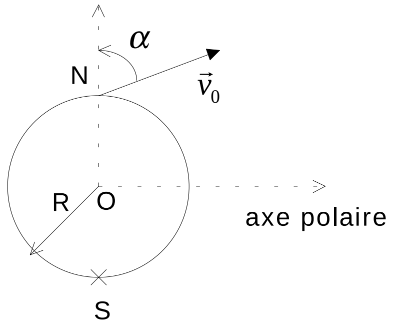
-EXERCICE 15.6-

• ENONCE :

« Missile balistique »



Un missile balistique (donc non propulsé) est lancé du pôle Nord, et doit atteindre le pôle Sud.

On donne: $\alpha = 80°$; $g_0 = 9,81\ m.s^{-2}$; $R = 6400\ km$

Calculer :

p = paramètre de la trajectoire

e = excentricité de la trajectoire

v_0 = vitesse initiale

• CORRIGE :

«Missile balistique »

• L'équation de la trajectoire en coordonnées polaires est : $r = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$; les pôles Nord et Sud étant repérés par des angles opposés ($\pm\pi/2$), et leur distance au foyer de l'ellipse étant identique ($r_N = r_S = R$), l'axe polaire choisi par l'énoncé passe par le périgée et l'apogée de la trajectoire : comme le missile ne doit pas rentrer sous terre avant d'atteindre le pôle Sud, c'est que l'apogée est situé « à droite » du centre de la Terre sur la figure. L'équation devient :

$r = \dfrac{p}{1 - e\cos\theta}$; or, pour $\theta = \pm\pi/2$, $r = R$ $\Rightarrow$ $\boxed{p = R = 6400\ km}$

• D'autre part, on peut se servir de la formule :

$$p = R = \frac{C^2}{GM_T} = \frac{C^2}{g_0 R^2} \Rightarrow C^2 = g_0 R^3 = (R v_0 \sin\alpha)^2 \Rightarrow \boxed{v_0 = \frac{\sqrt{g_0 R}}{\sin\alpha} = 8{,}05\ km/s}$$

• Le calcul de l'excentricité est plus délicat, puisque les données concernent des angles $\theta = \pm\pi/2$, ce qui ne fait plus intervenir e dans l'expression de r.

Il faut donc une relation où $\cos\theta$ soit transformé en $\sin\theta$, par l'intermédiaire d'une dérivée par exemple ; ceci suggère de passer par la vitesse en $\theta = \pi/2$, d'où :

- ♦ vitesse en coordonnées polaires : $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$
- ♦ d'autre part, l'examen de la figure montre que :

$$\cot\alpha = -\left.\frac{v_r}{v_\theta}\right|_{\theta=\pi/2} = -\left.\frac{dr/dt}{r \times d\theta/dt}\right|_{\theta=\pi/2} = -\left.\frac{dr/d\theta}{r}\right|_{\theta=\pi/2} = -\left.\frac{\dfrac{-p\sin\theta \times e}{(1-\cos\theta)^2}}{\dfrac{p}{1 - e\cos\theta}}\right|_{\theta=\pi/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{e = \cot\alpha = 0{,}176}$$