2 + \omega_0^2 x^2 = cste$

Le portrait de phase est donc une ellipse.

En général, on préfère se placer dans un plan $(x, \frac{\overset{\circ}{x}}{\omega_0})$; alors $\left(\frac{\overset{\circ}{x}}{\omega_0}\right)^2 + x^2 = cste$

Dans ce plan, le portrait de phase est un cercle.



$$t = 0 : \begin{cases} x = x_0 \\ \overset{\circ}{x} = 0 \end{cases} \quad (\text{Point } M_0)$$

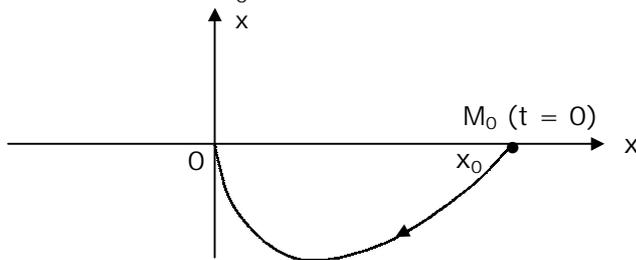
Ce cercle est décrit périodiquement dans le sens rétrograde.

On voit que, en « renversant le temps », le point repasse par le même cercle, ce qui traduit la réversibilité du mouvement.

III.3. Cas de l'oscillateur amorti.

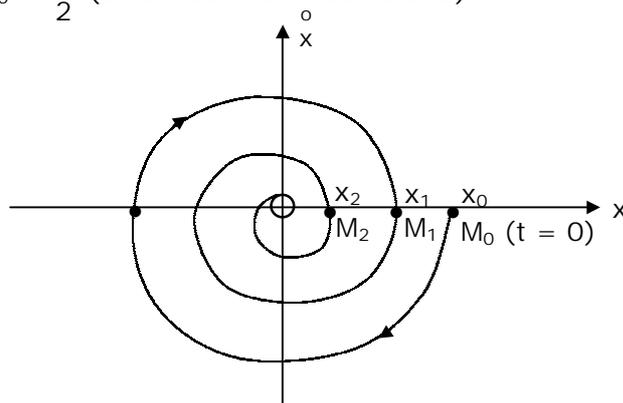
Le portrait de phase n'est pas une courbe connue ; on peut en donner son allure, dans les deux cas, oscillant et non oscillant.

- 1^{er} cas : $Q_0 \leq \frac{1}{2}$ (amortissement non oscillatoire)



$$t = 0 \quad \left| \begin{array}{l} x = x_0 \\ \dot{x} = 0 \end{array} \right.$$

- 2^e cas : $Q_0 > \frac{1}{2}$ (amortissement oscillatoire)



Le portrait de phase a l'allure d'une spirale décrite dans le sens rétrograde. Les points M_k correspondent aux instants $t_k = kT$, si T est la pseudopériode.

Rem. : • Pour $Q_0 > \frac{1}{2}$, on peut « lire » l'amortissement (donc la valeur de Q_0) sur le portrait de phase.

Par exemple, on peut déterminer le décrément logarithmique $\delta = \ln \left(\frac{x_k}{x_{k+1}} \right) = \frac{\omega_0}{2Q_0} T$

• Dans les 2 cas, le renversement du temps ne fait pas repasser par le même point : l'oscillation est irréversible (terme en \dot{x} dans l'équation différentielle, modifié par le changement $t \rightarrow -t$).

IV. Oscillations forcées.

On applique une force sinusoïdale $F \cos \omega t$ à l'oscillateur amorti étudié en II.

On peut par exemple relier l'extrémité du ressort (masse m) à un vibreur imposant cette contrainte sinusoïdale.

D'une manière plus générale, cette force pourra constituer une « composante spectrale » d'une contrainte externe non sinusoïdale (secousse sismique, passage d'un camion). On cherche à

étudier la réponse mécanique du système à une telle contrainte, en particulier les éventuelles résonances, qui pourront mettre en danger la structure (pont par exemple).

L'équation différentielle régissant le système est alors :

$$m \ddot{x} = -kx - f \dot{x} + F \cos \omega t, \quad \text{soit :}$$

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q_0} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} \cos \omega t \quad (1)$$

On retrouve une équation différentielle strictement analogue à celle qui régit, en électrocinétique, un circuit du 2e ordre en régime sinusoïdal forcé.

