

Mathématiques pour l'électricien

Matrices et analyse vectorielle

par **Élie ROUBINE**

Professeur à l'Université Pierre-et-Marie-Curie (Paris VI) et à l'École supérieure d'électricité

1. Calcul vectoriel	D 32 – 2
1.1 Calcul vectoriel usuel	— 2
1.2 Généralisations successives	— 3
1.3 Notion abstraite d'espace vectoriel.....	— 3
1.4 Espaces affines	— 4
1.5 Applications linéaires	— 4
2. Matrices	— 5
2.1 Définitions	— 5
2.2 Matrices carrées.....	— 6
2.3 Quelques applications des matrices	— 7
3. Analyse	— 8
3.1 Analyse vectorielle (formulaire)	— 8
3.2 Compléments sur l'intégration.....	— 11
4. Fonctions de la variable complexe	— 14
4.1 Vocabulaire topologique	— 14
4.2 Fonctions holomorphes	— 15
4.3 Intégration	— 17
4.4 Représentation par des séries	— 18
4.5 Applications à l'analyse	— 19
4.6 Applications à l'étude des champs plans	— 21
4.7 Application aux systèmes à réaction	— 25

La présente introduction mathématique consiste dans le choix de quelques domaines utiles – aujourd'hui – à l'électricien. Si certaines parties sont des formulaires [Analyse vectorielle (§ 3.1)], la présentation adoptée ailleurs est plutôt celle d'un commentaire de définitions et de résultats.

Pour une information plus complète le lecteur pourra se reporter aux excellents articles du traité *Sciences fondamentales*.

En ce qui concerne le vocabulaire et les notations, on s'est efforcé de se plier aux usages de l'enseignement contemporain. Toutefois, par souci d'uniformisation, propre au présent traité, on a adopté pour les nombres complexes – dont les électriciens font un grand usage – certaines des notations de ces derniers :

- $j = \sqrt{-1}$ (au lieu de i) ;
- \underline{a} signifie a complexe ;
- \underline{a}^* signifie complexe conjugué de \underline{a} .

D'autre part, l'emploi de flèches pour désigner des vecteurs \vec{v} , au sens usuel de la géométrie et de la physique, a été maintenu, sauf pour les opérateurs **grad** et **rot**, où on peut le considérer comme vraiment redondant.

Abréviations utilisées dans la suite	
CL	combinaison linéaire finie
CNS	condition nécessaire et suffisante
CP	calcul des probabilités
ED	équation différentielle
EV	espace vectoriel
m _q	moyenne quadratique
pp	presque partout
ps	presque sûrement
SF	série de Fourier
TF	transformée de Fourier
TL	transformée de Laplace
var	variable aléatoire réelle
VP	valeur principale de Cauchy

1. Calcul vectoriel

1.1 Calcul vectoriel usuel

1.1.1 Rappels et notations

Inspiré par la géométrie et la mécanique, le calcul vectoriel usuel sera supposé connu.

\vec{X}, \vec{Y}, \dots désignant des **vecteurs libres**, a, b, \dots des réels (**scalaires**), la règle du parallélogramme et l'homothétie permettent d'effectuer l'opération essentielle qu'est la **combinaison linéaire finie** (CL) :

$$\sum_{i=1}^n a^i \vec{X}_i = a^i \vec{X}_i \quad (1)$$

Le second membre est la *notation d'Einstein* : un même indice figurant *en haut* et *en bas* sous-entend la sommation effectuée par rapport à cet indice.

Avec les notions métriques de longueur :

$$|\vec{X}| = \text{long } \vec{X} \quad (2)$$

et d'angle $\theta(\vec{X}, \vec{Y})$, on introduit le scalaire (**produit scalaire** de deux vecteurs) :

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = |\vec{X}| |\vec{Y}| \cos \theta \quad (3)$$

et le vecteur (**produit vectoriel** de deux vecteurs) :

$$\vec{V} = \vec{X} \wedge \vec{Y} \quad (4)$$

tel que $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{V})$ soit direct et que :

$$|\vec{V}| = |\vec{X}| |\vec{Y}| \sin \theta \quad (5)$$

En particulier, $\vec{X} \cdot \vec{V} = 0$ exprime l'orthogonalité des vecteurs et l'on a :

$$\vec{X} \cdot \vec{X} = |\vec{X}|^2$$

Le produit vectoriel est *anticommutatif* :

$$\vec{Y} \wedge \vec{X} = -\vec{X} \wedge \vec{Y} \quad (6)$$

et n'est *pas associatif*.

Le *double produit vectoriel* s'exprime par :

$$(\vec{X} \wedge \vec{Y}) \wedge \vec{Z} = (\vec{X} \cdot \vec{Z}) \vec{Y} - (\vec{Y} \cdot \vec{Z}) \vec{X} \quad (7)$$

Enfin le *produit mixte* :

$$(\vec{X} \wedge \vec{Y}) \cdot \vec{Z} = [\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}] \quad (8)$$

représente le volume, affecté d'un signe, du parallélépipède construit sur les trois vecteurs. Sa nullité est une condition nécessaire et suffisante (CNS) de coplanarité des vecteurs.

1.1.2 Bases et composantes

À partir de trois vecteurs non coplanaires $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, on peut représenter tous les autres en les définissant comme CL [d'après la relation (1)] :

$$\vec{X} = \xi^i \vec{e}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (9)$$

Il y a correspondance bijective entre l'ensemble des vecteurs et celui des triplets de réels (ξ^1, ξ^2, ξ^3) dits **composantes** par rapport à la **base** de vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On peut écrire :

$$\vec{X} = (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \quad (10)$$

On peut choisir, en particulier : $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$.

La non coplanarité des \vec{e}_i est une condition d'unicité des composantes qui entraîne que le vecteur de composantes $(0, 0, 0)$ est le seul vecteur nul, c'est-à-dire que les \vec{e}_i sont trois vecteurs indépendants.

Remarque : en fait, chaque composante est une fonction numérique $\xi^i(\vec{X})$. Il y a lieu de distinguer l'application ξ^i de la valeur prise par la fonction pour chaque \vec{X} . Chacune des applications-composantes est une forme linéaire :

$$\left. \begin{aligned} \xi^i(\vec{X} + \vec{Y}) &= \xi^i(\vec{X}) + \xi^i(\vec{Y}) \\ \xi^i(a\vec{X}) &= a \xi^i(\vec{X}) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

1.1.3 Bases orthonormées

Lorsque :

$$|\vec{e}_i| = 1, \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0 \quad (i \neq j)$$

on a, avec :

$$\vec{X} = (\xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad \vec{Y} = (\eta^1, \eta^2, \eta^3)$$

$$|\vec{X}|^2 = (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 \quad (12)$$

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = \xi^1 \eta^1 + \xi^2 \eta^2 + \xi^3 \eta^3 \quad (13)$$

$$\vec{X} \wedge \vec{Y} = (\xi^2 \eta^3 - \xi^3 \eta^2, \xi^3 \eta^1 - \xi^1 \eta^3, \xi^1 \eta^2 - \xi^2 \eta^1) \quad (14)$$

On peut retenir cette dernière formule comme développement du déterminant symbolique :

$$\vec{X} \wedge \vec{Y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \\ \eta^1 & \eta^2 & \eta^3 \end{vmatrix} \quad (15)$$

Enfin :

$$[\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}] = \begin{vmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \\ \eta^1 & \eta^2 & \eta^3 \\ \zeta^1 & \zeta^2 & \zeta^3 \end{vmatrix} \quad (16)$$

Remarque : contrairement au produit scalaire, le produit vectoriel ne se prête pas à généralisation. En fait, on considérera un produit tensoriel, $\vec{X} \otimes \vec{Y}$, objet défini par le tableau de ses 9 composantes $\xi^i \eta^j$. L'opération $\vec{X} \otimes \vec{Y} - \vec{Y} \otimes \vec{X}$, anticommulative, définit un bivecteur par les 9 composantes : $\xi^i \eta^j - \xi^j \eta^i$ dont 3 sont nulles, les 6 autres 2 à 2 opposées. Il ne reste que 3 composantes indépendantes, celles du produit vectoriel $\vec{X} \wedge \vec{Y}$, notion qui est ainsi liée au fait que notre espace est à trois dimensions !

1.2 Généralisations successives

1.2.1 Espace euclidien à n dimensions

L'ensemble, noté \mathbb{R}^n , des n -uplets $\vec{X} = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)$ de réels ξ^i peut être structuré en *espace vectoriel* (§ 1.3.1) au moyen des relations telles que (11), avec $i = 1, 2, \dots, n$. Chaque vecteur est donc défini par ses n composantes. On peut écrire (avec la notation d'Einstein, § 1.1.1) :

$$\vec{X} = \xi^i \vec{e}_i \quad (17)$$

au moyen de la base canonique :

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$$

Celle-ci est *orthonormée* par rapport à un produit scalaire défini par :

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = \sum_{i=1}^n \xi^i \eta^i \quad (18)$$

d'où la longueur : $|\vec{X}| = \left[\sum_{i=1}^n (\xi^i)^2 \right]^{1/2} \quad (19)$

On peut écrire indifféremment ξ^i ou ξ_j .

1.2.2 Espace hermitien à n dimensions

Ce qui précède s'étendrait à \mathbb{C}^n , ensemble des n -uplets de complexes ξ_j , sous réserve de prendre pour produit scalaire :

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i^* \quad (20)$$

de façon à conserver une longueur (on dira alors **norme**) réelle positive :

$$\|\vec{X}\| = \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 \right)^{1/2} \quad (21)$$

1.2.3 Espace de Hilbert ℓ^2

Une dernière extension définit les vecteurs :

$$\vec{X} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \quad (22)$$

ayant une infinité de composantes complexes, sous réserve qu'une norme puisse être définie à partir de la somme d'une *série convergente* :

$$\|\vec{X}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 \quad (23)$$

ce qui entraîne la convergence des séries telles que :

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n^* \quad (24)$$

(produits scalaires).

1.3 Notion abstraite d'espace vectoriel

Nota : le lecteur pourra se reporter, pour de plus amples détails et en particulier pour les axiomes, à l'article *Analyse fonctionnelle* [A 101] dans le traité Sciences fondamentales.

1.3.1 Espaces vectoriels

On appelle **espace vectoriel** EV (ou *linéaire*) sur un corps de scalaires (en fait \mathbb{C} ou \mathbb{R}) tout ensemble E d'éléments \vec{X}, \vec{Y}, \dots , appelés vecteurs, fermé par rapport aux CL (§ 1.1.1) à coefficients complexes (ou réels).

Exemples : ceux du paragraphe 1.2 ; l'ensemble des polynômes à coefficients réels ou complexes ; l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène.

1.3.2 Espaces vectoriels normés

Ce sont des espaces vectoriels tels qu'on puisse attacher à chaque \vec{X} un réel $\|\vec{X}\|$ positif ou nul (**norme**) ayant les propriétés d'une longueur :

$$\|\vec{X}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{X} = 0$$

$$\|\lambda \vec{X}\| = |\lambda| \|\vec{X}\|$$

$$\|\vec{X} + \vec{Y}\| \leq \|\vec{X}\| + \|\vec{Y}\|$$

d'où la possibilité d'introduire des notions topologiques. Ainsi, la convergence $\vec{X}_n \rightarrow \vec{X}$ d'une suite $\{\vec{X}_n\}$ est ramenée à la convergence numérique :

$$\|\vec{X}_n - \vec{X}\| \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

qui entraîne la propriété de Cauchy : $\|\vec{X}_n - \vec{X}_p\| \rightarrow 0, \quad n, p \rightarrow \infty$

Les EV pour lesquels cette propriété implique l'existence d'une limite de la suite $\{X_n\}$ sont dits **complets** (*espaces de Banach*).

Exemple : $\mathcal{C}(a, b)$, EV des fonctions $x(t)$ continues sur l'intervalle fermé $[a, b]$. Il peut être normé par :

$$\|\vec{X}\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$$

La convergence associée est la *convergence uniforme*. L'espace est alors complet. Une autre norme serait :

$$\|\vec{X}\| = \int_a^b |x(t)| dt$$

Elle définit la *convergence en moyenne*. Mais l'espace n'est pas complet.

1.3.3 Espaces préhilbertiens

Ce sont les EV munis d'un *produit scalaire*, $\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle$, défini comme *forme hermitienne définie positive*. Ils sont normés par $\langle X, X \rangle^{1/2}$. Le produit scalaire permet d'introduire une notion d'angle, et surtout

l'**orthogonalité** : $\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = 0$, d'où de nombreuses propriétés qui rappellent celles de la géométrie élémentaire. La possibilité de représenter les vecteurs sur des systèmes orthonormés fait jouer, en physique, un rôle considérable à ces espaces, notamment à ceux qui sont complets (*espaces de Hilbert*).

Exemple : $\mathcal{C}(a, b)$ muni du produit scalaire :

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \int_a^b x(t) y^*(t) dt \tag{25}$$

d'où la norme dite de la *convergence en moyenne quadratique* :

$$\|\vec{X}\|^2 = \int_a^b |x(t)|^2 dt \tag{26}$$

Cet espace n'est pas complet (il est préhilbertien mais non hilbertien, § 1.2.3).

1.4 Espaces affines

Ils généralisent la notion de *vecteur lié* de la géométrie ordinaire. À un espace vectoriel :

$$\mathcal{V} = \{\vec{X}, \vec{Y}, \dots\}$$

est associé un nouvel ensemble \mathcal{A} d'éléments A, B, \dots , dit *points*, tel que, à tout couple (A, B) corresponde, dans \mathcal{V} , un vecteur \vec{X} , noté alors \vec{AB} , et que, à tout couple (A, \vec{X}) corresponde, dans \mathcal{A} , un point B tel que $\vec{AB} = \vec{X}$ (on note souvent : $B = A + \vec{X}$). L'ensemble \mathcal{A} vérifie la relation de Chasles :

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

\vec{X} est alors appelé *vecteur libre* par opposition au vecteur lié \vec{AB} . L'espace ponctuel \mathcal{A} est dit **affine**.

Il est commode de particulariser, dans \mathcal{A} , une origine O . L'ensemble d'une base de l'espace \mathcal{V} et du point O constitue un **repère**. Les composantes de \vec{OA} sont les *coordonnées* de A . La bijection : $A \rightarrow \vec{OA}$ permet alors de parler indifféremment de points ou de vecteurs, ce qui ramène au langage plus intuitif de la géométrie.

Exemple : convergence d'une suite de points.

1.5 Applications linéaires

1.5.1 Définition

E et F étant deux espaces vectoriels sur le même corps \mathbb{C} , une application A :

$$E \rightarrow F (\vec{X} \rightarrow A\vec{X})$$

est dite *linéaire* si elle conserve la CL (§ 1.1.1) à coefficients complexes :

$$A(\underline{a}^i \vec{X}_i) = \underline{a}^i A \vec{X}_i \quad (i = 1, \dots, n) \tag{27}$$

Cas particuliers importants :

- *opérateurs linéaires* ($E = F$) ;
- *formes linéaires* ($F = \mathbb{C}$).

Dans les EV normés (§ 1.3.2) on peut considérer, en outre, les *applications linéaires continues* :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{X}_n = \vec{X} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} A \vec{X}_n = A \vec{X}$$

1.5.2 Emploi de bases

Soient E et F de dimensions respectives m et n , qu'on supposera finies, et de bases respectives $\{\vec{e}_i\}, \{\vec{f}_i\}$. À tout $\vec{X} = \xi^i \vec{e}_i$ ($i = 1, \dots, m$) de E correspond, dans F :

$$\vec{Y} = \underline{\eta}^k \vec{f}_k = A(\underline{\xi}^i \vec{e}_i) = \underline{\xi}^i A \vec{e}_i \quad (k = 1, \dots, n) \tag{28}$$

Si les n composantes, dans F , de chaque $A \vec{e}_i$ sont des \underline{a}_i^k tels que $A \vec{e}_i = \underline{a}_i^k \vec{f}_k$, la correspondance est définie par le système linéaire :

$$\underline{\eta}^k = \underline{a}_i^k \underline{\xi}^i \tag{29}$$

c'est-à-dire par le tableau des \underline{a}_i^k (§ 2.1).

