

# Mathématiques pour l'électricien

## Transformées de Laplace, de Fourier et en Z

par **Claude ROUXEL**

*Ingénieur de l'École Supérieure d'Électricité*

*Enseignant au Conservatoire National des Arts et Métiers*

<b>1. Généralités</b> .....	—	2
1.1 Notations.....	—	2
1.2 Problème des filtres.....	—	2
1.3 Méthodes symboliques.....	—	2
1.4 Transformation de Laplace.....	—	3
1.5 Premier cas particulier : transformée de Laplace usuelle (TL).....	—	3
1.6 Deuxième cas particulier : transformée de Fourier (TF).....	—	3
1.7 Transformée en Z (TZ).....	—	3
<b>2. Transformée de Laplace</b> .....	—	3
2.1 Hypothèses.....	—	3
2.2 Notations.....	—	4
2.3 Premières propriétés.....	—	4
2.4 Propriété fondamentale.....	—	6
2.5 Impulsion de Dirac ( $\delta$ ).....	—	6
2.6 Applications.....	—	6
<b>3. Transformée de Fourier</b> .....	—	8
3.1 Notations.....	—	8
3.2 Formalisme des transformées de Fourier.....	—	8
3.3 Théorie de la transformation de Fourier.....	—	10
3.4 Applications.....	—	12
<b>4. Séries de Fourier</b> .....	—	12
4.1 Séries trigonométriques.....	—	13
4.2 Série de Fourier (SF).....	—	13
4.3 Propriétés.....	—	13
4.4 Calcul.....	—	13
4.5 Applications.....	—	14
<b>5. Transformée en Z</b> .....	—	15
5.1 Domaine d'holomorphie de la TZ.....	—	15
5.2 Exemples fondamentaux.....	—	15
5.3 Transformée d'une fonction échantillonnée.....	—	15
5.4 Propriétés.....	—	16
5.5 Transformées usuelles.....	—	17
5.6 Inversion de la TZ.....	—	18
5.7 Applications.....	—	18

**L**e calcul symbolique permet de déterminer, par le biais de transformations fonctionnelles, la réponse d'un système de transmission linéaire à un signal d'entrée par des voies purement algébriques évitant ainsi la résolution de systèmes différentiels ou d'équations aux dérivées partielles.

De ce point de vue, la transformation cissoïdale exposée au paragraphe « Nombres complexes » constitue une première approche permettant de déterminer le régime permanent d'un système linéaire soumis à une sollicitation sinusoïdale.

Avec la transformée de Laplace usuelle (TL), on dispose d'un outil permettant de déterminer régime permanent et régime transitoire pour une grande classe de signaux analogiques à l'entrée du système. On limite généralement son usage aux fonctions causales, c'est-à-dire nulles pour  $t < 0$ .

La transformation de Fourier (TF) très proche dans sa définition de la TL, si elle se prête peu à l'analyse des signaux usuels, est un outil très puissant fournissant une représentation spectrale du signal et qui trouve tout son intérêt avec l'utilisation de signaux d'entrée nécessitant le recours à la théorie des distributions.

Avec l'apparition et le développement des techniques numériques, il a fallu adapter la TL au traitement des signaux discrets : c'est l'objet de la transformée en Z (TZ).

**Nota :** on se reportera au traité « Sciences fondamentales » pour le calcul symbolique.

# 1. Généralités

## 1.1 Notations

■  $f(t)$  : fonction réelle ou complexe du temps ( $f^*$  : conjuguée).

■  $f(t_0^+) = \lim_{0 < \epsilon \rightarrow 0} f(t_0 + \epsilon)$  ;  $f(t_0^-) = \lim_{0 < \epsilon \rightarrow 0} f(t_0 - \epsilon)$  ;

$$\bar{f}(t_0) = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$$

Si  $f$  continue en  $t_0$  :  $\bar{f}(t_0) = f(t_0)$

■  $f(t) = O[\exp(\alpha t)] (t \rightarrow +\infty)$  ;  $f$  d'ordre exponentiel  $\alpha$  à  $+\infty$  signifie  $|f(t)| \exp(-\alpha t)$  borné pour  $(t \rightarrow +\infty)$ .

On définit de même  $f$  d'ordre exponentiel  $\alpha$  à  $-\infty$ .

L'écriture  $v = O(u)$  pour  $u \rightarrow 0$  signifie que  $v$  tend également vers zéro,  $v/u$  restant borné.

L'écriture  $v = o(u)$  pour  $u \rightarrow 0$  signifie que  $v$  tend également vers zéro, avec  $v/u \rightarrow 0$ .

■ Fonctions translatées :  $\tau_h f(t) = f(t - h)$ .

■ Fonctions symétriques :  $f(t) = f(-t)$ .

■ Fonctions causales :  $f(t) = 0$  pour  $t < 0$ .

**Exemple : échelon de Heaviside.**

$$\gamma(t) = 1, t > 0 ;$$

$$\gamma(t) = 0, t < 0 ;$$

$$\gamma'(0) \text{ n'est pas défini, mais } \bar{\gamma}'(0) = 1/2.$$

Il permet de rendre toute fonction  $f$  causale par le produit

$$\gamma(t) f(t).$$

## 1.2 Problème des filtres

Un système de transmission  $S$  (figure 1) transforme un signal d'entrée (ou action  $f(t)$ ) en signal de sortie (ou réponse)  $g(t)$  :

$$f(t) \mapsto g(t)$$

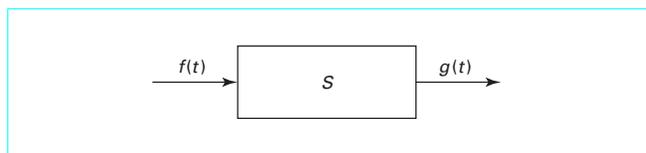


Figure 1 – Système de transmission

■ Le problème du calcul de la réponse à une action quelconque est facilement résoluble pour les filtres, c'est-à-dire les systèmes remplissant les conditions suivantes.

a) **S linéaire :**

$$\sum_{n=1}^N a_n f_n(t) \mapsto \sum_{n=1}^N a_n g_n(t)$$

b) **S stationnaire :**

$$\tau_h f(t) \mapsto \tau_h g(t)$$

**Exemple : circuits passifs**

De a) et b) résulte que le signal particulier  $\exp(\underline{p}t)$  avec ( $\underline{p} = \sigma + j\omega$ ) a une réponse de même forme :

$$H(\underline{p}) \exp(\underline{p}t)$$

( $H(\underline{p})$  : étant la fonction de transfert du système). Ainsi, si :

$$f(t) = \sum_n a_n \exp(\underline{p}_n t) \tag{1}$$

on obtient :

$$g(t) = \sum_n a_n H(\underline{p}_n) \exp(\underline{p}_n t) \tag{2}$$

c) **S continu** exprime qu'avec une notion de convergence appropriée pour  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t)$  on a

$$f_n \mapsto g_n \Rightarrow \lim f_n \mapsto \lim g_n$$

■ On peut étendre les relations (1) et (2) à des séries ou envisager – comme limites de sommes – des intégrales dans le plan complexe des  $\underline{p}$  :

$$f(t) = \int_{\Gamma} F(\underline{p}) \exp(\underline{p}t) d\underline{p} \tag{3}$$

Si on sait ainsi exprimer  $f$ , la réponse est :

$$g(t) = \int_{\Gamma} F(\underline{p}) H(\underline{p}) \exp(\underline{p}t) d\underline{p} \tag{4}$$

## 1.3 Méthodes symboliques

Calculer des filtres revient à déterminer une image de  $f(t)$  sur le plan complexe. On a, alors, la solution :

$$\text{image de la sortie} = H(\underline{p}) \times \text{image de l'entrée} \tag{5}$$

La raison profonde du succès des méthodes symboliques est qu'elles résolvent élémentairement le problème des filtres (§ 1.2).

La dérivation par rapport à  $t$  de l'équation (3) fait présumer que  $f'(t)$  est lié à  $pF(p) \dots f^{(n)}(t)$  à  $p^n F(p)$ ; d'où une **algébrisation** du calcul différentiel (par exemple équations différentielles), qui explique les premières applications techniques du calcul symbolique.

### 1.4 Transformation de Laplace

Une correspondance classique est fournie par la **transformée de Laplace bilatère** :

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt \tag{6}$$

qui, à un facteur près, s'inverse par la relation (3) :  $\Gamma$  verticale appropriée,  $\sigma = Cte$ .

De façon plus précise,  $F(p)$  est holomorphe (cf. [D 33]) dans une bande verticale  $\alpha < \sigma < \beta$  du plan des  $p$  :

- si  $f(t) = O[\exp(\alpha t)]$  ( $t \rightarrow \infty$ ) ;
- si  $f(t) = O[\exp(\beta t)]$  ( $t \rightarrow -\infty$ )
- et si  $\alpha < \beta$ .

Alors, en se bornant à  $f(t)$  continue, et avec  $\Gamma$  dans cette bande :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} F(p) \exp(pt) dp \tag{7}$$

### 1.5 Premier cas particulier : transformée de Laplace usuelle (TL)

Lorsque  $f(t)$  est **causale** (§ 1.1) et que  $f(t) = O[\exp(\alpha t)]$  ( $t \rightarrow \infty$ ), la relation (6) se réduit à :

$$\tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt \tag{8}$$

holomorphe dans le demi-plan  $\sigma > \alpha$  et qui s'inverse, sous certaines conditions (§ 2.3.1), par :

$$\tilde{f}(t) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - jA}^{\sigma_0 + jA} \tilde{f}(p) \exp(pt) dp \tag{9}$$

(pour tout  $\sigma_0 > \alpha$ ).

Le **calcul symbolique** usuel est l'étude des propriétés et des applications de la TL. L'**intérêt** est que la TL est définie pour une grande classe de fonctions, dont les fonctions usuelles [  $\gamma(t)$ ,  $\sin \omega t$ ,  $\cos \omega t$ ,  $\exp(\alpha t) \dots$  ], et, surtout, le calcul symbolique permet la résolution directe des équations différentielles incorporant les conditions initiales. L'**inconvenient** est la servitude d'un domaine d'holomorphie dépendant de la fonction transformée. Il résout enfin directement le problème du filtre (§ 1.2) :

$$\tilde{g}(p) = H(p) \tilde{f}(p) .$$

### 1.6 Deuxième cas particulier : transformée de Fourier (TF)

Lorsque  $\alpha < 0 < \beta$ , on peut intégrer l'équation (7) sur l'axe imaginaire  $p = j\omega = 2\pi j\nu$  :

$$\tilde{f}(t) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \hat{f}(\nu) \exp(2\pi j\nu t) d\nu \tag{10}$$

avec

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-2\pi j\nu t) dt \tag{11}$$

La TF joue un rôle fondamental en **théorie du signal**. Elle constitue une représentation **harmonique** (c'est-à-dire suivant la fréquence  $\nu$ ) des signaux. Malheureusement, dans une théorie élémentaire, elle ne se prête pas à l'analyse des signaux usuels :  $\gamma(t)$ ,  $\sin \omega t \dots$  ; les signaux périodiques n'ont pas de TF.

La relation des filtres  $g(\nu) = H(\nu) f(\nu)$  est moins facile à exploiter. Cependant, des généralisations diverses ont permis de surmonter ces difficultés. La **théorie des distributions** (§ 3.3.4.1), notamment, en a fait un outil d'une puissance considérable, qui, en dehors de certains domaines (automatique, par exemple), permet de se passer du calcul symbolique.

