

**CH.17 : MECANIQUE DU SOLIDE**

**Plan** (Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)

\*\*\*\*\*

- I. CINEMATIQUE DU SOLIDE..... 1
  - I.1. DISTRIBUTION DES VITESSES DANS UN SOLIDE..... 1
  - I.2. MOMENT CINETIQUE D’UN SOLIDE AYANT UN POINT DE VITESSE NULLE ..... 2
  - I.3. MOMENT D’INERTIE PAR RAPPORT A UN AXE ..... 2
    - I.3.1. Définition ..... 2
    - I.3.2. Théorème de Huygens ..... 2
    - I.3.3. Trois moments d’inertie « classiques »..... 3
  - I.4. ENERGIE CINETIQUE D’UN SOLIDE AVEC UN POINT DE VITESSE NULLE ..... 3
  - I.5. MOMENT CINETIQUE SCALAIRE..... 3
- II. LOIS GENERALES DE LA DYNAMIQUE DU SOLIDE ..... 4
  - II.1. THEOREME DE LA RESULTANTE CINETIQUE..... 4
  - II.2. THEOREMES DU MOMENT CINETIQUE..... 4
    - II.2.1. Théorème du moment cinétique vectoriel..... 4
    - II.2.2. Théorème du moment cinétique scalaire ..... 4
  - II.3. LOIS DE CONSERVATION POUR UN SOLIDE ISOLE ..... 4
  - II.4. THEOREME DE L’ENERGIE CINETIQUE ..... 5
- III. ACTIONS DE CONTACT ENTRE DEUX SOLIDES ..... 5
  - III.1. GENERALITES ..... 5
  - III.2. FROTTEMENT DE GLISSEMENT ..... 6
  - III.3. PUISSANCE DES ACTIONS DE CONTACT..... 7
    - III.3.1. Cas général..... 7
    - III.3.2. Cas d’une liaison glissière ..... 7
    - III.3.3. Cas d’une liaison pivot..... 7
- IV. CONSEILS POUR LA RESOLUTION D’UN PROBLEME ..... 8

\*\*\*\*\*

**I. CINEMATIQUE DU SOLIDE**

**I.1. DISTRIBUTION DES VITESSES DANS UN SOLIDE**

• Soient (R) un référentiel quelconque,  $M_1$  et  $M_2$  deux points d’un solide (S) ; on montre que :

$$\vec{v}_{M_2 \in S/R} = \vec{v}_{M_1 \in S/R} + \overline{M_2 M_1} \wedge \vec{\omega}_{S/R}$$

où :  $\vec{\omega}_{S/R}(t)$  est le « vecteur vitesse instantanée de rotation » de (S) par rapport à (R).

• **Exemples** : ♦ *translation* :  $\vec{\omega}_{S/R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_{M_2/R} = \vec{v}_{M_1/R}$

♦ *rotation autour d’un axe FIXE passant par  $M_1$*  :  $\vec{v}_{M_1/R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_{M_2/R} = \vec{\omega}_{S/R} \wedge \overline{M_1 M_2}$

### 1.2. MOMENT CINETIQUE D'UN SOLIDE AYANT UN POINT DE VITESSE NULLE

- Soit O le point fixe ; M est un point quelconque du solide et  $\vec{\omega}_{S/R}$  le vecteur rotation instantanée ; en généralisant la définition du chapitre 14 à une distribution **continue** de masse, on peut écrire :

$$\vec{\sigma}_{o/R} = \iiint_{M \in S} \overline{OM} \wedge \vec{v}_{M/R} dm = \iiint_{M \in S} \overline{OM} \wedge (\vec{\omega}_{S/R} \wedge \overline{OM}) dm$$

- Cette relation définit une **application LINEAIRE** de l'espace vectoriel des **rotations** dans l'espace vectoriel des **moments cinétiques**. Cette application est susceptible d'une représentation **matricielle** :