Remarque : l'ensemble noté $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires $E \rightarrow F$ est structuré, à son tour, en espace vectoriel par la règle :

$$\forall \vec{X} \in E : (\underline{a}_i A^i) \vec{X} = \underline{a}_i (A^i \vec{X}) \tag{30}$$

En particulier, l'EV $\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ des formes linéaires sur E est appelé dual de E et noté E^* .

1.5.3 Produit de deux applications

Soit $B : F \rightarrow G$, G de dimension p , défini par un tableau \underline{b}_k^j . On a :

$$\vec{Z} = B\vec{Y} = B(A\vec{X}) = (BA)\vec{X} = C\vec{X}$$

$C : E \rightarrow G$ est alors déterminé par les :

$$\underline{c}_i^j = \underline{a}_i^k \underline{b}_k^j \tag{31}$$

On retiendra qu'on associe chaque ligne de la 1^{re} matrice à chaque colonne de la 2^e suivant le schéma suivant :

$$\begin{bmatrix} \dots\dots\dots \\ \underline{a}_i^1 & \underline{a}_i^2 & \dots & \underline{a}_i^n \\ \dots\dots\dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{b}_1^j \\ \underline{b}_2^j \\ \vdots \\ \underline{b}_m^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots \sum \underline{a}_i^k \underline{b}_k^j \dots \\ \dots\dots\dots \end{bmatrix} \begin{matrix} i^{\text{e}} \text{ ligne} \\ j^{\text{e}} \text{ colonne} \end{matrix} \tag{35}$$

Avec cette règle, BA n'aurait de sens que pour les matrices carrées. D'autre part, on retiendra que :

$$\underline{A}_{m \times n} \underline{B}_{n \times 1} = \underline{C}_{m \times 1} \quad (\text{colonne})$$

$$\underline{A}_{1 \times n} \underline{B}_{n \times p} = \underline{C}_{1 \times p} \quad (\text{ligne})$$

Exemple : X et Y étant les matrices colonnes écrites avec les composantes ξ^i et η^j de 2 vecteurs réels, le produit scalaire de ces vecteurs est :

$$\underline{X}^t \underline{Y} = \underline{Y}^t \underline{X} = [\xi^i]_{1 \times n} [\eta^j]_{n \times 1} = \sum_{i=1}^n \xi^i \eta^i \tag{36}$$

En revanche, le produit :

$$\underline{X} \underline{Y}^t = [\xi^i]_{n \times 1} [\eta^j]_{1 \times n} = [\xi^i \eta^j]_{n \times m} \tag{37}$$

est une matrice carrée.

Enfin, à $\underline{A} = [\underline{a}_{ij}]_{n \times n}$ on peut associer la *forme bilinéaire* (avec la convention d'Einstein, § 1.1) :

$$\underline{X}^t \underline{A} \underline{Y} = \underline{a}_{ij} \xi^i \eta^j \tag{38}$$

2.1.3 Partitions

Les éléments d'une matrice peuvent ne pas être des nombres, pourvu qu'on puisse appliquer à ces éléments les opérations précédentes. Ils peuvent être eux-mêmes des matrices. Inversement, on peut traiter toute matrice comme matrice de sous-matrices. Ainsi, toute matrice est une matrice colonne de matrices lignes, ou inversement. Plus généralement, on peut séparer des sous-matrices par des parallèles aux lignes et aux colonnes. Ainsi :

$$\begin{bmatrix} \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} & \underline{d} \\ \underline{a}' & \underline{b}' & \underline{c}' & \underline{d}' \\ \underline{a}'' & \underline{b}'' & \underline{c}'' & \underline{d}'' \\ \underline{a}''' & \underline{b}''' & \underline{c}''' & \underline{d}''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} & \underline{d} \\ \underline{a}' & \underline{b}' & \underline{c}' & \underline{d}' \\ \underline{a}'' & \underline{b}'' & \underline{c}'' & \underline{d}'' \\ \underline{a}''' & \underline{b}''' & \underline{c}''' & \underline{d}''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} & \underline{d} \\ \underline{a}' & \underline{b}' & \underline{c}' & \underline{d}' \\ \underline{a}'' & \underline{b}'' & \underline{c}'' & \underline{d}'' \\ \underline{a}''' & \underline{b}''' & \underline{c}''' & \underline{d}''' \end{bmatrix}$$

2. Matrices

2.1 Définitions

2.1.1 Matrices rectangulaires

Toute famille d'éléments à deux indices :

$$\underline{a}_i^j (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

peut être disposée en un tableau rectangulaire de m lignes et n colonnes :

$$\underline{A} = \underline{A}_{m \times n} = [\underline{a}_i^j]_{m \times n} = \begin{bmatrix} \underline{a}_1^1 & \underline{a}_1^2 & \dots & \underline{a}_1^n \\ \underline{a}_2^1 & \underline{a}_2^2 & \dots & \underline{a}_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{a}_m^1 & \underline{a}_m^2 & \dots & \underline{a}_m^n \end{bmatrix} \tag{32}$$

Le cas, non examiné ici, des tableaux infinis peut être également envisagé.

Un tel tableau est appelé **matrice** $m \times n$. Le plus souvent les éléments sont des nombres réels ou complexes.

En particulier, les matrices $n \times n$ sont dites **carrées**, les matrices $m \times 1$, **colonnes**, les matrices $1 \times n$, **lignes**. Ces dernières servent, notamment, à représenter les vecteurs par leurs composantes.

L'opération *transposition*, notée $\underline{A} \rightarrow \underline{A}^t$ et correspondant à $\underline{b}_i^j = \underline{a}_j^i$, qui échange lignes et colonnes, donne une matrice $n \times m$. Ainsi les matrices lignes et les matrices colonnes sont-elles transposées l'une de l'autre.

2.1.2 Opérations

Le paragraphe 1.5 justifie les définitions suivantes.

■ Multiplication par un scalaire

$$\underline{B} = \lambda \underline{A}, \quad \underline{b}_i^j = \lambda \underline{a}_i^j$$

■ Addition de matrices de même type

$$\underline{A}_{m \times n} + \underline{B}_{m \times n} = \underline{C}_{m \times n} \quad \underline{c}_i^j = \underline{a}_i^j + \underline{b}_i^j \tag{33}$$

Si les \underline{b}_i^j sont nuls, $\underline{A} + \underline{B} = \underline{A}$. La matrice \underline{B} est dite *nulle*.

■ Produit de 2 matrices

$$\underline{A}_{m \times n} \cdot \underline{B}_{n \times p} = \underline{C}_{m \times p}$$

$$\underline{c}_i^j = \underline{a}_i^k \underline{b}_k^j \left(= \sum_{k=1}^n \underline{a}_i^k \underline{b}_k^j \right) \tag{34}$$

2.2 Matrices carrées

2.2.1 Définitions

Les matrices carrées ont les propriétés les plus riches. On note d'abord, que toutes les matrices carrées $A_{n \times n}$ de même ordre n peuvent être additionnées et multipliées entre elles (toutefois, AB est différent de BA).

La diagonale (a_i^i) joue le rôle d'un axe de symétrie. Les matrices telles que :

$$D = \begin{bmatrix} a_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & a_n^n \end{bmatrix} \quad (39)$$

sont dites **diagonales**.

En particulier, la matrice :

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

vérifie $I_n A = A I_n = A$

pour toute matrice $A_{n \times n}$.

Elle joue le rôle d'unité et permet, notamment, de définir la matrice A^{-1} , inverse de A , par :

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I_n \quad (41)$$

Le *théorème de Cramer* donne le résultat :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} [\text{cof } a_i^j]_{n \times n} \quad (42)$$

avec $\det A$ déterminant défini par le tableau des a_i^j ,
 $\text{cof } a_i^j$ *cofacteur*, dans ce déterminant, de l'élément a_i^j :

$$\text{cof } a_i^j = (-1)^{i+j} \times \text{mineur de } a_i^j$$

Le calcul suppose que $\det A \neq 0$: la matrice est alors dite *régulière* (ou *invertible*) ; dans le cas contraire, elle est dite *singulière*.

Rang d'une matrice : si $A \neq 0$, elle comporte une ou plusieurs sous-matrices carrées régulières d'ordre inférieur ou égal à r .

r est appelé rang de la matrice A .

A est régulière si $r = n$. Le rang peut être défini de la même façon pour une matrice rectangulaire.

2.2.2 Structure d'algèbre

Soit \mathcal{M}_n , l'ensemble des *matrices carrées régulières* de même ordre n à éléments complexes. Les opérations décrites (§ 2.1.2) lui donnent une structure d'*algèbre* non commutative sur le corps \mathbb{C} , c'est-à-dire un EV muni, en outre, d'une loi de multiplication associative (ici non commutative).

Cette algèbre est de dimension n^2 . Les n^2 matrices :

$$E_i^j = [e_r^s]_{n \times n} \quad (43)$$

dont tous les éléments sont nuls, sauf $e_i^i = 1$, forment une base canonique :

$$A = [a_i^j]_{n \times n} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^j E_i^j \quad (44)$$

Cette algèbre contient une unité, I_n , et les inverses de ses éléments, avec :

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

On retiendra que :

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B \quad (45)$$

d'où :

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det I_n = 1 \quad (46)$$

Remarques

■ L'algèbre \mathcal{M}_n contient, avec chaque matrice A , les matrices : $AA = A^2, A^2A = A^3$, etc., donc tous les polynômes :

$$P(A) = a_0 A^k + a_1 A^{k-1} + \dots + a_k I_n \quad (47)$$

en considérant que $I_n = A^0$.

En munissant \mathcal{M}_n d'une *norme*, telle que :

$$\|A\| = \sum_{i,j} |a_i^j|$$

ou $\|A\| = \left(\sum_{i,j} |a_i^j|^2 \right)^{1/2}$ etc.,

on définit, dans cette algèbre, une convergence des suites de matrices $A_N \xrightarrow{(N \rightarrow \infty)} A$ et par conséquent une convergence des séries. D'où la signification d'une *série entière* de matrices :

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \quad (48)$$

et, par conséquent, d'une fonction de matrices $f(A)$.

Par exemple, on définirait :

$$\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \quad (49)$$

■ \mathcal{M}_n est un *groupe* (non commutatif) pour la multiplication.

C'est le *groupe linéaire* noté $GL(n, \mathbb{C})$ par les physiciens. La *théorie de la représentation*, dont le rôle en physique quantique est majeur, part de l'emploi de ce groupe et de sous-groupes comme images de groupes abstraits.

2.2.3 Symétries diverses

■ **Matrice transposée** : obtenue par échange des lignes et des colonnes de A :

$$A^t = [a_i^j] \quad (50)$$

■ **Matrice conjuguée** : composée des éléments complexes conjugués de ceux de A :

$$A^* = [(a_i^j)^*] \quad (51)$$

■ **Matrice adjointe** : transposée conjuguée de A :

$$\tilde{A} = (A^t)^* = [(a_i^j)^*] \quad (52)$$

Ces matrices vérifient les relations :

$$\left. \begin{aligned} (AB)^t &= B^t A^t \\ (AB)^* &= A^* B^* \\ \widetilde{AB} &= \widetilde{B} \widetilde{A} \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

et conduisent à définir, par invariance, les matrices :

- **symétriques** : $A^t = A$;
- **réelles** : $A^* = A$;
- **auto-adjointes** ou **hermitiennes** : $\widetilde{A} = A^*$.

Un rôle important est joué par les matrices **normales**, qui commutent avec leur adjointe, les produits obtenus étant hermitiens : $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A$. Sont normales les matrices hermitiennes, ainsi que les matrices **unitaires**, vérifiant : $U\widetilde{U} = \widetilde{U}U = I$; de telles matrices sont dites **orthogonales** dans le cas réel : $UU^t = U^tU = I$. On notera qu'on a, alors, respectivement :

$$\widetilde{U} = U^{-1} \quad \text{et} \quad U^t = U^{-1} \quad (54)$$

2.3 Quelques applications des matrices

L'application aux réseaux électriques, quadripôles, lignes, etc., sera amplement développée dans le présent traité. Le lecteur pourra se reporter également à l'article *Calcul matriciel* [AF 86] dans le traité Sciences fondamentales.

2.3.1 Systèmes algébriques linéaires

Tout système de m équations linéaires à n inconnues x_1, \dots, x_n :

$$a_{ij}^j x_j = y_i \quad (i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n) \quad (55)$$

s'écrit : $AX = Y$ (56)

Les matrices A , X et Y étant, respectivement, rectangulaire et colonnes :

$$A = [a_{ij}^j]_{m \times n}$$

$$X = [x_i]_{n \times 1} \quad \text{et} \quad Y = [y_i]_{m \times 1}$$

2.3.1.1 Cas de Cramer : $m = n$

Dans ce cas, A est régulière donc inversible (§ 2.2.1). Il existe alors une solution et une seule :

$$X = A^{-1} Y \quad (57)$$

L'expression (42) de A^{-1} équivaut à la *règle de Cramer* :

$$x_j = \frac{(\det A)_j}{\det A} \quad (58)$$

Dans cette expression, le numérateur est déduit du dénominateur en remplaçant, dans celui-ci, la j^{e} colonne par les y_i .

Lorsque A , singulière, est de rang $r < n$, les n premiers membres de la relation (55) ne sont plus indépendants mais sont des CL (§ 1.1.1) de r d'entre eux. Une **CNS d'indépendance** est donc : $\det A \neq 0$.

2.3.1.2 Cas général : $m \neq n$

Dans ce cas, le rang de A ne peut dépasser le plus petit des nombres m et n . Une condition nécessaire et suffisante d'indépendance des premiers membres est alors $r = m$, ce qui implique $m < n$; l'indépendance est donc impossible lorsque $m > n$.

Discussion : on définit la matrice *augmentée* :

$$A_1 = [A; Y]_{m \times (n+1)} \quad (59)$$

de rang r_1 égal, soit à r , soit à $r + 1$.

La condition $r_1 = r$ est une **CNS de résolubilité** de l'équation (56). Les r équations indépendantes déterminent r solutions, fonctions linéaires des $n - r$ autres, arbitraires (indétermination). Si $r < m$, $m - r$ équations sont des CL (§ 1.1.1) des r autres.

Le cas de Cramer $r = m = n$ est déterminé (n équations indépendantes et $n - r = 0$ paramètre).

2.3.1.3 Cas des systèmes homogènes carrés

L'équation :

$$AX = O_n \quad (60)$$

où O_n est la matrice colonne formée de n zéros possède toujours la *solution triviale* $X = O_n$. Celle-ci est unique dans le cas de Cramer. Une **CNS de trivialité** est donc : $\det A \neq 0$.

Si A est singulière, il existe des solutions non nulles ; $n - r$ d'entre elles sont arbitraires et la solution générale consiste en CL (§ 1.1.1) de celles-ci.

2.3.1.4 Cas des systèmes carrés à paramètre

L'équation :

$$AX = \lambda X + Y \quad (61)$$

se rencontre dans de nombreux problèmes. La discussion est celle de :

$$(A - \lambda I)X = Y \quad (62)$$

a) $A - \lambda I$ est généralement régulière en même temps que A . D'où la solution unique :

$$X = (A - \lambda I)^{-1} Y \quad (63)$$

b) $A - \lambda I$ devient singulière lorsque :

$$\det(A - \lambda I) = f(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1^1 - \lambda & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 - \lambda & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (64)$$

Cette équation algébrique de degré n (*équation caractéristique*) admet n racines complexes, distinctes ou non : $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dites **valeurs propres** de A . L'équation homogène $(A - \lambda_j I)X = 0$ est alors *non triviale*. X est **solution propre** associée à la valeur propre λ_j .

Ainsi, pour $\lambda = \lambda_j$, les solutions de l'équation (61) sont la somme d'une solution particulière et des solutions propres.

Nota : l'ordinateur a rendu possible la **résolution numérique** des systèmes de rang très élevé (quelques 10^3), tels ceux qui proviennent de la discrétisation des équations de l'analyse (équations différentielles, aux dérivées partielles, intégrales, etc.). D'où le développement d'algorithmes auxquels les matrices se prêtent particulièrement (cf. article *Méthodes numériques de base* [A 1 220] dans le traité Sciences fondamentales).