Une méthode simple consiste à utiliser la notation complexe.

IV.1. Etude de la résonance en élongation (x).

Cherchons une solution :

$$x(t) = X \cos(\omega t + \varphi) \leftrightarrow \underline{x}(t) = \underbrace{X e^{j\varphi}}_{\underline{X}} e^{j\omega t}$$

L'équation (1) devient :

$$\left(-\omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q_0} + \omega_0^2 \right) \underline{X} = F/m$$

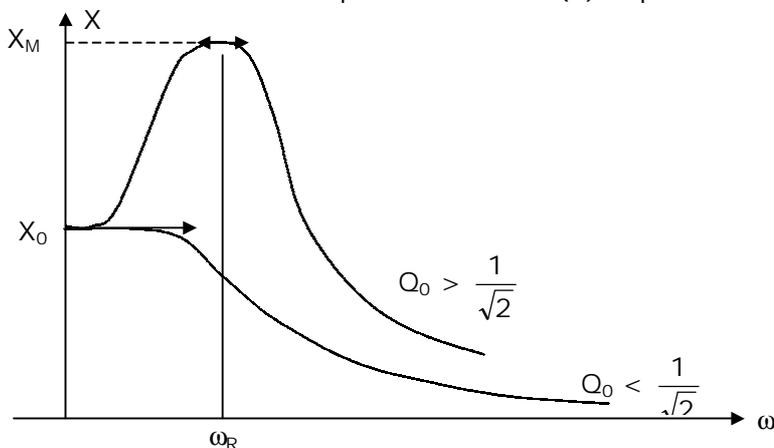
Soit :

$$\underline{X} = \frac{X_0}{1 - u^2 + j u/Q_0} \quad \begin{cases} X_0 = F/m\omega_0^2 \\ u = \frac{\omega}{\omega_0} \end{cases}$$

On obtient donc un « filtre mécanique » passe-bas du 2^e ordre :



Le filtre a été étudié en électrocinétique. La courbe $X(\omega)$ dépend de la valeur de Q_0 .



Il y a résonance en élongation (et danger pour les structures mécaniques) si $Q_0 > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Si

$$Q_0 \gg 1 : \begin{cases} \omega_R \approx \omega_0 \\ X_M \approx Q_0 X_0 \gg X_0 \end{cases}$$

IV.2. Etude de la résonance en vitesse ($v = \dot{x}$).

En dérivant (1) par rapport au temps, on obtient :

$$\ddot{v} + \frac{\omega_0}{Q_0} \dot{v} + \omega_0^2 v = \frac{d}{dt} \left(\frac{F}{m} \cos \omega t \right)$$

Et en notation complexe :

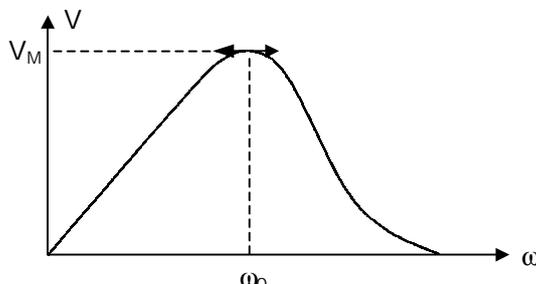
$$\left(-\omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q_0} + \omega_0^2 \right) \underline{v} = j \omega \frac{F}{m} e^{j\omega t}$$

En posant

$$\underline{v} = \underline{V} e^{j\omega t}, \text{ on tire :}$$

$$\underline{V} = \frac{j \omega \frac{F}{m \omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{\omega_0 Q_0}}$$

Il s'agit cette fois d'un filtre mécanique passe-bande du 2^e ordre, étudié également en électronique.



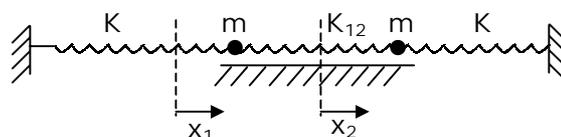
Il y a donc toujours résonance, pour $\omega = \omega_0$.

V. Oscillations couplées.

Deux éléments mécaniques sont dits couplés si la position de l'un influence celle de l'autre. Nous excluons ici toute étude générale et proposons de donner deux exemples.

V.1. Couplage par élasticité.

