

TRAVAUX ET RECHERCHES MATHÉMATIQUES

---

G. DUVAUT

Maître de Conférences  
à l'Université Paris Nord

J. L. LIONS

Professeur  
à l'Université Paris VI

LES INÉQUATIONS  
EN MÉCANIQUE  
ET  
EN PHYSIQUE

**DUNOD**

PARIS

1972

"Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur, ou de ses ayants-droit, ou ayants-cause, est illicite (loi du 11 mars 1957, alinéa 1<sup>er</sup> de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal. La loi du 11 mars 1957 n'autorise, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, que les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective d'une part, et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration".

## INTRODUCTION

1. Donnons pour commencer un exemple simple d'inéquation aux dérivées partielles apparaissant dans un problème physique élémentaire.

Considérons un fluide de pression  $u(x, t)$  au point  $x$  à l'instant  $t$ , occupant une région  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  limitée par une membrane  $\Gamma$  d'épaisseur négligeable mais *semi-perméable*, i. e. laissant passer librement le fluide entrant dans  $\Omega$  mais interdisant au contraire toute sortie de fluide.

On vérifie alors (cf. les détails au Chapitre 1, n° 2.2.1) que

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = g \quad \left( \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) \text{ dans } \Omega, \quad t > 0,$$

$g$  fonction donnée, avec les conditions aux limites sous forme d'inégalités <sup>(1)</sup>

$$(1) \quad \left| \begin{array}{l} u(x, t) > 0 \Rightarrow \partial u(x, t)/\partial n = 0, \\ u(x, t) = 0 \Rightarrow \partial u(x, t)/\partial n \geq 0, \end{array} \right. \quad x \in \Gamma,$$

$$(2) \quad \left| \begin{array}{l} u(x, t) > 0 \Rightarrow \partial u(x, t)/\partial n = 0, \\ u(x, t) = 0 \Rightarrow \partial u(x, t)/\partial n \geq 0, \end{array} \right. \quad x \in \Gamma,$$

à quoi on ajoute la condition initiale

$$(3) \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

Notons que les conditions (2) sont *non linéaires*; elles impliquent que, à tout instant  $t$  fixé, il y a sur  $\Gamma$  deux régions  $\Gamma_0^t$  et  $\Gamma_1^t$  où  $u(x, t) = 0$  et  $\partial u(x, t)/\partial n = 0$  respectivement. Ces régions ne sont pas données a priori; il s'agit donc d'un problème du type « frontière libre ».

On peut énoncer (1), (2) sous la forme (équivalente) d'inéquations. On introduit dans ce but l'ensemble  $K$  des « fonctions tests »  $v$  :

$$(4) \quad K = \{ v \mid v \text{ fonction définie dans } \Omega \text{ } ^{(2)}, \quad v \geq 0 \text{ sur } \Gamma \};$$

alors (1), (2) équivalent à

$$(5) \quad \left| \begin{array}{l} u(\cdot, t) \in K \quad \forall t \geq 0, \\ \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} (v - u) + \text{grad}_x u \cdot \text{grad}_x (v - u) - g(v - u) \right] dx \geq 0 \quad \forall v \in K. \end{array} \right.$$

Le problème de trouver  $u$  solution de (5) avec la condition initiale (3) est ce qu'on appelle une *inéquation d'évolution* (de type parabolique).

<sup>(1)</sup>  $\partial/\partial n$  désigne la dérivée normale à  $\Gamma$  dirigée vers l'extérieur de  $\Omega$ .

<sup>(2)</sup> On doit prendre  $v$  dans l'espace  $H^1(\Omega)$  de Sobolev; cela sera précisé au Chapitre 1.

2. L'exemple qui précède a un caractère général : on rencontrera des problèmes *s'énonçant en termes d'inéquations* dans des situations où les contraintes, les équations d'état, les lois physiques, changent lorsque sont franchis ou atteints certains seuils.

Le présent ouvrage a pour but d'étudier des exemples de telles situations en Mécanique et en Physique.

3. Le « programme » indiqué au n° 2 ci-dessus est un sujet immense, que nous n'avons pas étudié de façon exhaustive, nous bornant dans cet ouvrage aux lois classiques les plus simples. Nous avons abordé les sujets suivants :

- 1) problèmes de parois semi-perméables, de diffusion, applications en thermique et hydrodynamique ;
- 2) problèmes d'asservissement, en particulier en thermique ;
- 3) problèmes d'élasticité (linéarisée) avec frottement et unilatéraux ;
- 4) problèmes de plaques planes en flexion ;
- 5) phénomènes d'élasto-visco-plasticité, d'élasticité-parfaite, plasticité, rigidité-visco-plasticité, rigidité-parfaite-plasticité, matériaux à blocage ;
- 6) écoulements de fluides de Bingham ;
- 7) problèmes d'inéquations liés au système des opérateurs de Maxwell.

4. Afin qu'il n'y ait pas d'ambiguïté sur la mise en forme des problèmes évoqués ci-dessus, il a été nécessaire de reprendre depuis le début, de façon succincte, mais précise, les fondements mécaniques ou physiques des situations envisagées. Cela a été fait au début de chacun des chapitres dont nous détaillons maintenant un peu le contenu.

5. On a donné un exemple, au numéro 1 ci-dessus, des problèmes abordés au *Chapitre 1* ; d'autres problèmes concernent la climatisation.

Le *Chapitre 2* étudie des problèmes d'asservissement, conduisant à des inéquations du type (comparer à (5))

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial u / \partial t (\cdot, t) \in K, \\ \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \left( v - \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \text{grad}_x u \cdot \text{grad}_x \left( v - \frac{\partial u}{\partial t} \right) - g \left( v - \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] dx \geq 0 \end{array} \right. \quad \forall v \in K,$$

avec la condition initiale (3).

Le *Chapitre 3* reprend de façon assez complète la théorie de l'élasticité linéaire classique (nous donnons dans le texte, en particulier une démonstration de l'inégalité de Korn, base mathématique indispensable de la théorie) puis nous passons à des problèmes de frottement conduisant à des inéquations ; nous avons adopté la loi de Coulomb et indiqué quelques variantes.

Le *Chapitre 4* étudie des problèmes de frottement liés à la mécanique des plaques minces.



Le *Chapitre 5* est consacré aux phénomènes d'élasto-visco-plasticité d'où l'on déduit, par divers passages à la limite, le cas élastique-parfaitement plastique, le cas rigide-visco-plastique et le cas rigide-parfaitement plastique, tous ces problèmes s'énonçant sous forme d'inéquations. On étudie également dans ce chapitre la loi de Hencky et les matériaux à blocage (*locking materials*).

Le *Chapitre 6* étudie les écoulements d'un type de fluides non newtoniens : les fluides de Bingham. On est ainsi conduit à des inéquations d'évolution contenant comme cas particulier le système classique des équations de Navier-Stokes.

Le *Chapitre 7* est consacré aux problèmes d'inéquations liés au système des opérateurs de Maxwell. Nous étudierons d'abord les milieux conducteurs où la relation entre le champ électrique et la densité de courant est la loi d'Ohm classique, i.e. avec résistivité constante (on appellera un tel milieu « stable »). Nous traitons ensuite le cas des milieux susceptibles de s'ioniser sous l'effet du champ électrique. La résistivité devient alors brusquement infinie : ce sont des phénomènes qui interviennent lors des claquages de condensateurs ou d'antennes.

Des problèmes « hybrides » mettant en jeu simultanément deux des situations décrites dans les chapitres précédents sont étudiés dans des articles séparés Duvaut-Lions [7] [8].

6. Nous avons tout au long de l'ouvrage utilisé les méthodes les plus directes possibles, faisant généralement apparaître *les inéquations* (outil absolument indispensable, en particulier pour *les problèmes d'évolution*) comme *cas limites d'équations non linéaires* (ayant d'ailleurs généralement un sens mécanique ou physique).

En outre, pour faciliter la lecture de l'ouvrage, nous avons présenté les chapitres de manière aussi indépendante que possible (au prix de quelques redites).

7. Il y a déjà de nombreux travaux antérieurs sur les inéquations *stationnaires* en Mécanique. Il est classique (cf. P. Germain [1], G. Mandel [1], E. Tonti [1] et les bibliographies de ces ouvrages) d'étudier l'élasticité stationnaire en relation avec la minimisation de fonctionnelles quadratiques sur des *espaces vectoriels*. La minimisation de fonctionnelles analogues sur des ensembles convexes qui *ne sont pas* des espaces vectoriels est apparue en *plasticité parfaite* (où le tenseur des contraintes reste dans un ensemble convexe fermé *borné*) (cf. W. I. Koiter [1], G. Mandel [2], W. Prager [1] et les bibliographies de ces travaux) puis en *élasticité unilatérale* dans le problème de Signorini, résolu dans G. Fichera [1] puis dans J. L. Lions-G. Stampacchia [1].

Les phénomènes de cavitation étudiés par J. Moreau [3], la recherche de surface minima avec contraintes (J. C. Nitsche [1]) conduisent également à des problèmes d'inéquations variationnelles.

Les *inéquations d'évolution* ont été introduites dans Lions-Stampacchia [1] dans le cas parabolique, Lions [4] dans le cas hyperbolique et ont été étudiées en particulier par H. Brezis [2] <sup>(3)</sup> (cf. aussi le livre Lions [1] et la bibliographie de cet ouvrage).

<sup>(3)</sup> Où l'on trouvera, en particulier, l'usage de la théorie des *semi-groupes non linéaires*, théorie qui n'est pas utilisée dans ce Livre.

Les applications des inéquations d'évolution en Mécanique et en Physique sont, semble-t-il, étudiées ici pour la première fois. Comme il est naturel, ces applications conduisent d'ailleurs à beaucoup de problèmes nouveaux, dont certains encore ouverts; signalons en particulier :

- le problème de la *régularité* des solutions (les méthodes de Brézis-Stampacchia [1], Brézis [2] ne s'appliquant plus dans de nombreuses situations de ce livre);
- le problème des inéquations d'évolution relatives à des convexes ou des fonctionnelles *dépendant de  $t$*  (on en rencontre, en particulier, dans la théorie de l'élasto-visco-plasticité dynamique).

8. D'autres situations de la Physique conduisent à des inéquations, stationnaires ou d'évolution. Nous reviendrons sur ce sujet, par exemple en ce qui concerne la thermo-élasto-visco-plasticité, et le contrôle optimal de systèmes gouvernés par des inéquations. Signalons aussi qu'un problème de frontière libre intervenant en hydrodynamique a été résolu par les méthodes des inéquations par C. Baiocchi [1].

Nous n'avons pas abordé ici deux sujets liés à ce livre :

- i) les *perturbations singulières* relatives aux inéquations (théorie des couches singulières); nous renvoyons à J. L. Lions [5], [6];
- ii) les méthodes *d'approximation numérique* des solutions des inéquations d'évolution, méthodes qui feront l'objet du livre de R. Glowinski, J. L. Lions et R. Tremolières [1]. Nous référons aux travaux sur ce sujet de D. Bégis [1], J. F. Bourgat [1], H. Brézis et M. Sibony [1], J. Cea et R. Glowinski [1], J. Cea, R. Glowinski et J. Nédelec [1], R. Comincioli [1], [2], [3], B. Courjaret [1], M. Frémond [1], A. Fusciardi, U. Mosco, F. Scarpini et A. Schiaffino [1], M. Goursat [1], Y. Haugazeau [1], P. G. Hodge [1], A. Marrocco [1], M. Sibony [1], D. Viaud [1].

9. Les Auteurs remercient vivement M. Alais avec lequel ils ont eu des discussions fructueuses et M. A. Lichnérówic qui a bien voulu accueillir ce travail dans la collection qu'il dirige. Ils tiennent également à remercier les Editions Dunod pour l'excellence du travail typographique.

G. DUVAUT, J.L. LIONS  
Mars 1971

# TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1. Problèmes de milieux semi-perméables et de climatisation.....	1
1. <i>Rappels de mécanique des milieux continus</i> .....	1
1.1 Tenseur des contraintes.....	1
1.2 Lois de conservation.....	2
1.3 Tenseur des déformations.....	8
1.4 Lois de comportement.....	11
2. <i>Problèmes de cloisons semi-perméables et de climatisation</i> .....	11
2.1 Mises en équations.....	11
2.1.1 Equations de la thermique.....	11
2.1.2 Equations de la mécanique des fluides en milieu poreux.....	12
2.1.3 Equations de l'électricité.....	13
2.2 Parois semi-perméables.....	14
2.2.1 Paroi d'épaisseur négligeable.....	15
2.2.2 Paroi d'épaisseur finie.....	16
2.2.3 Cloison semi-perméable à l'intérieur de $\Omega$ .....	17
2.2.4 Injection volumique à travers une cloison semi-perméable.....	18
2.3 Climatisation.....	19
2.3.1 Climatisation par la frontière, gouvernée par la température à la frontière.....	19
2.3.2 Climatisation par l'intérieur, gouvernée par la température à l'intérieur.....	22
3. <i>Formulation variationnelle des problèmes de climatisation et de parois semi-perméables</i> .....	23
3.1 Notations.....	24
3.2 Inéquations variationnelles.....	26
3.3 Exemples. Equivalence avec les problèmes du n° 2.....	27
3.3.1 Fonction $\psi$ de type 1.....	27
3.3.2 Fonction $\psi$ de type 2.....	30
3.3.3 Fonction $\psi$ de type 3.....	31
3.4 Quelques compléments.....	34
3.5 Cas stationnaires.....	35
3.5.1 La fonction $\psi$ est de type 1.....	35
3.5.2 La fonction $\psi$ est de type 2.....	35
3.5.3 La fonction $\psi$ est de type 3.....	36
3.5.4 Cas stationnaire et problèmes du calcul des variations.....	36
4. <i>Quelques outils d'analyse fonctionnelle</i> .....	37
4.1 Espaces de Sobolev.....	37
4.2 Applications : les ensembles convexes $K$ .....	43
4.3 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles.....	44

5.	<i>Résolution des inéquations variationnelles d'évolution du n° 3.</i>	46
5.1	Formulation définitive des problèmes.	46
5.1.1	Données $V, H, V'$ et $a(u, v)$ .	46
5.1.2	Fonctionnelle $\psi$ .	46
5.1.3	Formulation du problème	47
5.2	Énoncé des résultats principaux.	47
5.3	Vérification des hypothèses.	48
5.4	Autres procédés d'approximation.	50
5.5	Démonstration de l'unicité dans le Théorème 5.1 et 5.2.	51
5.6	Démonstration des Théorèmes 5.1 et 5.2.	51
5.6.1	Résolution de (5.14).	51
5.6.2	Estimation sur les $u_j$ et $u'_j$ .	56
5.6.3	Vérification de (5.7).	56
6.	<i>Propriétés de positivité et de comparaison des solutions.</i>	57
6.1	Positivité des solutions.	57
6.2	Comparaison des solutions (I).	60
6.3	Comparaison des solutions (II).	61
7.	<i>Problèmes stationnaires.</i>	62
7.1	Le cas strictement coercif.	62
7.2	Approximation de l'état stationnaire par la solution des problèmes d'évolution lorsque $t \rightarrow +\infty$ .	65
7.3	Le cas non strictement coercif.	67
7.3.1	Conditions nécessaires pour l'existence de solutions	68
7.3.2	Conditions suffisantes pour l'existence d'une solution.	69
7.3.3	Le problème de l'unicité sous l'hypothèse (7.48).	71
7.3.4	Les cas limites dans (7.48).	74
8.	<i>Commentaires</i>	75
<b>CHAPITRE 2. Problèmes d'asservissements thermiques.</b>		76
1.	<i>Asservissement thermique.</i>	76
1.1	Asservissement instantané	76
1.1.1	Asservissement de la température au bord	76
1.1.2	Asservissement de la température à l'intérieur.	78
1.1.3	Propriétés des solutions.	78
1.1.4	Autres asservissements	78
1.2	Asservissement retardé.	79
2.	<i>Formulation variationnelle des problèmes d'asservissement.</i>	79
2.1	Notations	79
2.2	Inéquations variationnelles.	79
2.2.1	Asservissement instantané.	79
2.2.2	Asservissement retardé.	80
2.3	Exemples.	80
2.3.1	Fonction $\psi$ de type 1	80
2.3.2	Fonction $\psi$ de type 2	82
2.3.3	Fonction $\psi$ de type 3.	82
2.4	Orientation	84

3. Résolution des problèmes d'asservissement instantané . . . . .	84
3.1 Énoncé des résultats principaux . . . . .	84
3.2 Démonstration de l'unicité dans le Théorème 3.1 (et 3.2) . . . . .	86
3.3 Démonstration des Théorèmes 3.1 et 3.2 . . . . .	87
3.3.1 Résolution de l'approximation de Galerkin de (3.15) . . . . .	87
3.3.2 Résolution de (3.15) et estimations a priori sur $u_j$ . . . . .	92
3.3.3 Démonstration des résultats des théorèmes . . . . .	93
4. Une propriété de la solution du problème d'asservissement instantané à paroi mince . . . . .	94
5. Résultats partiels sur l'asservissement retardé . . . . .	96
5.1 Énoncé d'un résultat . . . . .	96
5.2 Démonstration de l'existence dans le Théorème 5.1 . . . . .	97
5.3 Démonstration de l'unicité dans le Théorème 5.1 . . . . .	100
6. Commentaires . . . . .	101
CHAPITRE 3. Problèmes classiques et problèmes de frottement en élasticité et visco-élasticité . . . . .	102
1. Introduction . . . . .	102
2. Elasticité linéaire classique . . . . .	102
2.1 Loi de comportement . . . . .	102
2.2 Les problèmes classiques d'élasticité linéaire . . . . .	104
2.2.1 Linéarisation de l'équation de conservation de la masse et des équations du mouvement . . . . .	104
2.2.2 Les conditions aux limites . . . . .	106
2.2.3 Résumé. Orientation . . . . .	106
2.3 Formulation variationnelle du problème d'évolution . . . . .	107
2.3.1 Formule de Green . . . . .	107
2.3.2 Formulation variationnelle . . . . .	108
3. Problèmes statiques . . . . .	109
3.1 Formulation classique . . . . .	109
3.2 Formulation variationnelle . . . . .	109
3.3 Inégalité de Korn et conséquences . . . . .	110
3.4 Résultats . . . . .	118
3.4.1 Le cas « $\Gamma_U$ de mesure positive » . . . . .	118
3.4.2 Le cas « $\Gamma_U$ vide » . . . . .	119
3.5 Formulations duales . . . . .	120
3.5.1 Champs statiquement admissibles et énergie potentielle . . . . .	120
3.5.2 Dualité et multiplicateurs de Lagrange . . . . .	122
4. Problèmes dynamiques . . . . .	123
4.1 Énoncé des résultats principaux . . . . .	123
4.2 Démonstration du Théorème 4.1 . . . . .	127
4.3 Autres conditions aux limites . . . . .	130
4.3.1 Variante n° 1 (par exemple corps sur un support rigide) . . . . .	130
4.3.2 Variante n° 2 (corps placé dans une enveloppe élastique) . . . . .	132

5.	<i>Elasticité linéaire avec frottement ou contraintes unilatérales.</i>	134
5.1	Premières lois de frottement. Cas dynamique	134
5.1.1	Loi de Coulomb	134
5.1.2	Problèmes envisagés	135
5.2	Loi de Coulomb. Cas statique	137
5.2.1	Problèmes envisagés	137
5.2.2	Formulation variationnelle	138
5.2.3	Résultats. Le cas « $\Gamma_U$ de mesure positive »	141
5.2.4	Résultats. Le cas « $\Gamma_U = \emptyset$ »	142
5.3	Formulation variationnelle duale	144
5.3.1	Champs statiquement admissibles et énergie potentielle	144
5.3.2	Dualité et multiplicateurs de Lagrange	145
5.4	Autres conditions aux limites et questions ouvertes	147
5.4.1	Déplacement normal avec frottement	147
5.4.2	Le problème de Signorini comme cas limite de problèmes de frottements	149
5.4.3	Autre condition de frottement avec déplacement normal imposé	151
5.4.4	Frottement de Coulomb avec déplacement normal imposé	152
5.4.5	Problème de Signorini avec frottement	153
5.5	Cas dynamiques	154
5.5.1	Formulation variationnelle	154
5.5.2	Énoncé des résultats	155
5.5.3	Démonstration de l'unicité	156
5.5.4	Démonstration de l'existence	156
6.	<i>Visco-élasticité linéaire. Matériau à mémoire courte.</i>	161
6.1	Loi de comportement et généralités	161
6.2	Cas dynamique. Formulation du problème	163
6.3	Théorème d'existence et unicité dans le cas dynamique	164
6.4	Problèmes quasi statiques. Formulation variationnelle	167
6.5	Théorème d'existence et d'unicité dans le cas où $\Gamma_U$ est de mesure $> 0$	168
6.6	Étude du cas où $\Gamma_U = \emptyset$	171
6.7	Justification du cas quasi statique dans les problèmes sans frottement	175
6.7.1	Position du problème	175
6.7.2	Le cas « Mes $\Gamma_U > 0$ »	176
6.7.3	Le cas « $\Gamma_U = \emptyset$ »	178
6.8	Cas sans viscosité comme limite de cas avec viscosité	179
6.9	Interprétation des problèmes visqueux comme systèmes paraboliques	181
7.	<i>Visco-élasticité linéaire. Matériau à mémoire longue.</i>	182
7.1	Loi de comportement et généralités	182
7.2	Problèmes dynamiques avec frottement	183
7.3	Théorème d'existence et d'unicité dans le cas dynamique	184
7.4	Le cas quasi statique	188
7.4.1	Conditions nécessaires sur la donnée initiale	188
7.4.2	Étude du cas où « Mes $\Gamma_U > 0$ »	189
7.4.3	Étude du cas « $\Gamma_U = \emptyset$ »	191
7.5	Usage de la transformation de Laplace dans le cas sans frottement	192
7.6	Cas élastique comme limite de cas avec mémoire	194
8.	<i>Commentaires</i>	195

CHAPITRE 4. Phénomènes unilatéraux dans la théorie des plaques planes . . . . .	196
1. <i>Introduction</i> . . . . .	196
2. <i>Théorie générale des plaques</i> . . . . .	196
2.1 Définition et notations . . . . .	196
2.2 Analyse des forces . . . . .	197
2.3 Théorie linéarisée . . . . .	200
2.3.1 Hypothèses . . . . .	200
2.3.2 Mise en équations. Première méthode . . . . .	202
2.3.3 Mise en équations. Deuxième méthode . . . . .	205
2.3.4 Récapitulation . . . . .	206
3. <i>Problèmes envisagés</i> . . . . .	207
3.1 Problèmes classiques . . . . .	207
3.2 Problèmes unilatéraux . . . . .	207
4. <i>Problèmes unilatéraux stationnaires</i> . . . . .	208
4.1 Notations . . . . .	208
4.2 Les problèmes (stationnaires) . . . . .	209
4.3 Résolution du Problème 4.1. Conditions nécessaires pour l'existence d'une solution . . . . .	213
4.4 Résolution du Problème 4.1. Conditions suffisantes . . . . .	214
4.5 La question de l'unicité dans les Problèmes 4.1 et 4.3 . . . . .	216
4.6 Résolution du Problème 4.1bis . . . . .	217
4.7 Résolution du Problème 4.2 . . . . .	218
5. <i>Problèmes unilatéraux d'évolution</i> . . . . .	221
5.1 Position des problèmes . . . . .	221
5.2 Résolution des problèmes unilatéraux d'évolution . . . . .	224
6. <i>Commentaires</i> . . . . .	226
CHAPITRE 5. Introduction à la plasticité . . . . .	227
1. <i>Introduction</i> . . . . .	227
2. <i>Les cas élastique parfaitement plastique (loi de Prandtl-Reuss) et élasto-visco-plastique</i> . . . . .	227
2.1 Loi de comportement de Prandtl-Reuss . . . . .	227
2.1.1 Expérience préliminaire . . . . .	228
2.1.2 Généralisation . . . . .	230
2.2 Loi de comportement élasto-visco-plastique . . . . .	232
2.3 Problèmes abordés . . . . .	235
3. <i>Etude des problèmes élasto-visco-plastiques, dynamiques, et quasi statiques</i> . . . . .	236
3.1 Formulation variationnelle des problèmes . . . . .	236
3.2 Énoncé des résultats . . . . .	239
3.3 Démonstration de l'unicité dans les théorèmes . . . . .	241
3.4 Démonstration de l'existence dans le cas dynamique . . . . .	241
3.5 Démonstration de l'existence dans le cas quasi statique . . . . .	244

4.	<i>Etude des problèmes élastiques parfaitement plastiques</i> . . . . .	246
4.1	Position des problèmes . . . . .	246
4.2	Enoncé des résultats . . . . .	248
4.3	Démonstration des résultats d'unicité . . . . .	249
4.4	Démonstration des Théorèmes 4.1 et 4.2 . . . . .	249
4.5	Démonstration des Théorèmes 4.3 et 4.4 . . . . .	251
5.	<i>Etude des problèmes rigides-visco-plastiques et rigides parfaitement plastiques</i> . . . . .	253
5.1	Problèmes rigides-visco-plastiques . . . . .	253
5.2	Problèmes rigides parfaitement plastiques . . . . .	255
6.	<i>Loi de Hencky. Problème de la torsion élasto-plastique</i> . . . . .	258
6.1	Loi de comportement . . . . .	258
6.2	Problèmes envisagés . . . . .	258
6.3	Formulation variationnelle sur les contraintes . . . . .	258
6.4	Recherche du champ de déplacements . . . . .	260
6.5	Matériau isotrope avec critère de Von Mises . . . . .	263
6.6	Torsion d'un arbre cylindrique . . . . .	264
7.	<i>Matériau à blocage (Locking Material)</i> . . . . .	269
7.1	Loi de comportement . . . . .	269
7.2	Problème envisagé . . . . .	271
7.3	Double formulation variationnelle du problème . . . . .	271
7.4	Existence et unicité d'un champ de déplacements solution . . . . .	274
7.5	Champ de contraintes associé . . . . .	274
8.	<i>Commentaires</i> . . . . .	274
<b>CHAPITRE 6. Fluide rigide visco-plastique de Bingham</b> . . . . .		276
1.	<i>Introduction et problèmes envisagés</i> . . . . .	276
1.1	Lois de comportement d'un fluide rigide-visco-plastique incompressible . . . . .	276
1.2	Fonction de dissipation . . . . .	277
1.3	Problèmes envisagés et récapitulation des équations . . . . .	279
2.	<i>Écoulement à l'intérieur d'un réservoir. Formulation sous forme d'inéquation variationnelle</i> . . . . .	283
2.1	Premières notations . . . . .	283
2.2	Inéquation variationnelle . . . . .	284
3.	<i>Résolution de l'inéquation variationnelle caractéristique de l'écoulement d'un fluide de Bingham à l'intérieur d'un réservoir</i> . . . . .	286
3.1	Outils d'analyse fonctionnelle . . . . .	286
3.2	Formulation fonctionnelle des inéquations variationnelles . . . . .	289
3.3	Démonstration du Théorème 3.2 . . . . .	291
3.4	Démonstration du Théorème 3.1 . . . . .	297
3.4.1	Démonstration de l'existence . . . . .	297
3.4.2	Démonstration de l'unicité . . . . .	299