2.3.2 Applications linéaires

2.3.2.1 Représentation matricielle

Soit une application linéaire $A : E \rightarrow F$, E et F désignant des espaces vectoriels de dimensions respectives n et m (§ 1.3.1). On désignera ici par (ξ_j) et (η_i) les composantes des vecteurs \vec{X} et $\vec{Y} = A\vec{X}$ sur les bases de E et F .

La formule (29) équivaut à :

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_m^1 & \dots & a_m^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \quad (65)$$

ou $Y = AX \quad (66)$

Remarques

— Avec les notations du paragraphe 1, il aurait suffi d'écrire :

$$[\eta^1 \dots \eta^n] = [\xi^1 \dots \xi^m] A$$

c'est-à-dire $Y^t = X^t A$.

— La matrice A joue, pour l'application A représentée, le rôle que jouent, pour un vecteur, ses composantes.

Avec une seconde application $B : F \rightarrow G$, G de dimension p , on aura :

$$Z = BY = B(AX) = (BA)X \quad (67)$$

le produit de matrices BA représentant celui des applications.

2.3.2.2 Cas des opérateurs $E \rightarrow E$

L'ensemble des opérateurs inversibles sur E a une structure de groupe qui se retrouve sur l'ensemble des matrices régulières d'ordre n (§ 2.2.2).

2.3.2.3 Changements de base

Dans un changement de base de E la matrice colonne X des composantes ξ_j , d'un vecteur donné devient la matrice colonne X_1 des nouvelles composantes ξ'_j ; on a une relation de la forme :

$$X = SX_1 \quad (68)$$

dans laquelle $S = [s_j^i]_{n \times n}$, régulière, appelée *matrice de passage*, permet d'écrire :

$$X_1 = S^{-1} X$$

Si, d'autre part, on a l'opérateur A , rapporté à la première base, on peut écrire :

$$Y = AX = ASX_1$$

puis :

$$Y_1 = S^{-1} Y = S^{-1} ASX_1 = A_1 X_1$$

et on en tire les relations entre les matrices A et A_1 :

$$A_1 = S^{-1} AS \quad (69)$$

ou $SA_1 = AS \quad (70)$

ou $A = SA_1 S^{-1} \quad (71)$

Les matrices A et A_1 sont dites **équivalentes** ou **semblables**.

Elles sont de même ordre et de même rang. En fait, à un opérateur est associée une infinité de matrices, la classe des matrices équivalentes à l'une d'elles.

D'après les relations (45) et (46) : $\det A_1 = \det A$.

3. Analyse

L'analyse vectorielle traditionnelle – au sens des physiciens – reste un outil précieux pour l'électricien. On rappelle (§ 3.1) les principales formules, à partir des définitions les plus directes (même si celles-ci masquent leur caractère intrinsèque) et des notions de calcul différentiel et intégral que l'on suppose familières au lecteur.

Toutefois, en ce qui concerne l'intégrale, il a été jugé opportun, de donner (§ 3.2) quelques compléments qui, malgré leur caractère théorique, peuvent servir à l'utilisateur, (par exemple en analyse numérique moderne, en probabilités, en physique statistique ou quantique, etc.).

3.1 Analyse vectorielle (formulaire)

3.1.1 Opérateurs différentiels

3.1.1.1 Champs scalaires

Soit Ω domaine de \mathbb{R}^3 rapporté à un repère rectangulaire $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ auxiliaire. Le champ scalaire $u(x) = u(x_1, x_2, x_3)$ est supposé deux fois continûment dérivable dans Ω .

On lui associe un champ vectoriel dit **gradient** :

$$\text{grad } u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_i} \vec{e}_i \quad (72)$$

et un nouveau champ scalaire dit **laplacien** :

$$\Delta u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad (73)$$

3.1.1.2 Champs vectoriels

Un champ vectoriel est défini par :

$$\vec{A}(x) = \sum_{i=1}^3 A_i(x) \vec{e}_i$$

les composantes A_i étant supposées 2 fois continûment dérivables.

On lui associe un champ scalaire dit **divergence** :

$$\text{div } \vec{A} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \quad (74)$$

et un nouveau champ vectoriel dit **rotationnel** :

$$\text{rot } \vec{A} = \sum_1^3 \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) \vec{e}_1 \quad (75)$$

le symbole \sum signifiant somme des permutés circulaires du terme écrit.

Remarques

■ Le rotationnel est un *faux* vecteur qui ne peut être défini que dans \mathbb{R}^3 . En fait, comme le produit vectoriel (§ 1.1.1), c'est un tenseur antisymétrique d'ordre 2 donc à $3^2 = 9$ composantes ; 3 sont nulles et les 6 autres opposées 2 à 2 ; d'où 3 composantes indépendantes avec lesquelles on fabrique un pseudo-vecteur.

■ L'opérateur nabla :

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$$

qu'on écrit souvent ∇ , et qui remonte à Gibbs, est systématiquement utilisé dans la littérature américaine. L'écriture :

$\text{grad } u = \vec{\nabla} u$, $\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$, $\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$, si elle demande un certain effort d'adaptation, n'est pas sans avantages. Elle n'est pas non plus sans danger (§ 3.1.1.4), remarque.

■ Le développement par rapport à la 1^{re} ligne du déterminant symbolique :

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

est un moyen rapide de retrouver le rotationnel.

3.1.1.3 Dérivée dans une direction

Soit $\vec{\alpha}$, vecteur unitaire en un point. La relation (72) équivaut à la dérivation de $u(x)$ dans la direction $\vec{\alpha}$:

$$\partial_{\alpha} u = \frac{\partial u}{\partial \alpha} = \text{grad } u \cdot \vec{\alpha} \tag{76}$$

Ainsi, la dérivée normale en un point d'une surface de normale unitaire n est :

$$\partial_n u = \frac{\partial u}{\partial n} = \text{grad } u \cdot \vec{n} \tag{77}$$

La relation (76) équivaut également à la relation différentielle :

$$du = \text{grad } u \cdot dx \tag{78}$$

■ **Opérateur $\vec{A} \cdot \text{grad}$** : appliqué à un champ vectoriel \vec{B} , il a la signification suivante :

$$(\vec{A} \cdot \text{grad})\vec{B} = \sum_i (\vec{A} \cdot \text{grad } B_i) \vec{e}_i = \sum_{i,j} A_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j} \vec{e}_i \tag{79}$$

3.1.1.4 Dérivations de produits

Soient deux champs scalaires u et v et deux champs vectoriels \vec{A} et \vec{B} .

$$\text{grad } (uv) = u \text{ grad } v + v \text{ grad } u \tag{80}$$

$$\text{grad } (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \wedge \text{rot } \vec{B} + \vec{B} \wedge \text{rot } \vec{A} + (\vec{A} \cdot \text{grad})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \text{grad})\vec{A} \tag{81}$$

$$\text{div } (u\vec{A}) = u \text{ div } \vec{A} + \text{grad } u \cdot \vec{A} \tag{82}$$

$$\text{rot } (u\vec{A}) = u \text{ rot } \vec{A} + \text{grad } u \wedge \vec{A} \tag{83}$$

$$\text{div } (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B} \tag{84}$$

$$\text{rot } (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{A} \text{ div } \vec{B} - \vec{B} \text{ div } \vec{A} + (\vec{B} \cdot \text{grad})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \text{grad})\vec{B} \tag{85}$$

Remarque : traité comme un vecteur ordinaire, l'opérateur $\vec{\nabla}$ conduirait à des formules fausses. Ainsi, pour la formule précédente :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B}) &= (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{A} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})\vec{B} \\ &= \vec{A} \text{ div } \vec{B} - \vec{B} \text{ div } \vec{A} \end{aligned}$$

D'ailleurs, $\vec{A} \cdot \vec{\nabla}$ n'est pas $\text{div } \vec{A}$; c'est l'opérateur $\vec{A} \cdot \text{grad}$ précédemment défini ; de même pour $\vec{A} \wedge \vec{\nabla}$.

3.1.2 Itération des opérateurs

$$\text{div grad } u = \Delta u \tag{86}$$

$$\text{rot grad } u = 0 \tag{87}$$

$$\text{div rot } \vec{A} = 0 \tag{88}$$

Remarques

■ La relation (86) s'écrit aussi :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} u = \nabla^2 u$$

avec le produit scalaire symbolique :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

■ Les relations (87) et (88) sont des identités fondamentales : elles caractérisent, respectivement, les champs vectoriels **irrotationnels** ($\text{rot } \vec{B} = 0$) qui dérivent d'un *potentiel scalaire* ($\vec{B} = \text{grad } u$), et les champs **solénoïdaux** ($\text{div } \vec{B} = 0$) qui dérivent d'un *potentiel vecteur* ($\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$).

Reste à étudier les deux itérées : grad div et rot rot. Si, par rapport à un *repère rectangulaire*, on définit par $\Delta \vec{A}$ le vecteur de composantes : $\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta A_3$, on a alors :

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} \tag{89}$$

3.1.3 Propriétés intégrales

3.1.3.1 Rappel

On envisage des surfaces S bornées, continues, continûment différentiables par morceaux, c'est-à-dire telles que chacun de ces morceaux possède, en chaque point, une normale unitaire \vec{n} . Lorsque S est fermée, elle sépare 2 domaines dont l'un Ω est dit *intérieur* ; \vec{n} est alors orientée extérieurement. Si S , ouverte, possède un bord C , continu et continûment différentiable par morceaux, celui-ci est orienté par sa tangente unitaire \vec{t} ; \vec{n} est alors orientée de façon que C soit parcouru de droite à gauche.

Le **flux** d'un champ vectoriel \vec{A} , *sortant* de S , est alors défini par l'intégrale :

$$\int_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

et sa **circulation**, le long du bord C orienté, par :

$$\int_C \vec{A} \cdot \vec{t} ds$$

Trois résultats fondamentaux seront rappelés.

3.1.3.2 Théorème d'Ostrogradski

Le flux d'un champ \vec{A} à travers une surface fermée est égal à l'intégrale de sa divergence étendue au domaine intérieur :

$$\int_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \int_\Omega \text{div} \vec{A} dx \quad (90)$$

3.1.3.3 Théorème de Stokes

La circulation d'un champ \vec{A} le long d'un contour fermé est égale au flux de $\text{rot} \vec{A}$ à travers toute surface bordée par le contour :

$$\int_C \vec{A} \cdot \vec{t} ds = \int_S \text{rot} \vec{A} \cdot \vec{n} dS \quad (91)$$

Remarques

■ En fait, dans l'optique plus moderne de l'analyse extérieure, ces théorèmes sont des cas particuliers d'une formulation unique générale.

■ Dans les problèmes *cylindriques* décrits par des champs plans : $\vec{A}_1(x_1, x_2)$, $\vec{A}_2(x_1, x_2)$, les théorèmes précédents se réduisent à la *formule de Riemann* :

$$\int_C \vec{A}_1 dx_1 + \vec{A}_2 dx_2 = \int_S \left(\frac{\partial \vec{A}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \quad (92)$$

3.1.3.4 Formule de Green

u et v étant deux champs scalaires dans l'intérieur de S fermée, il résulte de l'équation (90), appliquée à $u \text{ grad } v$ et $v \text{ grad } u$:

$$\int_\Omega (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_S (u \partial_n v - v \partial_n u) dS \quad (93)$$

3.1.3.5 Autres théorèmes intégraux

■ Type Ostrogradski

$$\int_\Omega \text{rot} \vec{A} dx = \int_S (\vec{n} \wedge \vec{A}) dS \quad (94)$$

$$\int_\Omega \text{grad } u dx = \int_S u \vec{n} dS \quad (95)$$

■ Type Stokes

$$\int_C u \vec{t} ds = \int_S (\vec{n} \wedge \text{grad } u) dS \quad (96)$$

■ Type Green :

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\vec{A} \cdot \text{grad} \text{div} \vec{B} - \vec{B} \cdot \text{grad} \text{div} \vec{A}) dx \\ = \int_S (\vec{A}_n \text{div} \vec{B} - \vec{B}_n \text{div} \vec{A}) dS \end{aligned} \quad (97)$$

$$\begin{aligned} \int_S (\vec{A} \cdot \text{rot} \text{rot} \vec{B} - \vec{B} \cdot \text{rot} \text{rot} \vec{A}) dx \\ = \int_S [(\vec{A} \wedge \vec{n}) \cdot \text{rot} \vec{B} - (\vec{B} \wedge \vec{n}) \cdot \text{rot} \vec{A}] dS \end{aligned} \quad (98)$$

3.1.4 Discontinuités à travers une surface

Supposons que, en x_0 de S , $u(x)$ tende vers $u(x_0^+)$ du côté de \vec{n} et vers $u(x_0^-)$ du côté opposé. La discontinuité est notée :

$$[u]_S = u(x_0^+) - u(x_0^-) \quad (99)$$

De même, pour un champ vectoriel :

$$[\vec{A}]_S = \vec{A}(x_0^+) - \vec{A}(x_0^-) \quad (100)$$

Il est commode d'introduire les opérateurs superficiels :

$$\left. \begin{aligned} \text{grad}_S u &= \vec{n} [u]_S \\ \text{div}_S \vec{A} &= \vec{n} \cdot [\vec{A}]_S \\ \text{rot}_S \vec{A} &= \vec{n} \wedge [\vec{A}]_S \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

Exemple : les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= 0 \\ \text{rot} \vec{H} - \partial_t \vec{D} &= \vec{J} \\ \text{div} \vec{D} &= \rho \\ \text{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

Une surface S , ayant des densités superficielles de charges ρ_S et de courant \vec{J}_S , introduit des discontinuités dans les champs ; les expressions (102) sont alors remplacées par :

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_S \vec{E} &= 0 \\ \text{rot}_S \vec{H} &= \vec{J}_S \\ \text{div}_S \vec{D} &= \rho_S \\ \text{div}_S \vec{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

Ce sont les conditions aux limites usuelles.

3.2 Compléments sur l'intégration

3.2.1 Notion du *presque partout* (pp)

3.2.1.1 Ensembles négligeables (ou de mesure nulle)

Un ensemble N de nombres réels est dit **négligeable** (ou de **mesure nulle**), s'il peut être *recouvert* par une famille, finie ou infinie dénombrable, d'intervalles ouverts I_i dont la somme des longueurs $\ell(I_i)$ est arbitrairement petite ; c'est-à-dire que chaque nombre réel de N appartient à au moins un des intervalles I_i , avec :

$$\sum_i \ell(I_i) < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Exemples : ensembles finis, ensembles dénombrables (tel l'ensemble des rationnels), etc.

3.2.1.2 Propriété vérifiée *presque partout*

On entend par propriété vérifiée *presque partout*, par exemple sur un intervalle I (et on note *pp*), une propriété vérifiée pour tous les points de I sauf sur $N \subset I$.

Exemples : fonction continue *pp*, dérivable *pp*, suite convergente *pp*.

■ Fonctions continues *pp*

— *Fonctions continues par morceaux* : c'est l'exemple le plus simple, illustré par la *fonction en escalier*, égale à une constante c_i sur chacun des intervalles ouverts $I_i =]x_{i-1}, x_i[$ d'une partition $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ de \mathbb{R} et nulle pour $x < x_0, x > x_n$.

Si $\mathbb{1}_I(x)$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble I , c'est-à-dire $\mathbb{1}_I(x) = 1, x \in I$ et $\mathbb{1}_I(x) = 0, x \notin I$, les fonctions en escalier sont de la forme :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{I_i}(x) \tag{104}$$

— *Fonctions monotones* : une fonction monotone $f(x)$ croissante (ou décroissante) sur \mathbb{R} a des discontinuités éventuelles bornées, en nombre fini ou infini dénombrable. $f(x)$ est continue *pp* (elle est même dérivable *pp*). Tel est le cas des *fonctions de répartition*, en probabilités :

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

— *Fonctions à variation bornée* : l'ensemble des fonctions croissantes bornées n'est pas un ensemble vectoriel (§ 1.3.1), sur le corps des réels. Mais l'EV de leurs combinaisons linéaires à coefficients réels positifs, négatifs ou nuls (notamment les différences) est l'importante famille des **fonctions à variation bornée**. De façon concrète, disons que ce sont des fonctions qui n'oscillent pas trop vite. Tout morceau fini du graphe est rectifiable.