### 1.7 Transformée en Z (TZ)

Avec l'émergence des techniques numériques, il a fallu adapter la TL, utilisée pour des signaux continus, au **traitement des signaux discrets** représentables par une séquence numérique  $u(n)$ , avec  $n$  entier. C'est l'objet de la transformée en Z.

La TZ d'une suite  $u(n)$  représentant une action causale, c'est-à-dire définie pour tout  $t$  positif, est la fonction de la variable complexe  $z$ , notée  $Z\{u, (n)\}$ , définie par la **série entière** en  $1/z$  :

$$Z\{u(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u(n)}{z^n} \quad n \in \mathbb{N} \tag{12}$$

et pour des actions **non causales** par la série de Laurent :

$$Z\{u(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{u(n)}{z^n} \quad n \in \mathbb{Z} \tag{13}$$

Le calcul de la transformation inverse, qui donne les  $u(n)$  à partir de sa transformée  $U(z)$ , entre dans le cadre général du développement d'une fonction complexe en série entière ou en série de Laurent selon le cas (cf. [D 33]). Il suffit d'adapter la formule donnant le coefficient  $A_n$  du développement de  $f(z)$  au développement en  $1/z$  ; cela donne :

$$u(n) = \frac{1}{2j\pi} \int_C U(z) z^{n-1} dz \tag{14}$$

$C$  étant un cercle situé dans le domaine d'holomorphie de  $U$ .

La séquence numérique  $u(n)$  est obtenue par échantillonnage, à une cadence  $T$ , d'un signal analogique  $f(t)$ . Les formules (12), (13) et (14) sont à rapprocher respectivement des formules (8), (6) et (7) pour la TL où le rôle de  $\exp(pT)$  est joué par  $z$ .

## 2. Transformée de Laplace

### 2.1 Hypothèses

La TL d'une fonction causale  $f(t)$ , définie par la relation (8), au sens d'**intégrale de Riemann absolument convergente** ( $t \rightarrow \infty$ ) suppose  $f(t)$  localement (c'est-à-dire sur tout intervalle fini) absolument intégrable. Il en est ainsi notamment pour (cf. [D 32], paragraphe *Analyse. Compléments sur l'intégration*) :

- a)  $f(t)$  continue par morceaux sur les intervalles finis ;

- b)  $f(t)$  à variation bornée sur les intervalles finis ;
- c)  $f(t)$  éventuellement infinie en un point, par exemple en  $t = 0$  ;

alors,  $\int_0^a |f|$  est supposé convergent.

La fonction définie par la relation (8), absolument convergente pour  $\sigma = \sigma_0$ , l'est pour tout  $\sigma > \sigma_0$ . La borne inférieure de tous les  $\sigma$  de convergence absolue est l'abscisse de convergence  $\alpha_f$  d'où l'hypothèse  $f$  d'ordre exponentiel  $\alpha_f$  qui peut être  $\pm \infty$  :

$$f(t) = O[\exp(\alpha_f t)]$$

On peut tirer parti, si elle existe, de la limite de  $\ln \frac{|f(t)|}{t}$

Exemples :

$$\exp(-t^2) : \alpha_f = -\infty$$

$$\exp(t^2) : \alpha_f = +\infty$$

## 2.2 Notations

- $\tilde{f}(p)$ , dit parfois **image** de  $f(t)$ , se note aussi :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = (\mathcal{L}f)(p) = \mathcal{L}f(p) \tag{15}$$

- $f(t)$ , dit aussi **original** de  $\tilde{f}(p)$ , s'écrit, en fonction de son image :

$$\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(p)\} = (\mathcal{L}^{-1}\tilde{f})(t) = \mathcal{L}^{-1}\tilde{f}(t) \tag{16}$$

- Les électriciens utilisent aussi :

$$\tilde{f}(p) \subset f(t)$$

- Le tableau 1 donne les transformées de Laplace des fonctions usuelles.

## 2.3 Premières propriétés

### 2.3.1 Holomorphie

$\tilde{f}(p)$  est holomorphe dans le demi-plan  $\{p : (\sigma > \alpha_f)\}$ . Il peut être commode d'écrire :

$$\tilde{f}(p) \in H(\alpha_f)$$

C'est dans ce domaine que doit être pris le chemin d'intégration des formules d'inversion. Ainsi, on a la relation (8) avec  $\sigma_0 > \alpha_f$ . La TL est indéfiniment dérivable dans ce domaine :

$$\tilde{f}^{(n)}(p) = (-1)^n \int_0^\infty t^n f(t) \exp(-pt) dt$$

Le tableau ci-après donne des exemples.

$f(t)$	$\tilde{f}(p)$	$\alpha_f$	relation
$\gamma(t)$	$\frac{1}{p}$	0	(17)
$\gamma(t)t^\lambda$	$\frac{\Gamma(\lambda+1)}{p^{\lambda+1}}$ ( $\lambda$ réel $> -1$ )	0	(18)
$\gamma(t)\exp(p_0 t)$	$\frac{1}{p-p_0}$	$\text{Re}\{p_0\}$	(19)

- L'exemple (17) montre la corrélation entre les voisinages de  $t = 0^+$  et de  $p = \infty$ . Elle est générale (§ 2.6.4).

- Lorsque  $f(t)$  est de support borné, c'est-à-dire nul pour  $t \geq t_0 > 0$  :

$$\alpha_f = -\infty$$

La TL est une fonction entière.

### 2.3.2 Propriétés indépendantes de la causalité

- Linéarité**

$$\left(\sum a_k f_k\right)^\sim = \sum a_k \tilde{f}_k \tag{20}$$

Exemple :

d'après l'exemple (19), on a :

$$a) \quad \mathcal{L}\{\gamma(t) \sin \omega t\} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \tag{21}$$

$$\mathcal{L}\{\gamma(t) \cos \omega t\} = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \tag{22}$$

- b) si  $\tilde{f} = \frac{P(p)}{Q(p)}$  est une fraction rationnelle de pôles simples  $p_k$  :

$$\tilde{f} = \sum_k \frac{A_k}{(p-p_k)}$$

d'où :

$$f(t) = \gamma(t) \sum_k A_k \exp(p_k t) \tag{23}$$

on suppose  $P$  de degré inférieur à  $Q$ .

- Homothétie**

Pour  $\lambda$  réel positif :

$$\mathcal{L}\{f(\lambda t)\} = \frac{1}{\lambda} \tilde{f}\left(\frac{p}{\lambda}\right) \tag{24}$$

- Translation de  $p$**

Avec  $p_0 = \sigma_0 + j\omega_0$  :

$$\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(p+p_0)\} = \exp(-p_0 t) f(t) \tag{25}$$

dans le demi-plan  $\sigma > \alpha_f - \sigma_0$ .

- Intégration**

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

$$\tilde{F}(p) = \frac{\tilde{f}(p)}{p} \tag{26}$$

avec  $\alpha_F = \max(0, \alpha_f)$ .

Plus généralement :

$$F(t) = \int_0^t \int_0^{\tau_{n-1}} \dots \int_0^{\tau_1} f(\tau) d\tau d\tau_1 \dots d\tau_{n-1}$$

$$\tilde{F}(p) = \frac{\tilde{f}(p)}{p^n} \tag{27}$$

**Tableau 1 – Transformées de Laplace**

$f(t)$ avec $t \geq 0$	$\tilde{f}(p)$	$f(t)$ avec $t \geq 0$	$\tilde{f}(p)$
$\delta(t)$	1		
$t^\lambda$	$\frac{\Gamma(\lambda+1)}{p^{\lambda+1}}$ (1)	$\frac{\exp\left(-\frac{a^2}{4t}\right)}{t^{\lambda+1}}$	$2\left(\frac{2\sqrt{p}}{a}\right)^\lambda K_\lambda(a\sqrt{p})$
$t^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$ (2)	$\frac{\exp\left(-\frac{a^2}{4t}\right)}{t}$	$2K_0(a\sqrt{p})$
1	$\frac{1}{p}$	$\frac{\exp\left(-\frac{a^2}{4t}\right)}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\pi} \frac{\exp(-a\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$
$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2p^{3/2}}$	$\frac{\exp\left(-\frac{a^2}{4t}\right)}{t\sqrt{t}}$	$\frac{2}{a}\sqrt{\pi} \exp(-a\sqrt{p})$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}}$	$\exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right)$	$a\sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(\frac{a^2}{2}p^2\right)[1 - \Theta(a^p)]$
$\exp \lambda t$	$\frac{1}{p-\lambda}$ (3)	$\Theta(at)$	$\frac{\exp\left(\frac{p^2}{2a^2}\right)}{p} \left[1 - \Theta\left(\frac{p}{a}\right)\right]$
$\exp(-\alpha t) \cos \omega t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$	$\Theta\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)$	$\frac{1 - \exp(-a\sqrt{2p})}{p}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\Theta(a\sqrt{t})$	$\frac{a}{p\sqrt{2p^2 + a^2}}$
$\exp(-\alpha t) \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$	Si $at$	$\frac{\text{Arctan}\left(\frac{a}{p}\right)}{p}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	Ci $at$	$-\frac{1}{2p} \log\left(\frac{p^2}{a^2} + 1\right)$
$\text{ch } \lambda t$	$\frac{p}{p^2 - \lambda^2}$	$J_\nu(at)$	$a^{-\nu} \frac{(\sqrt{p^2 + a^2} - p)^\nu}{\sqrt{p^2 + a^2}}$
$\text{sh } \lambda t$	$\frac{\lambda}{p^2 - \lambda^2}$	$I_\nu(at)$	$a^{-\nu} \frac{(p - \sqrt{p^2 - a^2})^\nu}{\sqrt{p^2 - a^2}}$
$\frac{\sin \omega t}{t}$	$\text{Arctan } \frac{\omega}{p}$	$J_0(a\sqrt{t})$	$\frac{\exp\left(-\frac{a^2}{4p}\right)}{p}$

(1)  $\lambda \in \mathbb{C}, \text{Re}\{\lambda\} > -1$

(2)  $n \in \mathbb{N}$

(3)  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

### 2.3.3 Propriétés liées à la causalité

■ **Translation de t**

Pour  $\lambda$  réel positif :

$$\mathcal{L}\{f(t-\lambda)\} = \exp(-p\lambda) \tilde{f}(p) \quad (28)$$

$$\mathcal{L}\{f(t+\lambda)\} = \exp(p\lambda) \tilde{f}(p) - \exp(p\lambda) \int_0^\lambda f(t) \exp(-pt) dt \quad (29)$$

■ **Dérivation**

Si  $f'(t)$  existe avec les mêmes propriétés que  $f(t)$  et si  $f(0^+)$  est fini, on a [avec  $\alpha_f = \max(0, \alpha_f)$ ] :

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = p \tilde{f}(p) - f(0^+) \quad (30)$$

De façon générale (avec les hypothèses ad hoc) :

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = p^n \tilde{f}(p) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) p^{n-k-1} \quad (31)$$

### 2.4 Propriété fondamentale

La convolée de 2 fonctions  $f(t)$  et  $g(t)$  :

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau = (g * f)(t) \quad (32)$$

se réduit, pour des **fonctions causales**, à :

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \quad (33)$$

La transformation de Laplace ramène à un produit ordinaire :

$$(\tilde{f} * \tilde{g})(p) = \tilde{f}(p) \tilde{g}(p) \quad (34)$$

[pour  $\sigma > \max(\alpha_f, \alpha_g)$ ].