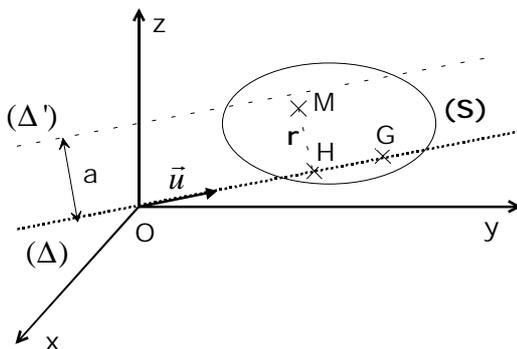
$$(\sigma_{o/R}) = [J_o](\omega_{o/R}) \quad \text{où : } [J_o] \text{ est la « matrice d'inertie », symétrique, du solide (S) en O.}$$

**Rq1** : cette relation montre, qu'en général, le moment cinétique **n'est pas colinéaire** au vecteur rotation instantanée.

**Rq2** : la notion de matrice d'inertie (sa diagonalisation, l'existence d'axes principaux d'inertie...) n'est pas au programme : elle permet cependant de justifier les relations obtenues dans les paragraphes suivants.

### 1.3. MOMENT D'INERTIE PAR RAPPORT A UN AXE

#### 1.3.1. Définition



On note  $J_{\Delta}$  le moment d'inertie du solide (S) par rapport à un axe  $(\Delta)$  passant par O.  $\vec{u}$  est un vecteur **unitaire** de cet axe; on pose:

$$J_{\Delta} = \iiint_{M \in S} HM^2 \times dm = \iiint_{M \in S} r^2 \times dm \quad (J_{\Delta} \text{ est en } kg.m^2)$$

**Rq** : un moment d'inertie prend en compte la masse d'un solide (par l'intermédiaire de  $dm$ ), mais également la manière dont cette masse se répartit (par l'intermédiaire de  $r^2$ ).

#### 1.3.2. Théorème de Huygens

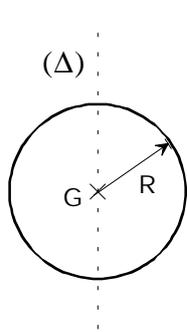
Si l'on note  $J_G$  le moment d'inertie de (S) par rapport à un axe  $(\Delta)$ , passant par le centre d'inertie G du solide, alors on peut en déduire le moment d'inertie de (S) par rapport à un axe  $(\Delta')$ , **parallèle** à  $(\Delta)$  et distant de ce dernier de  $a$ , en écrivant :

$$J_{\Delta'} = J_G + ma^2 \quad (\text{où } m \text{ est la masse totale du solide})$$

**Rq** : le théorème de Huygens n'est pas explicitement au programme (mais pas interdit) ; dans la plupart des cas, nous verrons que l'on peut s'en dispenser et on lui préférera les 2 théorèmes de König.

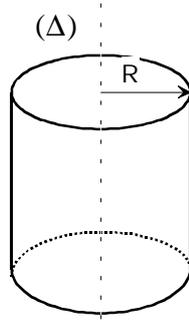
### 1.3.3. Trois moments d'inertie « classiques »

- **Remarque préliminaire** : les calculs de moment d'inertie ne sont pas au programme et doivent être fournis par l'énoncé ; dans le cas contraire, on se contentera de noter  $J_{\Delta}$  le moment d'inertie du système par rapport à l'axe considéré.
- Les moments d'inertie suivants sont donnés à titre indicatif ; on notera M la masse des solides :



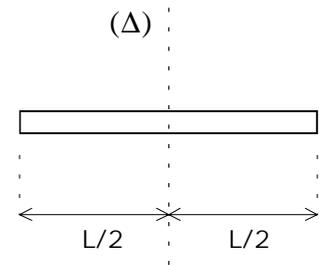
sphère pleine homogène

$$J_{\Delta} = \frac{2}{5} MR^2$$



cylindre plein homogène

$$J_{\Delta} = \frac{1}{2} MR^2$$



barre "mince" homogène

$$J_{\Delta} = \frac{ML^2}{12}$$

### 1.4. ENERGIE CINETIQUE D'UN SOLIDE AVEC UN POINT DE VITESSE NULLE

$$E_C = \frac{1}{2} \left( \iiint_{M \in S} v^2(M) dm \right) = \frac{1}{2} \iiint_{M \in S} \vec{v}(M) \cdot \vec{v}(M) dm = \frac{1}{2} \iiint_{M \in S} \vec{v}(M) \cdot (\vec{\omega}_{S/R} \wedge \vec{OM}) dm \Rightarrow$$

$$E_C = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{S/R} \cdot \iiint_{M \in S} \vec{OM} \wedge \vec{v}(M) dm \quad (\vec{\omega}_{S/R} \text{ peut dépendre du temps, l'intégration se faisant}$$

selon les variables d'espace) ; on reconnaît l'expression du moment cinétique, d'où :

$$E_C = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{S/R} \cdot \vec{\sigma}_{o/R} = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{S/R} \cdot [(J_o) \vec{\omega}_{S/R}]$$