■ Convergence *pp*

Soit une suite $\{f_n(x)\}$, par exemple sur \mathbb{R} . Pour chaque réel *fixé*, la suite *numérique* $\{f_n(x)\}$ est ou bien convergente ou bien divergente. Il peut arriver que l'ensemble des x pour lesquels la suite diverge soit négligeable. On dit que la suite des fonctions $f_n(x)$ est convergente *pp* sur \mathbb{R} . On écrit :

$$f_n(x) \xrightarrow{pp} f(x)$$

Remarques

— La convergence simple correspond au cas où l'ensemble de divergence est vide.

— Toute fonction définie sur un intervalle borné peut toujours être prolongée par zéro en dehors (fonction de support borné).

— Les fonctions limites *pp*, de suites d'escaliers sont dites **mesurables**. Les fonctions limites *pp*, de suites de fonctions mesurables sont encore mesurables (la dérivée d'une fonction mesurable dérivable *pp* est également mesurable). Le fait que la classe des fonctions mesurables est fermée pour la convergence *pp*, montre l'importance du *pp*.

3.2.2 Intégrale de Riemann et extensions diverses

3.2.2.1 Rappel

L'intégrale de Riemann n'est définie que pour $f(x)$ **borné** sur un intervalle (a, b) **borné**. La notion d'intégrale est très intuitive ; c'est celle de l'aire (algébrique) limitée, entre $x = a$ et $x = b$, par le graphe de $f(x)$ et l'axe des réels. Ainsi, partant de l'aire du rectangle, l'intégrale de l'escalier (104) serait :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f = \sum_{i=1}^n c_i \ell(I_i) \tag{105}$$

avec $\ell(I_i) = x_i - x_{i-1}$.

D'où l'idée d'approcher $f(x)$ par défaut et par excès, par des escaliers liés à des partitions de $[a, b]$. Les plus avantageux sont définis par les bornes inférieure et supérieure de $f(x)$ sur chaque intervalle I_i . En affinant les partitions, il peut arriver que les deux suites de sommes telles celles de l'expression (105) aient une limite commune ; $f(x)$ est dite **intégrable au sens de Riemann** (R – intégrable). On a alors :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu_i \ell(I_i) \tag{106}$$

avec $\inf_{x \in I_i} f(x) \leq \mu_i \leq \sup_{x \in I_i} f(x)$.

Lorsque $f(x)$ est continue :

$$\mu_i = f(\xi_i), \quad x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$$

Théorème : la CNS pour que $f(x)$ soit R – intégrable sur (a, b) est qu'elle soit continue *pp* sur l'intervalle.

D'où la R – intégrabilité des fonctions continues, continues par morceaux, à variation bornée (sur un intervalle borné).

3.2.2.2 Première extension : intégrales impropres

3.2.2.2.1 Fonctions non bornées (en a , par exemple)

Si :

$$\int_{a+\varepsilon}^b f$$

existe et est convergente pour $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\text{la limite } \int_{a^+}^b f$$

définit l'intégrale sur $[a, b]$. Il en est de même, pour une fonction non bornée en b , ou en c compris entre a et b .

Exemple

$$\int_0^1 dx/\sqrt{x} \text{ est convergente}$$

$$\int_0^1 dx/x \text{ ne l'est pas}$$

Lorsque $\int_a^b |f|$ converge

$$\int_a^b f \text{ est dite } \mathbf{absolument convergente}$$

■ **Valeur principale de Cauchy** : soit $f(x)$ non bornée en c , entre a et b , intégrable sur $[a, c - \epsilon]$ et $[c + \epsilon', b]$. Il peut arriver que l'intégrale de f sur $[a, b]$ soit divergente (pour $\epsilon, \epsilon' \rightarrow 0$), mais que, cependant, en prenant le même ϵ ,

$$\int_a^{c-\epsilon} + \int_{c+\epsilon'}^b$$

ait une limite. On définit alors une valeur principale de l'intégrale :

$$VP \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\left(\int_a^{c-\epsilon} + \int_{c+\epsilon'}^b \right) f(x) dx \right] \quad (107)$$

Exemple

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi \text{ continu}$$

L'intégrale n'a pas de sens lorsque $ab < 0$. Cependant, on a :

$$\left(\int_a^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^b \right) \frac{\varphi(x)}{x} dx \rightarrow \int_a^b \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \varphi(0) \log \frac{b}{|a|} \quad (108)$$

3.2.2.2 Intervalle non borné

Si f est intégrable sur tout intervalle (a, A) , on définit :

$$\int_a^\infty f = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f \quad (109)$$

pourvu que la limite existe. L'intégrale est dite *convergente* ; elle

est **absolument convergente** si, en outre, $\int_a^\infty |f|$ existe.

On définit, de même, $\int_{-\infty}^a f$ et $\int_{-\infty}^\infty f$:

$$\int_{-\infty}^\infty f = \lim_{A, B \rightarrow \infty} \int_{-A}^B f \quad (110)$$

Il peut arriver que l'intégrale soit divergente (A, B indépendants) et qu'elle soit, cependant, convergente pour $A = B$. La limite est une **valeur principale de Cauchy** (§ 3.2.2.1) :

$$VP \int_{-\infty}^\infty f = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A f \quad (111)$$

Exemples

■ $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \pi$ l'intégrale est convergente mais non absolument.

■ $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x} dx$ est divergente ($A, A', \epsilon, \epsilon'$ étant positifs :

$$\int_\epsilon^A \text{ et } \int_{-A'}^{-\epsilon'}$$

convergent pour A, A' tendant vers l'infini, mais pas pour ϵ, ϵ' tendant vers zéro). Cependant, il existe une valeur principale :

$$VP \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x} dx = 0 \quad (112)$$

On peut également définir ainsi :

$$VP \int_{-\infty}^\infty \frac{\exp(jx)}{x} dx = j\pi \quad (113)$$

(ici VP est relatif à $x = 0$).

■ Inversion de la transformée de Fourier ou de celle de Laplace avec VP relatives à $\pm \infty$.

3.2.2.3 Deuxième extension : intégrale de Stieltjes

3.2.2.3.1 Définition

Soit, d'abord une fonction $g(x)$ croissante sur $[a, b]$. En convenant d'assigner à chaque point de discontinuité x_0 la valeur $g(x_0) = g(x_0^-)$ [$< g(x_0^+)$], $g(x)$ est définie en tout point de l'intervalle, même s'il est de discontinuité (où la fonction est alors continue à gauche), ce qui permet d'attacher à tout intervalle semi-ouvert : $I_j = [x_{j-1}, x_j[$ la *masse* (ou mesure positive) :

$$m(I_j) = g(x_j) - g(x_{j-1}) \quad (114)$$

D'où l'idée de généraliser l'expression (106) par des sommes :

$$\sum_j f(\xi_j) m(I_j)$$

$f(x)$ étant continue et bornée sur $[a, b]$. La limite est notée :

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x) dm = \int_a^b f(x) m(dx) \quad (115)$$

On peut étendre la définition à $g(x)$, fonction à *variation bornée* (§ 3.2.2.1), et à (a, b) non borné, comme précédemment. $g(x)$ peut être prise à une constante additive près. Il peut être commode de se fixer : $g(a) = 0$, a étant fini ou non.

Enfin, il n'est pas nécessaire que $f(x)$ soit continue : la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b f dg = [fg]_a^b - \int_a^b g df \quad (116)$$

montre que f peut être à variation bornée et g continue. En fait, f et g peuvent même être à variation bornée, pourvu qu'il n'y ait pas de discontinuités en un même x .

3.2.2.3.2 Exemples et applications

■ **L'intégrale de Stieltjes** (§ 3.2.2.3.1) se réduit à celle de Riemann (§ 3.2.2.1) pour $g(x) = x$ ou, plus généralement, pour $g(x)$ dérivable en tout point, donc vérifiant $dg(x) = g'(x)dx$.

■ Cas des **fonctions de sauts**, constantes par morceaux (escaliers, par exemple) : on a $dg(x) = 0$ sauf aux discontinuités x_i pour lesquelles $dg(x_i) = g(x_i^+) - g(x_i) = m_i$. Alors :

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \sum_i m_i f(x_i) \tag{117}$$

qui ramène les suites numériques à des intégrales de Stieltjes.

Le 1^{er} cas est celui d'une masse répartie avec une densité $g'(x)$, le 2^e celui de masses m_i concentrées en des points x_i .

■ **Mesure de Dirac** : $g(x) = Y(x)$, échelon de Heaviside, (pris continu à gauche : $Y(x) = 1$ pour $x > 0$, $= 0$ pour $X \leq 0$) correspond à la masse unité localisée à l'origine ; l'expression (117) se réduit à :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dY(x) = f(0) \tag{118}$$

Ainsi :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dY(x) = 1 \tag{119}$$

La tentation d'écrire :

$$dY(x) = Y'(x)dx$$

a incité les physiciens à introduire la *fonction* de Dirac $\delta(x)$, ayant le rôle de dérivée de l'échelon de Heaviside et telle que :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx &= f(0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx &= 1 \end{aligned} \tag{120}$$

Mais $\delta(x)$ n'a pas plus de signification que la densité d'une masse ponctuelle : elle est nulle partout, sauf à l'origine, où $\delta(0) = +\infty$

L'intégrale de Stieltjes (définie par l'expression (115)) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\delta = f(0) \tag{121}$$

avec la **mesure de Dirac** :

$$\delta([a, b[) = Y(b) - Y(a)$$

est la formulation correcte.

Remarque : l'interprétation de la relation (120) comme forme linéaire sur un espace vectoriel (§ 1.3.1) de fonctions continues telles que $f(x)$ est celle de la théorie des distributions.

■ **Fonctions de répartition** : en probabilités, on utilise systématiquement $g(x) = F(x)$, fonction croissante telle que $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$. La masse, telle que définie par l'équation (114), est la probabilité que la variable aléatoire X appartienne à l'intervalle I_j .

■ **Transformées de Fourier-Stieltjes et de Laplace-Stieltjes** : les

transformées de $g(t)$, à variation bornée, $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi j vt) dg(t)$

et $\int_0^{\infty} \exp(-pt) dg(t)$, englobent, notamment, les transformées usuelles (celles de $g'(t)$) et les transformées discrètes :

$$\sum_n a_n \exp(-2\pi j vt_n) \quad \text{et} \quad \sum_n a_n \exp(-pt_n)$$

■ **Convolution** : la convolution usuelle de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$:

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t) dt \tag{122}$$

peut être généralisée en convolution d'une fonction f (à variation bornée) par une mesure g , notée :

$$h(x) = (f * dg)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)dg(t) \tag{123}$$

On a $f * dg = g * df$

Si $g(t)$ est la fonction des sauts, $dg(n) = b_n$,

$$h(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n f(x-n) \tag{124}$$

qui conduit à définir par :

$$c_p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_{p-n} \tag{125}$$

la convolution de 2 suites.

3.2.2.4 Troisième extension : intégrale de Lebesgue

Lorsqu'une suite de fonctions $\{f_n(x)\}$, R - intégrables sur un intervalle $[a, b]$, y converge simplement (c'est-à-dire pour chaque x) vers une limite $f(x)$, il n'y a aucune raison pour que celle-ci soit également intégrable ni que l'on ait la très utile propriété de continuité :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \neq \int_a^b f \tag{126}$$

L'intégrale de Lebesgue peut être construite à partir d'un résultat simple proche de celui de la relation (126). On démontre qu'une suite **croissante** de fonctions $\varphi_n(x)$ R - intégrables, dont les intégrales (sur le support supposé borné de chacune d'elles) sont bornées supérieurement, est **convergente presque partout** (§ 3.2.1.2). La limite $f(x)$ n'est généralement pas R - intégrable. Or, la suite bornée des intégrales des φ_n étant croissante, elle est convergente. La limite est alors prise comme définition de l'intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x) dx \tag{127}$$

Si, ensuite, à la combinaison linéaire $af + bg$ (a, b réels de signe *quelconque*) de fonctions définies comme précédemment, on

attache l'intégrale $a \int f + b \int g$, on engendre l'espace vectoriel des fonctions intégrables au sens de Lebesgue ou sommables (espace \mathcal{L}^1).

Il est alors remarquable que la même procédure, appliquée à des suites de fonctions $\varphi_n(x)$, cette fois sommables, n'augmente pas l'espace \mathcal{L}^1 . L'extension à f complexe est immédiate.

Le **théorème de la convergence dominée** joue un rôle central : si une suite $\{f_n\}$ de fonctions sommables *pp* majorées en module par une fonction sommable, est convergente *pp*, la limite est elle-même sommable et vérifie la relation (126) sur \mathbb{R} .

L'importance de l'intégrale de Lebesgue est considérable. On se bornera à en souligner quelques aspects.

■ Elle est définie directement pour des fonctions non bornées sur un intervalle non borné.

■ Elle intègre une classe de fonctions bien plus vaste que l'intégrale de Riemann (§ 3.2.2) : toute fonction R - intégrable est sommable (avec la même valeur) mais non inversement.

■ Elle est adaptée au problème des primitives ou, ce qui est équivalent, à celui de l'expression d'une fonction dérivable pp au moyen de sa dérivée.

■ Deux fonctions égales pp ont même intégrale. Sous réserve d'une telle équivalence on définit les espaces de fonctions de puissance p^e sommables (espace L^p) qui sont **complets**. D'où, notamment, pour $p = 2$, le rôle de la convergence en moyenne quadratique (espace de Hilbert L^2 , série de Fourier, série de fonctions orthogonales, etc.).

■ L'extension, comme pour l'intégrale de Riemann, à l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes est essentielle en probabilités modernes.

4. Fonctions de la variable complexe

4.1 Vocabulaire topologique

4.1.1 Plan \mathbb{C}

Il comprend l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes $z = x + jy$, traité comme celui des points (x, y) du plan \mathbb{R}^2 , auquel on adjoint un *point à l'infini*. On notera alors éventuellement $\overline{\mathbb{C}}$.

4.1.2 Notion de domaine

4.1.2.1 Disque

- disque (sous-entendu *ouvert*) : $D(a, r) = \{z : |z - a| < r\}$
- disque *fermé* : $\overline{D}(a, r) = \{z : |z - a| \leq r\}$

Constitue un voisinage de a : a est *intérieur* à un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ s'il est centre d'un disque $D \subset E$.

4.1.2.2 Ensemble ouvert

Ensemble dont tous les points sont des points intérieurs.

4.1.2.3 Ensemble connexe (ou d'un seul tenant)

Ensemble ne pouvant s'écrire comme réunion de 2 ouverts (non vides) disjoints. Tout couple de points peut être relié par un chemin (§ 4.1.3.1) intérieur.

■ **Exemples** : disque, intérieur d'une couronne.

Un ensemble non connexe est réunion de composantes connexes.

4.1.2.4 Domaine

Ensemble ouvert et connexe \mathcal{D} .

Frontière d'un domaine : ensemble $\partial\mathcal{D}$ des points dont tout voisinage (disques) contient des points intérieurs et des points extérieurs à \mathcal{D} ($\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}}$).

■ **Exemples** : $\overline{\mathbb{C}}(\partial\mathcal{D} = \emptyset)$; disque épointé : $D(a, r) - \{a\}$
 $(\partial\mathcal{D} = \{\text{cercle} : |z| = r\} \cup \{a\})$.

4.1.3 Trajets

4.1.3.1 Chemin

Arc orienté paramétré :

$$\gamma(t) = x(t) + jy(t), \quad a \leq t \leq b$$

x et y continues à variation bornée (arc rectifiable). Pour l'intégration, x et y sont pris continûment dérivables par morceaux.

Remarque : en fait, on appelle *chemin* l'application continue $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ et *trajectoire* son image $\Gamma = \gamma([a, b])$, représentation géométrique du chemin. On ne fera pas ici la distinction et on parlera du chemin Γ .

Si $\Gamma = \widehat{AB}$, $A = \gamma(a)$ est l'origine, $B = \gamma(b)$ l'extrémité. Le chemin \widehat{BA} sera noté $-\Gamma$. Lorsque γ est injectif, Γ est *simple* (sans point multiple).