**Exemple** : application aux **filtres** :

Si  $g(t)$  est la réponse à  $f(t)$  :

$$\tilde{g}(p) = H(p) \tilde{f}(p) \quad (35)$$

S'il existe une fonction causale  $h(t)$  de TL  $H(p)$  :

$$g(t) = (h * f)(t) \quad (36)$$

Un tel filtre est dit **système de convolution**. La signification de  $h(t)$  est donnée au paragraphe 2.5.

### 2.5 Impulsion de Dirac ( $\delta$ )

C'est le modèle mathématique de l'**impulsion unité** à  $t = 0$ .

Dire que c'est une **fonction**  $\delta(t)$ , nulle partout sauf à l'origine (où elle est infinie) est acceptable, mais ajouter la condition

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$  ne l'est plus. Une telle intégrale est nulle aussi bien au sens de Riemann qu'à celui de Lebesgue (cf. [D 32] paragraphe *Analyse. Intégrale de Riemann et extensions diverses*).

Dire que c'est la **dérivée** de l'échelon de Heaviside conduirait, en utilisant l'exemple (17) et la relation (30) à :

$$\tilde{\delta}(p) = p \tilde{\gamma}(p) - \gamma(0^+) = 1 - 1 = 0$$

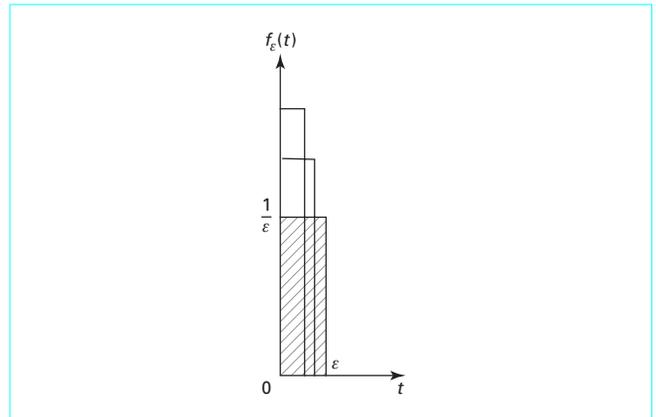


Figure 2 - Impulsion rectangulaire d'aire unité quel que soit  $\varepsilon$

À la rigueur, on pourrait considérer l'impulsion rectangulaire (figure 2) :

$$f_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} [\gamma(t) - \gamma(t-\varepsilon)]$$

$$\tilde{f}_\varepsilon(p) = \frac{1 - \exp(-p\varepsilon)}{p\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1$$

En fait, une définition correcte ne peut être donnée que dans la théorie de la mesure ou dans celle des distributions. Cependant, c'est un outil précieux. On admettra donc qu'il existe un objet mathématique, noté  $\delta$ , original de sa TL égal à 1. Il a pour propriété d'être une **unité de convolution** :

$$\delta * f = f,$$

au sens, ici, de :

$$\tilde{\delta} \tilde{f} = 1 \cdot \tilde{f} = \tilde{f}$$

En particulier, la réponse d'un filtre à l'entrée  $\delta(t)$  serait, d'après la relation (35)  $H(p) \tilde{\delta}(p) = H(p)$ .

C'est pourquoi  $h(t)$  a la signification d'une **réponse impulsionnelle**.

### 2.6 Applications

#### 2.6.1 Équations différentielles (ED)

Soit l'ED linéaire à coefficients constants avec 2<sup>nd</sup> membre :

$$a_0 x^{(n)}(t) + \dots + a_n x(t) = f(t) \quad (37)$$

avec les conditions initiales :  $x(0^+) = x_0, \dots, x^{(n-1)}(0^+) = x_{n-1}$ .

On utilise la relation (31) :

$$\sum_{k=0}^n a_{n-k} \left[ p^k \tilde{x}(p) - \sum_{i=0}^{k-1} x_i p^{k-i-1} \right] = \tilde{f}(p) \quad (38)$$

qui est de la forme :

$$\tilde{x}(p) Q(p) = \tilde{f}(p) + P(p) \quad (39)$$

avec des polynômes  $P$  de degré  $n-1$  et  $Q$  de degré  $n$ .

La solution, **incluant les conditions initiales**, a pour TL :

$$\tilde{x}(p) = \frac{\tilde{f}(p)}{Q(p)} + \frac{P(p)}{Q(p)} \quad (40)$$

d'où, explicitement :

$$x(t) = f(t) * \left( \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{Q} \right)(t) + \left( \mathcal{L}^{-1} \frac{P}{Q} \right)(t) \quad (41)$$

■ Supposons que les zéros  $p_k$  de  $Q$  soient simples. On a :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{Q(p)} &= \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p - p_k} \\ \frac{P(p)}{Q(p)} &= \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{p - p_k} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} A_k &= \frac{1}{Q'(p_k)} \\ B_k &= \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Il en résulte de l'exemple (19) :

$$\left. \begin{aligned} \left( \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{Q} \right)(t) &= \gamma(t) \sum_{k=1}^n A_k \exp(p_k t) \\ \left( \mathcal{L}^{-1} \frac{P}{Q} \right)(t) &= \gamma(t) \sum_{k=1}^n B_k \exp(p_k t) \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

de sorte que :

$$x(t) = f(t) * \gamma(t) \sum_{k=1}^n A_k \exp(p_k t) + \gamma(t) \sum_{k=1}^n B_k \exp(p_k t) \quad (45)$$

■ La relation (40) est holomorphe dans le demi-plan  $\sigma > \max(\alpha_f, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ . La solution n'est bornée, pour  $t > 0$ , que si toutes les racines sont dans le demi-plan  $\sigma < 0$ . Elle correspond à la réponse à  $f(t)$ , d'un filtre **stable** régi par une équation différentielle telle que l'équation (37) (par exemple, circuits à constantes localisées). On sépare alors, dans l'équation (45) la partie **forcée** [par  $f(t)$ ] de la partie transitoire.

**Exemple** : circuit résonnant LC, régi par :

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = f(t) \quad (46)$$

$x(0)$  et  $x'(0)$  étant donnés.

L'équation (45) se réduit à :

$$x(t) = \int_0^t \frac{\sin \omega t}{\omega} f(t - \tau) d\tau + x(0) \cos \omega t + x'(0) \frac{\sin \omega t}{\omega}$$

## 2.6.2 Équations aux dérivées partielles

Ces équations seront supposées linéaires à coefficients constants. Les TL *par rapport au temps* (compte tenu des conditions initiales) ramènent à une équation différentielle en  $x$  (avec conditions aux limites).

**Exemple** :

■ **Ligne infinie** : son régime consiste dans la répartition d'une *tension*  $v(x, t)$  et d'un *courant*  $i(x, t)$  dont on admettra qu'ils vérifient le système d'équations aux dérivées partielles du 1<sup>er</sup> ordre (système des **télégraphistes**) :

$$\left. \begin{aligned} -v'_x &= Ri + Li'_t \\ -i'_x &= Gv + Cv'_t \end{aligned} \right\} (x, t > 0) \quad (47)$$

La ligne est initialement au repos :

$$v(x, 0^+) = i(x, 0^+) = 0$$

et excitée à l'entrée  $x = 0^+$  par une force électromotrice donnée  $v(0^+, t) = V(t)$ .

Le système (47) est communément accepté, avec les 4 constantes linéiques  $R, L, G, C$  (résistance, inductance, conductance, capacité). En fait, il n'a pas grand sens physique sauf en régime sinusoïdal ou, approximativement, en régime lentement variable.

Fixant d'abord  $x$ , on se ramène aux équations différentielles :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}(x, p)}{\partial x} &= -(Lp + R) \tilde{i}(x, p) \\ \frac{\partial \tilde{i}(x, p)}{\partial x} &= -(Cp + G) \tilde{v}(x, p) \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

équivalent à :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{v}(x, p)}{\partial x^2} &= -\gamma^2 \tilde{v}(x, p) = 0 \\ \tilde{i}(x, p) &= \frac{1}{Lp + R} \frac{\partial \tilde{v}(x, p)}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

où  $\gamma = \sqrt{(Lp + R)(Cp + G)}$  est la détermination de la racine carrée dont la partie réelle est positive.

Compte tenu de  $\tilde{v}(0^+, p) = \tilde{V}(p)$ , il vient la **solution bornée** :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{v}(x, p) &= \tilde{V}(p) \exp[-\gamma(p)x] \\ \tilde{i}(x, p) &= \frac{\tilde{V}(p)}{Z(p)} \exp[-\gamma(p)x] \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

avec  $Z(p) = \frac{\sqrt{(Lp + R)}}{\sqrt{(Cp + G)}}$ .

L'exponentielle peut être considérée comme une réponse impulsionnelle [ $\tilde{V}(p) = 1$ ] :  $\tilde{v}_0(x, p)$ , de sorte que :

$$v(x, t) = V(t) * v_0(x, t) \quad (51)$$

■ **Cas particulier**

● **Ligne sans pertes** :  $R = G = 0$  (cas de l'équation des cordes vibrantes) :

$$\tilde{v}(x, p) = \tilde{V}(p) \exp(-\sqrt{LC}px) \quad (52)$$

d'où d'après l'équation (28) :

$$v(x, t) = V(t - \sqrt{LC}x) \quad (53)$$

Le signal  $V$  se propage sans déformation avec la vitesse  $1/\sqrt{LC}$

● **Câble marin** :  $L = G = 0$  (cas de l'équation de la diffusion) :

$$\tilde{v}(x, p) = \tilde{V}(p) \exp(-\sqrt{RC}px) \quad (54)$$

d'où (cf. tableau 1) :

$$v(x, t) = \frac{\sqrt{RC}}{\sqrt{4\pi}} V(t) * \frac{\exp\left(-\frac{RCx^2}{4t}\right)}{t^{3/2}} \gamma(t) \quad (55)$$

### 2.6.3 Calcul d'intégrales

En intégrant l'équation (24) par rapport à  $\lambda$ , on peut établir, avec  $\rho = \sigma$  réel :

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^\infty \tilde{f}(\sigma) d\sigma \quad (56)$$

**Exemple :**

$$\int_0^\infty \frac{\sin \omega t}{t} dt = \int_0^\infty \frac{\omega}{\omega^2 + \sigma^2} d\sigma = \frac{\pi}{2} \quad (57)$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_0^\infty \left( \frac{1}{\sigma+a} - \frac{1}{\sigma+b} \right) d\sigma = \lg \frac{b}{a} \quad (a, b > 0)$$

### 2.6.4 Lemme de Watson

Si  $f(t)$ , continue sur  $\mathbb{R}^+$ , admet, au voisinage de 0, un développement de la forme :

$$f(t) = \sum_{n=1}^\infty a_n t^{\lambda_n - 1} \quad (\lambda \text{ réel } > 0) \quad (58)$$

on a le développement asymptotique :

$$\tilde{f}(\rho) \sim \sum_{n=1}^\infty a_n \frac{\Gamma(\lambda_n)}{\rho^{\lambda_n}} \quad (59)$$

d'où notamment :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-\lambda} f(t) = \lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \frac{\rho^\lambda \tilde{f}(\rho)}{\Gamma(\lambda)} \quad (60)$$

Ainsi, si :

$$\lambda = 1 : \quad \lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \rho \tilde{f}(\rho) = f(0^+) \quad (61)$$

$$\lambda = \frac{1}{2} : \quad \lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \tilde{f}(\rho) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{\pi t} f(t) \quad (62)$$

## 3. Transformée de Fourier

### 3.1 Notations

■ Dans des conditions à préciser, on associe à la fonction complexe de  $t$  réel (par exemple : temps)  $f(t)$ , la fonction complexe de  $v$  réel (par exemple : fréquence) :

$$\hat{f}(v) = \mathcal{F}\{f(t)\} = (\mathcal{F}f)(v) = \mathcal{F}f(v) \left. \begin{aligned} &= \int_{-\infty}^\infty f(t) \exp(-2\pi jvt) dt \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

qui est sa **transformée de Fourier** (TF).