- En notant  $\vec{u}$  un vecteur unitaire de l'axe instantané de rotation  $(\Delta)$ , on a :  $\vec{\omega}_{S/R} = \omega_{S/R} \vec{u}$  ; le calcul montre que l'on a alors :

$$E_C = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_{S/R}^2$$

### 1.5. MOMENT CINETIQUE SCALAIRE

- On s'intéresse à la projection du moment cinétique vectoriel  $\vec{\sigma}_{o/R}$  sur l'axe instantané de rotation ; avec les mêmes notations que précédemment, on a :

$$\sigma_{\Delta/R} = \vec{u} \cdot \vec{\sigma}_{o/R} = \text{« moment cinétique scalaire du solide (S) par rapport à l'axe } (\Delta) \text{ »}$$

(dans le référentiel (R))

- On montre que :

$$\sigma_{\Delta/R}(t) = J_{\Delta} \omega_{S/R}(t)$$

## II. LOIS GENERALES DE LA DYNAMIQUE DU SOLIDE

### II.1. THEOREME DE LA RESULTANTE CINETIQUE

Pour un solide (S) de centre d'inertie G, dans un référentiel (R), la quantité de mouvement (ou résultante cinétique) s'écrit :  $\vec{p} = \iiint_{M \in S} \vec{v}(M) dm$  ; on en déduit :

**Théorème de la résultante cinétique :**  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{ext} = m\vec{a}_G$  (pour m = cste)

**Rq :** si (R) est non galiléen, il faut prendre en compte les forces d'inertie dans les forces extérieures appliquées au solide.

### II.2. THEOREMES DU MOMENT CINETIQUE

#### II.2.1. Théorème du moment cinétique vectoriel

• Le moment cinétique du même solide, calculé en un point A **FIXE** dans le référentiel (R), s'exprime ainsi :  $\vec{\sigma}_{A/R} = \iiint_{M \in S} \vec{AM} \wedge \vec{v}(M) dm$  ; il vient alors :

**Théorème du moment cinétique vectoriel :**  $\frac{d\vec{\sigma}_{A/R}}{dt} = \vec{M}_A^{ext}$  (= moment en A des forces ext.)

• **Rq1 :** si on applique le TMC en G, dans le référentiel **barycentrique**, les forces d'inertie n'interviennent pas, même si (R\*) n'est pas galiléen (cf. chapitre 14).

**Rq2 :** on rappelle (chapitre 14) la possibilité d'utiliser le premier théorème de König pour calculer le moment cinétique en un point A quelconque à partir du moment cinétique barycentrique, soit :

$$\vec{\sigma}_{A/R} = \vec{\sigma}^* + \vec{AG} \wedge m\vec{v}(G)$$

#### II.2.2. Théorème du moment cinétique scalaire

Pour un solide en rotation autour d'un axe **FIXE** ( $\Delta$ ), on peut projeter le TMC vectoriel sur cet axe pour obtenir :

**Théorème du moment cinétique scalaire :**  $\frac{d\sigma_{\Delta/R}}{dt} = J_{\Delta} \times \frac{d\omega_{S/R}}{dt} = M_{\Delta}^{ext}$

**Rq :** en pratique, c'est ce dernier TMC que nous appliquerons, car la détermination du moment vectoriel des **forces de liaison** est en général incomplète.

### II.3. LOIS DE CONSERVATION POUR UN SOLIDE ISOLE

Pour un système isolé, on a :  $\vec{F}^{ext} = \vec{M}_A^{ext} = \vec{0}$  ; on obtient les deux relations :

$$\vec{P} = \vec{cste}$$

et :

$$\vec{\sigma}_{A/R} = \vec{cste}$$

**Rq :** ces relations sont appelées « **intégrales premières du mouvement** », où n'interviennent que des dérivées premières du vecteur position : elles sont en principe plus simples que les théorèmes fondamentaux pour déterminer le mouvement d'un solide.