4.1.3.2 Circuit (ou lacet) : chemin fermé : $\gamma(a) = \gamma(b)$

Dans le plan \mathbb{C} , un circuit simple C peut être parcouru ou non dans le sens positif (contraire des aiguilles d'une montre), ce qu'on pourra noter C^+ (ou \widehat{C}) et C^- (ou \overleftarrow{C}). C^+ laisse son intérieur à sa gauche. Lorsque la frontière $\partial\mathcal{D}$ d'un domaine \mathcal{D} est constituée de circuits, il est commode d'orienter ceux-ci de façon à laisser \mathcal{D} à gauche.

Exemples

■ Un circuit simple sépare son intérieur \mathcal{D} de son extérieur \mathcal{D}' ($z = \infty$ est intérieur à \mathcal{D}')

$$\partial\mathcal{D} = C^+, \quad \partial\mathcal{D}' = C^-$$

■ $\partial\mathcal{D} = C^+ \cup C_1^- \cup C_2^-$ (figure 1).

On écrit aussi : $\partial\mathcal{D} = C - C_1 - C_2$.

4.1.3.3 Homotopie

Équivalence par déformation continue dans \mathcal{D} .

Deux trajectoires Γ_1 et Γ_2 entre A et B sont **homotopes** ($\Gamma_1 \sim \Gamma_2$) dans \mathcal{D} si elles sont transformables l'une dans l'autre par déformation continue dans \mathcal{D} , conservant l'orientation, A et B étant fixés. Il en est de même pour deux circuits C_1 et C_2 . Un circuit C est homotope à 0 s'il est réductible à un point de \mathcal{D} , ainsi $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$ équivaut à $C = \Gamma_1 - \Gamma_2 \sim 0$. À tout C correspond la classe des circuits qui lui sont homotopes dans \mathcal{D} (l'ensemble des C est partagé en classes d'équivalence).

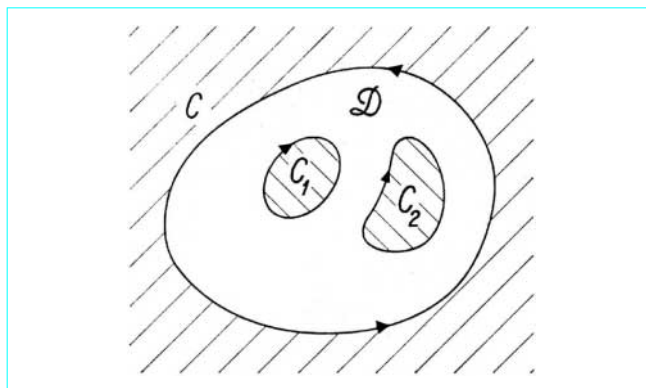


Figure 1 – Domaine et frontière

4.1.3.4 Connexion d'un domaine

L'intérieur d'un circuit simple C est dit *simplement connexe* si : tous les C sont homotopes à 0.

Un domaine *troué* (même par des points) est *multiplement connexe*. On y distingue plusieurs classes d'homotopie. Des chemins infranchissables, dits *coupures*, le rendent simplement connexe. Leur nombre minimal définit l'*ordre de connexion* du domaine (figure 2).

4.1.4 Convergence

4.1.4.1 Suites

$z_n \rightarrow \underline{a}$ signifie $|z_n - \underline{a}| \rightarrow 0$ (pour tous les points, à partir d'un certain rang, dans tout disque de centre \underline{a}).

4.1.4.2 Applications continues

L'application $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue en $\underline{z} = \underline{a}$, si $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\eta(\varepsilon, \underline{a}) > 0$ tel que :

$$|z - \underline{a}| < \eta \Rightarrow |f(z) - f(\underline{a})| < \varepsilon$$

On peut prendre aussi : $\forall \{z_n\} : z_n \rightarrow \underline{a}$, alors $f(z_n) \rightarrow f(\underline{a})$

■ **Continuité dans un domaine** \mathcal{D} : elle implique la continuité en chaque point. Elle est *uniforme* par rapport à \mathcal{D} si le même $\eta(\varepsilon)$ s'applique pour tous les points.

4.2 Fonctions holomorphes

4.2.1 Fonction de variable complexe

4.2.1.1 Définitions

Si $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$, on écrit :

$$\underline{Z} = X + jY = f(\underline{z}) = P(x, y) + jQ(x, y) \tag{128}$$

P et Q sont dites *conjuguées*. \mathcal{D} est le *domaine de définition*.

Exemples

- $f(\underline{z}) = z^n$ (n entier > 0), d'où polynômes, d'où fractions rationnelles (en particulier $1/z^n$).
- $f(\underline{z}) = \exp(\underline{z}) = \exp(x) (\cos y + j \sin y)$; on en déduit $\text{sh } \underline{z}$, $\text{ch } \underline{z}$, $\text{th } \underline{z}$, $\sin \underline{z}$, $\cos \underline{z}$, $\text{tg } \underline{z}$.

4.2.1.2 Aspect géométrique

■ **Transformation ponctuelle** $\underline{z} \rightarrow \underline{Z}$: il est souvent commode de représenter à part les plans (\underline{z}) et (\underline{Z}) (figure 3, par exemple).

On observera que $\underline{Z} = 1/\underline{z}$ échange l'origine et le point ∞ . Celui-ci rend aussi la transformation bijective.

■ La relation (128) peut être aussi interprétée comme un **changement de coordonnées** $(x, y) \rightarrow (X, Y)$. Les 2 familles de courbes coordonnées :

$$P(x, y) = Cte, \quad Q(x, y) = Cte \tag{129}$$

représentent géométriquement $f(\underline{z})$ (figure 3).

4.2.1.3 Définitions indirectes

a) Si $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ et $g: f(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{C}$, $g[f(\underline{z})] = (g \circ f)(\underline{z})$ est définie sur \mathcal{D} .

b) **Inversion** : si $f: \mathcal{D} \rightarrow f(\mathcal{D})$ bijectif, on peut définir :

$$f^{-1}: f(\mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{D}$$

c) **Séries et intégrales** : $f(\underline{z})$ peut être définie comme somme d'une série $\sum_n f_n(\underline{z})$.

Exemple : fonction de Bessel :

$$J_\nu(\underline{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu + n + 1)} \left(\frac{\underline{z}}{2}\right)^{\nu + 2n} \tag{130}$$

où la fonction Γ est définie comme intégrale :

$$\Gamma(\underline{\xi}) = \int_0^{\infty} \exp(-t) t^{\underline{\xi} - 1} dt$$

Remarques

- Lorsque $f(\underline{z})$, non défini en \underline{a} , a cependant une limite pour $\underline{z} \rightarrow \underline{a}$, on convient de définir $f(\underline{a})$ par cette limite (figure 3).
- Exemple* : $\sin \underline{z}/\underline{z} = 1$ pour $\underline{z} = 0$.
- Ce prolongement par continuité peut également être effectué sur la frontière. Sauf indication contraire, on considérera ici les fonctions holomorphes dans \mathcal{D} , continues sur \mathcal{D} .

4.2.1.4 Fonctions multiformes

Lorsque $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ n'est pas injectif, il existe plusieurs fonctions inverses $f^{-1}(\underline{Z})$ sur $f(\mathcal{D})$. On les traite comme des branches d'une même fonction dite alors **multiforme**.

Exemples

- $\underline{z} = \sqrt{\underline{Z}}$ définit 2 branches $\underline{z} = \sqrt{\underline{Z}}$. Soit un circuit C partant d'un point $\underline{z} = r \exp j\theta$, $0 \leq \theta < 2\pi$, où $f_1(\underline{z}) = \sqrt{r} \exp(j\theta/2)$.
Selon que C n'entoure pas O ou l'entoure (C^+), on revient à $f_1(\underline{z})$ ou on obtient : $f_2(\underline{z}) = \sqrt{r} \exp[j(\theta/2 + \pi)] = -f_1(\underline{z})$; les déterminations s'échangent *autour* de l'origine qui est dite **point critique** ou **point de branchement** (l'écriture $\pm \sqrt{\underline{Z}}$ n'a pas de sens ici).
- $\underline{z} = \exp(\underline{Z})$: il existe une infinité de branches $\underline{z} = \log \underline{z}$. Chaque tour autour de O (cercles C^+) augmente $\log r + j\theta$ de $2\pi j$.

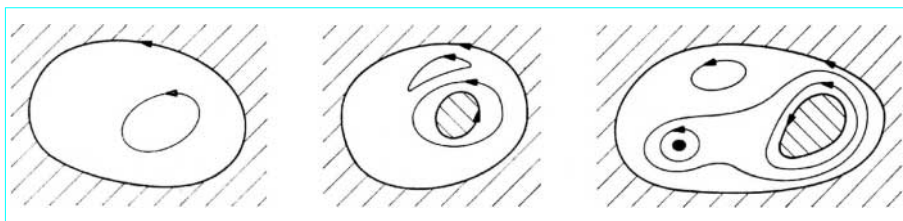


Figure 2 - Connexion d'un domaine

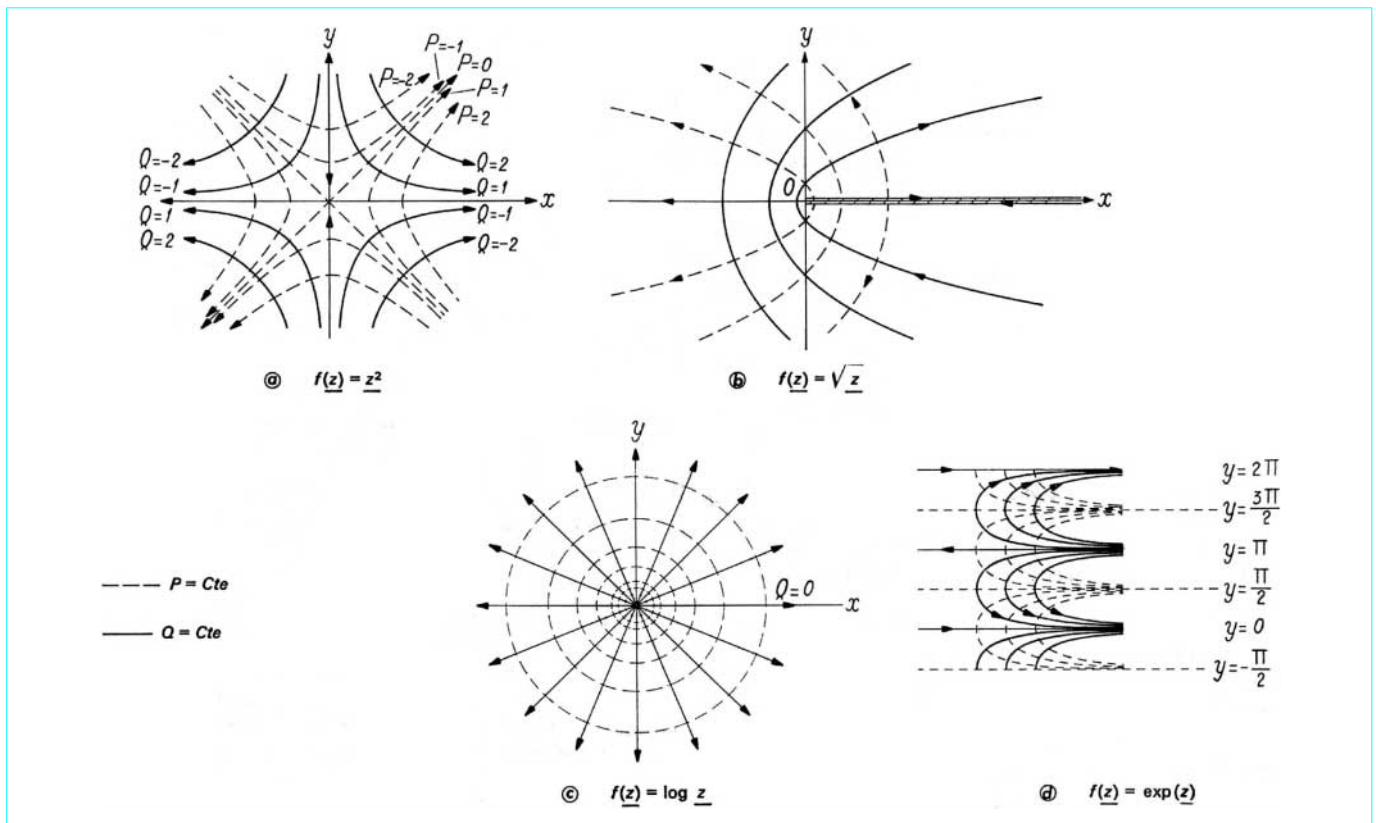


Figure 3 – Représentation graphique de quelques fonctions

On peut se ramener au cas uniforme :

a) en *couplant* le plan : une **coupure** est un chemin infranchissable issu d'un point critique. Les diverses branches sont des fonctions uniformes autonomes dans le nouveau domaine.

Exemple : \sqrt{z} et $\log z$.

On prendra comme coupure une demi-droite issue de O , par exemple le demi-axe positif. Chaque branche prend alors des valeurs différentes sur les deux bords de la coupure (figures 3b et c).

Dans tous ces paragraphes, \log est entendu au sens de logarithme népérien.

b) au moyen d'une **surface de Riemann** :

Exemples

■ \sqrt{z} : on superpose 2 plans \mathbb{C} coupés (feuillet). Chaque bord d'une coupure est connecté à l'autre bord sur l'autre feuillet. Chaque feuillet est assigné à une détermination. On passe ainsi d'un feuillet à l'autre en tournant autour du point de branchement. L'application $z \mapsto \sqrt{z}$ devient bijective entre \mathbb{C} et la surface à 2 feuillets.

■ $\log z$: on empile une infinité de feuillets connectés chacun au suivant.

4.2.2 Dérivation

4.2.2.1 Dérivée en un point

La dérivée de $f(z)$ en $z = a$, notée $f'(a)$, est, si elle existe, la limite :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \quad (131)$$

Elle implique la continuité en a . On peut aussi, pour toute suite $z_n \rightarrow a$, prendre :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(z_n) - f(a)] / (z_n - a)$$

4.2.2.2 Dérivée dans un domaine

Elle est notée $f'(z)$, ou aussi df/dz pour tout $z \in \mathcal{D}$.

— La définition (131) suppose a intérieur à \mathcal{D} . C'est la raison pour laquelle \mathcal{D} doit être ouvert. La dérivée n'est pas définie sur la frontière $\partial\mathcal{D}$ de \mathcal{D} . En revanche on peut parler de continuité sur $\bar{\mathcal{D}}$.

— Les règles de calcul des dérivées sont les mêmes que dans le cas réel.

4.2.2.3 Fonctions holomorphes

Les fonctions dérivables dans un domaine \mathcal{D} sont dites **holomorphes** (ou **analytiques**) dans \mathcal{D} . Leur famille sera notée $H(\mathcal{D})$ ou $H_{\mathcal{D}}$. La locution abusive d'*holomorphic en un point* signifie l'holomorphicité dans un voisinage du point (par exemple disque § 4.1.2.1).

— La notion d'holomorphicité est une contrainte très forte. Elle entraîne la dérivabilité indéfinie avec chaque $f^{(n)} \in H(\mathcal{D})$
 — $f(z)$ holomorphic en tout $z, |z| < \infty$, est dite **entière**.

4.2.2.4 Conditions de Cauchy

Ce sont les CNS de dérivabilité. Elles expriment que P et Q sont continûment dérivables et :

$$\begin{aligned} P'_x &= Q'_y \\ Q'_x &= -P'_y \end{aligned} \quad (132)$$

Conséquences

$$\begin{aligned} f'(z) &= P'_x - jP'_y = Q'_y + jQ'_x \\ &= P'_x + jQ'_x = \frac{1}{j}(P'_y + jQ'_y) \end{aligned} \quad (133)$$

■ Si P et Q sont 2 fois continûment dérivables, elles sont harmoniques :

$$\begin{aligned} P''_{x^2} + P''_{y^2} &= \Delta P = 0 \\ Q''_{x^2} + Q''_{y^2} &= \Delta Q = 0 \end{aligned} \quad (134)$$

4.2.2.5 Propriété locale de l'application : $z \mapsto f(z)$

L'écriture : $dZ = f'(a)d\underline{z}$, $f'(a) \neq 0$ est interprétée comme une similitude en $\underline{z} = a$ de rapport $|f'(a)|$ et de rotation $\text{Arg } f'(a)$. L'angle, en a , de 2 courbes Γ_1 et Γ_2 qui s'y rencontrent est conservé [c'est celui de $f(\Gamma_1)$ et $f(\Gamma_2)$ en $f(a)$]. En particulier, l'orthogonalité est conservée ; d'où celle des familles $P = Cte$, $Q = Cte$.