Les électriciens la considèrent comme **représentation spectrale du signal**  $f(t)$ . La dénomination de spectre est abusive. Le **spectre** de  $f(t)$  est, en fait, le support de la TF (adhérence de l'ensemble :

$$\{v : \hat{f}(v) \neq 0\}.$$

Dans certaines conditions, on a la **TF inverse** :

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(v)\} = (\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(v) = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}(v) \left. \begin{aligned} &= \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(v) \exp(2\pi jvt) dv \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

■ L'apparente simplicité, et la symétrie des formules, sont trompeuses et la lecture des tables de transformées de Fourier doit être prudente (§ 3.3).

● On écrit également :

$$F(\omega) = \int f(t) \exp(-j\omega t) dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

ou, plus symétriquement :

$$F_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t) \exp(-j\omega t) dt$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int F_1(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

● On retient :

$$\mathcal{F}\{f(-t)\} = \hat{f}(-v) \quad (65)$$

$$\mathcal{F}\{f^*(t)\} = \hat{f}^*(-v) \quad (66)$$

■ Le tableau 2 donne des transformées de Fourier pour des fonctions usuelles.

### 3.2 Formalisme des transformées de Fourier

■ **Signaux réels**

On a :

$$\hat{f}(v) = A(v) + jB(v) = C(v) \exp[j\varphi(v)] \quad (67)$$

avec  $A$  et  $C$  pairs,  $B$  et  $\varphi$  impairs :

$$\left. \begin{aligned} A(v) &= \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos(2\pi vt) dt \\ B(v) &= - \int_{-\infty}^\infty f(t) \sin(2\pi vt) dt \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Inversement :

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= 2 \int_0^\infty [A(v) \cos(2\pi vt) - B(v) \sin(2\pi vt)] dv \\ &= 2 \int_0^\infty C(v) \cos[2\pi vt + \varphi(v)] dv \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

**Tableau 2 – Transformées de Fourier (1)**

$f(t)$	$\hat{f}(v)$	$f(t)$	$\hat{f}(v)$
$r_\tau(t) = \mathbb{1}_{ t  < \tau/2}(t)$ (2)	$\frac{\sin(\pi\tau v)}{\pi v}$	$\frac{\exp(-a\sqrt{ t })}{\sqrt{ t }}$	$\sqrt{2} \frac{\cos(\sqrt{4\pi a v } + \pi/4)}{\sqrt{v}}$
$\theta_\tau(t) = \left(1 - 2 \frac{ t }{\tau}\right)r_\tau(t)$	$2 \frac{\sin^2(\pi\tau v/2)}{\pi^2 \tau v^2}$	$\frac{1}{\text{chat}}$	$\frac{\pi}{a} \frac{1}{\text{ch}\left(\frac{\pi^2}{a} v\right)}$
$\exp(-at) \mathcal{Y}(t) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{a + 2\pi j v}$	$\frac{1}{(t^2 + a^2)^{\lambda + 1/2}}$	$2\left(\frac{\pi}{a}  v \right)^\lambda \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)} K_\lambda(2\pi a v )$
$\exp(-a t )$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 v^2}$	$\frac{\exp(-2\pi b\sqrt{t^2 + a^2})}{2\sqrt{t^2 + a^2}}$	$K_0(2\pi a\sqrt{v^2 + b^2})$
$\exp(-at^2)$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\pi^2}{a} v^2\right)$	$\frac{\exp(2\pi j b\sqrt{t^2 + a^2})}{\sqrt{t^2 + a^2}}$	$\pi j H_0^{(1)}\left(2\pi a\sqrt{b^2 - v^2}\right) r_{2b}(v)$
$\exp(jat^2)$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left[-j\left(-\frac{\pi^2}{a} v^2 - \frac{\pi}{4}\right)\right]$	$\frac{\cos(2\pi b\sqrt{t^2 + a^2})}{\sqrt{t^2 + a^2}}$	$-\pi N_0\left(2\pi a\sqrt{b^2 - v^2}\right) r_{2b}(v)$ $+ 2K_0(2\pi a\sqrt{v^2 - b^2}) \mathbb{1}_{ v  > b}(v)$
$\frac{1}{\sqrt{ t }}$	$\frac{1}{\sqrt{ v }}$	$\frac{\sin(2\pi b\sqrt{t^2 + a^2})}{\sqrt{t^2 + a^2}}$	$\pi J_0\left(2\pi a\sqrt{b^2 - v^2}\right) r_{2b}(v)$
$\frac{\text{sgn } t}{\sqrt{ t }}$ (3)	$-j \frac{\text{sgn } v}{\sqrt{ v }}$	$\frac{r_{2a}(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}}$	$\pi J_0(2\pi a v)$
$\text{sgn } t r_\tau(t)$	$-2j \frac{\sin^2(\pi\tau v/2)}{\pi v}$	$\frac{\mathbb{1}_{ t  > a}(t)}{\sqrt{t^2 - a^2}}$	$-\pi N_0(2\pi a v )$
$2 \frac{\cos 2\pi a t}{ t }$	$\frac{1}{\sqrt{ v-a }} + \frac{1}{\sqrt{ v+a }}$	$\frac{\cos(2\pi b\sqrt{a^2 - t^2})}{\sqrt{a^2 - t^2}} r_{2a}(t)$	$\pi J_0(2\pi a\sqrt{v^2 + b^2})$
$2 \frac{\sin 2\pi a t}{ t }$	$\frac{1}{\sqrt{ v-a }} - \frac{1}{\sqrt{ v+a }}$	$J_0(2\pi b\sqrt{t^2 - a^2}) (\mathbb{1}_{ t  > a}(t))$	$\frac{1}{\pi} \left[ \frac{\exp(-2\pi a\sqrt{b^2 - v^2})}{\sqrt{b^2 - v^2}} r_{2b}(v) - \frac{\sin(2\pi a\sqrt{v^2 - b^2})}{\sqrt{v^2 - b^2}} \mathbb{1}_{ v  > b}(v) \right]$

(1) La relation  $\mathcal{F}\{\hat{f}(t)\} = f(-v)$  permet de lire la table dans les deux sens.  
 (2)  $\mathbb{1}$  est la fonction indicatrice de l'ensemble intervalle.  
 (3)  $\text{sgn}$  = signe.

**■ Signaux pairs**

$\hat{f}$  a même parité que  $f$ . Si  $f$  est à la fois **réel** et **pair** :

$$\hat{f}(v) = A(v) = 2 \int_0^\infty f(t) \cos(2\pi v t) dt$$

$$\text{et } f(t) = 2 \int_0^\infty A(v) \cos(2\pi v t) dv$$

Pour un signal réel impair,  $\hat{f}(v) = jB(v)$ , avec des formules analogues en sinus.

**Exemple :**

- **Signal rectangle** de durée  $\tau$  :

$$\left. \begin{aligned} r_\tau(t) &= Y\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - Y\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \\ \hat{r}_\tau(v) &= \frac{\sin(\pi \tau v)}{\pi v} \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

- **Signal triangulaire** :

$$\left. \begin{aligned} \theta_\tau(t) &= \left(1 - 2\frac{|t|}{\tau}\right)r_\tau(t) \\ \hat{\theta}_\tau(v) &= 2\frac{\sin^2(\pi \tau v/2)}{\pi^2 \tau v^2} \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

- 

$$\mathfrak{F}\{\exp(-a|t|)\} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 v^2} \quad (72)$$

- 

$$\mathfrak{F}\{\exp(-at^2)\} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\pi^2}{a} v^2\right) \quad (73)$$

■ **Translation de  $t$  ou  $v$**

$$\mathfrak{F}\{f(t - t_0)\} = \exp(-2\pi j v t_0) \hat{f}(v) \quad (74)$$

$$\mathfrak{F}\{\exp(2\pi j v_0 t)\} = \hat{f}(v - v_0) \quad (75)$$

■ **Homothétie**

Pour  $\lambda$  réel :

$$\mathfrak{F}\{f(\lambda t)\} = \frac{1}{|\lambda|} \hat{f}\left(\frac{v}{\lambda}\right) \quad (76)$$

■ **Propriété fondamentale**

$$\mathfrak{F}\{f * g(t)\} = \hat{f}(v) \hat{g}(v) \quad (77)$$

$$\mathfrak{F}\{f(t)g(t)\} = (\hat{f} * \hat{g})(v) \quad (78)$$

■ **Conséquence. Relation de Parseval**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v)\hat{g}^*(v)dv \quad (79)$$

et en particulier :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(v)|^2 dv \quad (80)$$

Si, mathématiquement, la relation exprime la conservation d'un produit scalaire et d'une norme, elle a une signification physique importante ; l'énergie du signal est répartie sur les fréquences avec une densité égale à :

$$|\hat{f}(v)|^2 = C^2(v)$$

Celle-ci est la transformée de Fourier de la convolée (65) et (66) :

$$f(t) * f^*(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) f^*(\tau - t) d\tau \quad (81)$$

dite aussi **fonction de corrélation** de  $f(t)$ .

### 3.3 Théorie de la transformation de Fourier

Le lecteur pourra également se reporter au [AF 143] dans le traité Sciences fondamentales.

#### 3.3.1 Théorie élémentaire

Le dernier membre des équations (63), au sens d'intégrale de Riemann impropre absolument convergente (cf. [D 32]), existe dès que  $|f(t)|$  est intégrable.

$\hat{f}(v)$  est alors **continue, bornée, nulle à l'infini**. Elle est donc d'une autre famille. Il n'y a pas de raison qu'elle soit absolument intégrable.

Les équations (64) ne sont donc légitimes que si  $|\hat{f}(v)|$  est intégrable, auquel cas  $f(t)$  devra être à son tour continue, bornée, nulle à l'infini. L'équation (70), par exemple, ne vérifie pas ces conditions.