### II.4. THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE

- Dans le chapitre 14, nous avons remarqué que les forces **intérieures** à un **solide ne travaillent pas** ; on écrit donc :

**Théorème de l'énergie cinétique** :  $\Delta E_C = E_C(2) - E_C(1) = W^{ext}(1 \rightarrow 2)$

- Dans le cas où toutes les forces sont **conservatives**, le TEC se ramène à la conservation de l'énergie mécanique de la forme :

$$\Delta E_{méca} = \Delta E_C + \Delta E_P = 0 \quad (\text{avec : } \Delta E_P = -W^{ext}(1 \rightarrow 2))$$

**Rq1** : le TEC et la conservation de l'énergie mécanique constituent également des **intégrales premières du mouvement**.

**Rq2** : si le référentiel d'étude est non galiléen, il suffit de prendre en compte le travail de la force d'inertie **d'entraînement** (la force de **Coriolis**, constamment perpendiculaire au déplacement, **ne travaille pas**).

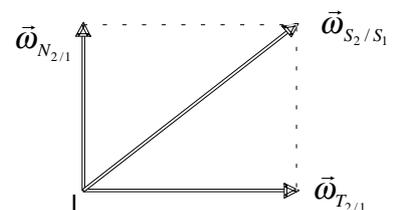
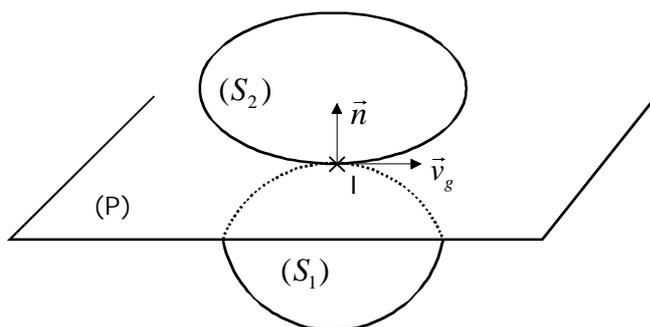
**Rq3** : il sera souvent utile d'appliquer le deuxième théorème de König, que nous rappelons ici :

$$E_C = E_C^* + \frac{1}{2} m v_G^2$$

## III. ACTIONS DE CONTACT ENTRE DEUX SOLIDES

### III.1. GENERALITES

- Considérons deux solides ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) en contact **punctuel** au point  $I$  (à l'instant  $t$ ): nous distinguerons ce point purement **géométrique**, des points  $I_1$  et  $I_2$  respectivement « **gravés** » sur les solides ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) ; on se place dans un référentiel (R) quelconque.
- Nous supposerons qu'il existe un plan (P) **tangent** en  $I$  aux 2 solides ; nous raisonnerons sur les figures suivantes :



**Rq** :  $\vec{\omega}_{N_{2/1}}$  est  $\perp$  à (P) ;  $\vec{\omega}_{T_{2/1}}$  et  $\vec{v}_g$  appartiennent à (P), mais ne sont pas forcément colinéaires.

- On appelle « **vitesse de glissement** » du solide ( $S_2$ ) par rapport au solide ( $S_1$ ) la grandeur :

$$\vec{v}_g = \vec{v}_{I_2 \in S_2 / R} - \vec{v}_{I_1 \in S_1 / R} = \vec{v}_{I_2 \in S_2 / S_1} \quad (\text{cette vitesse ne dépend pas de (R)})$$

- On note  $\vec{\omega}_{S_2/S_1}$  le vecteur rotation instantanée de ( $S_2$ ) par rapport à ( $S_1$ ) ; on peut écrire :

$$\vec{v}_{M \in S_2 / S_1} = \vec{v}_{I_2 \in S_2 / S_1} + \overline{MI} \wedge \vec{\omega}_{S_2 / S_1} = \vec{v}_g + \overline{MI} \wedge \vec{\omega}_{S_2 / S_1} ; \text{ par ailleurs : } \vec{\omega}_{S_2 / S_1} = \vec{\omega}_{N_2 / 1} + \vec{\omega}_{T_2 / 1} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_{M \in S_2 / S_1} = \vec{v}_g + \overline{MI} \wedge \vec{\omega}_{N_2 / 1} + \overline{MI} \wedge \vec{\omega}_{T_2 / 1}$$