4.	<i>Un théorème de régularité en dimension 2.</i>	301
5.	<i>Fluides newtoniens comme limites des fluides de Bingham</i>	303
5.1	Énoncé du résultat	303
5.2	Démonstration du Théorème 5.1	304
6.	<i>Problèmes stationnaires.</i>	308
6.1	Énoncé des résultats	308
6.2	Démonstration	309
7.	<i>Problème extérieur</i>	311
7.1	Formulation du problème sous forme d'inéquation variationnelle	311
7.2	Résultats	312
8.	<i>Écoulement laminaire dans une conduite cylindrique.</i>	314
8.1	Rappel des équations.	314
8.2	Formulation variationnelle.	315
8.3	Propriétés de la solution.	316
9.	<i>Interprétation des méquations avec les multiplicateurs.</i>	319
10.	<i>Commentaires</i>	323
<b>CHAPITRE 7. Equations de Maxwell. Problèmes d'antennes.</b>		<b>324</b>
1.	<i>Introduction.</i>	324
2.	<i>Les lois de l'électromagnétisme.</i>	324
2.1	Grandeurs physiques.	325
2.2	Conservation de la charge électrique.	325
2.3	Loi de Faraday.	327
2.4	Récapitulation. Equations de Maxwell.	328
2.5	Lois de comportement.	328
3.	<i>Problèmes physiques envisagés.</i>	330
3.1	Milieu stable avec frontière supraconductrice.	330
3.2	Milieu polarisable avec frontière supraconductrice.	330
3.3	Antenne bipolaire.	331
3.4	Antenne à fente.	332
3.5	Récapitulation. Formulation unifiée des problèmes.	333
4.	<i>Étude des milieux stables. Premier théorème d'existence et d'unicité.</i>	335
4.1	Outils d'analyse fonctionnelle pour la formulation « faible » du problème.	335
4.2	Opérateur $\mathcal{A}$ . Formulation « faible » du problème.	339
4.3	Existence et unicité de la solution faible.	343
4.4	Dépendance continue de la solution en les constantes diélectriques et les perméabilités magnétiques	345
5.	<i>Milieux stables. Existence de solutions « fortes ».</i>	350
5.1	Solution forte dans $D(\mathcal{A})$ .	350
5.2	Solution du problème physique	351

6.	<i>Milieux stables. Solutions fortes dans les espaces de Sobolev.</i> . . . . .	354
6.1	Théorèmes de plongement . . . . .	354
6.2	Appartenance de $B$ à un espace de Sobolev. . . . .	360
6.3	Appartenance de $D$ à un espace de Sobolev. . . . .	360
7.	<i>Antennes à fente. Problèmes non homogènes.</i> . . . . .	361
7.1	Position du problème. . . . .	361
7.2	Enoncé du résultat. . . . .	361
7.3	Démonstration du Théorème 7.1. . . . .	363
8.	<i>Milieux polarisables.</i> . . . . .	364
8.1	Résultat d'existence et d'unicité pour une inéquation variationnelle relative aux opérateurs de Maxwell. . . . .	364
8.2	Interprétation de l'inéquation variationnelle. Résolution des problèmes des milieux polarisables. . . . .	366
8.3	Démonstration du Théorème 8.1. . . . .	367
8.3.1	Démonstration d'existence. . . . .	367
8.3.2	Démonstration de l'unicité. . . . .	372
9.	<i>Milieux stables comme limites de milieux polarisables.</i> . . . . .	372
9.1	Enoncé du résultat . . . . .	372
9.2	Démonstration du Théorème 9.1 . . . . .	373
10.	<i>Compléments divers.</i> . . . . .	375
11.	<i>Commentaires</i> . . . . .	375
BIBLIOGRAPHIE . . . . .		377

# CHAPITRE 1

## PROBLÈMES DE MILIEUX SEMI-PERMÉABLES ET DE CLIMATISATION

### 1. RAPPELS DE MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Nous n'avons pas l'intention de refaire ici la théorie complète des milieux continus. Pour un tel exposé, nous renvoyons aux ouvrages de P. Germain [1], [2], G. Mandel [1], W. Noll et C. Truesdell [1], Sedov [1].

Néanmoins, nous tenons à rappeler les principes et les résultats essentiels de cette théorie dont nous aurons besoin par la suite, et fixer les notations qui seront utilisées. Ces rappels porteront sur le tenseur des contraintes, les lois de conservation, le tenseur des déformations et les lois de comportement.

#### 1.1 Tenseur des contraintes

Soit un milieu continu qui occupe une région ouverte  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  rapporté à un système d'axes orthonormés  $Ox_1x_2x_3$ . Ce milieu est en équilibre sous l'effet d'efforts extérieurs, constitués en général par une densité volumique de forces dans  $\Omega$  et une densité surfacique de forces sur la frontière de  $\Omega$ .

Ces efforts engendrent au sein du milieu continu un champ de contraintes qui peuvent être décrites de la façon suivante : soit un point  $M$  de  $\Omega$  et  $\mathcal{V}$  une variété à deux dimensions, continûment différentiable passant par  $M$  et partageant, au moins au voisinage de  $M$ , le milieu continu en deux régions  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Soit  $\mathbf{n}$  la normale unitaire à  $\mathcal{V}$  en  $M$  dirigée vers  $\Omega_2$ . On établit alors, moyennant certaines hypothèses <sup>(1)</sup>, généralement bien satisfaites dans la pratique, que l'action de  $\Omega_2$  sur  $\Omega_1$  est équivalente à une densité de forces  $\mathbf{F}$  sur  $\mathcal{V}$  et que  $\mathbf{F}$  dépend du point  $M$  et du vecteur normal  $\mathbf{n}$  par la formule

$$(1.1) \quad F_i = \sigma_{ij} n_j \quad i = 1, 2, 3 ; \quad j = 1, 2, 3,$$

où les coefficients  $\sigma_{ij}$  dépendent du point  $M$ .

<sup>(1)</sup> Ces hypothèses reviennent à supposer négligeable une éventuelle densité de couples sur la variété  $\mathcal{V}$ . En rejetant ces hypothèses simplificatrices, on est conduit à une théorie dite des milieux orientés dans laquelle le tenseur des contraintes n'est plus symétrique. On peut voir à ce sujet : P. Casal [1], G. Duvaut [1] [2], A. E. Green et R. S. Rivlin [1], R. Hayart [1], R. D. Mindlin et H. F. Tiersten [1], A. C. Eringen et Suhubi [1], R. A. Toupin [1] [2].

Les quantités  $F_i$  et  $n_j$  sont les composantes des vecteurs  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{n}$ . Nous avons utilisé dans l'équation (1.1) — et nous le ferons dans la suite de ce livre, sauf mention expresse du contraire — la convention de sommation sur l'indice répété, c'est-à-dire que (1.1) signifie,

$$F_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j.$$

Lors d'un changement de base dans  $\mathbb{R}^3$  les quantités  $F_i$  et  $n_j$  se transforment comme les composantes de vecteurs, et, par conséquent, les quantités  $\sigma_{ij}$  sont les composantes d'un tenseur du second ordre. On l'appelle le *tenseur des contraintes*. ■

L'introduction de ce tenseur permet de poser les *conditions aux limites*. Soient, en effet  $\Gamma$  la frontière, supposée régulière de  $\Omega$ , et  $\mathbf{n}$  la normale extérieure unitaire à  $\Gamma$ . Si  $\mathbf{F}$  est la densité surfacique de forces extérieures agissant sur  $\Omega$  aux points de  $\Gamma$ , nous aurons la relation

$$F_i = \sigma_{ij} n_j$$

en chaque point de  $\Gamma$ , puisque c'est le milieu extérieur qui joue alors le rôle de  $\Omega_2$ .

## 1.2. Lois de conservation

Les axiomes, ou principes de base de la mécanique classique des milieux continus sont les trois lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

### i) Conservation de la masse

Soit  $\mathbf{v}(M, t)$  le champ des vecteurs vitesse à l'instant  $t$  des points d'un milieu continu en mouvement par rapport au repère  $Ox_1x_2x_3$ . Nous désignerons par  $\mathcal{S}$  un domaine quelconque de  $\mathbb{R}^3$  contenu dans la région occupée par le milieu continu ; ce domaine  $\mathcal{S}$  contient un certain volume de matière, c'est-à-dire un certain nombre de particules matérielles ; nous considérons  $\mathcal{S}$  comme la région de  $\mathbb{R}^3$  qui contient ces particules matérielles à chaque instant, ce qui implique que  $\mathcal{S}$  est un domaine variable, qui se déplace en même temps que le fluide. Le principe de conservation de la masse s'énonce : *La masse de matière contenue dans le domaine  $\mathcal{S}$ , quelconque, que l'on suit dans son mouvement, est indépendante du temps*. Il en résulte que

$$(1.2) \quad d/dt \iiint_{\mathcal{S}} \rho \, dx = 0, \quad \forall \mathcal{S},$$

où les notations sont les suivantes :

- $\rho = \rho(M, t)$  est la densité au point  $M$  à l'instant  $t$ ,
- $dx$  est l'élément de volume  $dx_1 \, dx_2 \, dx_3$ .

Si le champ des vitesses est continu à l'intérieur de  $\mathcal{S}$ , l'équation intégrale (1.2) est équivalente à l'équation ponctuelle

$$(1.3) \quad \partial \rho / \partial t + \text{Div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

où  $\text{Div}(\rho \mathbf{v})$  désigne naturellement la divergence du champ de vecteur  $\rho \mathbf{v}$ , c'est-à-dire

$$\partial(\rho v_i)/\partial x_i.$$

ii) *Conservation de la quantité de mouvement*

Cette loi de conservation, connue aussi sous le nom de principe fondamental de la dynamique s'énonce de la façon suivante : *Il existe un repère et une chronologie  $t$ , dits galiléens, tels que pour tout système matériel et à chaque instant, le torseur des forces extérieures appliquées au système est égal à la dérivée par rapport au temps du torseur des quantités de mouvement.*

Reprenons le volume  $\mathcal{S}$  de matière introduit en i) ; il constitue un système matériel auquel nous pouvons appliquer le principe énoncé ci-dessus. Le système d'axes  $Ox_1x_2x_3$  est supposé galiléen ainsi que la chronologie  $t$  considérée.

Ecrivons l'égalité des deux torseurs par leurs éléments de réduction en  $O$  (cf. Remarque 1.1 à la fin de ce paragraphe),

$$(1.4) \quad \int_{\mathcal{S}} f_i dx + \int_{\partial \mathcal{S}} \sigma_{ij} n_j dS = d/dt \int_{\mathcal{S}} \rho v_i dx, \quad \forall \mathcal{S},$$

$$(1.5) \quad \int_{\mathcal{S}} \varepsilon_{ijk} x_j f_k dx + \int_{\partial \mathcal{S}} \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l dS = d/dt \int_{\mathcal{S}} \varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k dx, \quad \forall \mathcal{S}.$$

Précisons les notations et la signification des différents termes.

Le vecteur  $\mathbf{f}$ , de composantes  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) représente une distribution volumique de forces extérieures (exemple : les forces de pesanteur). Le terme  $\int_{\mathcal{S}} f_i dx$  est donc la  $i$ -ième composante de la résultante des forces volumiques.

Le système  $\mathcal{S}$  est soumis à sa frontière  $\partial \mathcal{S}$  à une densité surfacique de forces, qui, d'après le paragraphe i) est fournie par  $\sigma_{ij} n_j$ . Le terme  $\int_{\partial \mathcal{S}} \sigma_{ij} n_j dS$  représente donc la  $i$ -ième composante de la résultante des forces surfaciques appliquées au système  $\mathcal{S}$ . L'élément de surface sur  $\partial \mathcal{S}$  est noté  $dS$ .

Le terme  $d/dt \int_{\mathcal{S}} \rho v_i dx$  représente la  $i$ -ième composante de la dérivée par rapport au temps de la résultante cinétique.

Les quantités  $\varepsilon_{ijk}$  sont les composantes du tenseur (pour les changements de bases orthonormées directes) du troisième ordre complètement antisymétrique tel que  $\varepsilon_{123} = +1$  (cf. Remarque 1.2 à la fin de ce paragraphe).

Les deux premiers termes de l'équation (1.5) sont les  $i$ -ièmes composantes des moments résultant en  $O$  des forces volumiques et surfaciques agissant sur le système  $\mathcal{S}$ .

Le deuxième membre de (1.5) est la dérivée par rapport à  $t$  de la  $i$ -ième composante du moment cinétique en  $O$ .

En transformant l'intégrale de surface de (1.4) en intégrale de volume, en utilisant la conservation de la masse et en supposant assez régulières les diverses quantités qui interviennent sous le signe d'intégration, on voit que (1.4) est équivalente à

$$(1.6) \quad \sigma_{ij,j} + f_i = \rho \gamma_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

où l'on a posé,

$$(1.7) \quad \gamma_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j,$$

$$(1.8) \quad X_{,j} = \partial X / \partial x_j.$$

La quantité  $\gamma_i$  est la  $i$ -ième composante de l'accélération de la particule se trouvant au point de coordonnées  $(x_i)$  à l'instant  $t$ . On remarque que l'expression  $\gamma_i$ , donc l'équation (1.6) contient un *terme non linéaire* par rapport aux composantes de la vitesse.

Les équations (1.6) sont connues sous le nom d'*équations du mouvement*.

S'il s'agit d'un problème de *statique* ( $v \equiv 0$ ) le second membre des équations (1.6) est identiquement nul et on les appelle alors *équations d'équilibre*; elles sont alors *linéaires* par rapport aux composantes  $\sigma_{ij}$  du tenseur des contraintes.

Les équations (1.5) peuvent être réduites en transformant l'intégrale de surface en intégrale de volume et en utilisant la conservation de la masse et les équations du mouvement. Elles deviennent alors,

$$(1.9) \quad \int_{\mathcal{S}} \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} dx = 0 \quad \forall \mathcal{S},$$

ce qui est équivalent à

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} = 0$$

c'est-à-dire à

$$(1.10) \quad \sigma_{kj} = \sigma_{jk}.$$

*Le tenseur des contraintes est donc symétrique.* ■

Les deux remarques qui suivent sont en fait des rappels sur les torseurs et le tenseur de composantes  $\varepsilon_{ijk}$ .

#### *Remarque 1.1*

On appelle *torseur* l'ensemble constitué

- d'un vecteur libre  $\mathbf{R}$ , appelé résultante du torseur,
- d'un champ de vecteurs  $\mathbf{M}(P)$  défini en chaque point  $P$  et tel que

$$(1.11) \quad \mathbf{M}(Q) = \mathbf{M}(P) + \mathbf{QP} \wedge \mathbf{R}.$$

Le vecteur  $\mathbf{M}(P)$  s'appelle le moment résultant en  $P$  du torseur. L'ensemble des deux vecteurs d'origine un point  $A$ ,  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{M}(A)$  s'appellent les *éléments de réduction en  $A$*  du torseur. On voit qu'un torseur est complètement déterminé par la connaissance de ses éléments de réduction en un point. ■

## Remarque 1.2

Les quantités  $\varepsilon_{ijk}$  définies au paragraphe ci-dessus sont commodes pour la conduite de certains calculs grâce à des relations de base qui sont

$$(1.12) \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} = \text{Det} \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix},$$

$$(1.13) \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqk} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp},$$

$$(1.14) \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pjk} = 2 \delta_{ip},$$

$$(1.15) \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6.$$

Les quantités  $\delta_{ip}$  sont les composantes du tenseur de Kröneckner, c'est-à-dire

$$\delta_{ip} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq p,$$

$$\delta_{ip} = 1 \quad \text{si} \quad i = p.$$

La relation (1.12) se démontre en utilisant les propriétés d'antisymétrie des  $\varepsilon_{ijk}$ , ce qui permet de se ramener au cas où  $(i, j, k) = (1, 2, 3)$  et  $(p, q, r) = (1, 2, 3)$ . Les relations (1.13), (1.14), (1.15) se démontrent à partir de (1.12) de proche en proche.

Les quantités  $\varepsilon_{ijk}$  interviennent dans l'écriture de la  $i$ -ième composante du produit vectoriel de deux vecteurs ou du rotationnel d'un champ de vecteurs, ainsi que dans l'expression du déterminant d'une matrice  $3 \times 3$ . En effet, on vérifie facilement que

$$(1.16) \quad (a \wedge b)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

où  $a$  et  $b$  sont des vecteurs de composantes respectives  $(a_i)$  et  $(b_j)$  et que,

$$(1.17) \quad (\text{Rot } v)_i = \varepsilon_{ijk} v_{k,j}$$

où  $v$  est un champ de vecteurs de composantes  $(v_k)$ .

De plus

$$(1.18) \quad \varepsilon_{ijk} \text{Det } M = \varepsilon_{pqr} M_{ip} M_{jq} M_{kr},$$

$$(1.19) \quad \text{Det } M = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} M_{ip} M_{jq} M_{kr}$$

où  $M$  est une matrice  $3 \times 3$  de composantes  $(M_{ij})$ .

La relation (1.18) établit, dans le cas où  $M$  est la matrice d'un changement de bases orthonormées directes ( $\text{Det } M = +1$ ), que les  $\varepsilon_{ijk}$  sont les composantes d'un tenseur du troisième ordre vis-à-vis de tels changements de bases.

Enfin si  $M^{-1}$  est la matrice inverse de la matrice  $M$  — dans le cas où  $\text{Det } M \neq 0$  — les composantes de  $M^{-1}$  sont données par

$$(1.20) \quad (M^{-1})_{ij} = (2 \text{Det } M)^{-1} \varepsilon_{jpq} \varepsilon_{irs} M_{pr} M_{qs}.$$

Grâce à ces diverses relations, il est en particulier aisé d'établir les formules classiques suivantes,

$$\begin{aligned} \text{Det}(A \cdot B) &= (\text{Det } A) \cdot (\text{Det } B), \\ \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}, \\ \text{Rot Rot } \mathbf{v} &= \text{grad div } \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}, \quad \text{etc.} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### iii) Conservation de l'énergie

Cette loi est aussi connue sous le nom de *premier principe de la thermodynamique*. Elle exprime que *la dérivée par rapport au temps de l'énergie totale d'un système (énergie interne + énergie cinétique) est égale à la puissance des efforts extérieurs appliqués plus l'apport d'énergie par unité de temps*.

En appliquant cet énoncé au système matériel  $\mathcal{S}$  introduit précédemment, nous obtenons,

$$(1.21) \quad \begin{aligned} d/dt \int_{\mathcal{S}} \rho (\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + e) dx &= \int_{\mathcal{S}} f_i v_i dx + \int_{\partial \mathcal{S}} \sigma_{ij} n_j v_i dS + \\ &+ \int_{\mathcal{S}} \rho w dx - \int_{\partial \mathcal{S}} q_i n_i dS. \end{aligned}$$

Le scalaire  $e$  désigne l'énergie interne spécifique du milieu continu et par conséquent le terme  $\int_{\mathcal{S}} \rho (\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + e) dx$  représente l'énergie totale du système considéré.

Les termes  $\int_{\mathcal{S}} f_i v_i dx$  et  $\int_{\partial \mathcal{S}} \sigma_{ij} n_j v_i dS$  sont égaux respectivement à la puissance des forces volumiques et surfaciques.

Le scalaire  $w$  désigne l'apport d'énergie par unité de masse et de temps et par conséquent  $\int_{\mathcal{S}} \rho w dx$  représente l'apport volumique d'énergie par unité de temps au système  $\mathcal{S}$ .

Le vecteur  $\mathbf{q}$  de composantes  $q_i$  est le vecteur transport d'énergie et le terme  $-\int_{\partial \mathcal{S}} q_i n_i dS$  représente l'apport surfacique d'énergie par unité de temps.

L'équation (1.21) peut être réduite en utilisant les équations (1.3), (1.6), (1.10) après transformation des intégrales de surface en intégrales de volume. On parvient ainsi à

$$(1.22) \quad \int_{\mathcal{S}} \rho (de/dt) dx = \int_{\mathcal{S}} \sigma_{ij} v_{i,j} dx + \int_{\mathcal{S}} (\rho w - q_{i,i}) dx.$$

Introduisons le tenseur  $D$  des taux de déformation de composantes

$$(1.23) \quad D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}).$$

L'équation (1.22) valable quel que soit le domaine  $\mathcal{S}$  est équivalente à l'équation

$$(1.24) \quad \rho de/dt = \sigma_{ij} D_{ij} + \rho w - q_{i,i}. \quad \blacksquare$$

### Récapitulation

L'ensemble des lois de conservation nous a fourni trois équations, ou groupes d'équations :

#### 1) L'équation de continuité

$$(1.25) \quad \partial \rho / \partial t + \text{Div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$



## 2) Les équations du mouvement

$$(1.26) \quad \rho \gamma_i = \sigma_{ij,j} + f_i.$$

## 3) L'équation de l'énergie

$$(1.27) \quad \rho \, de/dt = \sigma_{ij} D_{ij} + \rho w - q_{i,i},$$

le tenseur des contraintes de composantes  $\sigma_{ij}$  étant symétrique. ■

*Remarque 1.3*

A partir des lois de conservation, nous avons déduit, sous des hypothèses de continuité, les équations ponctuelles (1.25), (1.26), (1.27). Si par contre, il existe au sein du milieu continu une ligne de discontinuité de la vitesse, ou des composantes du tenseur des contraintes, on montre (P. Germain [2]) que sur cette ligne les équations aux dérivées partielles (1.25)-(1.27) doivent être remplacées par des relations de discontinuité.

Ces conditions de discontinuité peuvent être incluses dans les relations (1.25)-(1.27) à condition d'interpréter les dérivations qui y interviennent au sens des distributions. ■

*Remarque 1.4*

Les équations (1.25)-(1.27) constituent au total cinq relations scalaires. Les fonctions inconnues sont au nombre de quatorze :

- i) les six composantes  $\sigma_{ij}$  du tenseur des contraintes (symétrique) ;
- ii) les trois composantes  $v_i$  de la vitesse ;
- iii) la densité  $\rho$ , l'énergie interne  $e$ , les composantes  $q_i$  du vecteur transport d'énergie.

Il est bien évident, à partir de cette énumération, que du simple point de vue mathématique, il est bien improbable qu'avec cinq équations on puisse déterminer quatorze fonctions inconnues !

Du point de vue physique par ailleurs, il faut remarquer que les lois de conservation énoncées sont des lois universelles valables pour tous les milieux continus, liquides, solides ou gazeux. Si donc les équations (1.25)-(1.27), obtenues à partir de ces lois, suffisaient à déterminer tous les paramètres, cela signifierait que, soumis à des conditions identiques, les divers milieux continus auraient des comportements identiques. Ceci est naturellement absurde.

Les lois de conservation énoncées sont donc insuffisantes à elles seules à décrire les mouvements des milieux continus ; elles doivent être complétées par d'autres relations que l'on désigne sous le vocable général de *lois de comportement*. Pour introduire ces dernières, il nous faut d'abord définir le tenseur des déformations.

## 1.3. Tenseur des déformations

## i) Description cinématique

Soit un milieu continu en mouvement qui occupe à l'instant  $t$  un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  rapporté à une base orthonormée directe  $Ox_1x_2x_3$ .

Soient  $(a_\alpha)$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) les composantes de la position à l'instant 0 de la particule matérielle se trouvant au point de coordonnées  $(x_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) à l'instant  $t$ . Nous supposons, en accord avec la réalité physique de chaque particule matérielle, qu'il existe une correspondance biunivoque entre les  $(a_\alpha)$  et les  $(x_i)$  d'une même particule, soit

$$(1.28) \quad \begin{cases} a_\alpha = g_\alpha(x, t), & \alpha = 1, 2, 3, & x = (x_1, x_2, x_3), \\ x_i = f_i(a, t), & i = 1, 2, 3, & a = (a_1, a_2, a_3). \end{cases}$$

Les relations (1.28) supposées continues établissent également une correspondance entre l'ouvert  $\Omega$  et un ouvert  $\Omega_0$  constitué de l'ensemble des positions occupées à l'instant  $t = 0$  par les particules se trouvant dans  $\Omega$  à l'instant  $t$ . Les composantes  $(a_\alpha)$  sont les *coordonnées de Lagrange* de la particule matérielle considérée, alors que les  $(x_i)$  en sont les *coordonnées d'Euler* à l'instant  $t$ .

## ii) Gradient de la déformation

Dans la transformation (1.28) un vecteur infinitésimal  $d\mathbf{M}_0$  de composantes  $(da_\alpha)$  devient à l'instant  $t$  un vecteur infinitésimal  $d\mathbf{M}$  de composantes  $dx_i$  données par

$$(1.29) \quad dx_i = x_{i,\alpha} da_\alpha$$

ou encore

$$(1.30) \quad d\mathbf{M} = \mathbb{F} d\mathbf{M}_0$$

où  $\mathbb{F}$  désigne le tenseur de composantes  $F_{i\alpha}$  données par

$$(1.31) \quad F_{i\alpha} = f_{i,\alpha} = x_{i,\alpha}.$$

Le tenseur  $F$  est le tenseur *gradient de la déformation*.

## iii) Tenseur des dilatations

Soient deux vecteurs matériels infinitésimaux  $d\mathbf{M}_0$  et  $\delta\mathbf{M}_0$  d'origine  $M_0 \in \Omega_0$ ; ils deviennent à l'instant  $t$  deux vecteurs infinitésimaux  $d\mathbf{M}$  et  $\delta\mathbf{M}$  d'origine  $M$  et sont tels que

$$d\mathbf{M} = \mathbb{F} d\mathbf{M}_0, \quad \delta\mathbf{M} = \mathbb{F} \delta\mathbf{M}_0.$$

Si nous connaissons à tout instant  $t$  les produits scalaires  $d\mathbf{M}^2$ ,  $d\mathbf{M} \cdot \delta\mathbf{M}$ ,  $\delta\mathbf{M}^2$ , nous connaissons les longueurs et les angles des éléments matériels  $d\mathbf{M}$  et  $\delta\mathbf{M}$ ; or

$$(1.32) \quad d\mathbf{M} \cdot \delta\mathbf{M} = x_{i,\alpha} x_{i,\beta} da_\alpha d\beta,$$

donc ces longueurs et ces angles seront connus à partir des éléments  $C_{\alpha\beta}$  donnés par

$$(1.33) \quad C_{\alpha\beta} = x_{i,\alpha} x_{i,\beta}$$

et qui sont les composantes d'un tenseur du deuxième ordre symétrique appelé *tenseur des dilatations* et noté  $\mathbb{C}$ . On a aussi

$$(1.34) \quad \mathbb{C} = \mathbb{F}^T \mathbb{F}$$

où  $\mathbb{F}^T$  est le tenseur transposé du tenseur  $\mathbb{F}$  et où le produit  $\mathbb{F}^T \mathbb{F}$  est effectué comme un produit de matrices.