Un cas d'inversion, plus général, est le suivant : si  $f(t)$  est à variation bornée sur tout intervalle fini (donc intégrable par Riemann), on la *récupère* à partir de sa TF par :

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}(t) &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \hat{f}(v) \exp(2\pi j vt) dv \\ &= VP \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v) \exp(2\pi j vt) dv \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

la notation VP étant définie en [D 32] (§ Intégrale de Riemann et extensions diverses. Valeur principale de Cauchy).

a) On a – du point de vue numérique – le désagréable phénomène de Gibbs : de part et d'autre d'un point de discontinuité  $t_0$  la convergence, simple, se fait par ondulations de part et d'autre de  $f(t)$ , oscillations qui s'atténuent en se resserrant, sauf les deux plus voisines de  $t_0$  dont les amplitudes restent finies.

b) Il ne suffit pas qu'une fonction soit continue et nulle à l'infini pour être une TF, par exemple :

$$\left\{ \begin{aligned} g(v) &= 1/\ln v \text{ pour } v \geq e, \\ g(v) &= v/e \text{ pour } 0 \leq v \leq e, \\ g(-v) &= -g.v. \end{aligned} \right.$$

#### 3.3.2 Dérivation

En dérivant l'équation (63) en  $v$  :

$$\mathfrak{F}\{t^n f(t)\} = \left(\frac{-1}{2\pi j}\right)^n \hat{f}^{(n)}(v) \quad (83)$$

corrélativement :

$$\mathfrak{F}\{f^{(n)}(t)\} = (2\pi j v)^n \hat{f}(v) \quad (84)$$

$t^n f(t)$  absolument intégrable entraîne  $\hat{f}(v)$   $n$  fois continûment dérivable ;

$f(t)$   $n$  fois dérivable entraîne  $\hat{f}(v) = o(1/v^n)$  ( $v \rightarrow \infty$ ) (§ 1.1).

Une fonction est d'autant plus régulière que la TF tend plus vite vers zéro à l'infini. En théorie des distributions, on utilise des fonctions à la fois indéfiniment dérivables et rapidement décroissantes à l'infini (c'est-à-dire plus vite que tout  $v^{-n}$ ). La TF conserve leur ensemble.

a) Chaque dérivation revient à multiplier la TF par  $2\pi j v$ , d'où l'emploi de celle-ci dans l'étude des équations différentielles et aux dérivées partielles (§ 3.4.2).

b) Ce qui précède est à rapprocher du phénomène suivant qu'on peut observer sur les équations (70) à (73) : une TF est d'autant plus **étalée** que la fonction l'est moins. Les signaux brefs ont des spectres larges. Un signal de durée finie ne peut pas avoir un spectre borné.

### 3.3.3 Rôle de l'intégrale de Lebesgue

■ L'intégrale de Lebesgue (cf. [D 32]) facilite la théorie des TF, moins par le fait qu'elle permet d'intégrer des fonctions sophistiquées que par ses propriétés plus simples que celles de l'intégrale de Riemann, notamment dans les problèmes de convergence. La transformation de Fourier a un cadre beaucoup plus naturel dans l'espace vectoriel  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  qui est **complet** pour la norme :

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$$

En fait on opère sur des classes de fonctions équivalentes au sens de l'égalité presque partout, c'est-à-dire de distance

$$\|f - g\|_1 = 0.$$

■ **Inversion par noyaux de convergence** : soit une suite  $\{\varphi_n(t)\}$ ,  $\varphi_n$  réelle positive paire, dont l'intégrale sur  $\mathbb{R}$  est égale à 1 et vérifiant la propriété de **concentration** :

$$\forall h > 0 : \int_{-h}^h \varphi_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

La suite des convoluées  $\varphi_n * f$ ,  $f$  intégrable, converge alors vers  $f$  au sens de la norme précédente.

Corrélativement :

$$\hat{\varphi}_n(v) \rightarrow 1 \text{ avec } \hat{\varphi}_n(v) \hat{f}(v) \rightarrow \hat{f}(v).$$

On peut choisir des  $\hat{\varphi}_n$  tels que les produits  $\hat{\varphi}_n \hat{f}$  restent intégrables même si  $\hat{f}$  ne l'est pas. On récupère alors  $f(t)$  par la limite :

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\delta}^{-1} \{ \hat{\varphi}_n(v) \hat{f}(v) \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_n(v) \hat{f}(v) \exp(2\pi j vt) dv \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

**Exemple :**

● cf. relation (71) :

$$\hat{\varphi}_n(v) = \left(1 - \frac{|v|}{n}\right)_{2n}(v)$$

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin^2(\pi nt)}{\pi^2 n t^2}$$

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \left(1 - \frac{|v|}{n}\right) \hat{f}(v) \exp(2\pi j vt) dv \quad (86)$$

● cf. relation (73) :

$$\hat{\varphi}_n(v) = \exp(-v^2/n^2)$$

$$\varphi_n(t) = n\sqrt{\pi} \exp(-\pi^2 n^2 t^2)$$

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v) \exp\left(-\frac{v^2}{n^2} + 2\pi j vt\right) dv \quad (87)$$

Cette méthode, extrêmement puissante, peut être utilisée en calcul numérique. En théorie des distributions, les  $\varphi_n$  convergent dans un certain sens, vers le  $\delta$  de Dirac, unité de convolution (une suite telle que  $\{\varphi_n\}$  est dite **unité approchée**). Il apparaît ainsi que la TF de  $\delta$  serait 1.

On peut être tenté par une théorie qui ferait jouer des rôles symétriques à  $f$  et  $\hat{f}$ . L'emploi de l'espace  $\mathcal{L}^2$  des fonctions de carré intégrable le permet. Il n'a pas un grand intérêt technique.

### 3.3.4 Généralisations

#### 3.3.4.1 Distributions

Avec cette théorie (L. Schwartz, 1947) la TF devient un outil extrêmement puissant. Des fonctions usuelles telles que  $f(t) = Cte$ ,  $\gamma(t)$ ,  $\sin \omega t, \dots$  qui n'ont pas de TF au sens ordinaire, en ont une au sens des distributions. Il en est de même d'être mathématiques plus généraux que les fonctions, dérivables dans un certain sens, tels  $\delta$  [noté aussi, mais symboliquement,  $\delta(t)$ ],  $\delta^{(n)}(t)$ ,  $\delta(t-a) = \tau_a \delta(t)$ , etc.  $\delta$  est lui-même la dérivée de  $\gamma(t)$ . On établit ainsi le tableau qui suit.

$f$	$\hat{f}$	
1	$\delta(v)$	
$t^n$	$\left(-\frac{1}{2\pi j}\right)^n \delta^{(n)}(v)$	(88)
$\exp(2\pi j at)$	$\delta(v-a)$	
$\cos(2\pi j at)$	$[\delta(v-a) + \delta(v+a)]/2$	
$\sin(2\pi j at)$	$[\delta(v-a) - \delta(v+a)]/2j$	
$\delta(t)$	1	
$\delta^{(n)}(t)$	$(2\pi j)^n$	
$\delta(t-a)$	$\exp(-2\pi j av)$	

En fait, les physiciens et les ingénieurs utilisent de tels résultats, même si leur justification laisse parfois à désirer. La transformation est d'un emploi plus simple et plus sûr que la transformation de Fourier usuelle. Elle rend pratiquement inutile la transformation de Laplace (§ 2), sur laquelle elle a l'avantage d'être parfaitement symétrique (ce que la TF usuelle n'est pas), de s'appliquer aux fonctions causales ou non, de prendre aussi bien en compte des conditions initiales...

Les relations (88) justifient l'écriture :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[2\pi j(y-y')x] dx = \delta(y-y')$$

rencontrée en physique quantique.

Ce tableau donne un sens à la TF d'un polynôme.

Les **signaux**, cas particuliers des fonctions dites presque périodiques, combinaisons linéaires d'exponentielles, ont une TF :

$$\hat{\delta} \left\{ \sum_k A_k \exp(2\pi j v_k t) \right\} = \sum_k A_k \delta(v - v_k) \quad (89)$$

interprétée comme spectre de raies. En particulier, pour les signaux périodiques,  $v_k = k/T$  :

$$\hat{\delta} \left\{ \sum_k A_k \exp\left(2\pi j k \frac{t}{T}\right) \right\} = \sum_k A_k \delta\left(v - \frac{k}{T}\right) \quad (90)$$

#### 3.3.4.2 Transformée de Fourier-Stieltjes

Quoique cas particulier de la précédente elle ressortit à l'analyse classique. On la rencontre en probabilités (fonctions caractéristiques).  $\varphi(t)$  étant une fonction à variation bornée sur tout intervalle fini, par exemple une fonction réelle croissante, on définit :

$$\Phi(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi j vt) d\varphi(t) \quad (91)$$

La transformée de Fourier usuelle est le cas particulier  $\varphi(t)$  dérivable :

$$d\varphi(t) = \varphi'(t) dt.$$

Un autre cas est celui d'une fonction de sauts :  

$$d\varphi(t) = a_k \delta(t - t_k)$$

sauf  $d\varphi(t_k) = a_k$ , où :

$$\Phi(v) = \sum_k a_k \exp(-2\pi j t_k v) \tag{92}$$

est une fonction presque périodique.

On pourrait, de façon analogue, considérer :

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2\pi j vt) dg(v) \tag{93}$$

qui se prête à la représentation des signaux dont les spectres sont indifféremment continus, de raies ou le mélange des deux. Dans ce cas, on prend  $g(v)$  fonction réelle croissante, **fonction spectrale** du signal  $G(t)$ .

**Exemple** : avec l'échelon de Heaviside :

$$\begin{aligned} dY(t) &= 0, \\ dY(0) &= 1, \end{aligned}$$

l'équation (91) donne :

$$\Phi(v) = 1.$$

C'est une autre façon, rigoureuse, de justifier que 1 est la transformée de Fourier de  $\delta$ .

### 3.4 Applications

#### 3.4.1 Équations aux dérivées partielles

**Exemple : problème de Dirichlet** : il s'agit de trouver une fonction harmonique  $u(x, y)$ , dans le demi-plan  $y > 0$ , avec, sur la frontière  $y = 0$ , des valeurs prescrites :

$$u(x, 0^+) = f(x)$$

La transformée de Fourier en  $x$ ,  $\hat{u}(\lambda, y)$  de :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{94}$$

conduit pour  $\lambda$  fixé à l'ED :

$$\frac{d^2 \hat{u}}{dy^2} - 4\pi^2 \lambda^2 \hat{u} = 0 \tag{95}$$

de solution bornée :

$$\hat{u}(\lambda, y) = \hat{f}(\lambda) \exp(-2\pi \lambda y) \tag{96}$$

vérifiant :

$$\hat{u}(\lambda, 0^+) = \hat{f}(\lambda)$$

Alors, compte tenu des relations (72) et (77), il vient :

$$u(x, y) = f(x) * \frac{y}{\pi(x^2 + y^2)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \frac{y}{(x' - x)^2 + y^2} dx' \tag{97}$$

#### 3.4.2 Théorie du signal

##### 3.4.2.1 Relations d'incertitude

Soit  $f(t)$  réel d'énergie finie (c'est-à-dire de carré intégrable).

L'équation (80) donne, après normation :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(v)|^2 dv = 1$$

Interprétant  $f^2(t)$  comme une densité de probabilité avec un centre  $t_0 = \int t f^2(t) dt$ , de part et d'autre duquel s'étale le signal, la **variance** :

$$T^2 = \int (t - t_0)^2 f^2(t) dt$$

définirait une **durée utile** :  $(t_0 - T, t_0 + T)$ .

On peut, de même, définir un **spectre utile**  $(-F, F)$  :

$$F^2 = \int v^2 |\hat{f}(v)|^2 dv$$

L'inégalité de Schwarz conduit à la **relation dite d'incertitude** (c'est le même calcul qu'en physique quantique) :

$$TF \geq \frac{1}{4\pi} \tag{98}$$

qui montre que la corrélation signal bref-spectre large (ou inversement) est un phénomène général.