D'où :

$$\begin{array}{l} \vec{v}_g \text{ traduit le GLISSEMENT de } (S_2) \text{ sur } (S_1) \\ \overline{MI} \wedge \vec{\omega}_{N_2 / 1} \text{ traduit le PIVOTEMENT de } (S_2) \text{ sur } (S_1) \\ \overline{MI} \wedge \vec{\omega}_{T_2 / 1} \text{ traduit le ROULEMENT de } (S_2) \text{ sur } (S_1) \end{array}$$

**Rq** : nous rencontrerons souvent le cas particulier du « **roulement sans glissement** » (RSG), qui correspond à :

$$\vec{v}_g = \vec{0}; \vec{\omega}_{N_2 / 1} = \vec{0}; \vec{\omega}_{S_2 / S_1} = \vec{\omega}_{T_2 / 1}$$

### III.2. FROTTEMENT DE GLISSEMENT

- Les actions de contact au point I exercées par le solide ( $S_1$ ) sur le solide ( $S_2$ ) se caractérisent par leur résultante  $\vec{R}$  et leur moment résultant en I, noté  $\vec{M}_I$  ; ce dernier se décompose en un « moment de frottement de roulement » (soit  $\vec{M}_I^T$  appartenant au plan (P)), et en un « moment de frottement de pivotement » (soit  $\vec{M}_I^N$  perpendiculaire au plan (P)).

- En pratique, les **frottements de roulement et de pivotement** sont très souvent **négligeables** (quelle belle invention que la roue !) ; dans les exercices et les problèmes, nous écrirons donc :  $\vec{M}_I = \vec{0}$

- On décompose à son tour la résultante  $\vec{R}$  en :

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T} \quad \text{avec : } \vec{N} = \text{réaction normale (au plan (P))} ; \vec{T} = \text{réaction tangentielle}$$

- Les composantes  $\vec{N}$  et  $\vec{T}$  satisfont aux **lois phénoménologiques de Coulomb** :

- ♦ **Glissement de (S2) sur (S1) :**

$$\vec{v}_g \neq \vec{0} ; \vec{T} \text{ et } \vec{v}_g \text{ sont COLINEAIRES, mais de sens CONTRAIRE; } \|\vec{T}\| = f \times \|\vec{N}\|$$

- ♦ **Pas de glissement de (S2) sur (S1) :**

$$\vec{v}_g = \vec{0} ; \|\vec{T}\| \leq f \times \|\vec{N}\|$$

**Rq1** :  $f$  est appelé « **coefficient de frottement de glissement** » ; on distingue parfois un coefficient **statique**  $f_s$  (pour  $\vec{v}_g = \vec{0}$ ), d'un coefficient **cinétique**  $f_c$  (pour  $\vec{v}_g \neq \vec{0}$ ) :  $f_c < f_s$  (comme on peut le constater lorsqu'on essaie de mettre en mouvement un lourd objet...).

**Rq2** : on dit parfois que pour  $\vec{v}_g = \vec{0}$ , la force  $\vec{T}$  (qui, effectivement, tend à s'opposer au glissement) « est de sens contraire à la vitesse  $\vec{v}_g$  qui **apparaîtrait** en cas de glissement » ; cette notion est souvent délicate à manipuler, surtout lorsque les conditions initiales du mouvement sont quelconques : on retiendra qu'il est préférable de travailler avec une grandeur  $T$  **algébrique**, et que le signe de  $T$  se découvrira une fois les calculs menés (souvent, ce signe est directement lié à celui de l'**accélération** du solide, qui peut varier au cours des différentes phases du mouvement et dépend des conditions initiales...).