Remarques

- Le réseau $P = m\varepsilon$, $Q = n\varepsilon$ (ε petit) découpe \mathcal{D} en *petits carrés* de côtés $\varepsilon/|f'(a)|$ en chaque point a .
- Une transformation qui conserve les angles est dite **conforme**.
- La condition $f'(a) \neq 0$ permet de définir $f^{-1}(Z)$ dans un voisinage de $f(a)$.

4.3 Intégration

4.3.1 Intégrale le long d'un chemin

Avec $f(z) \in H(\mathcal{D})$ et $\Gamma \subset \mathcal{D}$, on construit l'intégrale curviligne :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f(z_k)(z_{k+1} - z_k) \quad (135)$$

à partir de lignes polygonales inscrites $z_k = \gamma(t_k)$ (§ 4.1.3.1) dont les côtés tendent vers 0. On peut définir directement :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \gamma'(t) dt \\ &= \int_{\Gamma} P dx - Q dy + j \int_{\Gamma} Q dx + P dy \end{aligned} \quad (136)$$

Exemple : cercle, $z = a + r \exp(j\theta)$:

$$j r \int_0^{2\pi} f[a + r \exp(j\theta)] \exp(j\theta) d\theta$$

Lorsque Γ est borné :

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in \Gamma} |f(z)| \cdot \ell(\Gamma) \quad (137)$$

4.3.2 Formule de Cauchy

Si C est un circuit (dans \mathcal{D}) homotope à 0 (§ 4.1.3.3), on a :

$$\int_C f(z) dz = 0 \quad (138)$$

Tel est le cas, notamment, pour tous les circuits des **domaines simplement connexes** (§ 4.1.3.4). Si un tel domaine \mathcal{D} est, en outre, borné et si f est continu sur $\overline{\mathcal{D}}$ on peut étendre la relation (138) à la frontière $C = \partial\mathcal{D}$ (bien que $\partial\mathcal{D}$ n'appartienne pas à \mathcal{D}).

Conséquences

— Pour 2 chemins homotopes Γ_1 et Γ_2 :

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz \quad (139)$$

— *Primitives* : si Γ est d'origine fixe z_0 et d'extrémité variable z , dans une partie simplement connexe, l'intégrale ne dépend que de z , d'où l'écriture :

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi \quad (140)$$

équivalente à $F'(z) = f(z)$.

Pour les **domaines multiplément connexes** : la relation (138) n'est, en général, plus vraie. Cependant, si $C_1 \approx C_2$:

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz \quad (141)$$

(cette invariance pour une même classe d'homotopie justifie cette dernière notion). Cependant, le long de la frontière $\partial\mathcal{D}$ (figure 1), on aura :

$$\int_{\partial\mathcal{D}} f(z) dz = 0 \quad (142)$$

4.3.3 Intégrale de Cauchy

4.3.3.1 Théorème fondamental

Si, dans \mathcal{D} *simplement connexe*, C est *simple* et $z = a$ intérieur à C , $f(z)/(z-a)$ n'est plus holomorphe dans \mathcal{D} . Cependant, on a la formule fondamentale :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz \quad (143)$$

Elle montre que la seule donnée des valeurs d'une fonction sur un circuit fermé C suffit à déterminer cette fonction en tout point intérieur à C (cf. problème de Dirichlet dans l'article *Équations aux dérivées partielles* [A 650] du traité Sciences fondamentales). Il en est, d'ailleurs, de même pour toutes les dérivées :

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi j} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad (144)$$

4.3.3.2 Généralisation

Soit un circuit C quelconque (figure 4). L'indice $I(C, a)$ de tout $a \in \mathcal{D}$ par rapport à C étant le nombre de fois que C tourne autour de a ($2\pi I$ est l'angle algébrique balayé par le rayon $\underline{z} - \underline{a}$, \underline{z} parcourant C) on a :

$$\frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{f(z)}{z - a} dz = I(C, a) f(a) \quad (145)$$

En particulier, la relation (143) donnerait 0 pour a hors de C .

4.4 Représentation par des séries

4.4.1 Séries entières

4.4.1.1 Convergence

À toute série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n (\underline{z} - \underline{a})^n$$

on associe le réel :

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|A_n|} \quad (146)$$

(en particulier, $\lim \sqrt[n]{|A_n|}$ si elle existe). La série converge absolument, dans le disque $D(\underline{a}, R)$ et diverge hors de \bar{D} (D est le disque de convergence, R le rayon de convergence). Sa somme $\in H(D)$ (§ 4.2.2.3). La convergence est, en outre, uniforme dans tout $\bar{D}(\underline{a}, R_1)$ $R_1 < R$.

Remarques

■ R peut être nul (convergence en \underline{a} seul). Il peut être infini : la somme est alors fonction entière.

Exemples

$$\sum_0^{\infty} z^n / n! = \exp(z)$$

$$\sum_0^{\infty} (-1)^n z^{2n+1} / (2n+1)! = \sin z, \text{ etc.}$$

■ La série $\sum_1^{\infty} \frac{B_n}{(\underline{z} - \underline{a})^n}$ convergerait hors d'un disque fermé.

4.4.1.2 Série de Taylor

Soit, inversement, $f(z) \in H(\mathcal{D})$. On a, au voisinage de chaque point \underline{a} , la représentation :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\underline{a})}{n!} (\underline{z} - \underline{a})^n \quad (147)$$

— La représentation n'est valable que dans un disque, le plus grand contenu dans \mathcal{D} ($R =$ distance de \underline{a} à $\partial\mathcal{D}$). La technique du prolongement analytique consiste à tirer de la relation (147) les développements autour de tout autre point hors du disque précédent.

— L'analyticit e consiste, en fait, dans la représentation par séries de Taylor. On voit qu'analyticit e et holomorphie se ramènent l'une à l'autre.

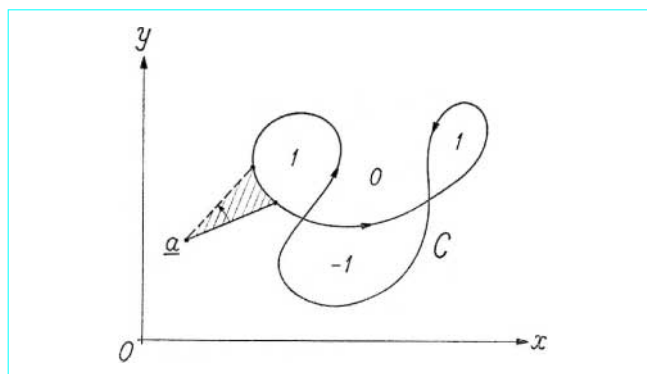


Figure 4 – Généralisation du théorème de Cauchy

4.4.2 Séries de Laurent

4.4.2.1 Développement de $f(z)$

Si $f(z) \in H(\mathcal{D} - \{a\})$, on considère la série :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (\underline{z} - \underline{a})^n = f_s(z) + f_r(z) \quad (148)$$

avec une partie régulière :

$$f_r(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\underline{z} - \underline{a})^n$$

convergente pour $|\underline{z} - \underline{a}| < R_2$,

et une partie singulière :

$$f_s(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} A_n (\underline{z} - \underline{a})^n$$

convergente pour $|\underline{z} - \underline{a}| > R_1$.

Lorsque $0 < R_1 < R_2$, $f(z)$ est représentée par la série de Laurent (148) dans la couronne $R_1 < |\underline{z} - \underline{a}| < R_2$ avec :

$$A_n = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{f(z)}{(\underline{z} - \underline{a})^{n+1}} dz \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (149)$$

où C est homotope à tout cercle $|\underline{z} - \underline{a}| = Cte$ de la couronne.

4.4.2.2 Points réguliers, points singuliers isolés

4.4.2.2.1 Points réguliers

Si le développement (148) n'a pas de partie singulière ; on est ramené à la formule (147).

Zéro d'ordre m : si A_{m+1} premier coefficient non nul :

$$f(z) = (\underline{z} - \underline{a})^m g(z) \quad [g(\underline{a}) \neq 0]$$

4.4.2.2.2 Pôles

Si la partie singulière est limitée : $A_n = 0$ pour $n < -m$ ($m > 0$) :

$$f(z) = \frac{g(z)}{(\underline{z} - \underline{a})^m}, \quad g(z) \text{ holomorphe en } \underline{a}, \quad g(\underline{a}) \neq 0$$

\underline{a} est dit pôle d'ordre m . A_m est zéro d'ordre m de $1/f$ (et inversement). $|f(z)| \rightarrow \infty$ lorsque $\underline{z} \rightarrow \underline{a}$.

Fonctions méromorphes : ce sont celles qui, pour seules singularités, ont des pôles dans \mathbb{D} .

Exemples

- $f = f_1/f_2 : f_1, f_2 \in H(\mathbb{D})$ (fractions rationnelles, par exemple).
- $f(z) = \operatorname{tg} z$: zéros simples : $z = n\pi$, pôles simples :

$$z = \frac{\pi}{2} + n\pi.$$

4.4.2.2.3 Points singuliers essentiels

Si la partie singulière est illimitée.

Exemples

$$\exp \frac{1}{z} = \sum_0^\infty \frac{1}{n! z^n} \text{ de même } \sin \frac{1}{z}, \cos \frac{1}{z}, \dots \text{ (en } z = 0 \text{)}$$

$1/f$ n'est pas bornée au voisinage de a . En fait, on peut trouver des suites $z_n \rightarrow a$ telles que $f(z_n)$ converge vers n'importe quelle valeur prescrite.

4.4.2.2.4 Cas du point à l'infini

On se ramène, par $z = 1/z$, au voisinage de $z = 0$ (l'extérieur $|z| > R$ de tout disque, la frontière $|z| = R$ étant parcourue négativement, est un voisinage de $z = \infty$).

Le point à l'infini est pôle d'ordre m des polynômes de degré m , point singulier essentiel des fonctions entières [par exemple : $\exp(z), \sin z, \cos z, \dots$]. Une telle fonction bornée dans \bar{C} se réduit à une constante.

Remarque : pôles et points essentiels sont isolés. Un domaine borné n'en contient qu'un nombre fini.

4.4.2.3 Résidus

Pour $n = -1$, la relation (149) se réduit à :

$$\int_{C^+} f(z) dz = 2\pi j A_{-1} \tag{150}$$

qui fait jouer un rôle important au terme en $1/(z-a)$ de la série de Laurent (148). $A_{-1} = \operatorname{Rés}(f, a)$ est dit **résidu** de $f(z)$ en a .

Théorème des résidus : si $f(z)$ est holomorphe dans \mathbb{D} sauf en des pôles ou points essentiels a_k intérieurs à un circuit C simple (dans \mathbb{D}) :

$$\int_{C^+} f(z) dz = 2\pi j \sum_k \operatorname{Rés}(f, a_k) \tag{151}$$

Remarques

- Ce théorème s'applique à $\partial\mathbb{D}$ avec l'hypothèse $f(z)$ continue sur $\bar{\mathbb{D}}$.
- Il s'applique à un domaine non borné avec une infinité de points singuliers (on prend la série des résidus).
- Avec C quelconque, on a la généralisation (§ 4.3.3.2) :

$$\int_{C^+} f(z) dz = 2\pi j \sum_k I(C, a_k) \operatorname{Rés}(f, a_k) \tag{152}$$

— Si f est holomorphe au voisinage de l'infini, sauf en $z = \infty$, on a, pour C assez grand :

$$\int_{C^-} f(z) dz = -2\pi j A_1 \tag{153}$$

En traitant $-A_1$ comme le résidu de $z = \infty$, on peut dire que la somme de tous les résidus est nulle.

4.4.2.4 Calcul des résidus

■ Pôles simples

Pour $f(z) = g(z)/(z-a), g(a) \neq 0$ est le résidu :

$$\operatorname{Rés}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) \tag{154}$$

Lorsque $f(z) = g(z)/h(z)$ avec $g(a) \neq 0, h(a) = 0, h'(a) \neq 0$:

$$\operatorname{Rés}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)} \tag{155}$$

■ Pôles multiples

Pour $f(z) = g(z)/(z-a)^m$, un développement limité :

$$g(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \dots + \alpha_{m-1} h^{m-1} + o(h^{m-1})$$

donne α_{m-1} [il serait plus compliqué, en général, de former $g^{(m-1)}(a)/(m-1)!$]

4.4.2.5 Application

Pour a zéro ou pôle d'ordre $m(\geq 0)$ c'est-à-dire $f(z) = (z-a)^m g(z)$, la dérivée logarithmique :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

admet a pour pôle simple de résidu m . Pour tout circuit C contenant Z zéros et P pôles (comptés avec leur ordre) on a, d'après la relation (151) :

$$\int_{C^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi j (Z - P) \tag{156}$$

Le 1^{er} membre se réduit à la variation de $\operatorname{Arg} \log f(z)$. $(Z - P)$ est donc le nombre (algébrique) de tours décrit par le point $f(z)$ lorsque z parcourt C (§ 4.7).

4.5 Applications à l'analyse

4.5.1 Calculs d'intégrales

4.5.1.1 Méthode

Soit à intégrer $f(z)$ sur un chemin Γ , borné ou non. Tout ou partie de Γ , fermé éventuellement avec un chemin auxiliaire Γ' , ramène à l'intégration sur un circuit, donc notamment à la formule de Cauchy (§ 4.3.2) ou des résidus (§ 4.4.2.3). Il arrive que l'intégrale sur Γ' soit facile à calculer, ou liée simplement à celle qu'on cherche, ou tende vers 0 pour Γ' s'éloignant à l'infini. Enfin, lorsque $f(z)$ est multiforme, on la rend uniforme par des coupures appropriées. Fixant une détermination par un point $z = z_0$, on a toutes les autres valeurs, notamment en suivant cette détermination par continuité sur le chemin d'intégration.

4.5.1.2 Intégration sur un chemin non borné

Si A est l'origine de Γ , on définit :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{AB} f(z) dz \tag{157}$$

4.5.1.2.1 Cas de convergence

a) Γ intérieurement asymptote aux 2 côtés d'un secteur S :

$$\theta_1 \leq \text{Arg } z \leq \theta_2$$

b) $f(z)$ holomorphe dans le domaine \mathcal{D} de frontière Γ sauf en un nombre fini de points \underline{a}_k et telle que, pour un $\alpha > 1$, $|z^\alpha f(z)|$ reste borné lorsque $|z|$ assez grand ($|z| > R$) ; alors (figure 5) :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi j \sum_k \text{Rés}(f, \underline{a}_k) \tag{158}$$

Le calcul le plus fréquent est celui des intégrales définies réelles :

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$, au moyen des points singuliers de $f(z)$ du demi-plan supérieur et en complétant l'intervalle $-R \leq x \leq R$ par le demi-cercle : $|z| = R, y > 0$ (on peut utiliser également le demi-plan inférieur).

On utilise souvent la condition de Jordan : $|f(z)| = O(1/|z|)$ à l'infini. Une condition moins sévère se rencontre dans le calcul du paragraphe 4.5.1.2.2.

4.5.1.2.2 Intégrales du type $\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(jux) dx$

$f(z)$ ayant des points singuliers *non réels* \underline{a}_k dans le demi-plan supérieur, \underline{a}'_l dans le demi-plan inférieur, et vérifiant $|zf(z)|$ borné pour $|z|$ assez grand $|f(z)| = O(1/|z|)$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(jux) dx &= 2\pi j \sum_k \text{Rés}[f(z) \exp(juz), \underline{a}_k] \quad (u > 0) \\ &= -2\pi j \sum_l \text{Rés}[f(z) \exp(juz), \underline{a}'_l] \quad (u < 0) \end{aligned} \tag{159}$$

Remarque : le point suivant est souvent négligé : le calcul par les résidus fournit, en fait, $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$ c'est-à-dire une *valeur principale de Cauchy* VP $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ (§ 3.2.2.2.1). Il n'est pas nécessaire que l'intégrale cherchée soit absolument convergente. Elle pourrait même être divergente pourvu que la VP existe.