##### 3.4.2.2 Signaux de spectre borné

Soit  $\hat{f}(v)$  nul hors d'un intervalle  $(-F, F)$ . Le signal  $f(t)$  est une fonction entière qui a deux propriétés importantes.

■ **Théorème d'échantillonnage** :  $f(t)$  est entièrement déterminée par la suite de ses valeurs aux instants  $\left\{ \frac{n}{2F} \right\}$  avec  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2F}\right) \frac{\sin[\pi(2Ft - n)]}{\pi(2Ft - n)} \tag{99}$$

■ **Théorème de Bernstein** : si  $f(t)$  est, en outre, borné :

$$|f(t)| < M$$

il en est de même de toutes ses dérivées ( $f$  entière est indéfiniment dérivable) :

$$|f^{(n)}(t)| \leq (2\pi F)^n M \tag{100}$$

Le théorème signifie que les signaux à spectre borné ont une variation lente (due au filtrage des hautes fréquences).

##### 3.4.2.3 Signaux causaux

$f(t) = 0$ , pour  $t < 0$ , implique que  $A(v)$  et  $B(v)$  sont liés par une **transformation dite de Hilbert** :

$$\left. \begin{aligned} A(v) &= \frac{1}{\pi} VP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(v')}{v - v'} dv' \\ B(v) &= -\frac{1}{\pi} VP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(v')}{v - v'} dv' \end{aligned} \right\} \tag{101}$$

Le symbole VP (cf. § 3.3.1) a été défini au [D 32].

## 4. Séries de Fourier

Le lecteur pourra également se reporter au [AF 141] dans le traité Sciences fondamentales.

### 4.1 Séries trigonométriques

Ce sont des séries de la forme :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) + b_n \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) \right] \tag{102}$$

Le terme d'indice  $n$  étant de période  $\frac{T}{n}$ ,  $T$  est une période commune à tous les termes.

Il est plus commode de l'écrire sous la forme complexe :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{A}_n \exp\left(2\pi j n \frac{t}{T}\right) \tag{103}$$

en prenant :

$$\underline{A}_n = \underline{A}_{-n}^* = \frac{a_n - j b_n}{2} \tag{104}$$

Lorsque la série des modules  $\sum_n |\underline{A}_n|$  converge (ou la série  $\sum (|a_n| + |b_n|)$ ), la série (103) converge absolument et uniformément vers une fonction continue  $f(t)$  périodique, de période  $T$ . On a alors, sur tout intervalle  $I$  égal à une période :

$$\underline{A}_n = \frac{1}{T} \int_I f(t) \exp\left(-2\pi j n \frac{t}{T}\right) dt \tag{105}$$

ou encore :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_I f(t) \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) dt \tag{106}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_I f(t) \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) dt \tag{107}$$

$A_0 = a_0/2$  est la valeur moyenne de  $f(t)$  sur une période.

On prend habituellement :

$$I = (0, T) \text{ ou } I = (-T/2, T/2).$$

Ce sont les **formules de Fourier**.

### 4.2 Série de Fourier (SF)

Inversement, à toute fonction périodique, intégrable sur une période,  $f(t)$ , on peut associer, par l'expression (105), la suite  $\{\underline{A}_n(f)\}$  de ses coefficients de Fourier et, formellement, sa série de Fourier (SF) :

$$f(t) \approx \sum_n \underline{A}_n(f) \exp\left(2\pi j n \frac{t}{T}\right) \tag{108}$$

Il n'est pas évident que la série converge (simplement, en moyenne, en moyenne quadratique, etc.) ni que sa somme soit précisément  $f(t)$ . Si oui,  $f(t)$  est représentée par son développement en SF.

La **convergence** est celle des suites partielles :

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^N \underline{A}_n(f) \exp\left(2\pi j n \frac{t}{T}\right)$$

■ La fonction de départ peut n'être définie que sur un intervalle borné, par exemple  $(0, T)$ . On peut encore lui associer sa SF. Celle-ci est périodique et représente, indifféremment,  $f(t)$  sur  $(0, T)$  ou la

somme des translattées,  $\sum_n \tau_n f(t)$ , périodique, sur  $\mathbb{R}$ , ou inversement, une fonction périodique ou son *motif* restreint à une période. Toutefois, la continuité doit impliquer :

$$f(0) = f(T).$$

■ Les cas de  $f(t)$  **continue** ou à **variation bornée** (cf. [D 32] *Notion du presque partout*) suffisent pour la pratique (en fait, on ne rencontre guère que des fonctions continues par morceaux sur chacun desquels le nombre des maximums ou des minimums est fini).

### 4.3 Propriétés

#### ■ Dérivation et intégration

L'intégration terme à terme renforce la décroissance des coefficients. Toutefois, une primitive n'est périodique que si  $A_0 = 0$ .

On peut dériver terme à terme, pourvu que la série obtenue soit la série de Fourier de  $f'(t)$ .

#### ■ Translation

Soit  $f(t - a) = g(t)$ . On a la règle :

$$\underline{A}_n(g) = \exp\left(-2\pi j n \frac{a}{T}\right) \underline{A}_n(f) \tag{109}$$

En particulier, pour :

$$\left. \begin{aligned} a = T/2 & : \underline{A}_n(g) = (-1)^n \underline{A}_n(f) \\ a = T/4 & : \underline{A}_n(g) = (-j)^n \underline{A}_n(f) \\ a = -T/4 & : \underline{A}_n(g) = j^n \underline{A}_n(f) \end{aligned} \right\} \tag{110}$$

#### ■ Convolution

La convolée de 2 fonctions  $f(t)$  et  $g(t)$  de même période  $T$  est définie par :

$$(f * g)(t) = h(t) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t') g(t - t') dt' = \frac{1}{T} \int_0^T f(t - t') g(t') dt' \tag{111}$$

celle de 2 suites par :

$$\{\underline{A}_n\} * \{\underline{B}_n\} = C_n = \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \underline{A}_m \underline{B}_{n-m} \right\} \tag{112}$$

Alors :

$$\underline{A}_n(f * g) = \underline{A}_n(f) \underline{A}_n(g) \tag{113}$$

$$\{\underline{A}_n(fg)\} = \{\underline{A}_n(f)\} * \{\underline{A}_n(g)\} \tag{114}$$

On en déduit le **théorème de Parseval** :

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\underline{A}_n|^2 \tag{115}$$

qui, outre sa signification énergétique, trouve sa véritable portée dans l'espace  $\mathcal{L}^2(0, T)$ .

### 4.4 Calcul

#### 4.4.1 Symétries

Elles sont indiquées tableau 3.

Tableau 3 – Symétries

Fonctions paires	Fonctions impaires
$f(-t) = f(t) \quad : b_n = 0$	$f(-t) = -f(t) \quad : a_n = 0$
$f(-t) = f(t) \text{ et } f\left(\frac{T}{2}-t\right) = f(t) : b_n = 0 \text{ et } a_{2n+1} = 0$	$f(-t) = -f(t) \text{ et } f\left(\frac{T}{2}-t\right) = f(t) : a_n = 0 \text{ et } b_{2n} = 0$
$f(-t) = f(t) \text{ et } f\left(\frac{T}{2}-t\right) = -f(t) : b_n = 0 \text{ et } a_{2n} = 0$	$f(-t) = -f(t) \text{ et } f\left(\frac{T}{2}-t\right) = -f(t) : a_n = 0 \text{ et } b_{2n+1} = 0$

4.4.2 Relation avec les transformées de Fourier

Le motif  $g(t) = f(t)r_T(t)$  admet une TF (par exemple tableau 2). Les coefficients de Fourier de  $f(t)$  sont alors donnés par :

$$A_n = \frac{1}{T} \hat{g}\left(\frac{n}{T}\right) \tag{116}$$

Exemple :

• Créneau (figure 3 a) :

$$(\alpha = \tau/T) ; \quad g(t) = r_\tau(t)$$

D'après la relation (70), on a :

$$\hat{g}(v) = \frac{\sin(\pi v \tau)}{\pi v} \tag{117}$$

d'où, compte tenu de l'expression (103) :

$$f(t) = \alpha + \frac{2}{\pi} \sum_1^\infty \frac{\sin(n\pi\alpha)}{n} \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) \tag{118}$$

• Dents de scie (figure 3 b) :

$$\alpha = \tau/T \quad g(t) = \theta_\tau(t)$$

D'après la relation (71), on a :

$$f(t) = \frac{\alpha}{2} + \frac{4}{\pi^2 \alpha} \sum_1^\infty \frac{\sin^2(n\pi\alpha/2)}{n^2} \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) \tag{119}$$

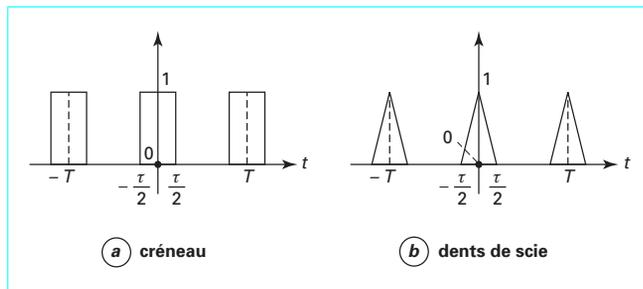


Figure 3 – Signaux périodiques

4.4.3 Relation avec les fonctions analytiques

Associons à  $f(t)$ , de période  $2\pi$ ,  $f(z) = f(t+jy)$  qu'on supposera holomorphe dans une bande horizontale :  $\alpha < y < \beta$ .

Par la transformation  $z = -j \ln u$  il vient :

$$f(-j \ln u) = F(u)$$

holomorphe dans la couronne  $\exp(-\alpha) < |u| < \exp(-\beta)$ .

À la série de Laurent de celle-ci (cf. [D 33]) :

$$F(u) = \sum_{n=-\infty}^\infty (A_n u^n)$$

correspond :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^\infty [A_n \exp(jnz)]$$

Si  $\alpha \beta < 0$  [ce qui suppose  $f(t)$  analytique], on retrouve la SF pour  $y = 0$ .

Exemple : série de Fourier de :

$$f(t) = \frac{1}{1 - 2\lambda \cos t + \lambda^2}, \quad |\lambda| < 1$$

Il suffit d'observer que :

$$\frac{1 + \lambda \exp(jt)}{1 - \lambda \exp(jt)} = \frac{1 - \lambda^2 + 2j\lambda \sin t}{1 - 2\lambda \cos t + \lambda^2}$$

donc de partir de :

$$\frac{1 + \lambda z}{1 - \lambda z} = 1 + 2 \sum_{n=1}^\infty \lambda^n z^n$$

d'où la partie réelle :

$$f(t) = \frac{1}{1 - \lambda^2} + \frac{2}{1 - \lambda^2} \sum_{n=1}^\infty \lambda^n \cos nt \tag{120}$$

On a de même :

$$\frac{\sin t}{1 - 2\lambda \cos t + \lambda^2} = \sum_{n=1}^\infty \lambda^{n-1} \sin nt \tag{121}$$

4.5 Applications

4.5.1 Formules sommatoires

Soit  $\varphi(t)$  de transformée de Fourier  $\hat{\varphi}(v)$ . Les sommes de translatées  $\varphi(t - nT)$  et  $\hat{\varphi}(v - nF)$  sont des fonctions périodiques. On a :

$$\sum_{n=-\infty}^\infty \varphi(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^\infty \hat{\varphi}\left(\frac{n}{T}\right) \exp\left(2\pi j n \frac{t}{T}\right) \tag{122}$$

$$\sum_n \hat{\varphi}(v - nF) = \frac{1}{F} \sum_n \varphi\left(\frac{n}{F}\right) \exp\left(2\pi j n \frac{v}{F}\right) \tag{123}$$

qui généralisent les SF, appliquées  $\varphi(t)$  de support  $(0, T)$ . On peut changer  $n$  en  $-n$ .