Si le milieu continu se déplace comme un corps *rigide*, c'est-à-dire sans se déformer, alors

$$(1.35) \quad d\mathbf{M} \cdot \delta\mathbf{M} = d\mathbf{M}_0 \cdot \delta\mathbf{M}_0, \quad \forall d\mathbf{M}_0, \quad \forall \delta\mathbf{M}_0,$$

ce qui implique que

$$(1.36) \quad \mathbb{C} = \mathbb{1}$$

où  $\mathbb{1}$  désigne le tenseur unité, c'est-à-dire le tenseur de composantes  $(\delta_{\alpha\beta})$ . Inversement (1.36) entraîne (1.35) et par conséquent : la condition nécessaire et suffisante pour qu'un milieu continu se déplace sans déformation est que (1.36) ait lieu.

#### iv) Tenseur des déformations

C'est le tenseur défini par

$$(1.37) \quad \mathbb{X} = \frac{1}{2}(\mathbb{C} - \mathbb{1})$$

ou, en terme de composantes,

$$(1.38) \quad X_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(C_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}).$$

On a alors : la condition nécessaire et suffisante pour qu'un milieu continu se déplace sans déformation est que le tenseur des déformations soit nul.

Introduisons le vecteur déplacement  $\mathbf{u}$  par

$$(1.39) \quad u_i = x_i - a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

On obtient

$$F_{i\alpha} = u_{i,\alpha} + \delta_{i\alpha}$$

d'où

$$(1.40) \quad X_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{,\beta} + u_{,\alpha} + u_{i,\alpha} u_{i,\beta}).$$

On voit que le tenseur des déformations s'exprime de façon *non linéaire* par rapport aux composantes du vecteur déplacement  $\mathbf{u}$ .

v) *Tenseur des déformations linéarisé*

Si le vecteur déplacement  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(a, t)$  varie lentement avec  $a$ , les dérivées partielles  $u_{i,\alpha}$  sont petites et le tenseur des déformations est lui-même petit. On dit alors que l'on est en petites déformations. Supposant que les quantités  $u_{i,\alpha}$  sont d'ordre  $\varepsilon$  ( $\varepsilon$  paramètre tendant vers 0), les quantités  $u_{i,\alpha} u_{i,\beta}$  seront d'ordre  $\varepsilon^2$  et alors

$$(1.41) \quad X_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) + \text{termes d'ordre } \varepsilon^2.$$

On dit que le tenseur de composantes  $\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{u})$ ,

$$(1.42) \quad \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha})$$

est le *tenseur des déformations linéarisé*. ■

*Remarque 1.6*

Nous avons introduit en (1.23) le tenseur  $\mathbb{D}$  des vitesses de déformation. On peut justifier ici ce vocabulaire. Formons la dérivée par rapport au temps du produit scalaire  $d\mathbf{M} \cdot \delta\mathbf{M}$ , le point  $M_0$  et les vecteurs infinitésimaux  $d\mathbf{M}_0$  et  $\delta\mathbf{M}_0$  restant fixés. Il vient

$$(1.43) \quad \frac{d}{dt}(d\mathbf{M} \cdot \delta\mathbf{M}) = \frac{d}{dt}(d\mathbf{M}) \cdot \delta\mathbf{M} + d\mathbf{M} \cdot \frac{d}{dt}(\delta\mathbf{M}).$$

Mais nous avons

$$\left(\frac{d}{dt} d\mathbf{M}\right)_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_\alpha} da_\alpha\right) = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial a_\alpha} da_\alpha = \frac{\partial^2 x_i}{\partial a_\alpha \partial t} da_\alpha,$$

et comme

$$\partial x_i(a, t) / \partial t = v_i,$$

alors

$$(1.44) \quad \frac{d}{dt} d\mathbf{M} = v_{i,\alpha} da_\alpha = v_{i,j} x_{j,\alpha} da_\alpha = v_{i,j} dx_j.$$

On fait de même pour  $\left(\frac{d}{dt} \delta\mathbf{M}\right)$  et on reporte dans (1.43) pour obtenir

$$(1.45) \quad \frac{d}{dt}(d\mathbf{M} \cdot \delta\mathbf{M}) = 2 D_{ij} dx_i \delta x_j,$$

ce qui explique pourquoi le tenseur de composantes  $D_{ij}$  s'appelle tenseur des vitesses de déformation. ■

## 1.4. Lois de comportement

Les lois de comportement n'ont pas le caractère universel des lois de conservation étudiées au paragraphe 1.2. Elles caractérisent par contre le comportement de chaque type de milieu continu. Leur origine est souvent expérimentale bien qu'elles doivent respecter certaines propriétés d'invariance (W. Noll et C. Truesdell [1], C. Truesdell et R. Toupin [1]). D'une façon générale, ce sont des relations entre tenseur des contraintes, tenseur des déformations, tenseur des vitesses de déformation, température, vecteur flux de chaleur. ■

Nous n'allons pas faire ici la liste de « tous » les types de milieux continus avec leurs lois de comportement respectives. Nous introduirons dans chaque chapitre la loi de comportement à prendre en considération et nous écrirons alors le système d'équations et d'inéquations qui gouverne le phénomène en utilisant les principes généraux que nous venons de rappeler. C'est ce que nous allons faire immédiatement pour les phénomènes étudiés dans ce premier chapitre.

## 2. PROBLÈMES DE CLOISONS SEMI-PERMÉABLES (thermique, mécanique des fluides en milieu poreux, semi-conducteur en électricité) ET DE CLIMATISATION

### 2.1. Mises en équations

#### 2.1.1. Equation de la thermique

La thermique est l'étude du champ de températures d'un milieu continu, les phénomènes de déformation étant supposés découplés <sup>(2)</sup> et les vitesses négligeables, ce qui a pour effet de linéariser les équations (1.25)-(1.27). Elles deviennent

$$(2.1) \quad \partial \rho / \partial t = 0 ,$$

$$(2.2) \quad \sigma_{i,j} + f_i = 0 ,$$

$$(2.3) \quad \rho \partial e / \partial t = \rho w - q_{i,i} .$$

Les lois de comportement retenues sont :

$$(2.4) \quad \sigma_{ij} \text{ indépendant de la température,}$$

$$(2.5) \quad e = C \theta ,$$

$$(2.6) \quad q = - \tilde{\kappa} \text{ grad } \theta .$$

Les notations sont les suivantes :

- i) Le coefficient  $c$  est une chaleur spécifique, scalaire strictement positif. Dans la réalité  $c$  dépend plus ou moins, selon les matériaux, de la température. Ici, on supposera que  $c$  peut dépendre de  $x$  seulement.

<sup>(2)</sup> C'est-à-dire qu'une déformation du milieu ne produit pas de variation de la température.

ii) La loi (2.6) est connue sous le nom de *loi de Fourier*. Elle est linéaire lorsque le tenseur du second ordre  $\tilde{\mathbb{K}}$  ne dépend que de  $x$ . Ceci n'est pas réalisé en toute rigueur et on peut, avec certains matériaux, observer des variations importantes de  $\tilde{\mathbb{K}}$  avec la température.

Ici, nous retiendrons seulement la loi linéaire, soit parce qu'elle est satisfaite par le matériau considéré, soit parce que les variations de températures sont assez faibles pour justifier une linéarisation autour de la température moyenne.

De plus, nous supposons que

$$(2.7) \quad \tilde{K}_{ij} x_i x_j \geq k_0 x_i x_i, \quad k_0 \text{ Cte} > 0,$$

ce qui est bien satisfait physiquement. Si le matériau est isotrope, le tenseur  $\tilde{\mathbb{K}}$  est sphérique, c'est-à-dire que

$$\tilde{K}_{ij} = \tilde{k} \delta_{ij},$$

et le scalaire  $\tilde{k}$  est alors le *coefficient de conductivité thermique* du matériau. ■

L'équation (2.1) montre que la masse spécifique  $\rho$  ne dépend pas du temps; elle peut éventuellement dépendre de  $x$ , mais elle est alors une donnée pour le problème de thermique. ■

L'équation (2.4) implique que les équations (2.2) et (2.3) sont indépendantes et que, par conséquent, la température doit satisfaire la seule équation,

$$(2.8) \quad \rho C \partial \theta / \partial t - (\tilde{K}_{ij} \theta_{,j})_{,i} = \rho \omega.$$

Si on fait l'hypothèse — non indispensable, mais que nous maintiendrons dans la suite pour alléger les démonstrations — que le milieu est homogène isotrope, on peut diviser (2.8) par  $\rho C$ , désormais constant, pour obtenir,

$$(2.9) \quad \partial \theta / \partial t - k \Delta C = g$$

où l'on a posé

$$k = \tilde{k} / \rho C, \quad g = \omega / C,$$

où  $k$  est une constante positive et  $\Delta = \partial^2 / \partial x_i \partial x_i$ . ■

### 2.1.2. Equations de la mécanique des fluides en milieu poreux

L'équation (2.9) gouverne aussi les phénomènes d'écoulements des fluides visqueux en milieu poreux (A. Houpeurt [1], Muskat [1], [2]). C'est pourquoi on l'appelle aussi *équation de la diffusion*.

Elle est alors obtenue à partir de la loi de conservation de la masse, qui se traduit, en milieu poreux, par

$$\varphi \partial \rho / \partial t + \text{Div}(\rho v) = g$$

où le scalaire  $\varphi$  représente la *porosité* du milieu.

Le champ de vitesse  $v$  est, en milieu poreux, lié au champ de pression  $u(x, t)$  par une relation connue sous le nom de *loi de Darcy*

$$v = -K \text{ grad } u$$

où  $K$  représente la *perméabilité* du milieu. Deux cas sont alors à considérer :

α) *Le fluide est peu compressible (liquide)*

La relation entre densité et pression est donnée par

$$\rho = \rho_0[1 + c(u - u_0)]$$

où  $c$  est le coefficient de compressibilité, scalaire petit devant l'unité ; dans l'équation de conservation de la masse,  $\rho v$  est peu différent de  $\rho_0 v$  et par conséquent la pression  $u$  satisfait sensiblement à l'équation

$$c\varphi \partial u / \partial t - \text{Div} (K \text{ grad } u) = g ,$$

qui coïncide avec l'équation (2.9) lorsque le milieu poreux est homogène isotrope.

β) *Le fluide est un gaz parfait en écoulement isotherme*

La relation entre pression et densité est alors (loi de Mariotte),

$$u = C\rho$$

où  $C$  est une constante. La loi de conservation de la masse fournit ensuite

$$\varphi \partial \rho / \partial t - \text{Div} (C\rho K \text{ grad } \rho) = g ,$$

ou bien, en fonction de la pression  $u$

$$\varphi \partial u / \partial t - \text{Div} (Ku \text{ grad } u) = Cg$$

qui est *non linéaire*. ■

### 2.1.3. Equations de l'électricité

Les équations générales de l'électromagnétisme seront rappelées au Chapitre 7. Nous signalons simplement ici que dans un milieu conducteur de l'électricité, en l'absence de charges électriques libres, l'équation de conservation de la charge s'écrit

$$\text{Div } J = g$$

où  $J$  représente le vecteur *courant électrique*.

Par ailleurs

$$J = \sigma E$$

où  $E$  est le vecteur *champ électrique* et  $\sigma$  la conductivité du milieu. Dans le cas stationnaire, le champ électrique dérive d'un potentiel électrique  $u$ , soit

$$E = - \text{grad } u$$

de sorte que la conservation de la charge s'écrit finalement

$$- \text{Div} (\rho \text{ grad } u) = q ,$$

ce qui, pour un *phénomène stationnaire*, n'est autre qu'une équation du type (2.9). ■

## 2.2. Parois semi-perméables

*Remarque 2.1 (préliminaire)*

Dans les développements qui suivent, l'équation (2.9) sera écrite avec  $k = 1$ , ce qui revient à la normaliser en changeant l'échelle des temps. De plus, nous noterons toujours  $u$  la fonction inconnue qui représente suivant les cas une température, une pression ou un potentiel électrique, et satisfait donc à l'équation

$$(2.10) \quad \partial u / \partial t - \Delta u = q .$$

Dans les problèmes classiques avec l'équation (2.10) les données aux limites sont  $u$ , ou bien  $\partial u / \partial n$  (dérivée normale de  $u$  sur la frontière) qui représente un flux de chaleur, de matière (fluide) ou d'électricité. ■

Nous allons introduire ici de nouveaux types de problèmes tout aussi naturels que les précédents mais faisant intervenir des *inégalités* dans les conditions (aux limites ou autres) et conduisant par conséquent à des *inéquations*.

Le langage employé pour les commentaires à caractère physique est emprunté à la mécanique des fluides en milieu poreux, car il nous a paru le plus intuitif. Il peut naturellement être transposé d'un domaine dans un autre, grâce au tableau de correspondances ci-dessous.

<i>Thermique</i>	<i>Mécanique des fluides</i>	<i>Electricité</i>
température	pression	potentiel
chaleur	fluide	électricité
flux de chaleur	débit de fluide	flux d'électricité
milieu conducteur	milieu poreux	milieu conducteur
semi-perméable	semi-perméable	semi-conducteur



Rappelons qu'en électricité la correspondance ne s'applique que s'il s'agit de solutions ou de phénomènes *stationnaires*.

Nous noterons toujours  $\Omega$  l'ouvert de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \leq 3$ ) pris en considération ; sa frontière  $\partial\Omega = \Gamma$  est régulière, de normale extérieure unitaire  $n$ . La région  $\Omega$  est occupée par un milieu poreux et est le siège d'un champ de pression d'un fluide visqueux peu compressible (cf. n° 2.1.2,  $\alpha$ ).

### 2.2.1. Paroi d'épaisseur négligeable

Nous supposons que la frontière  $\Gamma$  est constituée d'une membrane d'épaisseur négligeable, semi-perméable, i. e. qui laisse librement passer le fluide qui entre dans  $\Omega$ , mais interdit au contraire toute sortie de fluide.

Appliquons alors sur la frontière  $\Gamma$  à l'extérieur de  $\Omega$  une pression fluide donnée  $h(x)$ , ( $x \in \Gamma$ ). Deux situations sont alors possibles suivant les points  $x$  de la frontière :

$$i) \quad h(x) < u(x, t) :$$

la pression à l'extérieur  $h(x)$  est inférieure à la pression à l'intérieur  $u(x, t)$  au même point  $x$  de la frontière. Le fluide a donc tendance à sortir de  $\Omega$ , mais la paroi semi-perméable l'en empêche et par conséquent le débit à travers la paroi est nul en ce point, soit  $q \cdot n = 0$  d'où, puisque  $q = -k \text{ grad } u$ ,

$$\partial u / \partial n = 0 .$$

$$ii) \quad h(x) \geq u(x, t) :$$

la pression  $h(x)$  à l'extérieur est supérieure ou égale à la pression  $u(x)$  au même point  $x$  de la frontière ; le fluide a donc tendance à entrer dans  $\Omega$ , ce que la paroi autorise librement d'où

$$q \cdot n \leq 0 .$$

Mais  $q \cdot n = -\tilde{k} \partial u / \partial n$  doit être fini, ceci impose que  $u(x)$  soit continu sur la normale  $n$  au voisinage de  $x$ , donc, puisque la paroi est d'épaisseur négligeable que  $h(x) = u(x, t)$ . Les propriétés de la paroi *interdisent* donc que la pression  $u(x, t)$  en un point de la frontière, soit strictement inférieure à la pression  $h(x)$  à l'extérieur.

En résumé, le problème posé : « Paroi semi-perméable », est le suivant :

Trouver  $u(x, t)$  qui satisfait à (2.10) dans  $\Omega$ , aux conditions suivantes sur  $(\Gamma)$ ,

$$(2.11) \quad \begin{cases} h(x) < u(x, t) \Rightarrow \partial u / \partial n = 0 \\ h(x) = u(x, t) \Rightarrow \partial u / \partial n \geq 0 , \end{cases}$$

et à la condition initiale

$$u(x, 0) = u_0(x) . \quad \blacksquare$$

*Remarque 2.2*

On peut se demander si de telles parois existent dans la réalité :

- i) une soupape nous paraît être une réalisation approximative locale d'une telle situation (cf. variante n° 1 ci-après) ;
- ii) on peut imaginer des dispositifs physiques capables d'approcher le phénomène décrit ci-dessus. Cela nous amène à formuler des variantes du problème précédent.

**2.2.2. Paroi semi-perméable d'épaisseur finie**

Comme dans le cas précédent, la paroi qui laisse seulement entrer le fluide, est soumise à une pression extérieure fluide  $h(x)$ . Deux situations sont possibles :

- i)  $h(x) < u(x, t)$  :

le fluide extérieur à  $\Omega$  a tendance à sortir de  $\Omega$  mais la paroi semi-perméable l'en empêche, d'où débit nul en un tel point de  $\Gamma$ , soit

$$\partial u / \partial n = 0 .$$

- ii)  $h(x) \geq u(x, t)$  :

le fluide a tendance à entrer dans  $\Omega$ , à travers la paroi d'épaisseur finie. Il est alors raisonnable d'admettre que le débit à travers cette paroi est proportionnel à la différence de pression, soit

$$- \partial u / \partial n = k(u - h)$$

où  $k$ , scalaire positif, est une mesure de la conductivité de la paroi.

En résumé, la pression  $u$  dans un tel réservoir satisfait à (2.10), la condition initiale et aux conditions à la frontière,

$$(2.12) \quad \begin{cases} u > h \Rightarrow \partial u / \partial n = 0 \\ u \leq h \Rightarrow \partial u / \partial n = -k(u - h) . \quad \blacksquare \end{cases}$$

*Remarque 2.3*

Si  $k$ , conductivité de la paroi, est nulle, le fluide ne peut ni entrer ni sortir et la pression  $u$  est solution du classique problème de Neuman, stationnaire ou instationnaire suivant les cas. ■

*Remarque 2.4*

Si la conductivité  $k$  tend vers  $+\infty$ , les conditions (2.12) deviennent à la limite, les conditions (2.11). Nous montrerons effectivement <sup>(3)</sup> que, si  $u_k$  est la solution

<sup>(3)</sup> Cf. n° 5.2.

correspondant à la conductivité  $k$ , alors  $u_k$  tend vers  $u$  en un certain sens lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ ;  $u$  désigne ici la solution du problème : « paroi semi-perméable mince ». ■

Signalons de plus deux variantes naturelles des problèmes précédents.

*Variante n° 1.* La paroi semi-perméable ne constitue pas la totalité de la frontière  $\Gamma$  mais seulement une partie  $\Gamma_1$  non vide. Sur  $\Gamma - \Gamma_1$  il règne une condition classique : soit pression donnée, soit débit donné. ■

*Variante n° 2.* La paroi semi-perméable est « retournée », c'est-à-dire qu'elle laisse seulement sortir le fluide. Les conditions aux points de cette paroi deviennent alors :

i) si la paroi est mince :

$$(2.11bis) \quad \left| \begin{array}{l} u < h \Rightarrow \partial u / \partial n = 0 \\ u = h \Rightarrow \partial u / \partial n \leq 0 ; \end{array} \right.$$

ii) si la paroi est d'épaisseur finie :

$$(2.12bis) \quad \left| \begin{array}{l} u < h \Rightarrow \partial u / \partial n = 0 \\ u \geq h \Rightarrow -\partial u / \partial n = k(u - h) . \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

### 2.2.3. Cloison semi-perméable à l'intérieur de $\Omega$

Le réservoir  $\Omega$  possède une frontière  $\Gamma$  à une pression imposée  $h$  (condition classique). De plus, il existe à l'intérieur de  $\Omega$  une cloison semi-perméable, variété à deux dimensions  $\Sigma$ , qui partage  $\Omega$ , au moins au voisinage de  $\Sigma$ , en deux régions désignées par 1 et 2 (Fig. n° 1). La normale unitaire à  $\Sigma$  est désignée par  $n$  et est dirigée vers la région 2. En désignant par  $u_1$  et  $u_2$  la pression sur  $\Sigma$ , du côté de la région 1 et 2 respectivement, et en supposant que la cloison ne se laisse traverser par le fluide que dans le sens 1 vers 2, les conditions sur  $\Sigma$  sont :

i) si la paroi est mince :

$$(2.11ter) \quad \left| \begin{array}{l} u_1 < u_2, \quad \partial u / \partial n = 0 \\ u_1 = u_2, \quad \partial u / \partial n \leq 0 ; \end{array} \right.$$

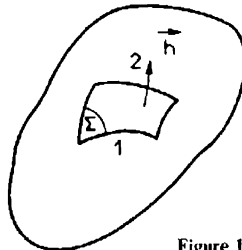


Figure 1.

ii) si la paroi est d'épaisseur finie :

$$(2.12ter) \quad \left| \begin{array}{l} u_1 < u_2 \Rightarrow \partial u / \partial n = 0 \\ u_1 \geq u_2 \Rightarrow -\partial u / \partial n = k(u_1 - u_2) . \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

#### 2.2.4. Injection volumique à travers une cloison semi-perméable

Le réservoir  $\Omega$  est soumis à sa frontière à des conditions classiques, pression donnée par exemple. De plus, il est alimenté par un apport volumique de fluide  $g(x, t)$  imposé et par un apport volumique de fluide  $\tilde{g}(x, t)$  (à travers une paroi semi-perméable, ou plus généralement réglé par un servo-mécanisme) obéissant à une des lois suivantes,  $h(x)$  étant un champ de pressions données dans  $\Omega$ ,

$$(2.13) \quad \left| \begin{array}{l} u > h \Rightarrow \tilde{g} = 0 \\ u = h \Rightarrow \tilde{g} \geq 0 \end{array} \right.$$

ou bien

$$(2.14) \quad \left| \begin{array}{l} u > h \Rightarrow \tilde{g} = 0 \\ u \leq h \Rightarrow \tilde{g} = k(h - u) . \end{array} \right.$$

La pression  $u$  satisfait naturellement dans  $\Omega$  à l'équation

$$(2.15) \quad \partial u / \partial t - \Delta u = g + \tilde{g} . \quad \blacksquare$$

##### Remarque 2.5

Les problèmes évoqués dans ce n° 2.2 sont essentiellement non stationnaires. Néanmoins, ils peuvent, en abandonnant la condition initiale, posséder dans certains cas des solutions stationnaires. La recherche de ces dernières est intéressante du point de vue physique, car elles correspondent à des positions d'équilibre thermique global.

On remarque, par un raisonnement physique, que ces solutions stationnaires n'existent pas toujours, et si elles existent, elles ne sont pas nécessairement uniques. En effet, considérons le problème stationnaire : trouver  $u(x)$  telle que

$$\left. \begin{array}{l} -\Delta u = g \quad \text{dans } \Omega , \\ u > h \Rightarrow \partial u / \partial n = 0 \\ u = h \Rightarrow \partial u / \partial n \geq 0 \end{array} \right\} \text{sur } \Gamma .$$

Ici la paroi semi-perméable n'autorise que des entrées de chaleur, par conséquent :

- i) si  $\int_{\Omega} g \, dx > 0$ , c'est-à-dire s'il y a globalement un gain volumique de chaleur, alors la température doit strictement augmenter en certains points, donc pas de solution ;
- ii) si  $\int_{\Omega} g \, dx = 0$  : il peut éventuellement y avoir une solution  $u$  ; cette dernière satisfera aussi  $\partial u / \partial n = 0$  presque partout sur  $\Gamma$ , donc  $u + C$  sera aussi solution  $\forall C \geq 0$  ;

iii) si  $\int_{\Omega} g \, dx < 0$ , on peut avoir une solution  $u$ . Elle correspondra à un bilan thermique nul, soit

$$\int_{\Omega} g \, dx + \int_{\Gamma} (\partial u / \partial n) \, d\Gamma = 0.$$

### 2.3. Climatisation

Le langage employé ici est emprunté aux phénomènes de thermique. Le milieu continu étudié occupe une région ouverte  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \leq 3$ ) de frontière  $\Gamma$ .

Nous distinguerons deux types de climatisation :

- Climatisation par la frontière, gouvernée par la température à la frontière (n° 2.3.1) ;
- Climatisation par l'intérieur, gouverné par la température à l'intérieur (n° 2.3.2).

#### 2.3.1. Climatisation par la frontière, gouvernée par la température à la frontière

Nous donnons deux températures de référence  $h_1(x)$  et  $h_2(x)$ , pour  $x \in \Gamma$ ,  $h_1(x) \leq h_2(x)$ , et nous souhaitons que la température  $u(x)$  à la frontière s'écarte le moins possible de l'intervalle  $(h_1(x), h_2(x))$ . A cet effet, nous disposons de « climatiseurs », c'est-à-dire de dispositifs susceptibles d'injecter par la frontière un flux de chaleur (au sens algébrique) approprié. La puissance de ces dispositifs étant limitée, le flux de chaleur injecté, qui peut se mesurer par  $-\partial u / \partial n$ , reste compris dans l'intervalle fermé  $[g_1, g_2]$  avec  $0 \in [g_1, g_2]$ .