4.5.1.2.3 Cas d'un pôle simple sur le contour

Si, en a réel, $(z-a)f(z) \rightarrow 0$, $\int_{\gamma} f dz \rightarrow 0$ (figure 6). Mais, si a est un pôle simple :

$$\int_{\gamma} f(z) dz \rightarrow \pm j\pi \text{Rés}(f, a)$$

Le théorème des résidus donnerait (relation (151)) :

$$\int_{-R}^{a-\epsilon} + \int_{\gamma^-} + \int_{a+\epsilon}^R + \int_{\gamma^+} = 2\pi j \sum \text{Rés}(f, a_k)$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ est divergente, mais admet la valeur principale de Cauchy (§ 3.2.2.2.1) :

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{a-\epsilon} + \int_{a+\epsilon}^{\infty} \right) \tag{160}$$

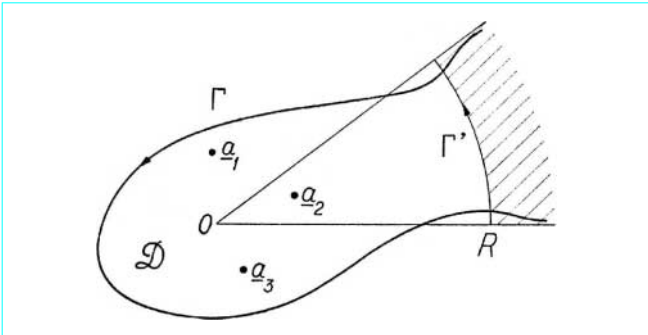


Figure 5 - Intégration sur un chemin non borné

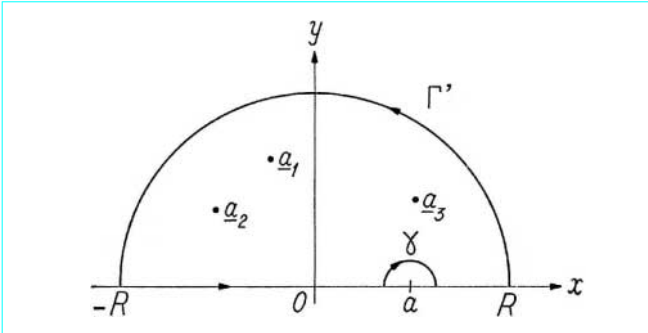


Figure 6 - Pôle sur un contour d'intégration

de sorte que :

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi j \left[\sum_k \text{Rés}(f, a_k) + \frac{1}{2} \text{Rés}(f, a) \right] \tag{161}$$

Remarque : si le pôle simple a est en un sommet d'angle α sur le chemin Γ , on obtient encore une limite :

$$2\pi j \sum_k \text{Rés}(f, a_k) + j\alpha$$

4.5.1.3 Exemples

■ **Transformée de Fourier** de $1/(x^2 + a^2)$ (a réel > 0) :

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(jux)}{x^2 + a^2} dx \tag{162}$$

On applique les relations (159) aux pôles simples $\pm ja$; les résidus sont $\pm e^{\pm au} / (2ja)$.

$$\varphi(u) = \frac{\pi}{a} \exp(-a|u|) \tag{163}$$

■ **Transformée de Fourier de $\exp(-x^2)$** : on intègre $\exp(-z^2)$, entière, le long du rectangle (figure 7). On obtient 0. Les contributions des petits côtés sont nulles à l'infini. Il reste :

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \exp(-x^2) dx &\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi} \\ \text{et } \int_{AB} \exp\left[-\left(x - j\frac{u}{2}\right)^2\right] dx &\rightarrow \exp(u^2/4) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) \exp(jux) dx \end{aligned}$$

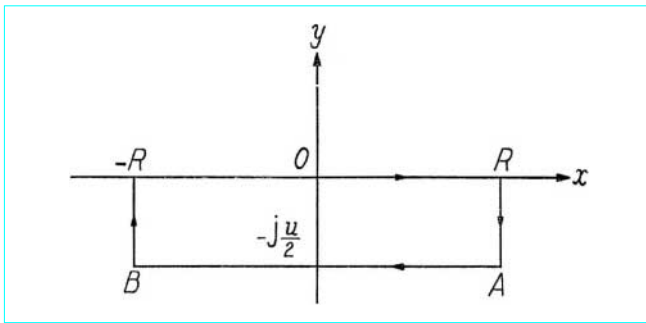


Figure 7 – Transformée de Fourier de la fonction de Gauss

D'où la transformée de Fourier :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) \exp(jux) dx = \sqrt{\pi} \exp(-u^2/4) \quad (164)$$

■ Intégrales de la forme

$$\int_0^{\infty} x^\alpha f(x) dx \quad (\text{avec } x^{\alpha+1} f(x) \rightarrow 0$$

pour $x \rightarrow 0$ ou $x \rightarrow +\infty$) : pas de pôle réel. On intègre : $(-z)^\alpha f(z) = \exp[\alpha \log(-z)] / f(z)$ sur le circuit du plan coupé (figure 8).

On obtient :

$$\int_0^{\infty} x^\alpha f(x) dx = -\frac{\pi}{\sin \alpha \pi} \sum_k \text{Rés}(f, a_k) \quad (165)$$

4.5.2 Sommations de séries

C'est le calcul inverse des précédents. Certaines séries numériques peuvent être traitées comme sommes des résidus d'une fonction qu'il reste à intégrer.

Exemple $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \quad (k \text{ entier } > 0)$

Avec la fonction auxiliaire :

$$\cotg \pi z = \frac{1}{\pi z} - \frac{\pi z}{3} - \dots - A_m (\pi z)^{2m-1} - \dots$$

où $A_m = 2^{2m} B_m / (2m)!$

(B_m : nombres de Bernoulli), bornée à l'infini et de pôles simples : $z = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$, on forme : $f(z) = \cotg \pi z / z^{2k}$. On a les résidus $1/(\pi n^{2k})$ pour les pôles $z = n (\neq 0)$ et $-\pi^{2k-1} A_k$ pour le pôle $z = 0$. L'intégrale de f sur un grand cercle tend vers 0. Il reste :

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_k \quad (166)$$

Sachant que : $B_1 = 1/6, B_2 = 1/30, B_3 = 1/42, \dots$, on a ainsi :

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \dots$$

utile pour accélérer la convergence d'autres séries.

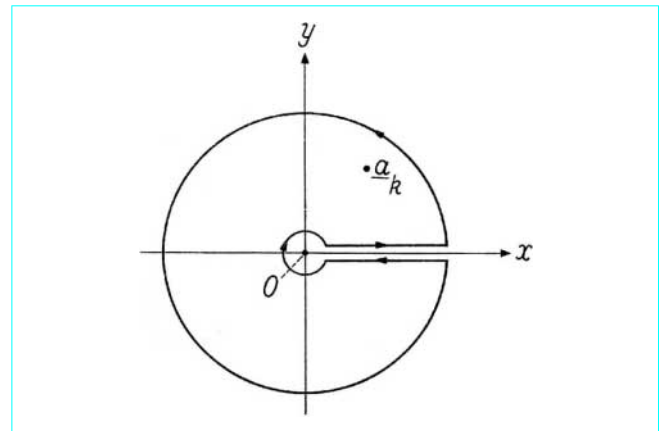


Figure 8 – Intégration autour d'un point de branchement

4.6 Applications à l'étude des champs plans

4.6.1 Champs complexes

Dans la relation (128), $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ ont les propriétés requises des fonctions *potentielles*. On peut dériver les champs vectoriels :

$$\begin{aligned} \vec{V} &= (u, v) = \text{grad} P \\ \vec{W} &= (u_1, v_1) = \text{grad} Q \end{aligned} \quad (167)$$

solénoïdaux et irrotationnels (dans un domaine approprié) avec :

$$f'(z) = u - jv = j(u_1 - jv_1) \quad (168)$$

P est le **potentiel** de \vec{V} , Q son **potentiel conjugué**. $f(z)$ le **potentiel complexe**. On dit aussi le **champ** (scalaire) f .

Le réseau orthogonal des courbes (P) ($P = Cte$) et (Q) ($Q = Cte$) est celui des **équipotentiels** et des **lignes de champ** de \vec{V} .

Par tout z_0 où $f'(z_0) \neq 0$, il passe une courbe (P) et une courbe (Q) uniques (§ 4.2.2.5).

Pour tout chemin $\Gamma = \widehat{AB}$ (où la normale est orientée directement par la tangente), on a la circulation de $\vec{V} : P_B - P_A = \delta P$ et son flux : $Q_A - Q_B = -\delta Q$.

Remarque : on échange les courbes (P) et les courbes (Q) en prenant $\pm j f(z)$ au lieu de $f(z)$.

Exemples

— *Champ électrostatique* : $\vec{E} = -\vec{V}$.

En supposant *métallisées* les deux courbes (P_1) et (P_2), on détermine un condensateur cylindrique dont la capacité, entre 2 courbes (Q_1) et (Q_2), est (ϵ : constante diélectrique) :

$$C = \epsilon |\delta P / \delta Q|$$

— *Courant continu* : $\vec{J} = \sigma \vec{E} = -\sigma \vec{V}$ (σ : conductivité).

Soit, par exemple, une plaque mince (d'épaisseur h) entre des électrodes (P). Les bords libres sont des courbes (Q). La résistance d'une maille est $R = (1/\sigma h) |\delta P / \delta Q|$.

On peut citer également les courants dans des conducteurs cylindriques perpendiculaires au plan C .

Ils créent un champ magnétique $\vec{H} = -\vec{V}$. Mais leurs sections sont des singularités autour desquelles $f(z)$ n'est pas uniforme. Leurs frontières sont des courbes (Q) où la variation de P mesure l'intensité de courant entourée.

— *Lignes électriques* : au facteur de propagation $\exp[j(\omega t - kz)]$ près, elles transportent $\vec{E} = -\vec{V}$ et $\vec{H} = \vec{W}/\eta$ ($\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$).

Dans toute section d'une telle ligne, les courbes (Q) et (P) sont, respectivement, les lignes de champ électrique et magnétique. Les conducteurs sont des courbes (P) particulières. Par exemple, autour de chacun des 2 conducteurs (P_1) et (P_2) d'une ligne à 2 conducteurs, il y a des variations δQ et $-\delta Q$ de Q . On a la tension δP et le courant $\delta Q/\eta$, d'où l'impédance caractéristique : $Z_c = \eta \delta P/\delta Q$.

— *Hydrodynamique* : pour des fluides incompressibles et irrotationnels (de densité ρ et de vitesse \vec{V}), P est le *potentiel des vitesses*, Q la *fonction de courant* ou de *débit*. Le débit le long d'une nappe entre (Q_1) et (Q_2) est δQ . Les parois sont des lignes de courant (Q).

4.6.2 Singularités et sources

■ Sources ponctuelles

Au voisinage de $z = a$, branche de la forme :

$$f(z) = k \log(z - a) + g(z) \tag{169}$$

(source électrique positive ou négative : k réel > 0 ou < 0 ; source magnétique : k imaginaire pur).

■ Source dipolaire

$$f(z) = \frac{k}{z - a} + g(z) \tag{170}$$

Sources multipolaires : $k/(z - a)^m$, m entier.

■ Sources à l'infini

Comme indiqué précédemment, on se ramène à l'origine par $1/z$. Ainsi, $\log z$ admet une source à l'origine et une source opposée à l'infini où aboutissent les lignes de champ ; ce fait tient aux propriétés conservatives du flux des champs solénoïdaux.

Le champ uniforme $f(z) = z$ possède une source dipolaire à l'infini, de même $f(z) = z^2$ une source quadripolaire.

■ Exemple important

$$\zeta = \text{Arg th} \frac{z}{a} = \frac{1}{2} \log \frac{a+z}{a-z} \quad (a \text{ réel } > 0) \tag{171}$$

Le point $z = a$ et le point $z = -a$ sont deux sources opposées.

Soit :

$$\zeta = \alpha + j\beta = \frac{1}{2} \log \left| \frac{a+z}{a-z} \right| + \frac{j}{2} \text{Arg} \frac{a+z}{a-z} \tag{172}$$

Les *équipotentiels* ($\alpha = Cte$) sont les cercles d'un faisceau conjugué par rapport aux 2 sources. Les *lignes de champ* ($\beta = Cte$) sont des arcs de cercles, joignant les sources, du faisceau orthogonal au précédent. β varie de π sur une équipotentielle. Le rayon d'un cercle (α) est :

$$R = \frac{a}{\text{sh} 2\alpha} \tag{173}$$

Le centre est le point :

$$z = 2a \coth 2\alpha \tag{174}$$

4.6.3 Transformation des champs

4.6.3.1 Principe

Soit un champ :

$$\underline{w} = f(z) = P(x, y) + jQ(x, y)$$

et une transformation :

$$F(z) = \underline{Z} = X + jY$$

À tout point $z = z_0$ du plan (z), F fait correspondre, dans le plan (\underline{Z}), le point : $\underline{Z}_0 = F(z_0)$ (figure 9). On convient d'affecter à \underline{Z}_0 la valeur de $f(z_0)$. Le champ $\varphi(\underline{Z})$ ainsi obtenu est dit transformé du champ $f(z)$. On a (§ 4.2.1.3) :

$$\underline{w} = \varphi(\underline{Z}) = (f \circ F^{-1})(\underline{Z}) \tag{175}$$

Remarques

— Les images, par F , des courbes $P = P_0$, $Q = Q_0$ donnent la configuration du champ transformé et ont les mêmes cotes respectives P_0 et Q_0 .

— Avec des transformées successives [(par exemple : $\underline{Z} = F(z)$, $\underline{Z}_1 = G(\underline{Z})$)], on aurait, dans le dernier plan (\underline{Z}_1), le champ transformé :

$$\underline{w} = \varphi(\underline{Z}_1) = (f \circ F^{-1} \circ G^{-1})(\underline{Z}_1) \tag{176}$$

— Le cas particulier $\underline{Z} = f(z)$ donne, dans (\underline{Z}), le **champ uniforme** $\varphi(\underline{Z}) = \underline{Z}$. On l'utilise constamment, dans les applications, comme moyen de transformer une frontière $P = 0$ ou $Q = 0$ en chemin rectiligne. D'où la possibilité d'exploiter un *prolongement par symétrie* (méthode des images de l'électricien). Ainsi, si $\varphi(X)$ est réel $= \varphi^*(\underline{Z})$.

— Inversement l'image du champ uniforme : $\underline{w} = \underline{z}$ par $\underline{Z} = F(z)$ fournit, dans le plan (\underline{Z}), la configuration $x(X, Y) = Cte$, $y(X, Y) = Cte$, du champ $F^{-1}(\underline{Z})$ avec une construction graphique évidente.

4.6.3.2 Transformations élémentaires

L'interprétation géométrique des cas les plus simples est immédiate :

— *translation* : $\underline{Z} = z + a$;

— *rotation* : $\underline{Z} = e^{j\alpha} z$;

— *similitude* : $\underline{Z} = re^{j\alpha} z$;

— *inversion* : $\underline{Z} = 1/z$,

en lesquelles se décompose la *transformation homographique* :

$$\underline{Z} = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \frac{1}{z + (d/c)} \tag{177}$$

qui conserve globalement l'ensemble des cercles et droites.

Si D_0 désigne le disque unité $D(0, 1)$ et U_+ le demi-plan supérieur $y > 0$, on retiendra :

$$F(D_0) = D_0 \quad \text{pour } F(z) = e^{j\alpha} \frac{z - a}{1 - a^* z} \tag{178}$$

$$F(U_+) = D_0 \quad \text{pour } F(z) = e^{j\alpha} \frac{az + b}{a^* z + b^*} \tag{179}$$

$$F(U_+) = U_+ \quad \text{pour } a, b, c, d \text{ réels} \tag{180}$$

4.6.3.3 Représentations conformes

Si $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est injectif et que $F(z) \in H(\mathcal{D}), F'(z) \neq 0, F(z)$ non constant, $F: \mathcal{D} \rightarrow F(\mathcal{D})$ est bijectif et $F^{-1}(z)$ holomorphe sur $F(\mathcal{D})$. F est une **représentation conforme** de \mathcal{D} sur $F(\mathcal{D})$. Les deux domaines ont les mêmes propriétés topologiques (connexion, frontière, etc.). Ils sont **homéomorphes** et sont dits **conformément équivalents**.