Pour  $t = 0, T = 1$ , on retrouve la **formule de Poisson** :

$$\sum_n \varphi(n) = \sum_n \hat{\varphi}(n) \tag{124}$$

qui permet de calculer les sommes de certaines séries, notamment d'accélérer leur convergence.

Le **théorème d'échantillonnage** est une application de l'équation (123), au cas de  $\hat{\varphi}$  de support borné  $(-F, F)$ . Il suffit de prendre la transformée de Fourier inverse de :

$$\left. \begin{aligned} \hat{\varphi}(v) &= \sum_n \hat{\varphi}(v - 2nF) r_{2F}(v) \\ &= \frac{1}{2F} \sum_n \varphi\left(\frac{n}{2F}\right) r_{2F}(v) \exp\left(2\pi j n \frac{v}{2F}\right) \end{aligned} \right\} \tag{125}$$

### 4.5.2 Problème de Dirichlet sur un disque

On cherche  $u(r, \theta)$ , sur le disque unité, vérifiant :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \tag{126}$$

et prenant, sur le contour, des valeurs prescrites :  $u(1^-, \theta) = f(\theta)$ .  $u$  est périodique, de période  $2\pi$ , en  $\theta$ . Pour chaque  $r$ , on a la SF :

$$u(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(r) \exp(jn\theta) \tag{127}$$

L'équation (126) entraîne :

$$r^2 A_n''(r) + r A_n'(r) - n^2 A_n(r) = 0$$

vérifié :

- par  $r^{|n|}$  pour  $n \neq 0$  ;
- par  $\ln r + Cte$  pour  $n = 0$

la régularité en 0 impose donc  $A_0(r) = Cte$ .

On peut donc écrire l'équation (127) sous la forme :

$$u(r, \theta) = \sum_n \lambda_n r^{|n|} \exp(jn\theta) \tag{128}$$

Pour  $r = 1$ , on a les  $\lambda_n$  par :

$$f(\theta) = \sum_n \lambda_n \exp(jn\theta) \tag{129}$$

Or, d'après l'équation (120) :

$$\sum_n r^{|n|} \exp(jn\theta) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} \tag{130}$$

D'où, suivant la relation (114) :

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= f(\theta) * \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta') \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\theta')+r^2} d\theta' \end{aligned} \tag{131}$$

## 5. Transformée en Z

### 5.1 Domaine d'holomorphic de la TZ

La définition de la TZ [relation (12)] suppose la série entière convergente ; on sait qu'une série  $\sum_{n=0}^{\infty} u(n)z^n$  converge sur un disque centré à l'origine et dont le rayon est éventuellement infini. Puisque c'est  $\frac{1}{|z|}$  que l'on doit borner, il y a ici convergence à l'extérieur d'un disque de rayon  $R$ .

Pour les signaux non causaux, la série de Laurent [relation (13)] converge à l'intérieur d'une couronne

$$R_1 < |z| < R_2.$$

### 5.2 Exemples fondamentaux

Les deux suites ci-après jouent un rôle analogue à celui de la distribution de Dirac  $\delta$  (§ 2.5) et de la fonction échelon de Heaviside  $\gamma$  (§ 1.1) pour la TL.

■ **Suite de Dirac**  $\delta = \{1, 0, \dots, 0, \dots\}$

Bien que ce soit un abus d'écriture, il est d'usage de la noter comme la distribution associée, la confusion n'étant guère possible dans la pratique. La série se réduit à son premier terme, les autres étant nuls :

$$Z\{\delta\} = 1 \tag{132}$$

convergence pour tout  $z$ .

■ **Suite échelon unité**  $\gamma = \{1, 1, \dots, 1, \dots\}$

La TZ est une série géométrique de raison  $\frac{1}{z}$  dont la somme et le rayon de convergence sont bien connus :

$$Z\{\gamma\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1} \tag{133}$$

convergence pour  $|z| > 1$ .

### 5.3 Transformée d'une fonction échantillonnée

La suite soumise à la TZ représente la numérisation d'un signal  $f(t)$  à l'entrée d'un système de transmission.

Cette numérisation est obtenue par échantillonnage d'une fonction continue  $f$  selon une période  $T$  (figure 4), c'est-à-dire qu'on ne retient que les valeurs  $f(nT)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  :

$$f_T^* = \{f(0), f(T), f(2T), \dots, f(nT), \dots\}.$$

La définition (12) nous fournit la TZ de la séquence échantillonnée  $f^*$

$$Z\{f_T^*\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(nT)}{z^n} \tag{134}$$

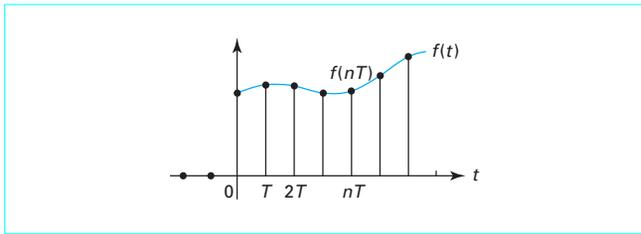


Figure 4 – Échantillonnage d'une fonction continue  $f$

**Lien avec la transformée de Laplace**

La formule (134) est en fait l'adaptation de la TL à la suite numérique  $f_T^*$  ; on peut écrire (134) à l'aide de la suite de Dirac retardée de  $nT$  :

$$f_T^*(n) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT) \tag{135}$$

En effet, pour  $t = kT$  ( $k$  entier), le seul terme non nul de la somme est obtenu pour  $n = k$  et on a alors  $f_T^*(k) = f(kT)$ .

Pour tout  $t \neq kT$ , tous les  $\delta$  sont nuls.  
Par analogie, posons :

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT)$$

$\delta$  désignant maintenant la distribution de Dirac ; appliquons à  $\varphi$  la TL :

$$\tilde{\varphi}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\tilde{\delta}(t-nT)$$

D'après la formule du retard (28), on a :

$$\tilde{\delta}(t-nT) = \exp(-pnT)$$

et, en posant  $\exp(pT) = z$  :

$$\tilde{\delta}(t-nT) = \frac{1}{z^n}$$

d'où :

$$\tilde{\varphi}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(nT)}{z^n}$$

formule qui rappelle (134).

**5.4 Propriétés**

La transformée en  $z$  étant l'adaptation aux suites de la transformée de Laplace d'une fonction, les propriétés entre ces deux transformations sont très voisines.

**5.4.1 Linéarité**

$u_1$  et  $u_2$  étant deux suites et  $a_1$  et  $a_2$  deux nombres quelconques, on a :

$$Z\{a_1 u_1 + a_2 u_2\} = a_1 Z\{u_1\} + a_2 Z\{u_2\} \tag{136}$$

La démonstration est immédiate à partir de la définition.

**5.4.2 Suite avancée de  $k$  termes**

Une suite avancée de  $k$  par rapport à une suite  $\{u(n)\}$  (figure 5), est la suite obtenue en supprimant les  $k$  premiers termes de la suite  $\{u(n)\}$ , c'est-à-dire la suite  $v = \{u(n+k)\}$ .

On a alors :

$$Z\{u(n+k)\} = z^k Z\{u(n)\} - \sum_{m=0}^{k-1} u(m)z^{k-m} \tag{137}$$

et, en particulier :

$$Z\{u(n+1)\} = zZ\{u(n)\} - z^0 u(0) \tag{138}$$

**Démonstration :**

$$Z\{u(n+k)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u(n+k)}{z^n} = z^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u(n+k)}{z^{n+k}}$$

En posant  $n+k = m$ , il vient :

$$\begin{aligned} Z\{u(n+k)\} &= z^k \sum_{m=k}^{\infty} \frac{u(m)}{z^m} = z^k \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u(m)}{z^m} - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{u(m)}{z^m} \right) \\ &= z^k Z\{u\} - \sum_{m=0}^{k-1} u(m)z^{k-m} \end{aligned}$$

**5.4.3 Suite retardée de  $k$  termes**

La suite  $v$  obtenue (figure 6) à partir d'une suite  $u = \{u(n)\}$  en posant :

$$\begin{aligned} v(n) &= u(n-k) \text{ si } n \geq k \\ v(n) &= 0 \text{ si } n < k \end{aligned}$$

est dite retardée de  $k$  termes par rapport à  $u$ .

$u$  étant avancée de  $k$  par rapport à  $v$ , appliquons (137) avec les  $k$  premiers termes de  $v$  nuls ; il vient :

$$Z\{u(n-k)\} = \frac{Z\{u\}}{z^k} \tag{139}$$

Si on suppose l'existence de  $u(-1), \dots, u(-k)$  non nuls, l'inversion de (137) donne :

$$Z\{u(n-k)\} = \frac{Z\{u(n)\}}{z^k} + \sum_{m=0}^{k-1} \frac{u(m-k)}{z^m} \tag{140}$$

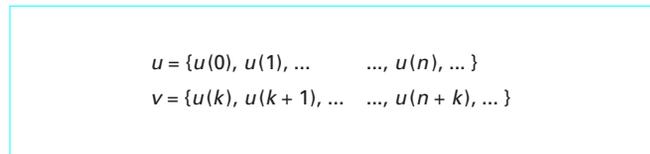


Figure 5 – Suite avancée de  $k$  termes

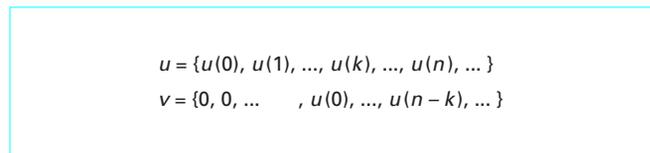


Figure 6 – Suite retardée de  $k$  termes

### 5.4.4 Multiplication par une exponentielle

Soit  $u = \{u(n)\}$  une suite dont nous notons la transformée en  $z$  :  $U(z)$  et soit  $V(z)$  la transformée de  $v = \{\underline{a}^n u(n)\}$ , on a :

$$V(z) = \sum_0^\infty \frac{\underline{a}^n u(n)}{z^n} = \sum_0^\infty \frac{u(n)}{(z/\underline{a})^n}$$

d'où :

$$v(n) = \underline{a}^n u(n) \Rightarrow V(z) = U\left(\frac{z}{\underline{a}}\right) \tag{141}$$

La transformée de  $\{\underline{a}^n u(n)\}$  s'obtient en remplaçant  $z$  par  $z/\underline{a}$  dans la transformée de  $u$  ; en particulier :

$$Z\{\underline{a}^n\} = \frac{z}{z-\underline{a}} \tag{142}$$

### 5.4.5 Multiplication par la suite $\{0, 1, \dots, n, \dots\}$

Soit  $U(z)$  la TZ d'une suite  $\{u(n)\}$  :

$$U(z) = \sum_{n=0}^\infty u(n)z^{-n}$$

Sa dérivée, dans le domaine de convergence, est la série :

$$\frac{dU(z)}{dz} = \sum_{n=1}^\infty -nu(n)z^{-n-1} = \frac{-1}{z} \sum_{n=1}^\infty nu(n)z^{-n}$$

On peut sans inconvénient débiter la sommation à l'indice 0, d'où le résultat :

$$U(z) = Z\{u(n)\} \Rightarrow -z \frac{dU(z)}{dz} = Z\{nu(n)\} \tag{143}$$

### 5.4.6 Produit de convolution de deux séquences numériques

Par analogie avec le produit de convolution de deux fonctions intégrables (§ 2.4) et nulles sur  $\mathbb{R}_-$  : le produit de convolution de deux séquences

$$u = \{u(n)\} \text{ et } v = \{v(n)\}$$

se définit par :

$$(u * v)(n) = \sum_{k=0}^n u(k)v(n-k) \tag{144}$$

La transformée du produit de convolution est donnée par :

$$Z\{u * v\} = Z\{u\}Z\{v\} \tag{145}$$

#### ■ Démonstration

Partons des transformées de  $u$  et  $v$  :

$$Z(u) = \sum_{n=0}^\infty \frac{u(n)}{z^n}$$

$$Z(v) = \sum_{n=0}^\infty \frac{v(n)}{z^n}$$

le terme en  $z^{-n}$  du produit  $Z\{u\}Z\{v\}$  a pour numérateur  $\sum_{k=0}^n u(k)v(n-k)$

ce qui nous donne  $Z(u)Z(v) = \sum_{n=0}^\infty \frac{\sum_{k=0}^n u(k)v(n-k)}{z^n}$  et cette expression n'est autre que  $Z\{u * v\}$ , transformée du produit de convolution (144).