Nous réglons ces climatiseurs de façon que :

- i) si  $u(x, t) \in [h_1(x), h_2(x)]$ , c'est-à-dire si la température est dans la « fourchette » désirée, il n'y a pas de correction à effectuer et par conséquent, nous imposons

$$(2.16) \quad \partial u / \partial n = 0 ;$$

- ii) si  $u(x, t) \notin [h_1(x), h_2(x)]$ , nous injectons une quantité de chaleur proportionnelle à l'écart entre  $u(x, t)$  et l'intervalle  $(h_1, h_2)$ , si c'est possible, sous la forme

$$(2.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(x, t) > h_2(x) \Rightarrow -\partial u / \partial n = +k_2(u - h_2) \\ \quad \quad \quad \text{si } +k_2(u - h_2) \leq g_2 \\ \quad \quad \quad \text{et } -\partial u / \partial n = g_2 \quad \text{si } +k_2(u - h_2) > g_2, \\ u(x, t) < h_1(x) \Rightarrow -\partial u / \partial n = +k_1(u - h_1) \\ \quad \quad \quad \text{si } +k_1(u - h_1) \geq g_1 \\ \quad \quad \quad \text{et } -\partial u / \partial n = g_1 \quad \text{si } k_1(u - h_1) < g_1, \\ (k_1 \text{ et } k_2 \text{ sont des scalaires positifs}). \end{array} \right.$$

Ces conditions (2.16), (2.17) peuvent être énoncées plus simplement en introduisant la fonction  $\Phi$  suivante

$$(2.18) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Phi(\lambda) = g_1 & \text{si } \lambda \leq h_1 + g_1/k_1 \\ = k_1(\lambda - h_1) & \text{si } h_1 + g_1/h_1 < \lambda \leq h_1 \\ = 0 & \text{si } h_1 \leq \lambda \leq h_2 \\ = k_2(\lambda - h_2) & \text{si } h_2 < \lambda \leq h_2 + g_2/k_2 \\ = g_2 & \text{si } \lambda \geq h_2 + g_2/k_2 \end{array} \right.$$

dont le graphe est indiqué sur la figure n° 2.

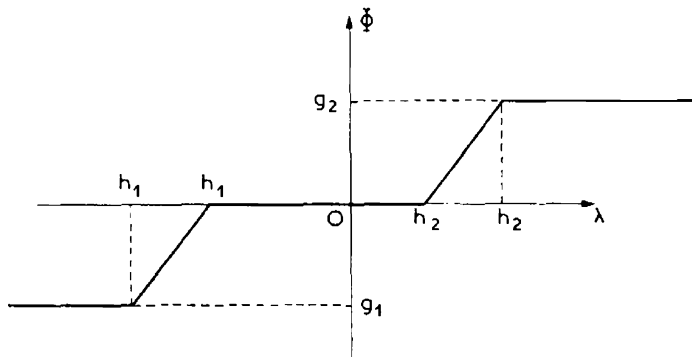


Figure 2.

Les conditions (2.16), (2.17) sont alors équivalentes à

$$(2.19) \quad -\partial u / \partial n = \Phi(u).$$

En résumé, la solution  $u$  du problème de climatisation type 1 doit satisfaire (2.10) dans  $\Omega$ , (2.19) sur  $\Gamma$  et la condition initiale

$$(2.20) \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

Ce problème possède divers *cas particuliers* et *cas limites* intéressants :

$\alpha$ )  $h_1 = h_2$ . La climatisation s'effectue avec une seule température de référence.

$\beta$ )  $h_1 = h_2$ ,  $k_1 = k_2$ ,  $g_2 = +\infty$ ,  $g_1 = 0$ . On retrouve les conditions d'un problème de paroi semi-perméable d'épaisseur finie.

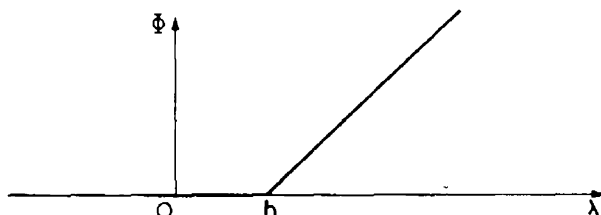


Figure 3.

Le graphe de la fonction  $\Phi$  correspondante est indiqué sur la figure n° 3.

- $\gamma$ )  $h_1 = h_2$ ,  $k_1 = k_2 = +\infty$ ,  $g_1 = 0$ ,  $g_2 = +\infty$ . On retrouve les conditions d'un problème de paroi semi-perméable mince. Le graphe de la fonction  $\Phi$  correspondante est indiqué sur la figure n° 4. On remarque que  $\Phi(u)$  est, dans ce cas, une **fonction multivoque**.

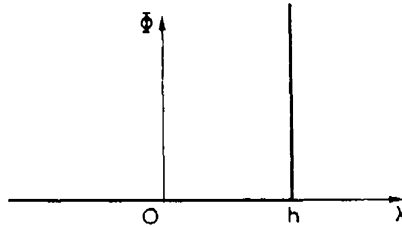


Figure 4.

- $\delta$ )  $h_1 < h_2$ ,  $k_1 = k_2 = +\infty$ ,  $g_2 = -g_1 = +\infty$ . La climatisation est obtenue de façon parfaite puisqu'alors  $u$  reste dans l'intervalle  $[h_1, h_2]$ . Le graphe de la fonction  $\Phi$  est indiqué figure n° 5.

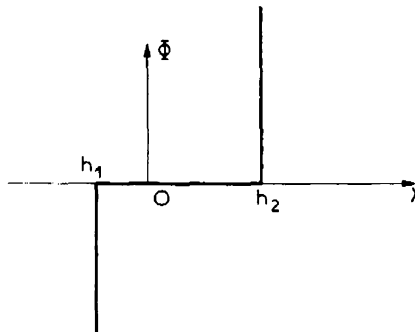


Figure 5.

Ici encore la fonction  $\Phi$  est multivoque.

- $\epsilon$ )  $h_1 = h_2$ ,  $k_1 = k_2 = +\infty$ ,  $g_2 = -g_1 = +\infty$ . La température  $u$  est donnée à la frontière. C'est le problème de Dirichlet. ■

#### Remarque 2.6

*Généralisation.* Le problème précédent peut être généralisé en remplaçant (2.18) par (2.18bis)

$$(2.18bis) \quad -\partial u / \partial n = \Phi(u)$$

où la fonction  $\Phi$  est une fonction continue croissante de  $u$ , ou plus généralement encore, où  $\Phi$  est une fonction multivoque, croissante, de graphe maximal (c'est-à-dire que le graphe est une courbe continue dans  $\mathbb{R}^2$ ). ■

### 2.3.2. Climatisation par l'intérieur, gouvernée par la température à l'intérieur

Nous donnons deux températures  $h_1(x)$  et  $h_2(x)$ , pour  $x \in \Omega$ ,  $h_1(x) \leq h_2(x)$ , et nous souhaitons que la température  $u(x)$ ,  $x \in \Omega$ , s'écarte le moins possible de l'intervalle  $(h_1, h_2)$ . A cet effet, nous disposons de sources volumiques de chaleur (au sens algébrique). Ces dispositifs ont une puissance limitée, ce qui limite par conséquent le flux de chaleur  $-\tilde{q}$ ; nous supposons donc que ce dernier reste dans l'intervalle fermé  $[g_1, g_2]$ , avec  $0 \in [g_1, g_2]$ .

L'injection de chaleur est réglée de la façon suivante :

i) si à l'instant  $t$ ,  $u(x, t) \in [h_1(x), h_2(x)]$ , c'est-à-dire si la température est dans l'intervalle choisi, il n'y a pas lieu d'effectuer une correction, d'où

$$(2.21) \quad \tilde{q} = 0 ;$$

ii) si  $u(x, t) \notin [h_1(x), h_2(x)]$ , nous injectons une quantité de chaleur proportionnelle à l'écart entre  $u(x)$  et l'intervalle  $[h_1(x), h_2(x)]$ , si c'est possible. D'où

$$(2.22) \quad \left| \begin{array}{l} u(x, t) > h_2(x) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\tilde{q} = k_2(u - h_2) \\ \quad \text{si } k_2(u - h_2) \leq g_2, \\ -\tilde{q} = g_2 \quad \text{si } k_2(u - h_2) > g_2, \end{array} \right. \\ \\ u(x, t) < h_1(x) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\tilde{q} = k_1(u - h_1) \\ \quad \text{si } k_1(u - h_1) \geq g_1, \\ -\tilde{q} = g_1 \quad \text{si } k_1(u - h_1) < g_1. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On peut résumer (2.21) et (2.22) en

$$(2.23) \quad -\tilde{q} = \Phi(u)$$

où  $\Phi(u)$  est la fonction définie précédemment par (2.18).

La fonction  $u$  (température), satisfait donc à

$$(2.24) \quad \partial u / \partial t - \Delta u = g - \Phi(u) \quad \text{dans} \quad \Omega \times ]0, T[ ,$$

$$(2.25) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{dans} \quad \Omega$$

et une condition aux limites classique sur la frontière  $\Gamma$  comme par exemple

$$(2.26) \quad u(x, t) = \theta(x, t) \quad \text{pour} \quad x \in \Gamma$$

où  $\theta$  est une température donnée sur  $\Gamma$ . ■

#### Remarque 2.7

*Généralisation.* Comme au paragraphe précédent, on peut envisager des cas particuliers et des cas limites où la fonction  $\Phi(u)$  est multivoque, de graphe croissant et maximal. ■



*Remarque 2.8*

D'autres types de climatisation peuvent être envisagés, faisant intervenir des températures moyennes et des fonctions « *prix de revient* ». Ils conduisent à des problèmes de *contrôle optimal*.

*Exemple*

On donne l'intervalle de température  $[\theta_1(t), \theta_2(t)]$  avec  $\forall t, \theta_1(t) < \theta_2(t)$ ; on veut maintenir la température moyenne  $\bar{u}(t)$  dans l'ouvert  $\Omega$  dans l'intervalle  $[\theta_1, \theta_2]$ , à chaque instant. Pour cela, on dispose de flux de chaleur réglables à travers  $\partial\Omega = \Gamma$ .

On cherche comment doivent être prescrits ces flux (algébriques) pour obtenir le résultat désiré aux moindres frais. On peut supposer que le coût est proportionnel à l'intégrale d'une fonction croissante du flux imposé.

Les équations et conditions sont :

$$(2.27) \quad \partial u / \partial t - \Delta u = g ,$$

( $g$  est une fonction de  $x$  et  $t$  donnée).

On pose

$$(2.28) \quad \bar{u}(t) = (\text{Mes } \Omega)^{-1} \int_{\Omega} u(x, t) \, dx ,$$

et on impose

$$(2.29) \quad \bar{u}(t) \in [\theta_1(t), \theta_2(t)] .$$

On cherche alors  $\varphi(x, t)$  sur  $\Gamma$  qui permette de réaliser (2.29), sachant que

$$(2.30) \quad - \partial u / \partial n = \varphi \quad \text{p.p. sur } \Gamma, \quad \forall t ,$$

et en minimisant à chaque instant une fonctionnelle donnée  $I(t, \varphi(t))$  de la forme

$$(2.31) \quad I(t, \varphi(t)) = \int_{\Gamma} F(t, \varphi(x, t)) \, d\Gamma$$

où  $\lambda \rightarrow F(t, \lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , est une fonction donnée. Des choix possibles de fonctions  $F$  sont :

- i)  $F(t, \lambda) = |\lambda|$  .
- ii)  $F(t, \lambda) = \lambda^2$  .
- iii)  $F(t, \lambda) = \lambda^+$  .
- iv)  $F(t, \lambda) = \lambda^-$  , etc. ■

### 3. FORMULATIONS VARIATIONNELLES DES PROBLÈMES DE CLIMATISATION ET DE PAROIS SEMI-PERMÉABLES

Nous allons maintenant formuler sous la forme « *d'inéquations variationnelles* » les problèmes rencontrés au n° 2. Les outils d'Analyse Fonctionnelle nécessaires pour encore préciser les formulations auxquelles nous allons aboutir seront donnés au n° 4 ci-après, la résolution des problèmes occupant les sections 5 et suivantes.

## 3.1. Notations

Si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions à valeurs réelles définies dans  $\Omega$ , on pose, chaque fois que cela a un sens <sup>(4)</sup> :

$$(3.1) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} u_i v_i \, dx,$$

$$(3.2) \quad (u, v) = \int_{\Omega} uv \, dx,$$

et pour des fonctions  $\varphi, \psi$  définies sur  $\Gamma$

$$(3.3) \quad (\varphi, \psi) = \int_{\Gamma} \varphi \psi \, d\Gamma.$$

On a à travailler avec des fonctions de  $x \in \Omega$  et de  $t \in ]0, T[$ . On introduit :

$$(3.4) \quad Q = \Omega \times ]0, T[, \quad \Sigma = \Gamma \times ]0, T[.$$

Si  $u$  est une fonction (à valeurs réelles) définie dans  $Q$ , on pose :

$$(3.5) \quad \begin{cases} u(t) = u(0, t) = \text{fonction } x \rightarrow u(x, t), \\ u'(t) = \partial u(t)/\partial t = \text{fonction } x \rightarrow \partial u(x, t)/\partial t, \text{ etc. } \blacksquare \end{cases}$$

*Fonctions  $\psi$* 

On va utiliser des fonctions  $\lambda \rightarrow \psi(\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ayant les propriétés suivantes :

$$(3.6) \quad \begin{cases} \text{la fonction } \lambda \rightarrow \psi(\lambda) \text{ est convexe, semi-continue inférieurement (s.c.i.),} \\ \text{à valeurs dans } ]-\infty, +\infty] \text{ } ^{(5)}, \psi \text{ n'étant pas identique à } +\infty. \end{cases}$$

On distinguera trois types de fonctions avec les propriétés (3.6) :

$$(3.7) \quad \begin{cases} \text{Fonction } \psi \text{ de type 1 :} \\ \lambda \rightarrow \psi(\lambda) \text{ est une fois continûment différentiable.} \end{cases}$$

*Exemple 3.1 (Fig. 6)*

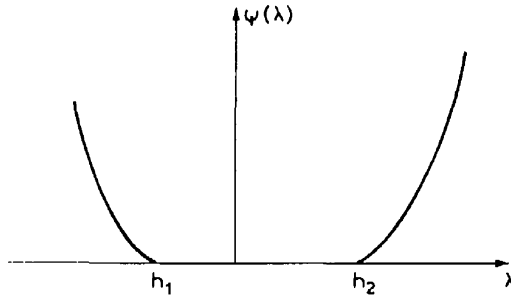


Figure 6.

<sup>(4)</sup> On précise cela au n° 4.

<sup>(5)</sup> Donc  $\psi$  peut prendre la valeur «  $+\infty$  ».

$$\psi(\lambda) = \begin{cases} a_1(\lambda - h_1)^2, & \lambda \leq h_1, \\ 0, & h_1 \leq \lambda \leq h_2, \\ a_2(\lambda - h_2)^2, & \lambda \geq h_2, \end{cases}$$

$$0 < a_1 < a_2.$$

- (3.8)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Fonction } \psi \text{ de type 2 :} \\ \lambda \rightarrow \psi(\lambda) \text{ est non continûment différentiable, partout à valeur finie.} \end{array} \right.$

Exemple 3.2 (Fig. 7)

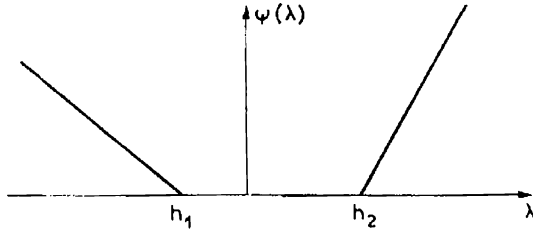


Figure 7.

$$\psi(\lambda) = \begin{cases} g_1(\lambda - h_1), & \lambda \leq h_1, \\ 0, & h_1 \leq \lambda \leq h_2, \\ g_2(\lambda - h_2), & \lambda \geq h_2, \end{cases}$$

$$g_1 < 0 < g_2. \blacksquare$$

- (3.9)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Fonction } \psi \text{ de type 3 :} \\ \lambda \rightarrow \psi(\lambda) \text{ prend la valeur } +\infty. \end{array} \right.$

Exemple 3.3 (Fig. 8)

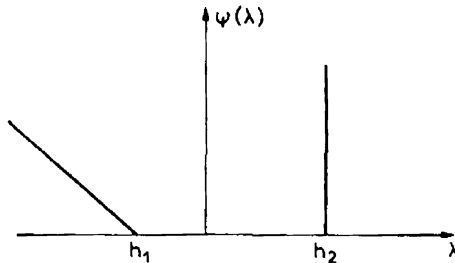


Figure 8.

$$\psi(\lambda) = \begin{cases} g_1(\lambda - h_1), & \lambda \leq h_1, \\ 0, & h_1 \leq \lambda \leq h_2, \\ +\infty, & \lambda > h_2, \end{cases}$$

$$g_1 < 0 < g_2. \blacksquare$$

A la fonction  $\psi$  on associe la fonctionnelle  $\Psi$ . On posera :

$$(3.10) \quad \Psi(v) = \int_{\Gamma} \psi(v(x)) \, d\Gamma$$

ou

$$(3.11) \quad \Psi(v) = \int_{\Omega} \psi(v(x)) \, dx,$$

lorsque cela a un sens <sup>(6)</sup>.

### Remarque 3.1

Notons tout de suite que dans le cas où  $\psi$  est du type 3,  $\Psi$  n'est pas définie « partout » ; par exemple dans le cas de l'Exemple 3.3, la fonctionnelle (3.10) n'est définie que si  $v(x) \leq h_2$  p.p. ■

### Remarque 3.2

On peut aussi considérer une famille «  $\lambda \rightarrow \psi(x; \lambda)$  » de fonctions  $\psi$  dépendant (convenablement) de  $x \in \Gamma$  ou de  $x \in \Omega$  ; on introduit alors

$$(3.12) \quad \Psi(v) = \int_{\Gamma} \psi(x; v(x)) \, d\Gamma,$$

ou

$$(3.13) \quad \Psi(v) = \int_{\Omega} \psi(x; v(x)) \, dx. \quad \blacksquare$$

## 3.2. Inéquations variationnelles

Nous considérons a priori des problèmes d'*inéquations variationnelles*, d'évolution et stationnaires. Nous montrons ensuite comment ces problèmes sont « équivalents » aux problèmes rencontrés au n° 2.

### Inéquations variationnelles d'évolution <sup>(7)</sup>

On cherche une fonction  $t \rightarrow u(t) = u(\cdot, t)$  telle que

$$(3.14) \quad \left| \begin{array}{l} (u'(t), v - u(t)) + a(u(t), v - u(t)) + \Psi(v) - \Psi(u(t)) \geq (f(t), v - u(t)) \\ \forall v, \quad \Psi \text{ donnée par (3.10)}, \end{array} \right.$$

où la fonction  $t \rightarrow f(t) = f(\cdot, t)$  est donnée, avec

$$(3.15) \quad u(0) = u_0 \text{ donné (i.e. } u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega).$$

### Remarque 3.3

Si  $\Psi$  est donnée par (3.11), on ajoute à  $u(t)$  et  $v$  des conditions aux limites, par exemple

$$(3.16) \quad u(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad v = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \quad \blacksquare$$

<sup>(6)</sup> On précisera aux nos 4 et 5.

<sup>(7)</sup> Il s'agit là d'inéquations « paraboliques » ; nous rencontrerons des problèmes analogues de nature « hyperbolique » dans les chapitres suivants.

*Inéquations variationnelles stationnaires* (de nature « elliptique »)

Il suffit de supprimer la dépendance en  $t$  dans (3.14). On cherche donc une fonction  $u$  définie dans  $\Omega$  telle que

$$(3.17) \quad \left| \begin{array}{l} a(u, v - u) + \Psi(v) - \Psi(u) \geq (f, v - u) \quad \forall v, \\ \Psi \text{ donnée par (3.10)}, \end{array} \right.$$

à quoi on ajoute (comme à la Remarque 3.3) des conditions aux limites sur  $u$  et  $v$  si  $\Psi$  est donnée par (3.11). ■

**3.3. Exemples. Equivalence avec les problèmes du n° 2**
**3.3.1. Fonction  $\psi$  de type 1 (et  $\Psi$  donnée par (3.10))**

On introduit alors

$$(3.18) \quad \Phi(\lambda) = d\psi(\lambda)/d\lambda.$$

D'après la *convexité* de  $\psi$ , on a :

$$(3.19) \quad \psi(\mu) - \psi(\lambda) - \Phi(\lambda)(\mu - \lambda) \geq 0 \quad \forall \mu.$$

On va vérifier que, *dans ces conditions*, (3.14) *équivaut à l'équation* (variationnelle)

$$(3.20) \quad (u'(t), v) + a(u(t), v) + \int_{\Gamma} \Phi(u(t)) v \, d\Gamma = (f(t), v) \quad \forall v.$$

En effet, prenons d'abord dans (3.14)

$$v = u(t) + \lambda w, \quad w \text{ « quelconque »}, \quad \lambda > 0;$$

il vient, après division par  $\lambda$  :

$$(u'(t), w) + a(u(t), w) + \lambda^{-1} [\Psi(u(t) + \lambda w) - \Psi(u(t))] \geq (f(t), w)$$

et faisant tendre  $\lambda$  vers 0 :

$$(u'(t), w) + a(u(t), w) + \int_{\Gamma} \Phi(u(t)) w \, d\Gamma \geq (f(t), w).$$

Changeant  $w$  en  $-w$ , on a l'égalité, donc (3.20).

*Réciproquement*, si l'on a (3.20) alors

$$(3.21) \quad \left| \begin{array}{l} (u'(t), v - u(t)) + a(u(t), v - u(t)) + \Psi(v) - \Psi(u(t)) \\ = (f(t), v - u(t)) + \Psi(v) - \Psi(u(t)) - \int_{\Gamma} \Phi(u(t)) (v - u(t)) \, d\Gamma. \end{array} \right.$$

Mais d'après (3.19) on a :

$$(3.22) \quad \Psi(v) - \Psi(u(t)) - \int_{\Gamma} \Phi(u(t)) (v - u(t)) \, d\Gamma \geq 0$$

de sorte que (3.21) montre (3.14). ■

*Remarque 3.4*

Si  $\Psi$  est donnée par (3.11), alors (3.14) équivaut à

$$(3.23) \quad (u'(t), v) + a(u(t), v) + \int_{\Omega} \Phi(u(t)) v \, dx = (f(t), v)$$

à quoi on ajoute une condition aux limites, par exemple (3.16). ■

Il reste maintenant à *interpréter* (3.20), ce qui est un exercice d'intégrations par parties. On prend dans (3.20)

$$(3.24) \quad v = \varphi = \text{fonction régulière à support compact dans } \Omega .$$

Alors (3.20) se réduit à

$$(u'(t), \varphi) + a(u(t), \varphi) = (f(t), \varphi)$$

ou

$$\int_{\Omega} (\partial u / \partial t - \Delta u) \varphi \, dx = \int_{\Omega} f(x, t) \varphi(x) \, dx$$

et donc — au sens des distributions sur  $\Omega$  <sup>(8)</sup> —

$$(3.25) \quad \partial u / \partial t - \Delta u = f \quad \text{dans} \quad Q = \Omega \times ]0, T[ .$$

Soit alors  $v$  une fonction « quelconque » ; multiplions les deux membres de (3.25) par  $v = v(x)$  et intégrons par parties sur  $\Omega$  ; soit  $\partial / \partial n$  la dérivée normale à  $\Gamma$  dirigée vers l'extérieur de  $\Omega$ . Alors :

$$(3.26) \quad (u'(t), v) - \int_{\Gamma} \frac{\partial u(t)}{\partial n} v \, d\Gamma + a(u(t), v) = (f(t), v)$$

d'où en comparant à (3.20)

$$(3.27) \quad \int_{\Gamma} (\partial u(t) / \partial n + \Phi(u(t))) v \, d\Gamma = 0 \quad \forall v ,$$

soit

$$(3.28) \quad \partial u(t) / \partial n + \Phi(u(t)) = 0 \quad \text{sur } \Gamma .$$

*En résumé :*

(3.29) *pour une fonction  $\psi$  de type 1 (et  $\Psi$  donné par (3.10)), le problème (3.14), (3.15) équivaut <sup>(9)</sup> à la recherche de  $u = u(x, t)$ , solution de (3.25), avec la condition aux limites (3.28) ( $\Phi = d\psi/d\lambda$ ) et la condition initiale (3.15). ■*

<sup>(8)</sup> L. Schwartz [1] [2].

<sup>(9)</sup> Le fait que (3.28) (3.25) entraînent (3.14) (3.15) est immédiat.

## Remarque 3.5

Dans le cas (3.11), (3.16), le problème équivaut à la recherche de  $u$  solution de

$$(3.30) \quad \partial u / \partial t - \Delta u + \Phi(u) = f \quad \text{dans } Q,$$

$$(3.31) \quad u = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

et la condition initiale (3.15). ■

## Remarque 3.6

Sauf dans le cas où

$$\Phi(\lambda) = k\lambda, \quad k > 0,$$

le problème est *non linéaire*. ■

## Exemple 3.4

Soit  $\Phi$  donnée par (2.18); définissons  $\psi$  par

$$(3.32) \quad \psi(\lambda) = \int_0^\lambda \Phi(\mu) d\mu \quad (\text{cf. graphe sur Fig. 9});$$

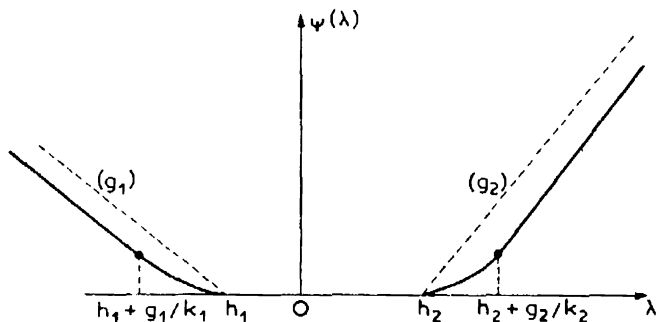


Figure 9.

soit

$$(3.33) \quad \psi(\lambda) = \begin{cases} g_1(\lambda - h_1) - g_1^2/2k_1, & \lambda \leq h_1 + g_1/k_1, \\ \frac{1}{2}k_1(\lambda - h_1)^2, & h_1 + g_1/k_1 \leq \lambda \leq h_1, \\ 0, & h_1 \leq \lambda \leq h_2, \\ \frac{1}{2}k_2(\lambda - h_2)^2, & h_2 \leq \lambda \leq h_2 + g_2/k_2. \end{cases}$$

La fonction  $\psi$  ainsi définie satisfait à (3.6), type 1. On peut donc appliquer (3.29) et l'on voit que le problème (3.14), (3.15) équivaut au problème de la climatisation par la frontière, n° 2.3.1.

*Remarque 3.7*

Dans le cas (3.11), (3.16) le problème équivaut à celui de la climatisation par l'intérieur, n° 2.3.2. ■

*Exemple 3.5*

Soit  $\psi$  donnée par (Fig. 10)

$$(3.34) \quad \psi(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2} k(\lambda - h)^2, & \lambda \leq h, \\ 0, & \lambda \geq h. \end{cases}$$

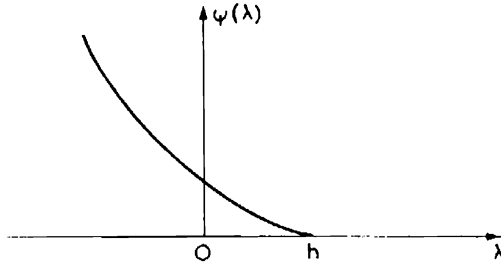


Figure 10.