Exemples

$F(z) = z^2$	$\mathcal{D} = U_+$	$F(\mathcal{D}) = \mathbb{C} - \mathbb{R}_+^*$ (plan fendu par le demi-axe des réels)
$= z^{1/n}$	$= \mathbb{C} - \mathbb{R}_+^*$	$=$ secteur $2\pi/n$
$= \log z$	$= \mathbb{C} - \mathbb{R}_+^*$	$=$ bande horizontale 2π

Les coupures ramènent chaque branche d'une éventuelle fonction multiforme aux hypothèses précédentes. Sinon il y aurait lieu d'envisager, dans les exemples, des bijections entre \mathbb{C} et une surface de Riemann (§ 4.2.1.4).

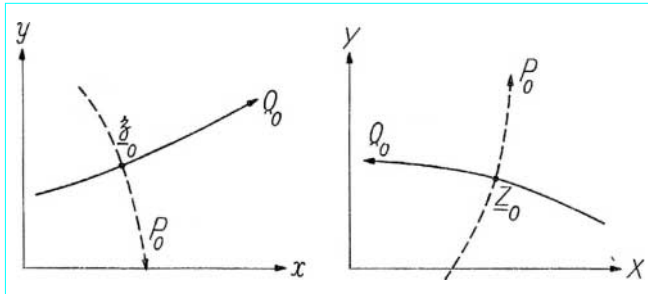


Figure 9 - Transformation des champs

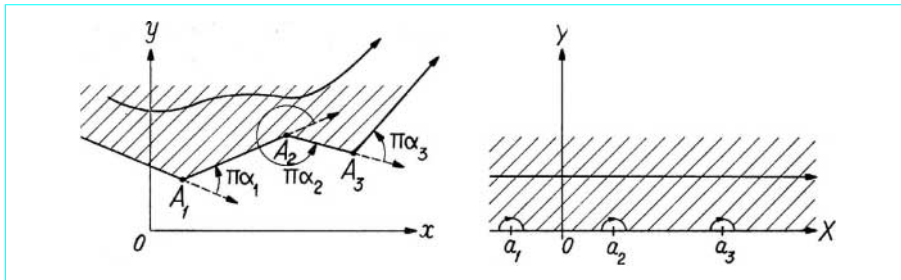


Figure 10 - Transformation de Schwarz-Christoffel

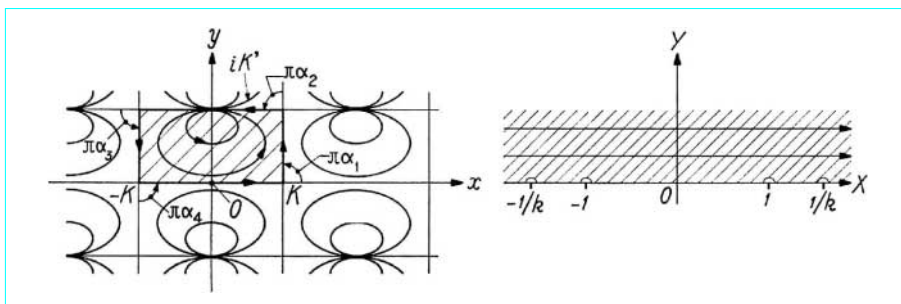


Figure 11 - Application conforme de l'intérieur d'un rectangle sur un demi-plan

4.6.3.4 Problème inverse

Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' homéomorphes. Existe-t-il une représentation conforme $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$? Trouver F . Le problème est très difficile. On montre que tout \mathcal{D} , différent de \mathbb{C} , simplement connexe, est conformément équivalent à U_+ ou à D_0 (§ 4.6.3.2).

Exemples

— *Transformation de Schwarz-Christoffel* : soit \mathcal{D} ayant pour frontière une ligne polygonale d'angles extérieurs $\pi\alpha_k, \mathcal{D}' = U_+$.

La transformation est définie, à une similitude près, par (figure 10) :

$$z = \int_{z_0}^z \prod_k (\zeta - a_k)^{-\alpha_k} d\zeta \tag{181}$$

avec des réels $X = a_k$ pas tous arbitraires. Ils sont ajustés pour redonner les côtés de la ligne polygonale.

Lorsque $\sum_k \alpha_k = 2, \mathcal{D}$ est l'intérieur d'un polygone.

— *Intérieur d'un rectangle* : $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1/2$ (figure 11) :

$$z = \int_0^z \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \quad (0 < k < 1) \tag{182}$$

Le champ uniforme $w = z$ est l'image du champ :

$$w = f(z) = \operatorname{sn} z$$

appelé fonction sn de Jacobi. C'est une fonction elliptique. Elle a les 2 périodes $4K$ et $2jK'$ ($K = \int_0^1, K' = \int_0^{1/k}$). D'où sa représentation, dans la totalité du plan, à partir des images réitérées de l'intérieur du rectangle par rapport à ses côtés.

4.6.4 Exemples

4.6.4.1 Courants de la roue de Barlow

La configuration des lignes de courant est évidente entre l'axe C de la roue et le contact O avec le bain de mercure. Le bord circulaire, formé de lignes de courant, devient rectiligne par l'inversion $\underline{Z} = 1/\underline{z}$.

La méthode des images (§ 4.6.3.1) incite à placer, en $\underline{Z} = 0$, une source égale à la source en C' ($\underline{Z} = -j/a$) (figure 12).

D'où, dans le plan \underline{Z} , le champ image :

$$g(\underline{Z}) = \log(\underline{Z} + j/a) + \log \underline{Z}$$

D'où le champ cherché :

$$f(z) = \log \frac{a + jz}{az^2} \tag{183}$$

4.6.4.2 Problème du condensateur plan (effet de bord)

Les armatures sont deux rubans parallèles de largeur $2a$ distants de $2h$.

La configuration du champ cherché $w = f(z)$ (figure 13a) est

évidente (noter la séparatrice $\widehat{CC'}$). Le domaine hachuré de la figure 13b est transformé en demi-plan $Y > 0$ par l'application $\underline{Z} = F(z)$ définie par :

$$z = \lambda \int_0^{\underline{Z}} \frac{u^2 - c^2}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} du \tag{184}$$

où, arbitrairement, on s'est fixé les abscisses 1 et $1/k$ des points D' et B' (figure 13c). Celle, c , de C' et λ sont déterminés par les conditions :

$$\lambda \int_0^1 = h, \lambda \left| \int_1^c \right| = a \quad (\text{c'est le plus difficile})$$

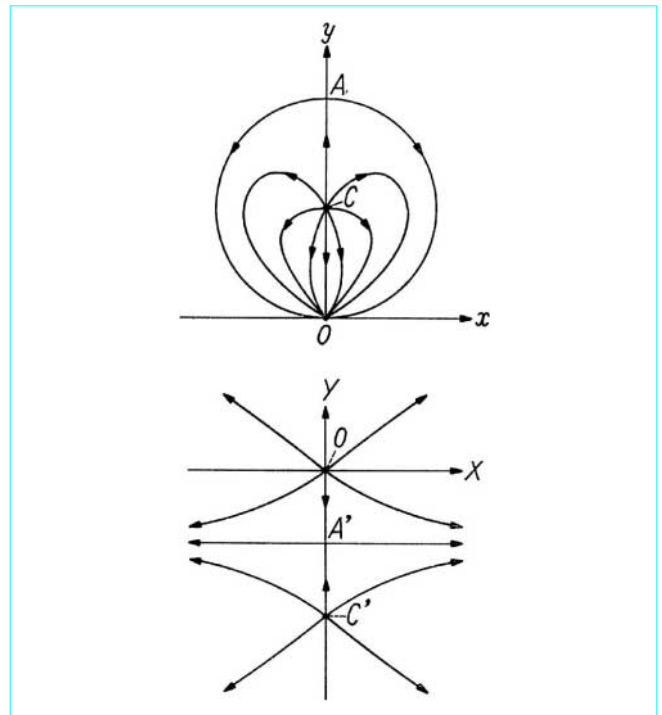


Figure 12 - Roue de Barlow

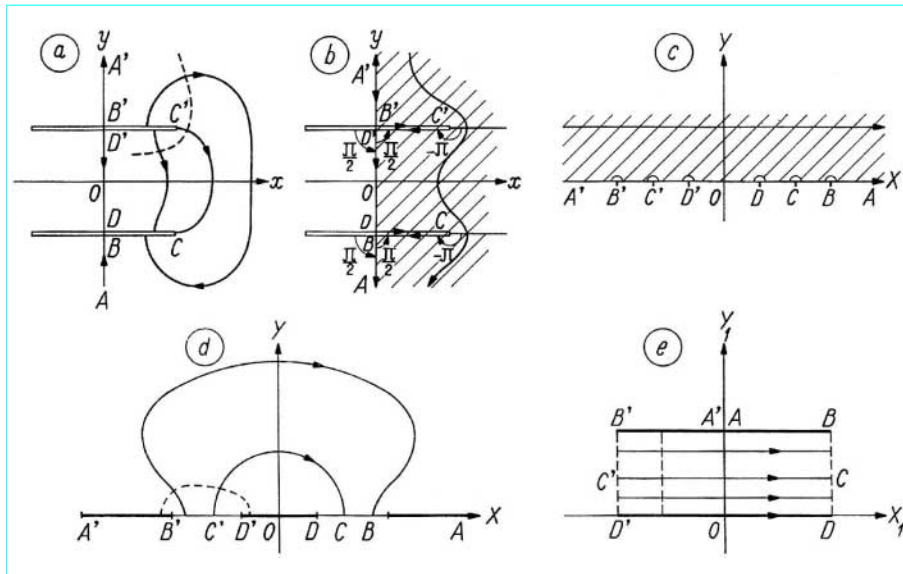


Figure 13 - Problème du condensateur plan

Le demi-condensateur a pour image, dans \underline{Z} , les rubans coplanaires : BD et $D'B'$. D'où l'aspect des nouvelles lignes de champ (figure 13d). D'où l'idée de refermer le demi-plan $Y > 0$ en l'intérieur d'un rectangle par une 2nde transformation de Schwarz-Christoffel (§ 4.6.3.4) :

$$\underline{Z}' = G(\underline{Z}) = \int_0^{\underline{Z}} \frac{d\underline{u}}{\sqrt{(1-\underline{u}^2)(1-k^2\underline{u}^2)}} = \operatorname{sn}^{-1} \underline{Z} \quad (185)$$

pour avoir un 2nd champ transformé uniforme :

$$\underline{w} = \underline{Z}' = G \circ F(\underline{z}) \quad (186)$$

ou
$$\underline{z} = F^{-1} \circ G^{-1}(\underline{w}) \quad (187)$$

Remarque : on peut exprimer la relation (184) au moyen de l'intégrale elliptique de 1^{ere} espèce (182) ($\underline{z} = \operatorname{sn}^{-1} \underline{Z}$) et de celle de 2^e espèce :

$$\operatorname{el} \underline{Z} = \int_0^{\underline{Z}} \frac{\sqrt{1-k^2\underline{u}^2}}{\sqrt{1-\underline{u}^2}} d\underline{u} \quad (188)$$

On obtient (à un facteur près) :

$$\underline{z} = F^{-1}(\underline{Z}) = (1-k^2c^2)\operatorname{sn}^{-1} \underline{Z} - \operatorname{el} \underline{Z}$$

D'où
$$\underline{z} = (1-k^2c^2)\underline{w} - \operatorname{el}(\operatorname{sn} \underline{w}) \quad (189)$$

solution explicite d'un problème rien moins que trivial. En pratique, on transposerait graphiquement les calculs en les remontant à partir du champ uniforme.

4.6.4.3 Lignes à conducteurs circulaires

Bifilaire dissymétrique ou coaxial excentré. Conducteurs de rayons R_1 et R_2 , axes distants de d . Il suffit d'utiliser la relation (171) où 2 équipotentiellles : $\alpha = \alpha_1 (< 0 \text{ ou } > 0)$, $\alpha = \alpha_2 (> 0)$ sont supposées métallisées. À l'aide des relations (173) et (174), on détermine a , α_1 , α_2 , à partir des données R_1 , R_2 , d . D'après la relation (172), on a les lignes de champ électrique $\beta = Cte$ et les lignes de champ magnétique $\alpha = Cte$. On a immédiatement la tension $\alpha_2 - \alpha_1$ et le courant : π/η , d'où l'impédance caractéristique :

$$Z_c = \eta \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\pi} = \frac{\eta}{2\pi} \left(\operatorname{Arg} \operatorname{sh} \frac{a}{R_2} - \operatorname{Arg} \operatorname{sh} \frac{a}{R_1} \right) \quad (190)$$

avec $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$

Remarques

— La *capacité linéique* de la ligne : $C = \pi\epsilon/(\alpha_2 - \alpha_1)$ est aussi celle du condensateur cylindrique en électrostatique.

— La transformation définie par la relation (182) permet également de discuter les problèmes d'impédances sur une ligne chargée à une extrémité. La configuration du champ est alors interprétée comme un abaque d'impédances permettant de passer de la représentation usuelle (cartésienne) d'une impédance réduite : $\underline{z} = Z/Z_c$ à la représentation

4.7 Application aux systèmes à réaction

Soient $G(p)$ et $H(p)$ les **fonctions de transfert** d'un système de transmission et du système de réaction. La fonction de transfert globale est le rapport des transformées de Laplace des signaux d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$ (figure 14a) :

$$\frac{\tilde{y}(p)}{\tilde{x}(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p)H(p)} = \frac{G(p)}{K(p)} \quad (191)$$

On supposera :

$$G(p), H(p) = O(1/p), |p| \rightarrow \infty$$

L'ensemble est **stable** si la relation (182) n'a aucun pôle dans le demi-plan de droite $\sigma > 0$ [sinon signal transitoire $\exp[(\sigma + j\omega)t]$ = $\exp(\sigma t) \rightarrow \infty$].

$K(p)$ ne doit donc pas y avoir de zéros.

Il suffit d'appliquer les résultats du paragraphe 4.4.2.5 au circuit (décrit dans le sens négatif) formé par l'axe $\sigma = 0$ complété à droite par un grand demi-cercle. Le point image $K(j\omega)$ entoure $P - Z$ fois l'origine. La condition nécessaire et suffisante de stabilité étant $Z = 0$, on aboutit au :

Théorème de Nyquist : une CNS de stabilité est que le circuit décrit par le point $G(j\omega)K(j\omega)$, ω variant de $-\infty$ à $+\infty$, entoure le point $p = -1$ un nombre de fois égal au nombre de pôles de la fonction $G(p)H(p)$ dans le demi-plan $\sigma > 0$ (figure 14b).

Remarques

- Le diagramme $G(j\omega)H(j\omega)$ est celui du système ouvert à l'entrée.
- $G(\sigma)H(\sigma)$ est réel. Il suffit de compléter, par symétrie, le demi-diagramme $\omega \geq 0$.

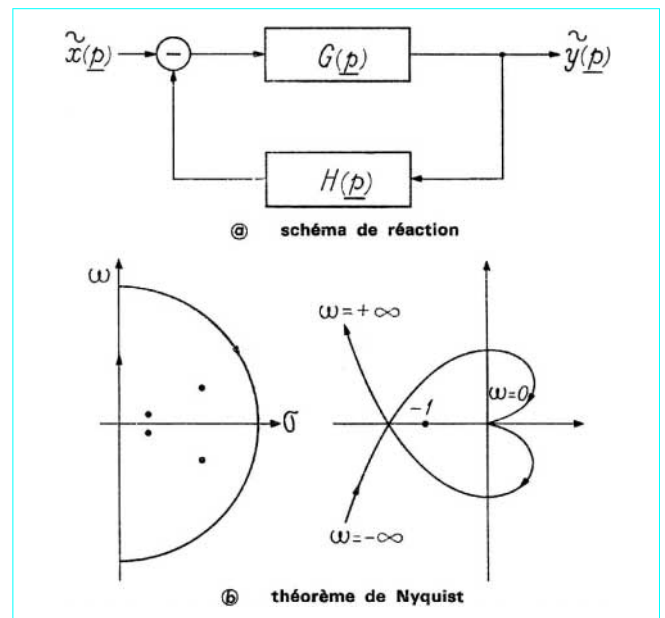


Figure 14 - Système à réaction