On considère un système (symétrique) de 3 ressorts et 2 points mobiles :



Il n'y a aucun frottement, et les ressorts ont leur longueur naturelle lorsque $x_1 = x_2 = 0$.
L'application de la RFD à chacun des deux éléments donne :

$$\begin{cases} m \ddot{x}_1 = -Kx_1 - K_{12}(x_1 - x_2) \\ m \ddot{x}_2 = -Kx_2 - K_{12}(x_2 - x_1) \end{cases} \quad (I)$$

On obtient ainsi un système de deux équations différentielles linéaires du 2e ordre, couplées.
On peut mettre ce système sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{K}{m} - \frac{K_{12}}{m} & \frac{K_{12}}{m} \\ \frac{K_{12}}{m} & -\frac{K}{m} - \frac{K_{12}}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Recherchons une solution sinusoïdale de pulsation ω , appelée « mode propre » d'oscillation.

Alors $\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, et $(-\omega^2)$ est donc valeur propre λ de la matrice du système.

On obtient λ par :

$$\begin{vmatrix} -\frac{K_{12}}{m} - \frac{K}{m} - \lambda & \frac{K_{12}}{m} \\ \frac{K_{12}}{m} & -\frac{K_{12}}{m} - \frac{K}{m} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{K_{12}}{m} + \frac{K}{m} + \lambda \right) = \pm \frac{K_{12}}{m}$$

Ainsi, on a 2 valeurs propres λ_1 et λ_2 associées à 2 pulsations propres ω_1 et ω_2 :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{K}{m} = -\omega_1^2 \\ \lambda_2 = -\frac{K}{m} - \frac{2K_{12}}{m} = -\omega_2^2 \end{cases}$$

- Pour $\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$: $x_1(t) = x_2(t)$, $\forall t$

Les deux éléments oscillent en phase, et le ressort de couplage ne joue aucun rôle.

- Pour $\omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{K}{m} + \frac{2K_{12}}{m}}$: $x_1(t) = -x_2(t)$, $\forall t$

Les deux éléments oscillent en opposition de phase ; $\frac{x_1 + x_2}{2} = 0$, et tout se passe comme si chaque élément était relié à un ressort de raideur K et un « demi-ressort de couplage » de raideur $2 K_{12}$.

(On peut montrer que les ressorts s'associent comme les capacités en électrocinétique, cf. analogie en 5.6).

Nous admettrons ensuite que la solution la plus générale est une combinaison linéaire des 2 modes propres d'oscillation :

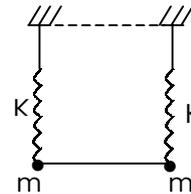
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \end{pmatrix}}_{1^{\text{er}} \text{ mode}} + \alpha_2 \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ -\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{pmatrix}}_{2^{\text{e}} \text{ mode}}$$

Les 4 constantes d'intégration α_1 , α_2 , φ_1 , φ_2 s'obtiennent à partir des 4 conditions initiales : $x_1(0)$, $x_2(0)$, $\dot{x}_1(0)$ et $\dot{x}_2(0)$.

Rem. : une autre méthode de résolution consiste à « découpler » le système (I) par somme et différence des 2 équations.

V.2. Couplage par inertie.

Considérons un système de 2 ressorts couplés par une tige :



Cet exemple nécessite quelques éléments de mécanique des systèmes ; il serait traité dans le chapitre 8.

VI. Analogie électromécanique.

L'analogie est précisée dans le tableau ci-dessous :

Electricité	Mécanique
q	x
$i = \overset{\circ}{x}$	$v = \overset{\circ}{x}$
L	m
R	f
$\frac{1}{C}$	K
$L \overset{\circ\circ}{q} + R \overset{\circ}{q} + \frac{q}{C} = \dots$ (RLC série)	$m \overset{\circ\circ}{x} + f \overset{\circ}{x} + kx = \dots$ (pendule élastique)
$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$	$\omega_0^2 = \frac{K}{m}$
$\frac{\omega_0}{Q_0} = \frac{R}{L}$	$\frac{\omega_0}{Q_0} = \frac{f}{m}$
Résonance pour q	Résonance pour x
Résonance pour i	Résonance pour v
$W_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$	$E_p = \frac{1}{2} kx^2$
$W_m = \frac{1}{2} L i^2$	$E_c = \frac{1}{2} mv^2$
$P_J = R i^2$	$ P_{\text{frottement}} = + fv^2$
Couplage inductif	Couplage par inertie
Couplage capacitif	Couplage par élasticité