La fonction  $\psi$  satisfait à (3.6), type 1 ; évidemment on a :

$$(3.35) \quad \Phi(\lambda) = \begin{cases} k(\lambda - h), & \lambda \leq h, \\ 0, & \lambda \geq h. \end{cases}$$

Si l'on prend  $\Psi$  par (3.10), on obtient (3.28), soit :

$$(3.36) \quad \begin{cases} \partial u(t)/\partial n = 0 & \text{si } u(t) > h, \\ \partial u(t)/\partial n + k(u(t) - h) = 0 & \text{si } u(t) \leq h ; \end{cases}$$

c'est le problème de la paroi semi-perméable épaisse ; cf. n° 2.2.2. ■

**3.3.2. Fonction  $\psi$  de type 2**

On désigne encore par  $\Phi(\lambda)$  la « dérivée » de  $\psi(\lambda)$ , mais cette « dérivée » peut être multivoque. On désigne en général par « sous-différentielle » cette fonction multivoque ; en les points  $\lambda$  où  $\psi$  n'est pas dérivable, on désigne par  $\Phi(\lambda)$  le contingent de  $\psi$  au point  $\lambda$ , i.e.

$$(3.37) \quad \Phi(\lambda) = \text{ensemble des limites } \frac{\psi(\mu) - \psi(\lambda)}{\mu - \lambda}, \quad \mu \rightarrow \lambda.$$

On a (comparer à (3.19)) :

$$(3.38) \quad \chi \in \Phi(\lambda) \Leftrightarrow \psi(\mu) - \psi(\lambda) - \chi(\mu - \lambda) \geq 0, \quad \forall \mu.$$



Le raisonnement conduisant à (3.28) est encore valable, pourvu que l'on remplace le nombre  $\Phi(u(x, t))$  par l'ensemble  $\Phi(u(x, t))$  (si  $u(x, t) = \psi$  point où  $\psi$  n'est pas différentiable); on doit donc énoncer

$$(3.39) \quad - \partial u(t)/\partial n \in \Phi(u(t))$$

(naturellement (3.39) équivaut à (3.28) en les points où  $\psi$  est différentiable). Donc :

$$(3.40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour une fonction } \psi \text{ de type 2 (et } \Psi \text{ donnée par (3.10)), le problème (3.14),} \\ \text{(3.15) équivaut à la recherche de } u = u(x, t) \text{ solution de (3.25) avec la} \\ \text{« condition aux limites » (3.39) (} \Phi = \text{ sous-différentielle ou contingent} \\ \text{de } \psi \text{) et la condition initiale (3.15). } \blacksquare \end{array} \right.$$

*Remarque 3.8*

Dans le cas (3.11), (3.16) le problème équivaut à la recherche de  $u$  solution de

$$(3.41) \quad - (\partial u(x, t)/\partial t) - \Delta u(x, t) - f(x, t) \in \Phi(u(x, t))$$

avec (3.31) et (3.15). ■

*Exemple 3.6*

Prenons  $\psi$  donnée par l'Exemple 3.2 (Fig. 7). Alors

$$(3.42) \quad \Phi(\lambda) = \begin{cases} g_1 & \text{si } \lambda < h_1, \\ [g_1, 0] & \text{si } \lambda = h_1, \\ 0 & \text{si } h_1 < \lambda < h_2, \\ [0, g_2] & \text{si } \lambda = h_2, \\ g_2 & \text{si } \lambda > h_2. \end{cases}$$

La condition aux limites (3.39) s'écrit donc, sur  $\Sigma$  :

$$(3.43) \quad \left\{ \begin{array}{ll} - \partial u(t)/\partial n = g_1 & \text{si } u < h_1, \\ g_1 \leq - \partial u(t)/\partial n \leq 0 & \text{si } u = h_1, \\ \partial u(t)/\partial n = 0 & \text{si } h_1 < u < h_2, \\ 0 \leq - \partial u(t)/\partial n \leq g_2 & \text{si } u = h_2, \\ - \partial u(t)/\partial n = g_2 & \text{si } u > h_2. \blacksquare \end{array} \right.$$

**3.3.3. Fonction  $\psi$  de type 3**

On a déjà signalé (Remarque 3.1) que lorsque  $\psi$  est du type 3, la fonction  $\Psi$  n'est pas définie partout — ou encore prend la valeur  $+\infty$ .

On pose alors la définition suivante <sup>(10)</sup> :

$$(3.44) \quad K \text{ désigne l'ensemble des } v \text{ telles que } \Psi(v) \neq +\infty.$$

<sup>(10)</sup> Encore un peu formelle. On précisera cela lorsqu'on aura choisi les classes fonctionnelles parcourues par  $v$ .

On verra plus loin que  $K$  est un *ensemble convexe fermé* d'un espace fonctionnel convenable. Alors (3.14) équivaut à

$$(3.45) \quad \left| \begin{array}{l} (u'(t), v - u(t)) + \alpha(u(t), v - u(t)) + \Psi(v) - \Psi(u(t)) \geq (f(t), v - u(t)) \\ \forall v \in K, \end{array} \right.$$

$$(3.46) \quad u(t) \in K.$$

Soit  $w$  quelconque dans  $K$ ; prenons dans (3.45)

$$v = u(t) + \theta(w - u(t)), \quad 0 < \theta < 1;$$

il vient :

$$(u'(t), w - u(t)) + \alpha(u(t), w - u(t)) + \theta^{-1}(\Psi(u(t) + \theta(w - u(t))) - \Psi(u(t))) \geq (f(t), w - u(t))$$

d'où en faisant  $\theta \rightarrow 0$  (et en remplaçant  $w$  par  $v$ )

$$(3.47) \quad (u'(t), v - u(t)) + \alpha(u(t), v - u(t)) + (\chi, v - u(t)) \geq (f(t), v - u(t)) \quad \forall v \in K$$

où

$$(3.48) \quad \chi \in \Phi(u(t)),$$

i.e.

$$\chi = \Phi(u(t)) \text{ si } \Psi \text{ est différentiable au « point » } u(t),$$

ou  $\chi \in$  contingent de  $\Psi$  au point  $u(t)$  si  $\Psi$  n'y est pas différentiable; on peut aussi dire que  $\chi$  est l'ensemble des éléments tels que :

$$(3.49) \quad \Psi(v) - \Psi(u(t)) - (\chi, v - u(t)) \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

Réciproquement, si  $u$  satisfait à (3.46), (3.47), (3.48) alors on a (3.45) (conséquence immédiate de (3.49)).

Donc :

$$(3.50) \quad \left| \begin{array}{l} \text{pour une fonction } \psi \text{ de type 3, le problème équivaut à la recherche de} \\ u(t) \in K \text{ (} K \text{ défini en (3.44)) vérifiant (3.47), (3.48), avec la condition} \\ \text{initiale (3.15).} \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

Lorsque  $\Psi$  est donné par (3.10) on peut aller plus loin. On note d'abord que si  $\varphi$  est donnée comme en (3.24) alors

$$(3.51) \quad v = u(t) \pm \varphi \in K$$

de sorte que le choix (3.51) est loisible dans (3.45) et donne

$$(u'(t), \varphi) + a(u(t), \varphi) = (f(t), \varphi)$$

d'où encore l'équation (3.25).

Utilisant alors (3.26) (avec  $v - u(t)$  au lieu de  $v$ ) et comparant à (3.45) on en déduit

$$(3.52) \quad \left| \begin{array}{l} \int_{\Gamma} (\partial u(t)/\partial n + \chi)(v - u(t)) \, d\Gamma \geq 0 \quad \forall v \in K, \\ \chi \in \Phi(u(t)). \end{array} \right.$$

En résumé :

$$(3.53) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Pour une fonction } \psi \text{ de type 3 et } \Psi \text{ donnée par (3.10), le problème équivaut} \\ \text{à la recherche de } u \text{ solution de (3.25), avec} \\ u(t) \in K \quad \forall t, \\ \text{les conditions (3.52) et la condition initiale (3.15). } \blacksquare \end{array} \right.$$

*Exemple 3.7*

Prenons d'abord  $\psi$  donnée par (Fig. 11) :

$$(3.54) \quad \psi(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{sur } [h_1, h_2], \\ +\infty & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

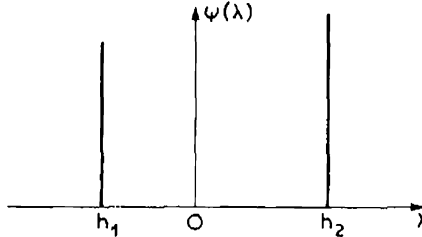


Figure 11.

Alors

$$(3.55) \quad K = \{ v \mid h_1 \leq v \leq h_2 \text{ sur } \Gamma \}$$

et donc les « conditions aux limites » sont, sur  $\Sigma$  :

$$(3.56) \quad \left| \begin{array}{l} h_1 \leq u(x, t) \leq h_2, \\ \int_{\Gamma} \frac{\partial u(t)}{\partial n} (v - u(t)) \geq 0 \quad \forall v \in K, \end{array} \right.$$

(car  $\Phi(u(t)) = 0$  (ou  $\{0\}$ )), ou encore <sup>(11)</sup>

$$(3.57) \quad \begin{cases} u = h_1 & \Rightarrow \partial u(t)/\partial n \geq 0, \\ h_1 < u < h_2 & \Rightarrow \partial u(t)/\partial n = 0, \\ u = h_2 & \Rightarrow \partial u(t)/\partial n \leq 0. \end{cases}$$

Cas particulier

On prend <sup>(12)</sup>

$$(3.58) \quad h_1 = h, \quad h_2 = +\infty \quad (\text{ce qui est loisible})$$

c'est le problème des parois semi-perméables minces (cf. n° 2.2.1). ■

Exemple 3.8

Prenons  $\psi$  comme dans l'Exemple 3.3. On obtient alors :

$$(3.59) \quad K = \{v \mid v \leq h_2 \text{ sur } \Gamma\}$$

et

$$(3.60) \quad \begin{cases} (\partial u(t)/\partial n + \chi)(v - u(t)) \geq 0 & \forall v \in K, \\ \chi \in \Phi(u(t)), \end{cases}$$

d'où

$$(3.61) \quad \begin{cases} u(t) = h_2 & \Rightarrow \partial u(t)/\partial n \leq 0, \\ h_1 < u(t) < h_2 & \Rightarrow \partial u(t)/\partial n = 0, \\ u(t) = h_1 & \Rightarrow \partial u(t)/\partial n + \chi = 0, & \chi \in [g_1, 0], \\ u(t) < h_1 & \Rightarrow \partial u(t)/\partial n + g_1 = 0. \quad \blacksquare \end{cases}$$

### 3.4. Quelques compléments

Si l'on prend  $a(u, v)$  donnée par (au lieu de (3.1))

$$(3.62) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} a_{ij} u_{,j}(x) v_{,i}(x) dx,$$

où

$$(3.63) \quad \begin{cases} a_{ij} \in L^{\infty}(\Omega) \text{ (fonctions mesurables et bornées dans } \Omega), \\ a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \xi_i \xi_i, \quad \alpha > 0, \quad x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

alors on peut considérer — et résoudre, par les méthodes exposées ci-après — les problèmes analogues aux précédents. *L'interprétation est analogue avec les modifications suivantes* : l'opérateur  $\Delta$  est remplacé par l'opérateur  $A$  donné par

$$(3.64) \quad Av = - (a_{ij}(x) v_{,j})_{,i}$$

<sup>(11)</sup> On note que l'inégalité dans (3.56) équivaut à l'inégalité ponctuelle

$$\frac{\partial u(t)}{\partial n} (v - u(t)) \geq 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

<sup>(12)</sup> En fait  $h_1 = h(x)$ ; cf. Remarque 3.2.

et la dérivée normale  $\partial/\partial n$  (dirigée vers l'extérieur de  $\Omega$ ) est remplacée par  $\partial/\partial v_A$  donnée par

$$(3.65) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial v_A} = a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \cos(n, x_i), \\ \cos(n, x_i) = i\text{-ième cosinus directeur de la normale } n \text{ à } \Gamma \text{ dirigée vers l'extérieur de } \Omega. \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

*Remarque 3.9*

On peut — mais nous ne le ferons pas ici — étendre encore la situation (3.62) en prenant :

- i) des formes  $a(t; u, v)$  dépendant du temps (i.e. dans (3.62) les fonctions  $a_{ij}$  dépendent de  $x$  et de  $t$ );
- ii) certaines formes non linéaires en  $u$ . ■

### 3.5. Cas stationnaire

En utilisant les notions introduites au n° 3.3 précédent, l'interprétation de (3.17) est immédiate. On obtient les résultats qui suivent.

#### 3.5.1. La fonction $\Psi$ est de type 1

Si  $\Psi$  est donnée par (3.10), (3.17) équivaut à la recherche de  $u$  solution de

$$(3.66) \quad -\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega$$

avec la condition aux limites

$$(3.67) \quad \partial u / \partial n + \Phi(u) = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Si  $\Psi$  est donnée par (3.11), avec (3.16), alors

$$(3.68) \quad \left| \begin{array}{l} -\Delta u + \Phi(u) = f \quad \text{dans } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

#### 3.5.2. La fonction $\Psi$ est de type 2

Si  $\Psi$  est donnée par (3.10), (3.17) équivaut à (3.66) avec la condition aux limites

$$(3.69) \quad -\partial u / \partial n \in \Phi(u).$$

Dans le cas où  $\Psi$  est donnée par (3.11) avec (3.16), alors

$$(3.70) \quad -(-\Delta u - f) \in \Phi(u), \quad u = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \quad \blacksquare$$

### 3.5.3. La fonction $\Psi$ est de type 3

On définit encore  $K$  par (3.44).

Si  $\Psi$  est donnée par (3.10), (3.17) équivaut à la recherche de  $u$  satisfaisant à

$$(3.71) \quad \begin{cases} u \in K, \\ -\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega, \\ \int_{\Gamma} (\partial u / \partial n + \chi)(v - u) d\Gamma \geq 0 \quad \forall v \in K, \quad \text{où } \chi \in \Phi(u). \end{cases}$$

Si  $\Psi$  est donnée par (3.11), (3.17) équivaut à la recherche de  $u$  satisfaisant à

$$(3.72) \quad \begin{cases} u \in K, \\ a(u, v - u) + (\chi, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K, \quad \chi \in \Phi(u). \end{cases}$$

### 3.5.4. Cas stationnaire et problèmes du calcul des variations

On a le résultat suivant :

Si l'on suppose que  $a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v$  <sup>(13)</sup>, alors la recherche de  $u$  solution de (3.17) équivaut à la recherche de  $u$  réalisant le minimum (s'il existe) de la fonctionnelle

$$(3.73) \quad J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) + \Psi(v) - (f, v),$$

où la borne inférieure est prise sur « toutes » les fonctions  $v$  telles que

$$\Psi(v) < +\infty$$

et à quoi l'on ajoute par exemple «  $v = 0$  sur  $\Gamma$  » si  $\Psi$  est donnée par (3.11).

La vérification de ce résultat est conséquence du résultat général suivant (Lions [2], Chap. 1) :

Soit  $K$  un ensemble convexe fermé d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  et soient  $J_1$  et  $J_2$  deux fonctions de  $K \rightarrow \mathbb{R}$ , continues et convexes, la fonction  $J_1$  étant différentiable, la fonction  $J_2$  étant différentiable ou non. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

$$(3.74) \quad u \in K, \quad J_1(u) + J_2(u) = \inf_{v \in K} [J_1(v) + J_2(v)],$$

$$(3.75) \quad u \in K, \quad (J_1'(u), v - u) + J_2(v) - J_2(u) \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

<sup>(13)</sup> C'est le cas si  $a(u, v)$  est donnée par (3.1), ou par (3.62) si — et seulement si —  $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$ . Noter que le résultat est faux si l'on n'a pas

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v.$$

Avant de vérifier cette équivalence, notons tout de suite que cela entraîne le résultat désiré, en prenant

$$(3.76) \quad \begin{cases} J_1(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v), & J_2(v) = \Psi(v), \\ K = \{v \mid \Psi(v) < \infty\} \quad (1^4). \end{cases}$$

Équivalence de (3.74) et (3.75)

Soit  $u$  vérifiant (3.74); pour  $v$  quelconque dans  $K$  et  $\theta \in ]0, 1[$ , on a alors

$$\begin{aligned} J_1(u) + J_2(u) &\leq J_1(u + \theta(v - u)) + J_2(u + \theta(v - u)) \leq \\ &\leq J_1(u + \theta(v - u)) + (1 - \theta) J_2(u) + \theta J_2(v) \end{aligned}$$

d'où

$$\theta^{-1} [J_1(u + \theta(v - u)) - J_1(u)] + J_2(v) - J_2(u) \geq 0$$

d'où (3.75) en faisant  $\theta \rightarrow 0$ .

Réciproquement si  $u$  satisfait à (3.75), alors

$$(3.77) \quad \begin{aligned} J_1(v) + J_2(v) - J_1(u) - J_2(u) &= \\ &= [(J_1'(u), v - u) + J_2(v) - J_2(u)] + [J_1(v) - J_1(u) - (J_1'(u), v - u)]; \end{aligned}$$

la première partie du deuxième membre de (3.77) est  $\geq 0$  d'après (3.75) et la deuxième est  $\geq 0$  parce que  $J_1$  est convexe, d'où (3.74). ■

#### 4. QUELQUES OUTILS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

Exactement comme le n° 1 n'avait pas pour but de refaire la théorie complète des milieux continus, notre objet n'est nullement ici de présenter la théorie des espaces de Sobolev en toute généralité. Nous allons simplement introduire les notions de base, suffisantes pour la compréhension de la solution (donnée aux numéros suivants) des problèmes du n° 3, en renvoyant à la bibliographie pour les démonstrations de ces notions de base (par exemple pour les théorèmes de trace, cf. ci-après).

Les notions introduites dans ce numéro seront utilisées dans tous les chapitres ultérieurs; nous rappellerons au moment opportun les résultats plus élaborés sur les espaces de Sobolev dont nous aurons besoin.

##### 4.1. Espaces de Sobolev

Sur l'ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , on introduit les espaces suivants <sup>(15)</sup> :

1)  $L^p(\Omega)$  = espace des (classes de) fonctions  $f$  mesurables telles que ( $p$  étant donné avec  $1 \leq p \leq \infty$ ) :

$$(4.1) \quad \|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \quad (p \neq \infty),$$

$$(4.2) \quad \|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess. } |f(x)| < \infty;$$

<sup>(14)</sup> On précisera plus loin la classe où l'on prend  $\Psi$ .

<sup>(15)</sup> Toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

muni de la norme (4.1) ou (4.2),  $L^p(\Omega)$  est un espace de Banach ; si  $p = 2$ ,  $L^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert, le produit scalaire correspondant à la norme (4.1) (où  $p = 2$ ) étant donné par

$$(4.3) \quad (f, g) = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx.$$

2)  $\mathcal{D}(\Omega) =$  espace des fonctions  $C^\infty$  et à support compact dans  $\Omega$  ; étant donné une suite <sup>(16)</sup>  $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$  on dira que  $\varphi_j \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{D}(\Omega)$  si :

- i) les  $\varphi_j$  ont leur support dans un compact  $E$  fixe de  $\Omega$  ;
- ii) on a,  $\forall \alpha$ ,  $D^\alpha \varphi_j \rightarrow 0$  uniformément sur  $\Omega$  où l'on a posé :

$$(4.4) \quad D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \varphi, \quad \alpha = \{ \alpha_1, \dots, \alpha_n \} ;$$

3)  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) =$  espace des fonctions  $C^\infty$  dans  $\bar{\Omega}$ , muni de la famille de normes

$$\sup_{x \in \Omega} |D^\alpha \varphi(x)|$$

qui en fait un espace de Fréchet ;

4)  $\mathcal{D}'(\Omega) =$  espace des distributions sur  $\Omega =$  espace des formes  $\varphi \rightarrow (f, \varphi)$  linéaires continues sur  $\mathcal{D}(\Omega)$  (i.e.  $(f, \varphi_\alpha) \rightarrow 0$  si  $\varphi_\alpha \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{D}(\Omega)$ ). On dira que  $f_j \rightarrow f$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  si  $(f_j, \varphi) \rightarrow (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . ■

#### Exemples de distributions

j) Si  $a \in \Omega$ ,  $\varphi \rightarrow \varphi(a)$  est continue sur  $\mathcal{D}(\Omega)$  ; c'est la masse de Dirac au point  $a$ , on notera :

$$\varphi(a) = (\delta_{(a)}, \varphi) = \int_{\Omega} \delta(x - a) \varphi(x) dx$$

en écrivant les distributions comme des fonctions (ce que nous ferons).

jj) Si  $f \in L^p(\Omega)$ ,  $\varphi \rightarrow \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$  est continue sur  $\mathcal{D}(\Omega)$ , donc définit une distribution  $\tilde{f}$  par

$$(\tilde{f}, \varphi) = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx.$$

L'application  $f \rightarrow \tilde{f}$  étant injective on identifie  $\tilde{f}$  à  $f$ . On a donc alors :

$$(4.5) \quad L^p(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

avec en outre injection continue <sup>(17)</sup> ; en effet si  $f_j \rightarrow 0$  dans  $L^p(\Omega)$  alors  $f_j \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

<sup>(16)</sup> Cf. L. Schwartz [1] pour la topologie de  $\mathcal{D}(\Omega)$  définie par un système fondamental de voisinages de 0.

<sup>(17)</sup> Désormais si  $X$  et  $Y$  désignent deux espaces vectoriels topologiques, «  $X \subset Y$  » signifiera : inclusion algébrique avec injection continue.



On peut caractériser le sous-espace  $L^p(\Omega)$  de  $\mathcal{D}'(\Omega)$  pour  $1 < p \leq \infty$  par :

$$(4.6) \quad \left| f \in L^p(\Omega) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \in \mathcal{D}'(\Omega) \text{ et il existe } c \text{ telle que} \\ |(f, \varphi)| \leq c \|\varphi\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \end{array} \right. \right.$$

où l'on a défini  $p'$  — exposant conjugué de  $p$  — par

$$(4.7) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

L'implication «  $\Rightarrow$  » résulte de l'inégalité

$$|(f, \varphi)| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

et est valable pour  $1 \leq p \leq \infty$ .

Pour l'implication «  $\Leftarrow$  », on note que si  $p \neq 1$  alors  $p' \neq \infty$  et  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $L^{p'}(\Omega)$  de sorte qu'il existe  $f_*$  unique dans  $L^p(\Omega)$  (que l'on peut identifier au dual de  $L^{p'}(\Omega)$ ) avec  $(f, \varphi) = (f_*, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ; identifiant  $f_*$  à  $f$ , on a le résultat.

jjj) Si  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  on définit  $D^\alpha f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  — et cela  $\forall \alpha$  — par :

$$(4.8) \quad (D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

En outre l'application linéaire  $f \rightarrow D^\alpha f$  de  $\mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  est continue. ■

Espaces de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$

On appelle « espace de Sobolev d'ordre  $m$  sur  $L^p(\Omega)$  » et l'on note  $W^{m,p}(\Omega)$  l'espace défini par

$$(4.9) \quad W^{m,p}(\Omega) = \{ v \mid v \in L^p(\Omega), D^\alpha v \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m \}.$$

Muni de la norme

$$(4.10) \quad \|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p},$$

c'est un espace de Banach. ■

Le cas «  $p = 2$  » est fondamental. Pour simplifier l'écriture, on posera :

$$(4.11) \quad W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega);$$

muni du produit scalaire

$$(4.12) \quad (u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

c'est un espace de Hilbert. ■

*Premier théorème de traces*

On prendra garde que, sauf en dimension 1, une fonction  $v$  de  $H^1(\Omega)$  n'est pas nécessairement continue dans  $\Omega$ , ni a fortiori  $\bar{\Omega}$ ; on peut néanmoins — et c'est absolument essentiel pour les applications — définir les valeurs de  $v$  sur l' frontière de  $\Omega$  <sup>(18)</sup>.

Nous ferons l'hypothèse

$$(4.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega \text{ est un ouvert borné } ^{(19)} \text{ dont la frontière } \Gamma \text{ est une variété de dimension } (n-1) \text{ une fois continûment différentiable, } \Omega \text{ étant localement d'un seul côté de } \Gamma. \end{array} \right.$$

On montre alors (cf. par exemple Lions-Magenes [1], Chap. 1) que,  $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$  désignant l'espace des fonctions une fois continûment différentiables dans  $\bar{\Omega}$ ,

$$(4.14) \quad \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega).$$

Pour  $v \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$  on posera :

$$(4.15) \quad \gamma_0 v = \gamma v = \text{« trace de } v \text{ sur } \Gamma \text{ »} = \text{valeur de } v \text{ sur } \Gamma.$$

On pose

$$(4.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} L^2(\Gamma) = \{ f \mid f \text{ mesurable et de carré sommable sur } \Gamma \text{ pour la mesure } d\Gamma \}, \end{array} \right.$$

$$(4.17) \quad (f, g)_\Gamma = \int_\Gamma fg \, d\Gamma.$$

On montre alors (cf. exemple Lions-Magenes, loc. cit.) :

**Théorème 4.1.** *Sous l'hypothèse (4.13) on peut définir de façon unique la trace  $\gamma_0 v = \gamma v$  de  $v \in H^1(\Omega)$  sur  $\Gamma$  de façon que  $\gamma v$  coïncide avec la définition usuelle (4.15) si  $v \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ ;  $\gamma_0 v \in L^2(\Gamma)$  et l'application  $v \rightarrow \gamma_0 v$  est linéaire continue de*

$$H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma). \quad \blacksquare$$

*Remarque 4.1*

L'application

$$v \rightarrow D^\alpha v$$

est linéaire continue de  $H^{|\alpha|+1}(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ ; on peut donc définir

$$(4.18) \quad \{ \gamma_0(D^\alpha v) \mid |\alpha| \leq m-1 \} \quad \text{si} \quad v \in H^m(\Omega).$$

En fait, puisque la connaissance de  $v$  sur  $\Gamma$  entraîne celle de ses dérivées tangentes sur  $\Gamma$ , il est préférable de remplacer l'ensemble des dérivées apparaissant dans (4.18) par les dérivées normales d'ordre  $\leq m-1$  :

$$(4.19) \quad \gamma v = \{ v, \partial v / \partial n, \dots, \partial^{m-1} v / \partial n^{m-1} \} \in (L^2(\Gamma))^m \quad \text{si} \quad v \in H^m(\Omega). \quad \blacksquare$$

<sup>(18)</sup> Plus généralement sur une variété régulière de dimension  $n-1$  contenue dans  $\bar{\Omega}$ .