### III.3. PUISSANCE DES ACTIONS DE CONTACT

#### III.3.1. Cas général

- On considère le mouvement de 2 solides ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) en contact ponctuel, dans un référentiel ( $R$ ) ; avec les mêmes notations que précédemment, la puissance des actions de contact exercées par le solide ( $S_1$ ) sur le solide ( $S_2$ ), calculée dans ( $R$ ), est donnée par :

$$P_{1/2} = \vec{v}_{I_2 \in S_2/R} \cdot \vec{R}_{1/2} + \vec{\omega}_{S_2/R} \cdot \vec{M}_I(S_1 \rightarrow S_2)$$

Pour le solide ( $S_1$ ) :  $P_{2/1} = \vec{v}_{I_1 \in S_1/R} \cdot \vec{R}_{2/1} + \vec{\omega}_{S_1/R} \cdot \vec{M}_I(S_2 \rightarrow S_1)$

- Le principe de l'égalité de l'action et de la réaction permet d'écrire :

$$\vec{R}_{2/1} = -\vec{R}_{1/2} \text{ et } \vec{M}_I(S_2 \rightarrow S_1) = -\vec{M}_I(S_1 \rightarrow S_2)$$

Par ailleurs, on pose:  $\vec{v}_g = \vec{v}_{I_2 \in S_2/R} - \vec{v}_{I_1 \in S_1/R}$  et  $\vec{\omega}_{S_2/S_1} = \vec{\omega}_{S_2/R} - \vec{\omega}_{S_1/R}$  ; on peut alors exprimer la **puissance TOTALE** des actions de contact entre les 2 solides :

$$P = P_{1/2} + P_{2/1} = \vec{v}_g \cdot \vec{R}_{1/2} + \vec{\omega}_{S_2/S_1} \cdot \vec{M}_I(S_1 \rightarrow S_2)$$

**Rq1** : cette puissance est **indépendante** du référentiel ( $R$ ), elle ne dépend que du mouvement **relatif** des 2 solides.

**Rq2** : dans le cas d'un **roulement sans glissement** ( $\vec{v}_g = \vec{0}$ ) où l'on peut **négliger**  $\vec{M}_I$  (ce que l'on fera toujours, sauf spécification contraire de l'énoncé), on a donc :  $P = 0$

#### III.3.2. Cas d'une liaison glissière

- Dans ce type de liaison, les points de contact entre les solides seront tels que seuls des mouvements de **translation** seront autorisés ; les frottements de roulement et de pivotement seront nuls ( $\vec{M}_I = \vec{0}$  en chaque point de contact), et l'on aura :

$$P = \vec{v}_{g_{2/1}} \cdot \vec{R}_{1/2} = \vec{v}_{g_{2/1}} \cdot \vec{T}_{1/2} = -\|\vec{v}_{g_{2/1}}\| \times \|\vec{T}_{1/2}\| \leq 0$$

- Liaison glissière parfaite** :  $\vec{T}_{1/2} = \vec{0} \Rightarrow P = 0$

#### III.3.3. Cas d'une liaison pivot

- Dans ce type de liaison, seules les **rotations** autour d'un axe ( $\Delta$ ) seront autorisées ; en notant  $\vec{u}_\Delta$  un vecteur unitaire de l'axe de rotation et en prenant un point O de cet axe, il vient :

$$P = \vec{\omega}_{S_2/S_1} \cdot \vec{M}_O = \omega_{S_2/S_1} \times \vec{u}_\Delta \cdot \vec{M}_O \Rightarrow P = \omega_{S_2/S_1} \times M_\Delta$$

**Rq** : ( $S_1$ ) représente ici le solide autour duquel ( $S_2$ ) tourne et sur lequel ce dernier est articulé ;  $M_\Delta$  est la **projection sur l'axe de rotation** du moment vectoriel des actions de contact au niveau de l'articulation.

- Liaison pivot parfaite** : en l'absence de frottement au niveau des surfaces de contact, les forces de contact sont **normales** à ces surfaces et passent par l'axe de rotation ; on a alors :

$$M_\Delta = 0 \Rightarrow P = 0$$

**Rq** : ce dernier point est important, car dans ce type de liaison, nous ne sommes renseignés que sur **une** composante du moment des forces de liaison  $\Rightarrow$  on devra appliquer le TMC **scalaire**.