■ Pour des séquences  $u$  et  $v$  échantillonnées à la même cadence  $T$ , la relation (145) devient :

$$Z\{u * v(nT)\} = Z\{u(nT)\}Z\{v(nT)\} \tag{146}$$

### 5.4.7 Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale

À l'extérieur du rayon de convergence, quand  $|z| \rightarrow \infty$ , son inverse tend vers 0 et la série  $\sum_{n=0}^\infty \frac{u(n)}{z^n}$ , si elle converge, tend vers  $u(0)$ .

C'est le **théorème de la valeur initiale** : sous réserve de l'existence de la limite,

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} (Z\{u(n)\}) = u(0) \tag{147}$$

On démontre, sous réserve de l'existence des limites, le **théorème de la valeur finale** :

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{z-1}{z} Z\{u(n)\} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(n) \tag{148}$$

Cela suppose, notamment,  $Z\{u\}$  holomorphe au voisinage du disque unité.

## 5.5 Transformées usuelles

Le tableau 4 donne les transformées en  $Z$  pour différentes suites.

Tableau 4 – Transformées en Z		
Suite $u(n)$	Transformée en Z	Domaine de convergence
$\delta(n) = (1, 0, \dots; 0; \dots)$	1	Convergente $\forall z$
$\gamma(n) = (1, 1, \dots; 1; \dots)$	$\frac{z}{z-1}$	$ z  > 1$
$\gamma(n-k) = (0, \dots, 0; 1; 1; \dots)$	$\frac{1}{z^{k-1}(z-1)}$	$ z  > 1$
$u(n) = \underline{a}^n$	$\frac{z}{z-\underline{a}}$	$ z  >  \underline{a} $
$u(n) = n$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z  > 1$
$u(n) = n\underline{a}^{n-1}$	$\frac{z}{(z-\underline{a})^2}$	$ z  >  \underline{a} $
$u(n) = C_n^k$	$\frac{z}{(z-1)^{k+1}}$	$ z  > 1$
$u(n) = C_n^k \underline{a}^{n-k}$	$\frac{z}{(z-\underline{a})^{k+1}}$	$ z  >  \underline{a} $
$u(n) = \frac{\underline{a}^n - \underline{b}^n}{\underline{a} - \underline{b}} \quad \underline{a} \neq \underline{b}$	$\frac{z}{(z-\underline{a})(z-\underline{b})}$	$ z  > \sup( \underline{a} ;  \underline{b} )$
$u(n) = \cos(an)$	$\frac{z^2 - z \cos a}{z^2 - 2z \cos a + 1}$	$ z  > 1$
$u(n) = \sin(an)$	$\frac{z \sin a}{z^2 - 2z \cos a + 1}$	$ z  > 1$

### 5.6 Inversion de la TZ

L'emploi de la formule d'inversion (14) nécessite d'être au clair avec le développement analytique cherché pour  $U(z)$  ; en effet, le domaine d'holomorphie de  $U$  peut être plus vaste que celui de la série  $\sum_n \frac{u(n)}{z^n}$  qui, rappelons-le, est une couronne pour un développement en série de Laurent et l'extérieur d'un disque pour un développement en série entière.

Indiquons deux procédés élémentaires couramment utilisés, surtout pour les fractions rationnelles, et qui évitent l'emploi de (14).

#### 5.6.1 Décomposition de $U(z)$

La décomposition en éléments simples de  $\frac{U(z)}{z}$  permet de trouver les  $u(n)$  à partir d'un tableau des transformées.

**Exemple** : original de :

$$U(z) = \frac{z}{(z-a)(z-b)}$$

La décomposition :

$$\frac{U(z)}{z} = \frac{1}{a-b} \left( \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} \right)$$

fournit l'original de  $U$  à partir de ceux de  $\frac{z}{z-a}$  et  $\frac{z}{z-b}$  (tableau 4) :

$$u(n) = \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

#### 5.6.2 Développement en série de $U(z)$

L'exemple précédent, applicable à toute fraction rationnelle, peut aussi être obtenu en effectuant la division de  $z$  par  $[z^2 - (a+b)z + ab]$  suivant les puissances décroissantes.

Cette division n'est qu'un cas particulier de développement en série par rapport à  $\frac{1}{z}$ .

**Exemple** : original de :

$$U(z) = \frac{z}{z+1} \exp\left(\frac{1}{z}\right)$$

De  $\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_0^\infty \frac{1}{n!z^n}$ , on tire :

$$U(z) = \left(1 + \frac{1}{z}\right) \exp\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + \sum_1^\infty \frac{1}{(n-1)!z^n} + \frac{1}{n!z^n}$$

d'où les  $u(n)$  :

$$u(n) = \frac{n+1}{n!} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left\{ 1, 2, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \dots \right\}$$

### 5.7 Applications

La résolution approchée des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles conduit, après discrétisation, à résoudre

des équations récurrentes linéaires à coefficients constants (ou équations aux différences).

Ces équations interviennent également pour le traitement et la résolution des filtres discrets.

#### 5.7.1 Équation récurrente linéaire à coefficients constants

C'est une équation dans laquelle une suite inconnue  $y(n)$  doit satisfaire une relation du type :

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \dots + a_N y(n-N) = x(n) \tag{149}$$

en supposant connues  $y(-1), \dots, y(-N)$ , données jouant le rôle de conditions initiales.

Dans la relation (149) :

- les  $a_k$  sont des constantes réelles ou complexes ;
- $x(n)$  est une suite donnée, l'entrée d'un système par exemple.

En transformant (149) par la TZ à l'aide de (140) pour les termes  $y(n-k)$ , on obtient

$$Y(z) = H(z) X(z) - H(z) F(z) \tag{150}$$

avec  $X(z)$  et  $Y(z)$  les TZ respectives de  $x(n)$  et de  $y(n)$ ,

$H(z)$  et  $F(z)$  fractions rationnelles suivantes :

$$\left. \begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{N + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \\ F(z) &= \sum_{k=1}^N a_k \left( \sum_{p=0}^{k-1} y(n-k) z^{-p} \right) \end{aligned} \right\} \tag{151}$$

**Exemple** : résoudre :

$$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = Y(n) \tag{E}$$

sous les conditions initiales :

$$\begin{aligned} y(-1) &= 1 ; \\ y(-2) &= 2. \end{aligned}$$

Soit  $Y(z)$  la TZ de  $y(n)$ .

D'après la relation (140) :

$$Z\{y(n-1)\} = \frac{Y}{z} + y(-1) = \frac{Y}{z} + 1$$

$$\text{et } Z\{y(n-2)\} = \frac{Y}{z^2} + y(-2) + \frac{y(-1)}{z} = \frac{Y}{z^2} + 2 + \frac{1}{z}$$

D'autre part, on a :

$$Z\{Y(n)\} = \frac{z}{z-1}$$

La TZ appliquée à (E) fournit :

$$Y(z) = \frac{2z^2 - z^3}{z(z-1)(z^2 - 3z + 2)}$$

et, en simplifiant par  $z(z-2)$  :

$$Y(z) = -\frac{z}{(z-1)^2}$$

Le tableau 4 nous fournit alors la solution de (E) :

$$y(n) = -n$$

### 5.7.2 Filtrés discrets

Revenons au problème du filtrage évoqué au (§ 1.2) lorsque les grandeurs à traiter sont des quantités discrètes.

Donnons-nous un filtre régi par une équation du type de (149) mais où la sortie  $y(n)$  dépend de l'entrée actuelle  $x(n)$ , de  $K$  entrées passées et de  $N$  sorties passées :

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \dots + a_N y(n-N) = x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_K x(n-K) \quad (152)$$

Un tel filtre dépendant des sorties passées est dit **récurif**.

Comme pour (149), avec les mêmes notations, l'équation transformée admet encore pour solution :

$$Y(z) = H(z) X(z) - H(z) F(z)$$

mais avec, cette fois :

$$H(z) = \frac{1 + \sum_{m=1}^K b_m z^{-m}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (153)$$

Le premier terme,  $H(z) X(z)$ , correspond à la réponse du filtre à la sollicitation  $x(n)$  en l'absence de conditions initiales :

$$y(-k) = 0 \quad \text{pour } 1 < k < N$$

Le second terme,  $-H(z) F(z)$ , est la solution de l'équation homogène associée, c'est-à-dire en supposant nul le second membre de (152).

$H(z)$ , qui caractérise le filtre, est appelée **fonction de transfert** du filtre discret.

Comme pour la TL (§ 2.4), si on considère que  $H(z)$  est la TZ d'une suite  $h(n)$ , alors la sortie  $y(n)$  correspondant à  $x(n)$ , en l'absence de conditions initiales, peut s'écrire :

$$y(n) = (h * x)(n) \quad (154)$$

puisque :

$$Z\{(h * x)(n)\} = H(z)X(z) = Y(z)$$

En particulier, avec la suite de Dirac  $\delta(n)$  en entrée, on obtient en sortie la TZ :

$$Z\{(h * \delta)(n)\} = H(z) \quad (155)$$

et la sortie  $h(n)$ , qui caractérise le filtre, apparaît ainsi comme la réponse à la suite de Dirac  $\delta$  ;  $h(n)$  est appelée, comme pour la TL (§ 2.5), **réponse impulsionnelle**.

#### ■ Causalité ou réalisabilité du filtre

Le filtre est réalisable si sa fonction de transfert  $H(z)$  est holomorphe à l'extérieur d'un disque de rayon  $R$  ; les singularités de  $H(z)$  sont alors à l'intérieur du disque.

#### ■ Stabilité

Pour que le filtre soit stable, il faut et il suffit que le cercle unité  $|z| = 1$  soit entièrement situé dans le domaine d'holomorphie (couronne ou extérieur d'un disque selon le cas).