<sup>(19)</sup> Le théorème 4.1 ci-après est valable sans changement si  $\Omega$  est non borné de frontière  $\Gamma$  bornée; si  $\Gamma$  n'est pas borné alors  $\gamma_0 v$  se définit comme au théorème 4.1 et est localement de carré sommable sur  $\Gamma$ .

Remarque 4.2

Le noyau de  $\gamma_0$  joue un rôle essentiel dans la suite ; on pose :

$$(4.20) \quad H_0^1(\Omega) = \text{noyau de } \gamma_0 = \{ v \mid v \in H^1(\Omega), \gamma_0 v = 0 \}$$

et, plus généralement,

$$(4.21) \quad \begin{cases} H_0^m(\Omega) = \text{noyau de } \gamma \text{ défini par (4.19)} \\ = \{ v \mid v \in H^m(\Omega) \quad \gamma v = 0 \}. \end{cases}$$

On a :

$$(4.22) \quad H_0^m(\Omega) \text{ est un sous-espace fermé de } H^m(\Omega).$$

Donc  $H_0^m(\Omega)$  est un espace de Hilbert pour la structure induite par celle de  $H^m(\Omega)$ . ■

Remarque 4.3

On montre (Lions-Magenes, loc. cit.) que

$$(4.23) \quad \mathcal{D}(\Omega) \text{ est dense dans } H_0^m(\Omega).$$

Alors toute forme linéaire continue sur  $H_0^m(\Omega)$  s'identifie à une *distribution* sur  $\Omega$ . On désigne par  $H^{-m}(\Omega)$  l'espace dual de  $H_0^m(\Omega)$  dans cette identification ; alors

$$(4.24) \quad H_0^m(\Omega) \subset L^2(\Omega) (= H^0(\Omega)) \subset H^{-m}(\Omega). \quad \blacksquare$$

Remarque 4.4

Le Théorème 4.1 n'est pas le meilleur possible en ce sens que l'application  $v \rightarrow \gamma_0 v$  n'est pas surjective de  $H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ . Afin de caractériser l'espace image de  $H^1(\Omega)$  par  $\gamma_0$ , il faut introduire quelques notions supplémentaires. ■

Les espaces  $H^s(\mathbb{R}^n)$ , s non nécessairement entier

Dans le cas particulier où  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , on peut définir  $H^m(\mathbb{R}^n)$  par *transformation de Fourier*. Si  $v$  est une fonction continue à support compact, sa transformée de Fourier  $\hat{v}$  est définie par

$$(4.25) \quad \hat{v}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-2\pi i x \cdot \xi) v(x) dx,$$

$$\text{où} \quad \xi = \{ \xi_1, \dots, \xi_n \}, \quad x \cdot \xi = x_i \xi_i.$$

On montre (Théorème de Plancherel) que  $\hat{v} \in L^2(\mathbb{R}_\xi^n)$  et que

$$(4.26) \quad \|\hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}_\xi^n)} = \|v\|_{L^2(\mathbb{R}_x^n)}.$$

On peut donc par *prolongement par continuité* définir  $\hat{v}$  pour tout  $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . L'application  $v \rightarrow \hat{v}$  est *invertible* ; si  $\hat{v} = w$  alors  $v =$  limite dans  $L^2(\mathbb{R}_x^n)$  de  $v_j$ ,  $j \rightarrow +\infty$ , où

$$v_j(x) = \int_{|\xi| \leq j} \exp(2\pi i x \cdot \xi) \hat{v}(\xi) d\xi;$$

on écrira encore, symboliquement :

$$v(x) = \int_{\mathbb{R}_\xi^n} \exp(2\pi i x \cdot \xi) \hat{v}(\xi) d\xi.$$

Cela posé on vérifie que

$$(4.27) \quad v \in H^m(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow (1 + |\xi|^2)^{m/2} \hat{v} \in L^2(\mathbb{R}_\xi^n).$$

Mais il est alors naturel de poser la définition suivante :

$$(4.28) \quad H^s(\mathbb{R}^n) = \{ v \mid (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{v} \in L^2(\mathbb{R}_\xi^n) \},$$

qui est un espace de Hilbert pour la norme

$$(4.29) \quad \|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \| (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{v} \|_{L^2(\mathbb{R}_\xi^n)},$$

norme qui est équivalente à celle correspondant à (4.12) lorsque  $s = m$ . ■

#### Remarque 4.5

La définition (4.28) est valable pour  $s < 0$ . Lorsque  $H^0(\mathbb{R}^n)$  est identifié à son dual, on a <sup>(20)</sup> :

$$(4.30) \quad H^s(\mathbb{R}^n) = H^{-s}(\mathbb{R}^n).$$

Pour  $s = -m$  et  $\Omega = \mathbb{R}^n$  on retrouve l'espace introduit à la Remarque 4.3. ■

#### Remarque 4.6

Les espaces  $H^s(\mathbb{R}^n)$  ont la propriété de « localisation » suivante :

$$(4.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \varphi v \in H^s(\mathbb{R}^n) \quad \forall v \in H^s(\mathbb{R}^n) \text{ et l'application } v \rightarrow \varphi v \\ \text{est linéaire continue de } H^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^s(\mathbb{R}^n). \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

Les propriétés (4.31) permettent de définir  $H^s(\Gamma)$ ,  $\forall s$ .

On définit  $H^s(\Gamma)$  pour  $s \geq 0$ , prenant ensuite

$$(4.32) \quad H^\sigma(\Gamma) = (H^{-\sigma}(\Gamma))' \quad \text{si} \quad \sigma < 0.$$

Pour une fonction  $v \in L^2(\Gamma)$  on définit, à l'aide d'une famille de cartes locales et d'une partition  $\{\theta_i\}$  de l'unité subordonnée :

$$v = \sum_i \theta_i v \quad (\text{somme finie})$$

puis l'on définit les images de  $\theta_i v$  dans  $\mathbb{R}^{n-1}$ ; on dira alors que  $v \in H^s(\Gamma)$  si toutes les images de  $\theta_i v$  sont dans  $H^s(\mathbb{R}^{n-1})$ ; si  $w_i$  est l'image de  $\theta_i v$ , on prend comme norme (hilbertienne) sur  $H^s(\Gamma)$  :

$$(4.33) \quad \|v\|_{H^s(\Gamma)} = \left( \sum_i \|w_i\|_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}^2 \right)^{1/2}.$$

<sup>(20)</sup> De façon générale,  $X'$  désigne le dual de l'espace  $X$ .

Grâce à (4.31) l'espace  $H^s(\Gamma)$  ainsi défini ne dépend pas de la famille de cartes locales et de la partition de l'unité choisies ; la norme (4.33) en dépend mais seulement à une équivalence de normes près. L'espace  $H^s(\Gamma)$  est donc défini de manière intrinsèque ainsi que sa topologie mais non sa norme. ■

Deuxième Théorème de traces

On peut maintenant compléter le Théorème 4.1 en le

**Théorème 4.2.** *Sous les hypothèses du Théorème 4.1, l'application  $v \rightarrow \gamma_0 v$  est linéaire continue et surjective de  $H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ .*

Pour la démonstration cf. par exemple Lions-Magenes, loc. cit. ■

4.2. Applications : les ensembles convexes  $K$

Reprenons les notions du n° 3.

Notons d'abord — on a fait ce qu'il fallait pour ça — que les formes bilinéaires  $a(u, v)$  définies par (3.1) ou (3.62) sont continues sur  $H^1(\Omega)$ . Par ailleurs la condition (3.16) s'écrira

$$u(t) \in H_0^1(\Omega), \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Pour préciser le sens des inéquations stationnaires (n° 3.5) il reste donc seulement à définir  $\Psi(v)$  pour  $v \in H^1(\Omega)$ .

On considère d'abord le cas où  $\Psi$  est définie (formellement) par (3.10). On note que, d'après le Théorème 4.1,  $v(x)$  est défini p.p. sur  $\Gamma$  donc aussi  $\psi(v(x))$ . Soit alors :

$$(4.34) \quad E = \{ \lambda \mid \psi(\lambda) \text{ fini} \};$$

l'ensemble  $E$  est fermé convexe (borné ou non).

On pose alors :

$$(4.35) \quad K = \{ v \mid v \in H^1(\Omega), \quad v(x) \in E \text{ p.p. pour } x \in \Gamma \}.$$

Grâce au Théorème 4.1 on a :

$$(4.36) \quad \text{l'ensemble } K \text{ est fermé convexe dans } H^1(\Omega).$$

Faisons l'hypothèse (non indispensable, cf. Remarque 4.7 ci-après) :

$$(4.37) \quad \left| \begin{array}{l} \text{la fonction } \psi \text{ est au plus à croissance quadratique à l'infini sur } E \text{ (ce} \\ \text{qui est évidemment sans objet si } E \text{ est borné), i.e.} \\ \psi(\lambda) \leq c_1 \lambda^2 + c_2 \text{ pour } c_i \text{ constantes convenables, } \lambda \in E. \end{array} \right.$$

Alors pour  $v \in K$ ,  $\psi(v(x)) \in L^1(\Gamma)$  et l'on peut poser

$$(4.38) \quad \Psi(v) = \int_{\Gamma} \psi(v(x)) d\Gamma. \quad \blacksquare$$

## Remarque 4.7

Si (4.37) n'a pas lieu, il suffira de définir  $K$  par (4.35) et la condition «  $\psi(v) \in L^1(\Gamma)$  ». On se borne à la situation (4.37) car cela simplifie un peu l'exposé et suffit dans les applications. ■

La fonction  $v \rightarrow \Psi(v)$  est continue de  $K \rightarrow \mathbb{R}$ ; en effet d'après Krasnosel'skii [1] (Théorème 2.1, p. 22) l'application  $v \rightarrow \psi(v)$  est continue de  $L^2(\Gamma) \rightarrow L^1(\Gamma)$ .

Par ailleurs, d'après la convexité de  $\psi$ , la fonction  $v \rightarrow \Psi(v)$  est convexe. ■

Dans le cas où  $\Psi$  est définie (formellement) par (3.11), on introduit

$$K = \{ v \mid v \in H_0^1(\Omega), v(x) \in E \text{ p.p. dans } \Omega \}.$$

Sous l'hypothèse (4.37) on a les mêmes propriétés que précédemment. ■

## 4.3. Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

Pour préciser les problèmes d'évolution posés au n° 3 on a besoin d'outils supplémentaires, que nous allons introduire maintenant.

Soit  $X$  un espace de Banach de norme notée  $\| \cdot \|_X$ ; on désigne par  $L^p(0, T; X)$  l'espace des (classes de) fonctions  $t \rightarrow f(t)$  mesurables de  $[0, T] \rightarrow X$  (pour la mesure  $dt$ ) telles que

$$(4.39) \quad \left( \int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} = \|f\|_{L^p(0, T; X)} < \infty \quad (p \neq \infty),$$

$$(4.40) \quad \|f\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in (0, T)} \text{ess.} \|f(t)\|_X.$$

C'est un espace de Banach.

On désigne par  $\mathcal{D}'(]0, T[; X)$  l'espace des distributions sur  $]0, T[$  à valeurs dans  $X$ , défini par

$$(4.41) \quad \mathcal{D}'(]0, T[; X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(]0, T[; X))$$

où de façon générale  $\mathcal{L}(Y; X)$  désigne l'espace des applications linéaires continues de  $Y \rightarrow X$ .

A une fonction  $f \in L^p(0, T; X)$  correspond une distribution  $\tilde{f}$  sur  $]0, T[$  à valeurs dans  $X$ , définie par

$$(4.42) \quad \tilde{f}(\varphi) = \int_0^T f(t) \varphi(t) dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}([0, T]),$$

(ce qui définit bien une application  $\varphi \rightarrow \tilde{f}(\varphi)$  linéaire continue de  $\mathcal{D}(]0, T[) \rightarrow X$ ). L'application  $f \rightarrow \tilde{f}$  est une injection; on identifiera  $\tilde{f}$  et  $f$ . En outre si  $f \rightarrow 0$  dans  $L^p(0, T; X)$  alors  $\tilde{f} \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{D}'(]0, T[; X)$ , i.e.  $\tilde{f}(\varphi) \rightarrow 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0, T[)$ . On a alors

$$(4.43) \quad L^p(0, T; X) \subset \mathcal{D}'(]0, T[; X). \quad \blacksquare$$

Pour  $f \in \mathcal{D}'(]0, T[; X)$ , on définit  $d^k f/dt^k = f^{(k)}$  par

$$(4.44) \quad f^{(k)}(\varphi) = (-1)^k f(\varphi^{(k)}) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0, T[),$$

ce qui définit  $f^{(k)} \in \mathcal{D}'(]0, T[; X)$ . En outre l'application  $f \rightarrow f^{(k)}$  est linéaire continue de  $\mathcal{D}'(]0, T[; X)$  dans lui-même. ■

On rencontrera constamment dans la suite des situations *du type suivant* : soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach avec

$$(4.45) \quad X \subset Y.$$

Soit  $v$  donnée telle que

$$(4.46) \quad v \in L^p(0, T; X);$$

alors sa dérivée  $dv/dt$  est définie comme élément de  $\mathcal{D}'(]0, T[; X)$  donc, en particulier (puisque  $\mathcal{D}'(]0, T[; X) \subset \mathcal{D}'(]0, T[; Y)$ ) :

$$(4.47) \quad dv/dt \in \mathcal{D}'(]0, T[; Y).$$

Supposons alors que

$$(4.48) \quad dv/dt \in L^q(0, T; Y) \quad (1 \leq q \leq \infty).$$

Alors la fonction  $v$  est, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, continue de  $[0, T] \rightarrow Y$ . ■

Ce résultat n'est pas optimal <sup>(21)</sup>; nous allons le préciser pour un couple  $\{X, Y\}$  particulier — couple dont l'usage sera très fréquent dans la suite du livre.

Soient  $V$  et  $H$  deux espaces de Hilbert sur  $\mathbb{R}$ , de normes respectives  $\|\cdot\|, |\cdot|$ , le produit scalaire dans  $H$  étant noté  $(\cdot, \cdot)$ ; on suppose que

$$(4.49) \quad V \subset H \text{ (}^{22}\text{)}, \quad V \text{ dense dans } H.$$

Identifiant  $H$  à son dual,  $H$  s'identifie alors à un sous-espace du dual  $V'$  de  $V$ , d'où

$$(4.50) \quad V \subset H \subset V'.$$

Exemple 4.1

$$V = H_0^m(\Omega), \quad H = L^2(\Omega), \quad V' = H^{-m}(\Omega).$$

Exemple 4.2

$$V = H^m(\Omega), \quad H = L^2(\Omega);$$

$V'$  n'est pas alors un espace de distributions sur  $\Omega$  (puisque  $\mathcal{D}(\Omega)$  n'est pas dense dans  $H^m(\Omega)$ ). ■

<sup>(21)</sup> Cf. J. L. Lions et J. Peetre [1].

<sup>(22)</sup> Donc il existe une constante  $c$  telle que  $|v| \leq c \|v\|$ ,  $\forall v \in V$ .

Soit alors  $v$  donnée avec

$$(4.51) \quad v \in L^2(0, T; V), \quad dv/dt \in L^2(0, T; V').$$

On montre alors (cf. par exemple Lions-Magenes, Chap. 1, loc. cit.) que,

$$(4.52) \quad \left| \begin{array}{l} \text{après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle,} \\ \text{la fonction } t \rightarrow v(t) \text{ est continue de } [0, T] \rightarrow H. \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

## 5. RÉOLUTION DES INÉQUATIONS VARIATIONNELLES D'ÉVOLUTION DU N° 3

### 5.1. Formulation définitive des problèmes

Pour rendre plus nette la présentation de la théorie, on généralise encore un peu la formulation des problèmes du n° 3.

#### 5.1.1. Données $V, H, V'$ et $a(u, v)$

On se donne un triplet d'espaces hilbertiens comme en (4.49), (4.50), et une forme bilinéaire  $u, v \rightarrow a(u, v)$  continue sur  $V$  et coercive au sens :

$$(5.1) \quad \left| \begin{array}{l} \text{il existe } c \text{ et } \alpha > 0 \text{ tels que }^{(23)} \\ a(v, v) + c \|v\|^2 \geq \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in V. \end{array} \right.$$

*Exemple 5.1*

$V = H^1(\Omega)$ ,  $a$  donnée par (3.1). Alors (5.1) a lieu, si par exemple  $c = 1, \alpha = 1$ .  $\blacksquare$

*Exemple 5.2*

$V = H_0^1(\Omega)$ ,  $a$  donnée par (3.1). Alors (5.1) a lieu avec  $c = 0$ .  $\blacksquare$

#### 5.1.2. Fonctionnelle $\Psi$

On se donne une fonction  $v \rightarrow \Psi(v)$  de  $V \rightarrow \mathbb{R}$  ayant les propriétés suivantes :

$$(5.2) \quad \left| \begin{array}{l} \text{la fonction } v \rightarrow \Psi(v) \text{ est convexe, s.c.i. pour la topologie faible de } V, \\ \text{à valeurs dans } ]-\infty, +\infty]; \end{array} \right.$$

il existe une famille de fonctions  $\Psi_j$  différentiables sur  $V$  telles que :

$$(5.3) \quad \left| \begin{array}{l} \forall v \in L^2(0, T; V) \text{ on ait :} \\ \int_0^T \Psi_j(v(t)) dt \rightarrow \int_0^T \Psi(v(t)) dt, \quad j \rightarrow \infty, \end{array} \right.$$

$$(5.4) \quad \left| \begin{array}{l} \text{il existe une suite } \varphi_j \text{ bornée dans } V \text{ telle que} \\ \Psi_j'(\varphi_j) = 0 \quad \forall j, \end{array} \right.$$

$$(5.5) \quad \left| \begin{array}{l} \text{si } v_j \rightarrow v, v_j' \rightarrow v' \text{ dans } L^2(0, T; V) \text{ faible et } \int_0^T \Psi_j(v_j) dt \leq C \text{cte,} \\ \text{alors } \liminf \int_0^T \Psi_j(v_j) dt \geq \int_0^T \Psi(v) dt. \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

<sup>(23)</sup> On rappelle que  $|v|$  (resp.  $\|v\|$ ) désigne la norme de  $v$  dans  $H$  (resp.  $V$ ).



### Remarque 5.1

Ces dernières hypothèses ne sont pas indispensables. Cf. H. Brézis [1], [2], mais elles suffisent pour notre objet (cf. n° 5.3 ci-après). ■

#### 5.1.3. Formulation du problème

Avec les notions introduites, on voit que *tous les problèmes d'évolution rencontrés jusqu'ici entrent dans le cadre suivant* <sup>(24)</sup> : trouver une fonction  $u$  telle que

$$(5.6) \quad u \in L^2(0, T; V), \quad u' \in L^2(0, T; V'),$$

$$(5.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour presque tout } t \text{ et } \forall v \in V \text{ on a :} \\ (u'(t), v - u(t)) + a(u(t), v - u(t)) + \Psi(v) - \Psi(u(t)) \geq (f(t), v - u(t)) \quad \forall v \in V, \end{array} \right.$$

$$(5.8) \quad u(0) = u_0,$$

$u_0$  donné dans  $V$  (avec  $\Psi(u_0) < \infty$ ) et  $f$  donnée dans  $L^2(0, T; V')$ .

#### 5.2. Enoncé des résultats principaux

On va, dans la suite, obtenir des solutions « fortes » (notamment en améliorant (5.6)). (Nous ne présentons pas ici la théorie des solutions « faibles », renvoyant à Brézis [1], [2] et Lions [1].) C'est ce qui explique les hypothèses assez fortes faites sur les données  $f$  et  $u_0$  :

$$(5.9) \quad f, f' \in L^2(0, T; V'),$$

$$(5.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } u_{0j} \in V \text{ tels que } u_{0j} \rightarrow u_0 \text{ dans } V, \text{ et pour chaque } u_{0j} \text{ il existe} \\ k_j \in H \text{ tel que} \\ a(u_{0j}, v) + (\Psi'_j(u_{0j}), v) = (k_j, v) \quad \forall v \in V \\ \text{et} \\ |k_j| \leq \text{Cte lorsque } j \rightarrow \infty. \end{array} \right.$$

**Théorème 5.1.** *On suppose que les hypothèses (5.1), (5.5) et (5.9), (5.10) ont lieu. Il existe alors une fonction  $u$  et une seule vérifiant*

$$(5.11) \quad u \in L^2(0, T; V), \quad u' \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \quad (25)$$

et (5.7), (5.8).

<sup>(24)</sup> Sous réserve de vérifier les hypothèses (5.2)-(5.5), ce qui sera fait au n° 5.3.

<sup>(25)</sup> Donc  $u$  est continue de  $[0, T] \rightarrow V$ .

**Théorème 5.2. (Théorème d'Approximation.)** Les hypothèses sont celles du Théorème 5.1. Soit  $u_j$  la solution de

$$(5.11)_j \quad u_j \in L^2(0, T; V), \quad u'_j \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H),$$

$$(5.7)_j \quad \begin{cases} (u'_j(t), v - u_j(t)) + a(u_j(t), v - u_j(t)) + \Psi_j(v) - \Psi_j(u_j(t)) \geq \\ \geq (f(t), v - u_j(t)) \end{cases} \quad \forall v \in V,$$

$$(5.8)_j \quad u_j(0) = u_{0j}.$$

Alors lorsque  $j \rightarrow +\infty$ , on a,  $u$  désignant la solution fournie par le Théorème 5.1,

$$(5.12) \quad u_j \rightarrow u \quad \text{dans } L^2(0, T; V) \text{ faible},$$

$$(5.13) \quad u'_j \rightarrow u' \quad \text{dans } L^2(0, T; V) \text{ faible et dans } L^\infty(0, T; H) \text{ faible}^* \text{ (26)}.$$

*Remarque 5.2*

Comme la fonction  $\Psi_j$  est différentiable, (5.7)<sub>j</sub> équivaut (cf. n° 3.3.1) à

$$(5.14) \quad (u'_j(t), v) + a(u_j(t), v) + (\Phi_j(u_j(t)), v) = (f(t), v) \quad \forall v \in V,$$

où l'on a posé

$$(5.15) \quad \Phi_j = \Psi'_j. \quad \blacksquare$$

*Remarque 5.3*

Le Théorème 5.2 justifie les passages à la limite formels du n° 2.  $\blacksquare$

Avant de démontrer les Théorèmes 5.1 et 5.2 (n°s 5.5 et 5.6 ci-après), vérifions les hypothèses (5.3), (5.4), (5.5) sur les Exemples du n° 3.

### 5.3. Vérification des hypothèses

On va faire cette vérification sur l'exemple suivant, la méthode étant *absolument générale*. On suppose que  $\psi$  est donnée par l'Exemple 3.3 (Fig. 8) et que

$$(5.16) \quad \Psi(v) = \int_\Gamma \psi(v) \, d\Gamma.$$

On introduit  $\psi_j$  comme suit (Fig. 12) :

$$(5.17) \quad \psi_j(\lambda) = \begin{cases} g_1(\lambda - h_1) - g_1^2/2j, & \lambda \leq h_1 + g_1/j, \\ \frac{1}{2}j(\lambda - h_1)^2, & h_1 + g_1/j \leq \lambda \leq h_1, \\ 0, & h_1 \leq \lambda \leq h_2, \\ \frac{1}{2}j(\lambda - h_2)^2, & h_2 \leq \lambda \leq h_2 + 1, \\ j(\lambda - h_2) - j/2, & h_2 + 1 \leq \lambda. \end{cases}$$

On définit ensuite  $\Psi_j$  par

(26) On dit que  $f_j \rightarrow f$  dans  $L^\infty(0, T; H)$  faible \* si

$$\int_0^T (f_j(t), \varphi(t)) \, dt \rightarrow \int_0^T (f(t), \varphi(t)) \, dt \quad \forall \varphi \in L^1(0, T; H).$$

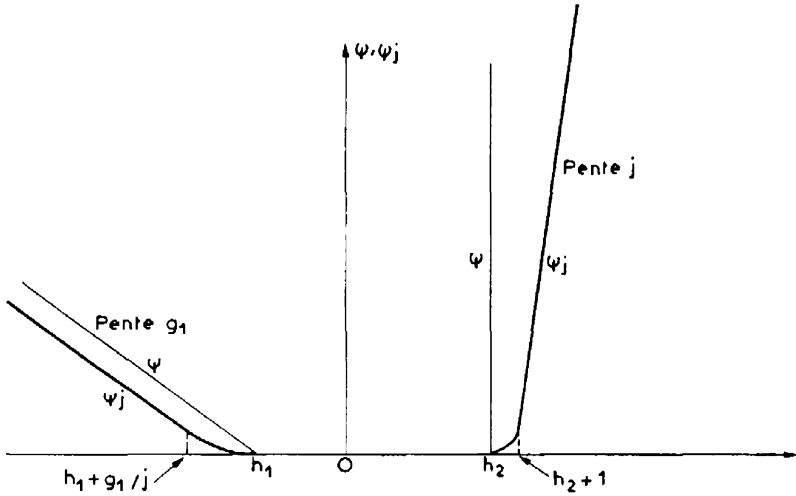


Figure 12.

$$(5.18) \quad \Psi_j(v) = \int_{\Gamma} \psi_j(v) \, d\Gamma, \quad v \in H^1(\Omega).$$

Alors (5.3) est immédiat et (5.4) a lieu avec par exemple  $\varphi_j = 0 \quad \forall j$ . Reste à vérifier (5.5).