#### IV. CONSEILS POUR LA RESOLUTION D'UN PROBLEME

1) • Avant toute analyse « physico-mathématique », essayer de « sentir », de prévoir « intuitivement » les différentes phases du mouvement (glissement ou non glissement, oscillations, translation ou rotation pure...); mais rester **prudent** quant à ces conclusions intuitives, notamment en cas de « fortes modélisations » (liaisons parfaites par exemple).

- Définir clairement le **système** et le **référentiel** d'étude, et trouver le nombre de **degrés de liberté** du système (nombre de paramètres indépendants permettant de caractériser la position du système à tout instant) : on peut trouver un premier nombre « à priori », puis un second qui prend en compte des relations supplémentaires attendues (cas de la RSG par exemple).

- On connaît alors le nombre d'équations scalaires **indépendantes** nécessaires à la détermination des paramètres : dans le cas des systèmes à **un degré de liberté**, on donnera la préférence aux **intégrales premières du mouvement** (ces dernières conduiront, en général, plus rapidement à la position du système, puisqu'elles ne comportent que des dérivées premières du vecteur-position).

- Faire un bilan **complet** des forces appliquées au système, sans oublier les **forces de liaison** ; les classer en forces **intérieures** et **extérieures** (si des forces intérieures sont inconnues, les théorèmes énergétiques seront inexploitable pour un système qui n'est pas un solide) ; remarquer si elles **dérivent d'un potentiel** ou non.

- Choisir le ou les théorèmes à appliquer en fonction des éléments ci-dessus (dans le cas du TMC, il faut avoir conscience du fait que, le moment **vectoriel** des forces de liaison étant en général **inconnu**, on appliquera le **TMC scalaire**, qui ne fournira qu'une **relation** entre les paramètres du système).

- Choisir la ou les **bases de projection**, à ne pas confondre avec la notion de référentiel : si le référentiel d'étude est galiléen, on ne prendra pas en compte les forces d'inertie, même si la base de projection est mobile (base de Frénet, base cylindrique...). Le « meilleur » choix n'est pas toujours évident et demande de la pratique...

2) • On peut être amené à appliquer les théorèmes à **plusieurs systèmes** (certains pouvant être des sous-systèmes du système principal).

- Dans le cas du TMC, on choisira un point d'application (TMC vectoriel) ou un axe (TMC scalaire) par lesquels passent les forces « encombrantes » ; on pensera en premier lieu à l'appliquer dans le référentiel **barycentrique** (même s'il est non galiléen, on ne tiendra pas compte des forces d'inertie).

- La relation de RSG ( $\vec{v}_g = \vec{0}$ ), combinée avec la distribution des vitesses dans un solide (avec le centre d'inertie G, elle s'écrit :  $\vec{v}(G \in S_2 / R) = \vec{v}(I_2 \in S_2 / R) + \overrightarrow{GI} \wedge \vec{\omega}_{S_2/S_1}$ ), fournit une relation supplémentaire entre  $\vec{v}(G)$  et  $\vec{\omega}_{S_2/S_1}$  ; en effet :  $\vec{v}_g = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}(I_2 \in S_2 / R) = \vec{v}(I_1 \in S_1 / R)$  (cette relation sera simple si  $(S_1)$  est fixe dans  $(R)$ ). Par ailleurs, toujours en cas de RSG, il n'y a qu'une inégalité entre  $\|\vec{T}\|$  et  $\|\vec{N}\|$ .

En revanche, en cas de glissement,  $\vec{v}_g$  n'est pas donnée, mais on sait que :  $\|\vec{T}\| = f \times \|\vec{N}\|$ .

- On peut remarquer une « affinité » entre le TEC et le TRC (exprimé en coordonnées cylindriques) : pour une rotation autour d'un axe fixe,  $E_c = \frac{1}{2} J(\theta')^2 \Rightarrow$  on peut obtenir  $\theta'$  et

$\theta''$  par dérivation, puis les reporter dans  $a_r = r'' - r(\theta')^2$  et  $a_\theta = r\theta'' + 2r' \times \theta'$ .

- Enfin, c'est la **mise en équation** qui est **essentielle** : leur résolution analytique n'est pas toujours possible, on peut se contenter d'une analyse **graphique** ou d'une résolution numérique.