Il résulte de *théorèmes de compacité* (cf. par exemple Lions-Magenes [1], Chap. 1) que si  $v_j \rightarrow v$ ,  $\partial v_j / \partial t \rightarrow \partial v / \partial t$  dans  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  faible, alors

$$(5.19) \quad v_j \rightarrow v \quad \text{dans} \quad L^2(\Sigma) \text{ fort.}$$

Par ailleurs, si l'on introduit  $M$  par

$$(5.20) \quad M(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \lambda \leq h_2, \\ \frac{1}{2}(\lambda - h_2)^2 & \text{si} \quad h_2 \leq \lambda \leq h_2 + 1, \\ \lambda - h_2 - \frac{1}{2} & \text{si} \quad h_2 + 1 \leq \lambda \end{cases}$$

alors

$$(5.21) \quad \int_0^T \Psi_j(v_j) \, dt = \int_{\Sigma} \psi_j(v_j) \, d\Sigma \geq j \int_{\Sigma} M(v_j) \, d\Sigma.$$

Donc, comme

$$\int_0^T \Psi_j(v_j) \, dt \leq c,$$

on a :

$$\int_{\Sigma} M(v_j) \, d\Sigma \rightarrow 0$$

et d'après (5.19)

$$\int_{\Sigma} M(v_j) \, d\Sigma \rightarrow \int_{\Sigma} M(v) \, d\Sigma$$

d'où :

$$(5.22) \quad \int_{\Sigma} M(v) \, d\Sigma = 0$$

et par conséquent

$$(5.23) \quad v \leq h_2 \quad \text{p.p. sur } \Sigma .$$

Posons maintenant

$$\theta(\lambda) = \begin{cases} g_1(\lambda - h_1) & \text{si } \lambda \leq h_1, \\ 0 & \text{si } \lambda \geq h_1, \end{cases}$$

$$\theta_j(\lambda) = \begin{cases} g_1(\lambda - h_1) - g_1^2/2j & \text{si } \lambda \leq h_1 + g_1/j, \\ \frac{1}{2}j(\lambda - h_1)^2 & \text{si } h_1 + g_1/j \leq \lambda \leq h_1, \\ 0 & \text{si } h_1 \leq \lambda. \end{cases}$$

On a :

$$(5.24) \quad \int_{\Sigma} \psi_j(v_j) \, d\Sigma \geq \int_{\Sigma} \theta_j(v_j) \, d\Sigma = \int_{\Sigma} \theta(v_j) \, d\Sigma + \int_{\Sigma} (\theta_j(v_j) - \theta(v_j)) \, d\Sigma ;$$

mais

$$|\int_{\Sigma} (\theta_j(v_j) - \theta(v_j)) \, d\Sigma| \leq c/j$$

et

$$\int_{\Sigma} \theta(v_j) \, d\Sigma \rightarrow \int_{\Sigma} \theta(v) \, d\Sigma = (\text{d'après (5.23)}) \int_0^T \Psi(v) \, dt .$$

Donc (5.24) donne

$$\liminf \int_{\Sigma} \psi_j(v_j) \, d\Sigma \geq \int_0^T \Psi(v) \, dt . \quad \blacksquare$$

#### 5.4. Autres procédés d'approximation

Le Théorème 5.2 revient, dans les applications, à approcher (en un sens convexe) les fonctions  $\psi$  du type 3 par des fonctions  $\psi_j$  du type 1.

L'approximation se fait par **régularisation** (au voisinage des points où  $\psi$  n'est pas différentiable) et par **pénalisation** (là où  $\psi = +\infty$ ).

On peut aussi supposer dans le Théorème 5.2 que les fonctionnelles  $\Psi_j$  sont partout finies, mais non nécessairement différentiables.

Cela revient à approcher  $\psi$  par **pénalisation seulement**.

Si nous reprenons l'Exemple 3.3 étudié au n° 5.3 précédent, on « approchera » maintenant  $\psi$  par  $\psi_j$  donnée par (cf. Fig. 13)

$$(5.25) \quad \psi_j(\lambda) = \begin{cases} \psi(\lambda) & \text{si } \lambda \leq h_2 \\ j(\lambda - h_2) & \text{si } \lambda \geq h_2 . \end{cases}$$

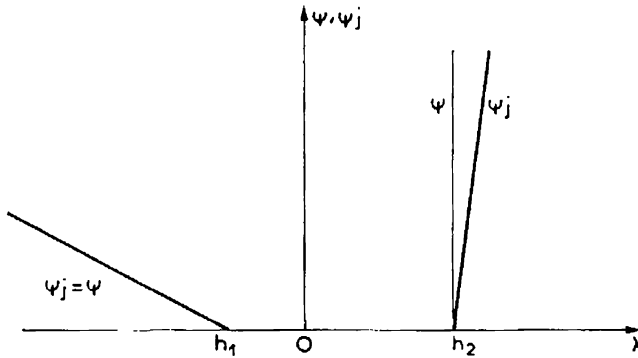


Figure 13.

### 5.5. Démonstration de l'unicité dans le Théorème 5.1 (et 5.2)

Soient  $u$  et  $u_*$  deux solutions éventuelles. Prenant, ce qui est loisible,  $v = u_*(t)$  (resp.  $v = u(t)$ ) dans l'inéquation (5.7) (resp. l'inéquation analogue relative à  $u_*$ ) et additionnant les deux inéquations, il vient, en posant  $w = u - u_*$  :

$$-(w'(t), w(t)) - a(w(t), w(t)) \geq 0$$

ou encore (d'après (5.1))

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w(t)|^2 + \alpha \|w(t)\|^2 \leq c |w(t)|^2$$

donc, en particulier :

$$\frac{d}{dt} |w(t)|^2 \leq 2c |w(t)|^2$$

ce qui, joint à  $w(0) = 0$  montre que  $w(t) = 0$ . ■

### 5.6. Démonstration des Théorèmes 5.1 et 5.2

Le plan de la démonstration est le suivant :

- 1) Résolution de (5.14), avec  $u_j(0) = u_{0j}$ .
- 2) Estimations a priori sur les  $u_j$ , obtention de (5.12) et (5.13).
- 3) Démonstration du fait que  $u$  ainsi obtenu est solution de (5.7). ■

#### 5.6.1. Résolution de (5.14)

Soit  $w_1, \dots, w_m \dots$  une « base » de  $V$  au sens suivant :  $\forall m$ , les  $w_1, \dots, w_m$  sont linéairement indépendants et les combinaisons  $\sum_{\text{finie}} \xi_j w_j$  sont denses dans  $V$ .

De telles « bases » existent toujours lorsque  $V$  est *séparable*, ce que nous supposons (cette hypothèse n'étant d'ailleurs nullement essentielle). On choisit  $w_1, w_2$  de façon que

$$(5.26) \quad \{ u_{0j} \text{ et } \varphi_j \text{ appartiennent à l'espace } [w_1, w_2] \text{ engendré par } w_1 \text{ et } w_2 \}.$$

On définit  $u_{jm}(t)$  comme la solution du système d'équations différentielles (ordinaires) non linéaires suivant :

$$(5.27) \quad u_{jm}(t) \in [w_1, \dots, w_m] = \text{espace engendré par } w_1, \dots, w_m ;$$

$$(5.28) \quad (u'_{jm}(t), w_k) + a(u_{jm}(t), w_k) + (\Phi_j(u_{jm}(t)), w_k) = (f(t), w_k), \quad 1 \leq k \leq m,$$

$$(5.29) \quad u_{jm}(0) = u_{0j} \quad (\text{ce qui est loisible dès que } m \geq 2 \text{ grâce à (5.26)}).$$

Si

$$u_{jm}(t) = \sum_{k=1}^m g_{jk}(t) w_k,$$

on a ainsi un système différentiel en les  $g_{jk}$  — ce qui définit  $u_{jm}$  dans un intervalle  $[0, t_m]$ ,  $t_m > 0$ .

Les estimations a priori qui suivent montrent que  $t_m = T$ . ■

#### Estimations a priori (I)

D'après (5.26), on a :

$$(5.30) \quad (u'_{jm}(t), \varphi_j) + a(u_{jm}(t), \varphi_j) + (\Phi_j(u_{jm}(t)), \varphi_j) = (f(t), \varphi_j).$$

Par ailleurs multipliant (5.28) par  $g_{jk}(t)$  et sommant en  $k$ , puis retranchant (5.30), il vient (notant que  $\Phi_j(\varphi_j) = 0$ ) :

$$(5.31) \quad \begin{aligned} (u'_{jm}(t), u_{jm}(t) - \varphi_j) + a(u_{jm}(t), u_{jm}(t) - \varphi_j) + \\ + (\Phi_j(u_{jm}(t)) - \Phi_j(\varphi_j), u_{jm}(t) - \varphi_j) = (f(t), u_{jm}(t) - \varphi_j). \end{aligned}$$

Mais  $\Phi_j$  est *monotone*, i.e.

$$(5.32) \quad (\Phi_j(u) - \Phi_j(v), u - v) \geq 0 \quad (2^7).$$

On déduit donc de (5.31) que

$$(5.33) \quad (u'_{jm}(t), u_{jm}(t) - \varphi_j) + a(u_{jm}(t), u_{jm}(t) - \varphi_j) \leq (f(t), u_{jm}(t) - \varphi_j),$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_{jm}(t) - \varphi_j|^2 + a(u_{jm}(t), v_{jm}(t)) \leq a(u_{jm}(t), \varphi_j) + \\ + (f(t), u_{jm}(t) - \varphi_j). \end{aligned}$$

(<sup>27</sup>) La dérivée d'une fonction convexe  $\Psi_j$  est monotone ; en effet

$$\Psi_j(v) - \Psi_j(u) - (\Psi'_j(u), v - u) \geq 0.$$

Echanger  $u$  et  $v$  et ajouter.

Donc (les  $c$  désignant des constantes diverses) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_{jm}(t) - \varphi_j|^2 + \alpha \|u_{jm}(t)\|^2 &\leq \\ &\leq c |u_{jm}(t)|^2 + c \|u_{jm}(t)\| \|\varphi_j\| + c \|f(t)\|_* \|u_{jm}(t) - \varphi_j\| \end{aligned}$$

(où  $\|f\|_* =$  norme dans  $V'$ ).

Comme d'après (5.4)  $\|\varphi_j\| \leq c$ , on a donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |u_{jm}(t) - \varphi_j|^2 + 2\alpha \|u_{jm}(t)\|^2 &\leq \\ &\leq c |u_{jm}(t) - \varphi_j|^2 + \alpha \|u_{jm}(t)\|^2 + c(1 + \|f(t)\|_*^2) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} (5.34) \quad &|u_{jm}(t) - \varphi_j|^2 + \alpha \int_0^t \|u_{jm}(\sigma)\|^2 d\sigma \leq \\ &\leq c \int_0^t |u_{jm}(\sigma) - \varphi_j|^2 d\sigma + c(t + \int_0^t \|f(\sigma)\|_*^2 d\sigma) + |u_{0j} - \varphi_j|^2. \end{aligned}$$

On a donc en particulier, si l'on pose  $|u_{jm}(t) - \varphi_j(t)|^2 = \eta(t)$  :

$$\begin{aligned} (5.35) \quad &\eta(t) \leq c \int_0^t \eta(\sigma) d\sigma + d, \\ &d \leq c(T + \int_0^T \|f(\sigma)\|_*^2 d\sigma) + |u_{0j} - \varphi_j|^2. \end{aligned}$$

Mais d'après l'inégalité de Gronwall (5.35) entraîne :

$$(5.36) \quad \eta(t) \leq d \exp(ct)$$

d'où l'on tire :

$$(5.37) \quad u_{jm} \in \text{borné de } L^\infty(0, T; H) \text{ (borné indépendant de } j \text{ et } m).$$

Mais reprenant (5.34) pour  $t = T$  on en déduit alors que

$$(5.38) \quad u_{jm} \in \text{borné de } L^2(0, T; V) \text{ (borné indépendant de } j \text{ et } m). \quad \blacksquare$$

*Estimations a priori (II)*

On va maintenant obtenir des estimations analogues à (5.37) et (5.38) pour  $u'_{jm}$ . On déduit d'abord de (5.28), (5.29) que

$$\begin{aligned} (u'_{jm}(0), w_k) &= (f(0), w_k) - [a(u_{0j}, w_k) + (\Phi_j(u_{0j}), w_k)] \\ &= (\text{d'après (5.10)}) (f(0) - k_j, w_k) \end{aligned}$$

d'où

$$|u'_{jm}(0)|^2 = (f(0) - k_j, u'_{jm}(0))$$

et d'où, par conséquent :

$$(5.39) \quad |u'_{jm}(0)| \leq |f(0) - k_j|.$$

Dérivons maintenant (5.28) en  $t$  <sup>(28)</sup> ; il vient

$$(5.40) \quad (u''_{jm}(t), w_k) + a(u'_{jm}(t), w_k) + ((\Phi_j(u_{jm}(t)))', w_k) = (f'(t), w_k).$$

Notons que

$$(5.41) \quad (\Phi_j(u_{jm}(t)))', u'_{jm}(t) \geq 0$$

car d'après la monotonie de  $\Phi_j$

$$(\Phi_j(u_{jm}(t+h)) - \Phi_j(u_{jm}(t)), u_{jm}(t+h) - u_{jm}(t)) \geq 0.$$

Donc on déduit de (5.40), en utilisant (5.41), que

$$(5.42) \quad (u''_{jm}(t), u'_{jm}(t)) + a(u'_{jm}(t), u'_{jm}(t)) \leq (f'(t), u'_{jm}(t))$$

d'où

$$(5.43) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_{jm}(t)|^2 + \alpha \|u'_{jm}(t)\|^2 \leq c |u'_{jm}(t)|^2 + \|f'(t)\|_* \|u'_{jm}(t)\|.$$

Mais de (5.39), (5.43) l'on déduit, comme précédemment pour  $u_{jm}$ , que

$$(5.44) \quad u'_{jm} \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \text{ indépendant de } j \text{ et } m. \quad \blacksquare$$

*Passage à la limite en  $m$*

D'après (5.44) et comme  $u_{jm}(0) = u_{0j}$ ,  $\|u_{0j}\| \leq C$ , on a :

$$(5.45) \quad u_{jm} \in \text{borné de } L^\infty(0, T; V)$$

et donc

$$(5.46) \quad \Phi_j(u_{jm}) \in \text{borné de } L^\infty(0, T; V').$$

On peut alors extraire une sous-suite  $u_{j\mu}$  telle que

$$(5.47) \quad \begin{cases} u_{j\mu} \rightarrow u_j & \text{dans } L^\infty(0, T; V) \text{ faible } *, \\ u'_{j\mu} \rightarrow u'_j & \text{dans } L^2(0, T; V) \text{ faible et dans } L^\infty(0, T; H) \text{ faible } *, \\ \Phi_j(u_{j\mu}) \rightarrow \chi_j & \text{dans } L^\infty(0, T; V') \text{ faible } *, \end{cases}$$

et

$$(5.48) \quad \|u_j\|_{L^\infty(0, T; V)} + \|u'_j\|_{L^2(0, T; V)} + \|u'_j\|_{L^\infty(0, T; H)} \leq C.$$

D'après (5.47),  $u_{j\mu}(0) \rightarrow u_j(0)$  dans  $V$  faible, donc

$$u_j(0) = u_{0j}.$$

<sup>(28)</sup> Ce qui suit est correct si  $\Phi_j$  est lipschitzienne. Sinon, il faut remplacer la dérivation par un quotient différentiel.



Prenons (5.28) pour  $m = \mu$ ; alors passant à la limite dans (5.28) avec  $k$  fixé ( $< \mu$ ) on obtient

$$(u'_j, w_k) + a(u_j, w_k) + (\chi_j, w_k) = (f, w_k)$$

et cela  $\forall k$ , donc les combinaisons  $\sum_{\text{finic}} \xi_k w_k$  étant denses dans  $V$ , on en déduit que

$$(5.49) \quad (u'_j, v) + a(u_j, v) + (\chi_j, v) = (f, v) \quad \forall v \in V.$$

On aura donc résolu (5.14) si l'on montre que

$$(5.50) \quad \chi_j = \Phi_j(u_j).$$

On utilise à cet effet un « *raisonnement de monotonie* ». D'après la monotonie de  $\Phi_j$ , on a,  $\forall \varphi \in L^2(0, T; V)$  :

$$(5.51) \quad X_m = \int_0^T (\Phi_j(u_{jm}) - \Phi_j(\varphi), u_{jm} - \varphi) dt \geq 0.$$

Mais d'après (5.28)

$$\begin{aligned} X_m &= - \int_0^T [(u'_{jm}, u_{jm}) + a(u_{jm}, u_{jm}) - (f, u_{jm})] dt \\ &\quad - \int_0^T (\Phi_j(u_{jm}), \varphi) dt - \int_0^T (\Phi_j(\varphi), u_{jm} - \varphi) dt \\ &= - \frac{1}{2} |u_{jm}(T)|^2 + \frac{1}{2} |u_{0j}|^2 - \int_0^T a(u_{jm}, u_{jm}) dt + \\ &\quad + \int_0^T (f, u_{jm}) dt - \int_0^T (\Phi_j(u_{jm}), \varphi) dt - \int_0^T (\Phi_j(\varphi), u_{jm} - \varphi) dt. \end{aligned}$$

Comme  $u_{jm}(T) \rightarrow u_j(T)$  dans  $V$  faible, on a :

$$\limsup (- |u_{jm}(T)|^2) \leq - |u_j(T)|^2$$

et donc

$$(5.52) \quad 0 \leq \limsup X_m \leq - \frac{1}{2} |u_j(T)|^2 + \frac{1}{2} |u_{0j}|^2 - \int_0^T a(u_j, u_j) dt + \\ + \int_0^T (f, u_j) dt - \int_0^T (\chi_j, \varphi) dt - \int_0^T (\Phi_j(\varphi), u_j - \varphi) dt.$$

Mais on déduit de (5.49) que

$$- \frac{1}{2} |u_j(T)|^2 + \frac{1}{2} |u_{0j}|^2 - \int_0^T a(u_j, u_j) dt + \int_0^T (f, u_j) dt = \int_0^T (\chi_j, u_j) dt$$

et donc (5.52) entraîne

$$(5.53) \quad \int_0^T (\chi_j - \Phi_j(\varphi), u_j - \varphi) dt \geq 0.$$

Prenons :  $\varphi = u_j - \lambda\theta$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\theta \in L^2(0, T; V)$ ; alors, après division par  $\lambda$

$$\int_0^T (\chi_j - \Phi_j(u_j - \lambda\theta), \theta) dt \geq 0$$

et faisant  $\lambda \rightarrow 0$  :

$$\int_0^T (\chi_j - \Phi_j(u_j), \theta) dt \geq 0 \quad \forall \theta \in L^2(0, T; V)$$

d'où (5.50). ■

### 5.6.2. Estimations sur les $u_j$ et $u'_j$

On a déjà (5.48). Par ailleurs, il résulte de (5.14) que l'on a (5.7)<sub>j</sub>. Soit

$$v_0 \in L^2(0, T; V)$$

tel que

$$\int_0^T \Psi(v_0) dt < \infty.$$

Prenons dans (5.7)<sub>j</sub>  $v = v(t) = v_0(t)$ ; on en déduit que :

$$(5.54) \quad \int_0^T \Psi_j(u_j(t)) dt \leq \int_0^T \{ (u'_j, v_0 - u_j) + a(u_j, v_0 - u_j) + \Psi_j(v_0) - (f, v_0 - u_j) \} dt.$$

D'après (5.48) et (5.3) on déduit de (5.54) que

$$(5.55) \quad \int_0^T \Psi_j(u_j(t)) dt \leq C.$$

On peut donc extraire une sous-suite, encore notée  $u_j$ , telle que

$$(5.56) \quad \begin{cases} u_j \rightarrow u & \text{dans } L^2(0, T; V) \text{ faible,} \\ u'_j \rightarrow u' & \text{dans } L^2(0, T; V) \text{ faible et } L^\infty(0, T; H) \text{ faible } *, \end{cases}$$

et d'après (5.5) on a :

$$(5.57) \quad \liminf \int_0^T \Psi_j(u_j) dt \geq \int_0^T \Psi(u) dt.$$

Comme  $u_{0j} \rightarrow u_0$  dans  $V$  et  $u_j(0) \rightarrow u(0)$  dans  $V$  faible et  $u_j(0) = u_{0j}$  on a (5.8).

### 5.6.3. Vérification de (5.7)

Prenons dans (5.7)<sub>j</sub>  $v = v(t)$  où  $t \rightarrow v(t)$  est quelconque dans  $L^2(0, T; V)$ . On en déduit :

$$(5.58) \quad \begin{aligned} \int_0^T [(u'_j, v) + a(u_j, v) + \Psi_j(v) - (f, v - u_j)] dt &\geq \\ &\geq \int_0^T [(u'_j, u_j) + a(u_j, u_j) + \Psi_j(u_j)] dt. \end{aligned}$$

Le deuxième membre de (5.58) vaut

$$Y_j = \frac{1}{2} |u_j(T)|^2 - \frac{1}{2} |u_{0j}|^2 + \int_0^T a(u_j, u_j) dt + \int_0^T \Psi_j(u_j) dt$$

et utilisant en particulier (5.57) on a :

$$\begin{aligned} \liminf Y_j &\geq \frac{1}{2} |u(T)|^2 - \frac{1}{2} |u_0|^2 + \int_0^T a(u, u) dt + \int_0^T \Psi(u) dt = \\ &= \int_0^T [(u', u) + a(u, u) + \Psi(u)] dt. \end{aligned}$$

On déduit donc de (5.58) que

$$(5.59) \quad \int_0^T [(u', v - u) + a(u, v - u) + \Psi(v) - \Psi(u) - (f, v - u)] dt \geq 0 \\ \forall v \in L^2(0, T; V). \quad \blacksquare$$

Soit  $s \in ]0, T[$  fixé quelconque (pour l'instant) et soit  $w \in V$  quelconque. Prenons la famille  $\mathcal{O}_k$  de voisinages de  $s$  :

$$\mathcal{O}_k = ]s - 1/k, s + 1/k[$$

et soit  $v$  définie par

$$v(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } t \in \mathcal{O}_k, \\ w & \text{si } t \in \mathcal{O}_k^c. \end{cases}$$

Alors (5.59) donne

$$(5.60) \quad \int_{\mathcal{O}_k} [(u', w) + a(u, w) + \Psi(w) - (f, w)] dt - \int_{\mathcal{O}_k} [(u', u) + a(u, u) + \Psi(u) - (f, u)] dt \geq 0,$$

d'où encore en désignant par  $|\mathcal{O}_k|$  la mesure de  $\mathcal{O}_k$  :

$$(5.61) \quad (|\mathcal{O}_k|^{-1} \int_{\mathcal{O}_k} u'(t) dt, w) + a(|\mathcal{O}_k|^{-1} \int_{\mathcal{O}_k} u(t) dt, w) + \Psi(w) - (|\mathcal{O}_k|^{-1} \int_{\mathcal{O}_k} f(t) dt, w) - |\mathcal{O}_k|^{-1} \int_{\mathcal{O}_k} [(u', u) + a(u, u) + \Psi(u) - (f, u)] dt \geq 0.$$

Mais, de façon générale, si  $g$  est une fonction mesurable à valeurs scalaires ou vectorielles, alors (*Théorème de Lebesgue*)

$$|\mathcal{O}_k|^{-1} \int_{\mathcal{O}_k} g(t) dt \rightarrow g(s)$$

pour presque tout  $s$ .

On déduit donc de (5.61) que, sauf peut-être pour  $s$  dans un ensemble exceptionnel de mesure nulle, on a :

$$(u'(s), w - u(s)) + a(u(s), w - u(s)) + \Psi(w) - \Psi(u(s)) \geq (f(s), w - u(s))$$

d'où (5.7). Comme la limite  $u$  est *unique*, l'extraction d'une sous-suite de  $u_j$  est inutile, et les Théorèmes 5.1 et 5.2 sont démontrés. ■

## 6. PROPRIÉTÉS DE POSITIVITÉ ET DE COMPARAISON DES SOLUTIONS

### 6.1. Positivité des solutions

De façon générale,  $v$  étant une fonction à valeurs réelles, on pose

$$(6.1) \quad v^+ = \sup(v, 0), \quad v^- = \sup(-v, 0).$$

On va utiliser le Théorème 5.1 avec, dans tous les cas

$$(6.2) \quad V = H^1(\Omega) \quad (2^9)$$

et  $a(u, v)$  donné par (3.62), soit

$$(6.3) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} a_{ij}(x) u_{,j} v_{,i} dx$$

avec (3.63).

On note que  $v \rightarrow v^+$  et  $v \rightarrow v^-$  sont des applications continues (en fait des contractions) de  $H^1(\Omega)$  dans lui-même. Cela posé, on va démontrer le

**Théorème 6.1.** *On se place dans les hypothèses du Théorème 5.1 avec (6.2) et (6.3). On suppose que la fonctionnelle  $\Psi$  vérifie*

$$(6.4) \quad \Psi(v) \geq \Psi(v^+) \quad \forall v \in V.$$

Si l'on suppose en outre que

$$(6.5) \quad f \geq 0 \quad \text{p.p. dans } Q, \quad u_0 \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

alors la notation  $u$  fournie par le Théorème 5.1 vérifie :

$$(6.6) \quad u \geq 0 \quad \text{p.p. dans } Q.$$

*Démonstration*

Dans l'inéquation

$$(6.7) \quad (u'(t), v - u(t)) + a(u(t), v - u(t)) + \Psi(v) - \Psi(u(t)) \geq (f(t), v - u(t))$$

nous prenons

$$v = u^+(t).$$

Alors comme  $u^+(t) - u(t) = u^-(t)$  il vient

$$(6.8) \quad (u'(t), u^-(t)) + a(u(t), u^-(t)) + \Psi(u^+(t)) - \Psi(u(t)) \geq (f(t), u^-(t)).$$

Mais

$$(6.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(\varphi, \varphi^-) = -a(\varphi^-, \varphi^-) \quad (\text{car } a(\varphi^+, \varphi^-) = 0) \\ (u'(t), u^-(t)) = -((u^-(t))', u^-(t)) \end{array} \right.$$

de sorte que (6.8) équivaut à

$$(6.10) \quad ((u^-(t))', u^-(t)) + a(u^-(t), u^-(t)) + \Psi(u(t)) - \Psi(u^+(t)) + (f(t), u^-(t)) \leq 0.$$

(2<sup>9</sup>) Variantes faciles lorsque  $V = H_0^1(\Omega)$  ou par exemple  $V$  est l'espace des fonctions de  $H^1(\Omega)$  nulles sur une partie  $\Gamma_0$  de  $\Gamma$ .

Mais d'après (6.4)  $\Psi(u(t)) - \Psi(u^+(t)) \geq 0$  et comme d'après (6.5)  $f(t) \geq 0$  et comme par définition  $u^-(t) \geq 0$  on a :

$$(f(t), u^-(t)) \geq 0,$$

de sorte que (6.10) entraîne :

$$(6.11) \quad ((u^-(t)), u^-(t)) + a(u^-(t), u^-(t)) \leq 0.$$

On déduit de (6.11) que

$$(6.12) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u^-(t)|^2 + \alpha \|u^-(t)\|^2 \leq c |u^-(t)|^2$$

donc en particulier que

$$(6.13) \quad \frac{d}{dt} |u^-(t)|^2 \leq 2c |u^-(t)|^2.$$

Mais d'après (6.5)  $u_0 \geq 0$  donc  $u^-(0) = 0$  ce qui, joint à (6.13) montre que  $u^-(t) = 0$  donc (6.6). ■

#### Exemple 6.1

Supposons (cf. n° 3) que

$$(6.14) \quad \Psi(v) = \int_{\Gamma} \psi(v) d\Gamma$$

avec

$$(6.15) \quad \psi(\lambda) \geq \psi(0) \quad \text{si} \quad \lambda \leq 0.$$

On a alors  $\psi(\lambda) \geq \psi(\lambda^+) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$  et donc (6.4) a lieu. La propriété (6.15) est vérifiée dans tous les exemples rencontrés au n° 3. Ainsi :

#### Exemple 6.1.1

Soit  $\psi$  donné par (3.33), figure 9. On voit que la solution  $u$  ne dépend pas des valeurs de  $\psi$  pour  $\lambda \leq 0$ , autrement dit si  $f \geq 0$  et  $u_0 \geq 0$ , la température reste  $\geq 0$  (et le procédé de climatisation pour températures  $< 0$  n'a jamais à intervenir ; dans ce cas la climatisation consiste toujours en un apport de froid, jamais de chaleur). ■

#### Exemple 6.1.2

Supposons que  $\psi(\lambda) = 0$  si  $\lambda \geq 0$  et  $\psi(\lambda) \geq 0$  si  $\lambda \leq 0$  <sup>(30)</sup>. Alors comme  $u \geq 0$  on a :  $\Psi(u) = 0$ ,  $\Psi(v) \geq 0$  et la solution  $u$  coïncide avec la solution du problème relatif à  $\Psi = 0$ , i.e.

$$(6.16) \quad \begin{cases} (u', v) + a(u, v) = (f, v) & \forall v \in H^1(\Omega), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

<sup>(30)</sup> C'est le cas d'une cloison semi-perméable qui laisse seulement entrer la chaleur et en contact avec un milieu extérieur à la température 0.

Donc :

$$\begin{aligned} \partial u / \partial t - (a_{ij} u_{,j})_{,i} &= f, \\ \partial u / \partial \nu_A &= 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma, \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad \text{dans} \quad \Omega. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 6.2. Comparaison des solutions (I)

On va maintenant comparer les solutions  $u$  et  $\hat{u}$  correspondant à deux fonctionnelles  $\Psi$  et  $\hat{\Psi}$  différentes.

**Théorème 6.2.** *On se place dans les hypothèses du Théorème 5.1 avec (6.2) et (6.3). Soient  $\Psi$  et  $\hat{\Psi}$  deux fonctionnelles (ayant les propriétés de la fonctionnelle  $\Psi$  au Théorème 5.1) telles que  $\forall v, \hat{v} \in H^1(\Omega)$  on ait :*

$$(6.17) \quad \Psi(\sup(v, \hat{v})) + \hat{\Psi}(\inf(v, \hat{v})) \leq \Psi(v) + \hat{\Psi}(\hat{v}).$$

*Soit  $u$  (resp.  $\hat{u}$ ) la solution donnée par le Théorème 5.1 relative à  $\Psi$  (resp.  $\hat{\Psi}$ ), toutes choses égales d'ailleurs. On a alors :*

$$(6.18) \quad u \geq \hat{u} \quad \text{p.p. dans } Q.$$

*Démonstration*

Introduisons

$$(6.19) \quad \begin{cases} w = \sup(u, \hat{u}) = u + (\hat{u} - u)^+, \\ \hat{w} = \inf(u, \hat{u}) = \hat{u} - (\hat{u} - u)^+. \end{cases}$$

Notons que  $w + \hat{w} = u + \hat{u}$ .

Prenons dans (6.7)  $v = w$  et dans l'inéquation analogue relative à  $\hat{u}$  prenons  $v = \hat{w}$ . Posant

$$(6.20) \quad \theta = \hat{u} - u$$

il vient

$$-(\theta', \theta^+) - a(\theta, \theta^+) + \Psi(w) + \hat{\Psi}(\hat{w}) - \Psi(u) - \hat{\Psi}(\hat{u}) \geq 0$$

d'où, tenant compte de (6.17) :

$$(6.21) \quad (\theta', \theta^+) + a(\theta, \theta^+) \leq 0.$$

Donc

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\theta^+(t)|^2 + a(\theta^+, \theta^+) \leq 0$$

d'où

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\theta^+(t)|^2 + \alpha \|\theta^+(t)\|^2 \leq c |\theta^+(t)|^2.$$

Comme  $u(0) = \hat{u}(0) = u_0$  on a :  $\theta^+(0) = 0$  et donc  $\theta^+ = 0$  d'où (6.18).  $\blacksquare$

## Exemple 6.2

On suppose  $\Psi$  donnée par (6.14) et  $\hat{\Psi}$  donnée par

$$(6.22) \quad \hat{\Psi}(v) = \int_{\Gamma} \hat{\psi}(v) \, d\Gamma.$$

On vérifie sans peine que (6.17) a lieu si

$$(6.23) \quad \psi(\mu) - \psi(\lambda) \leq \hat{\psi}(\mu) - \hat{\psi}(\lambda) \quad \forall \lambda, \mu, \quad \mu \geq \lambda.$$

## Exemple 6.2.1

La propriété (6.13) a lieu si par exemple

$$(6.24) \quad \psi(\lambda) = \hat{\psi}(\lambda - \lambda_0), \quad \lambda_0 > 0,$$

la dérivée de  $\hat{\psi}$  étant croissante.

Cette remarque, appliquée au problème de climatisation, donne le résultat suivant — physiquement évident — si, pour un même second membre et les mêmes températures initiales, on climatise de la même façon autour des « fourchettes »  $(\hat{h}_1, \hat{h}_2)$  et  $(\hat{h}_1 + \lambda_0, \hat{h}_2 + \lambda_0)$ , avec  $\lambda_0 > 0$ , la température relative à  $(\hat{h}_1 + \lambda_0, \hat{h}_2 + \lambda_0)$  est supérieure à celle relative à  $(\hat{h}_1, \hat{h}_2)$ . ■

## 6.3. Comparaison des solutions (II)

On compare maintenant les solutions relatives à une même fonctionnelle  $\Psi$  mais relatives à des données  $\{f, u_0\}$  différentes. On a le

**Théorème 6.3.** *On se place dans les hypothèses du Théorème 5.1 avec (6.2) et (6.3). Soit  $u$  (resp.  $\hat{u}$ ) la solution donnée au Théorème 5.1 relative à  $\{f, u_0\}$  (resp.  $\{f, \hat{u}_0\}$ ). On suppose que*

$$(6.25) \quad f \geq \hat{f} \quad \text{p.p. dans } Q, \quad u_0 \geq \hat{u}_0 \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

et que la fonctionnelle  $\Psi$  vérifie,  $\forall v, \hat{v} \in H^1(\Omega)$  :

$$(6.26) \quad \Psi(v) + \Psi(\hat{v}) - \Psi(\sup(v, \hat{v})) - \Psi(\inf(v, \hat{v})) \geq 0.$$

Alors

$$(6.27) \quad u \geq \hat{u} \quad \text{p.p. dans } Q.$$

## Démonstration

Le principe est le même que dans la démonstration du Théorème 6.2. On obtient, avec les mêmes notations :

$$-(\theta', \theta^+) - a(\theta, \theta^+) + \Psi(w) + \Psi(\hat{w}) - \Psi(u) - \Psi(\hat{u}) \geq (f - \hat{f}, \theta^+),$$

d'où l'on déduit, en tenant compte de (6.26) :

$$(6.28) \quad (\theta', \theta^+) + a(\theta, \theta^+) + (f - \hat{f}, \theta^+) \leq 0.$$

Mais d'après (6.25),  $(f - \hat{f}, \theta^+) \geq 0$  donc (6.28) entraîne

$$(6.29) \quad (\theta', \theta^+) + a(\theta, \theta^+) \leq 0.$$

Mais  $\theta^+(0) = (\hat{u}_0 - u_0)^+ = 0$  (d'après (6.25)) et donc  $\theta^+(t) = 0$  d'où (6.27). ■

### Exemple 6.3

Si l'on suppose  $\Psi$  donnée par (6.14) alors (6.26) a lieu et, plus précisément :

$$(6.30) \quad \Psi(v) + \Psi(\hat{v}) - \Psi(\sup(v, \hat{v})) - \Psi(\inf(v, \hat{v})) = 0.$$

#### Exemple 6.3.1

Appliqué au problème de la climatisation, ce résultat montre — ce qui était, ici encore, physiquement évident — que si l'on climatise de la même façon, soit  $u$  (resp.  $\hat{u}$ ) la température relative à un second membre  $f$  (resp.  $\hat{f}$ ) et une température initiale  $u_0$  (resp.  $\hat{u}_0$ ); alors si  $f \geq \hat{f}$  et  $u_0 \geq \hat{u}_0$  on a :  $u \geq \hat{u}$  p.p..

En particulier si  $\psi$  est donnée par la figure 9 et si  $u_0(x) \geq u_1(x)$ , avec

$$0 \leq u_1(x) \leq h_2(x), \quad \text{alors} \quad u(x, t) \geq u_1(x). \quad \blacksquare$$

## 7. PROBLÈMES STATIONNAIRES

Nous reprenons maintenant la situation du n° 3.5, avec

$$(7.1) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} a_{ij}(x) u_{,j} v_{,i} dx,$$

où les  $a_{ij} \in L^{\infty}(\Omega)$  satisfont à (3.63).

On commence par le cas où l'on remplace  $a(u, v)$  par  $a(u, v) + c(u, v)$ ,  $c > 0$ .

### 7.1. Le cas strictement coercif

Dans tout ce numéro on prend

$$(7.2) \quad V = H^1(\Omega), \quad \Omega \text{ ouvert borné de } \mathbb{R}^n.$$

Alors sous l'hypothèse (3.63) on a :

$$(7.3) \quad a(v, v) \geq \int_{\Omega} v_{,i} v_{,i} dx$$

mais l'on n'a pas  $a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$ ; d'ailleurs  $a(1, 1) = 0$ .

Par contre, on a évidemment

$$(7.4) \quad a(v, v) + c |v|^2 \geq \min(\alpha, c) \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \min(\alpha, c) \|v\|^2$$

en posant  $|v|^2 = \int_{\Omega} v^2 dx$  et  $\|v\| = \|v\|_{H^1(\Omega)}$ .



On prendra <sup>(31)</sup> dans ce numéro,  $\Psi$  comme en (3.10)

$$(7.5) \quad \Psi(v) = \int_{\Gamma} \psi(v(x)) \, d\Gamma$$

ou, plus généralement

$$(7.6) \quad \Psi(v) = \int_{\Gamma} \psi(x; v(x)) \, d\Gamma \quad (\text{cf. Remarque 3.2}).$$

On fait des hypothèses analogues à (5.3), (5.4), (5.5) : on suppose qu'il existe une famille de fonctions  $\Psi_j$  différentiables sur  $V$  telles que

$$(7.7) \quad \forall v \in V, \quad \Psi_j(v) \rightarrow \Psi(v),$$

$$(7.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(identique à (5.4)) il existe une suite } \varphi_j \text{ bornée dans } V \text{ telle que} \\ \Psi_j(\varphi_j) = 0 \quad \forall j, \end{array} \right.$$

$$(7.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } v_j \rightarrow v \text{ dans } V \text{ faible, } \Psi_j(v_j) \leq \text{Cte, alors} \\ \liminf \Psi_j(v_j) \geq \Psi(v). \end{array} \right.$$

**Théorème 7.1.** *On se place dans les hypothèses (3.63), (7.7), (7.8), (7.9). Soit  $c > 0$ . Soit  $v \rightarrow (f, v)$  une forme linéaire continue sur  $V$ . Il existe  $u \in V$  unique tel que*

$$(7.10) \quad a(u, v - u) + c(u, v - u) + \Psi(v) - \Psi(u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in V.$$

*Remarque 7.1*

Dans le cas où  $a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v$  alors (cf. (3.73)) le problème (7.10) équivaut à la recherche de  $u$  minimisant la fonctionnelle

$$(7.11) \quad J(v) = \frac{1}{2}[a(v, v) + c|v|^2] + \Psi(v) - (f, v);$$

dans ce cas, la démonstration de l'existence d'une solution est immédiate (sans introduire les  $\Psi_j$ ). En effet, le problème équivaut à la minimisation de la fonctionnelle  $J$  sur l'ensemble fermé convexe (éventuellement identiques à  $V$ ) des  $v$  tels que  $\Psi(v) < \infty$ ; or la fonction  $v \rightarrow J(v)$  est convexe, semi-continue inférieurement pour la topologie faible de  $V$  et enfin (grâce à l'introduction du terme  $c|v|^2$ )  $J(v) \rightarrow +\infty$  si  $\|v\| \rightarrow \infty$ . D'où l'existence d'une solution. Comme, en outre, la fonction  $v \rightarrow J(v)$  est strictement convexe, on a aussi l'unicité, d'où le théorème dans le cas symétrique. ■

*Démonstration de l'unicité*

La démonstration de l'unicité est analogue, en plus simple, à celle du n° 5.5. Soient  $u$  et  $u_*$  deux solutions éventuelles; si l'on prend  $v = u_*$  (resp.  $v = u$ ) dans

<sup>(31)</sup> Pour fixer les idées. On a des résultats analogues à ceux qui suivent pour  $\Psi$  donnée par (3.11).

(7.10) (resp. dans l'inéquation analogue relative à  $u_*$ ) et si l'on additionne, il vient, en posant  $w = u - u_*$  :

$$-a(w, w) - c \|w\|^2 \geq 0$$

d'où  $w = 0$  grâce à (7.4). ■

*Principe de la Démonstration de l'Existence* <sup>(32)</sup>

1) On remplace d'abord  $\Psi$  par  $\Psi_j$  dans (7.10) ; on cherche donc  $u_j$  solution de

$$(7.12) \quad a(u_j, v - u_j) + c(u_j, v - u_j) + \Psi_j(v) - \Psi_j(u_j) \geq (f, v - u_j) \quad \forall v \in V.$$

Comme  $\Psi_j$  est différentiable, l'inéquation (7.12) équivaut à l'équation :

$$(7.13) \quad a(u_j, v) + c(u_j, v) + (\Phi_j(u_j), v) = (f, v) \quad \forall v \in V$$

où l'on a posé

$$(7.14) \quad \Phi_j = \Psi_j'.$$

Pour la résolution de (7.13) on utilise la méthode de Galerkin.

Prenant une « base »  $w_1, \dots, w_m, \dots$ , de  $V$  comme au n° 5.6.1 (avec  $\varphi_j \in$  espace engendré par  $w_1$ ) on cherche donc  $u_{jm}$  avec

$$(7.15) \quad u_{jm} \in [w_1, \dots, w_m],$$

$$(7.16) \quad a(u_{jm}, w_k) + c(u_{jm}, w_k) + (\Phi_j(u_{jm}), w_k) = (f, w_k), \quad 1 \leq k \leq m.$$

L'existence de  $u_{jm}$  solution de (7.15), (7.16) résulte du théorème de point fixe de Brouwer (cf. par exemple Lions [1], Lemme 4.3, p. 53).

Les estimations a priori sur  $u_{jm}$  : on déduit de (7.16), grâce au fait que  $\varphi_j = \xi w_1$  pour  $\xi$  réel convenable, que

$$(7.17) \quad \begin{aligned} a(u_{jm}, u_{jm} - \varphi_j) + c(u_{jm}, u_{jm} - \varphi_j) + (\Phi_j(u_{jm}) - \Phi_j(\varphi_j), u_{jm} - \varphi_j) = \\ = (f, u_{jm} - \varphi_j) \quad (\text{car } \Phi_j(\varphi_j) = 0); \end{aligned}$$

comme  $\Phi_j$  est monotone, on déduit de (7.17) que

$$(7.18) \quad a(u_{jm}, u_{jm} - \varphi_j) + c(u_{jm}, u_{jm} - \varphi_j) \leq (f, u_{jm} - \varphi_j)$$

d'où  $(\alpha_1 = \min(\alpha, c))$

$$\alpha_1 \|u_{jm}\|^2 \leq c_1 \|u_{jm}\| + c_2$$

et donc

$$(7.19) \quad \|u_{jm}\| \leq c_3 = \text{constante indépendante de } j \text{ et de } m.$$

<sup>(32)</sup> Cette démonstration peut être passée pour la lecture de la suite du Livre. C'est pourquoi on ne donne que les étapes essentielles de la démonstration.

Grâce à (7.19), on peut extraire de  $u_{j_m}$  une suite  $u_{j_\mu}$  telle que

$$(7.20) \quad u_{j_\mu} \rightarrow u_j \quad \text{dans } V \text{ faible.}$$

Utilisant la monotonie de  $\Phi_j$  on montre que (cf. Minty [1], Browder [1], Lions [1]) :

$$(7.21) \quad \Phi_j(u_{j_\mu}) \rightarrow \Phi_j(u_j) \quad \text{dans } V' \text{ faible}$$

et que  $u_j$  vérifie (7.13). On déduit en outre de (7.19) que

$$(7.22) \quad \|u_j\| \leq c_3.$$

2) D'après (7.22), on peut extraire de  $u_j$  une suite encore notée  $u_j$  telle que

$$(7.23) \quad u_j \rightarrow u \quad \text{dans } V \text{ faible.}$$

D'après (7.12) où l'on fixe  $v = v_0$  tel que  $\Psi(v_0) < \infty$  (et alors d'après (7.7),  $\Psi_j(v_0) \leq \text{Cte}$ ) on a

$$(7.24) \quad \Psi_j(u_j) \leq \text{Cte.}$$

On a donc, d'après (7.9)

$$(7.25) \quad \liminf_j \Psi_j(u_j) \geq \Psi(u).$$

On écrit (7.12) sous la forme

$$(7.26) \quad a(u_j, v) + c(u_j, v) + \Psi_j(v) - (f, v - u_j) \geq a(u_j, u_j) + c|u_j|^2 + \Psi_j(u_j);$$

mais  $\liminf_j [a(u_j, u_j) + c|u_j|^2] \geq a(u, u) + c|u|^2$ ; on déduit alors de (7.26) que

$$a(u, v) + c(u, v) + \Psi(v) - (f, v - u) \geq a(u, u) + c|u|^2 + \Psi(u)$$

d'où (7.10). ■

### Remarque 7.2

La démonstration précédente donne aussi un *résultat d'approximation* : d'après (7.23) on approche  $u$  par  $u_j$  solutions des équations (régularisées et pénalisées) (7.13). Notons aussi que des remarques analogues à celles du n° 5.4 sont valables ici. ■

## 7.2. Approximation de l'état stationnaire par la solution des problèmes d'évolution lorsque $t \rightarrow +\infty$

Notons que les hypothèses (5.3), (5.5) entraînent (7.7), (7.9) ((5.4) et (7.8) sont identiques); il suffit en effet de prendre dans (5.3), (5.5) des fonctions *indépendantes de  $t$* . On va démontrer le

**Théorème 7.2.** *On se place dans les hypothèses du Théorème 5.1 avec*

$$(7.27) \quad f(t) = f \text{ indépendant de } t.$$

Soit  $u(t) = u$  la solution de

$$(7.28) \quad \begin{cases} (u'(t), v - u(t)) + a(u(t), v - u(t)) + c(u(t), v - u(t)) + \\ \qquad \qquad \qquad + \Psi(v) - \Psi(u(t)) \geq (f, v - u(t)) \end{cases} \quad \forall v \in V,$$

$$(7.29) \quad u(0) = u_0$$

et soit  $w$  la solution donnée par le Théorème 7.1, soit

$$(7.30) \quad a(w, v - w) + c(w, v - w) + \Psi(v) - \Psi(w) \geq (f, v - w) \quad \forall v \in V.$$

Alors

$$(7.31) \quad u(t) \rightarrow w \text{ dans } H = L^2(\Omega) \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty,$$

et plus précisément

$$(7.32) \quad \|u(t) - w\| \leq c_1 \exp(-c_2 t), \quad c_i > 0.$$

*Démonstration*

Prenant  $v = w$  (resp.  $u(t)$ ) dans (7.28) (resp. (7.30)) et posant

$$m(t) = u(t) - w,$$

on trouve

$$- (m'(t), m(t)) - [a(m(t), m(t)) + c \|m(t)\|^2] \geq 0$$

d'où

$$(7.33) \quad \frac{d}{dt} \|m(t)\|^2 + 2 \alpha_1 \|m(t)\|^2 \leq 0.$$

Mais  $\|v\| \geq d \|v\|$ , donc on déduit de (7.33) que

$$\frac{d}{dt} (\exp(2 \alpha_1 dt) \|m(t)\|^2) \leq 0$$

d'où

$$(7.34) \quad \|m(t)\|^2 \leq \|u_0 - w\|^2 \exp(-2 \alpha_1 dt)$$

ce qui montre (7.32) (en y précisant les constantes). ■

**Corollaire 7.1.** *On a, pour la solution des problèmes stationnaires, des propriétés de positivité et de comparaison des solutions analogues à celles des Théorèmes 6.1, 6.2, 6.3.*

*Démonstration*

En effet, on passe à la limite en  $t$  dans les propriétés des Théorèmes 6.1, 6.2, 6.3. ■

## Remarque 7.3

On peut naturellement aussi démontrer *directement* — par les méthodes données aux Théorèmes 6.1, 6.2, 6.3 — les propriétés données dans le corollaire précédent. ■

## 7.3. Le cas non strictement coercif

On va maintenant examiner le cas où «  $c = 0$  ». On se bornera *au cas symétrique* :

$$(7.35) \quad a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V$$

de sorte que l'on est dans le cadre de la Remarque 7.1, avec  $c = 0$ , i.e. *les deux problèmes suivants sont équivalents* :

$$(7.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v - u) + \Psi(v) - \Psi(u) \geq (f, v - u) \end{array} \right.$$

$$(7.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V \text{ minimisant} \\ J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) + \Psi(v) - (f, v). \end{array} \right.$$

Comme  $a(1, 1) = 0$  il peut être *inexact* que  $J(v) \rightarrow +\infty$  si  $\|v\| \rightarrow \infty$ ; *on n'a donc pas en général existence* (cf. d'ailleurs déjà la Remarque 2.5). ■

Donnons d'abord un lemme technique essentiel pour la suite :

**Lemme 7.1.** *Il existe des constantes  $\beta_i > 0$  telles que  $\forall v \in H^1(\Omega)$  on ait :*

$$(7.38) \quad a(v, v) + \int_{\Gamma} |v|^2 d\Gamma \geq \beta_1 \|v\|^2 \quad (\|v\| = \|v\|_{H^1(\Omega)}),$$

$$(7.39) \quad a(v, v) + (\int_{\Gamma} v d\Gamma)^2 \geq \beta_2 \|v\|^2.$$

## Démonstration

Démontrons par exemple (7.39), la démonstration de (7.38) étant en tous points analogue. La quantité

$$\| \| v \| \| = (a(v, v) + (\int_{\Gamma} v d\Gamma)^2)^{1/2}$$

est une *norme* sur  $V$ ; en effet c'est évidemment une semi-norme et si  $\| \| v \| \| = 0$  alors  $a(v, v) = 0$ , donc d'après (7.3)  $v = \text{Cte}$  et  $\int_{\Gamma} v d\Gamma = 0$ , donc  $v = 0$ .

L'espace  $H^1(\Omega) = V$  est *complet* pour la norme  $\| \| \cdot \| \|$ . En effet, soit  $v_m$  une suite de Cauchy pour cette norme. Alors  $\forall i$   $v_{m,i}$  est une suite de Cauchy dans  $L^2(\Omega)$  et

$$(7.40) \quad \int_{\Gamma} v_m d\Gamma \rightarrow \xi \in \mathbb{R}.$$

Comme les  $v_{m,i}$  convergent dans  $L^2(\Omega)$  il résulte de Deny-Lions [1] que l'on peut trouver des constantes  $k_m$  telles que

$$(7.41) \quad \left\{ \begin{array}{ll} v_m + k_m \rightarrow v & \text{dans } L^2(\Omega) \\ v_{m,i} \rightarrow v_{,i} & \text{dans } L^2(\Omega). \end{array} \right.$$

Il résulte de (7.41) que

$$\int_{\Gamma} (v_m + k_m) d\Gamma \rightarrow \int_{\Gamma} v d\Gamma$$

ce qui, joint à (7.40) montre que  $k_m \rightarrow k$  et donc  $v_m \rightarrow v$  dans  $H^1(\Omega)$ .

Considérons alors l'application  $I$  (= identité) de  $V$  muni de  $\| \cdot \|$  dans  $V$  muni de  $\| \cdot \|$ . Cette application linéaire a un *graphe fermé* car la topologie définie par  $\| \cdot \|$  est plus fine que celle définie par  $\| \cdot \|$ . Comme  $V$  est un espace de Banach (en fait de Hilbert) pour chacune des normes, il résulte du *théorème du graphe fermé* (cf. par exemple Bourbaki [1]) que l'application  $I$  est *continue*, donc il existe une constante  $c$  telle que

$$\| v \| \leq c \| v \|$$

d'où (7.39). ■

On déduit aussitôt de (7.39) que si  $\psi(\lambda)$  est à croissance plus rapide que linéaire lorsque  $\lambda \rightarrow \pm \infty$  (i.e.  $\psi(\lambda)/\lambda \rightarrow \pm \infty$  si  $\lambda \rightarrow \pm \infty$ ) (donc a fortiori si  $\psi(\lambda) = +\infty$  pour  $|\lambda|$  assez grand) alors  $J(v) \rightarrow +\infty$  si  $\|v\| \rightarrow \infty$ , d'où aussitôt l'existence d'une solution.

Le cas intéressant – et d'ailleurs c'est le cas utile dans les applications – est donc celui où  $\psi(\lambda)$  est à « croissance linéaire » lorsque  $\lambda \rightarrow +\infty$  ou (et)  $\lambda \rightarrow -\infty$ . On introduit donc

$$(7.42) \quad \psi_{\pm} = \lim_{\lambda \rightarrow \pm \infty} \psi(\lambda)/\lambda$$

en supposant que l'un au moins des nombres  $\psi_+$  ou  $\psi_-$  est fini <sup>(33)</sup>; dans tous les cas

$$(7.43) \quad \psi_- < 0 < \psi_+.$$

*Remarque 7.4*

On introduit donc aussi, si  $\psi(\lambda) = \psi(x; \lambda)$  :

$$(7.44) \quad \psi_{\pm}(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \pm \infty} \psi(x; \lambda)/\lambda$$

supposant ces limites *uniformes* en  $x \in \Gamma$ . ■

### 7.3.1. Conditions nécessaires pour l'existence de solutions

On va démontrer le

**Théorème 7.3.** *On se place dans les hypothèses (7.35), (7.42). Pour qu'il existe une solution du problème (7.36) ou (7.37) il est nécessaire que l'on ait :*

$$(7.45) \quad \int_{\Gamma} \psi_- d\Gamma \leq (f, 1) \leq \int_{\Gamma} \psi_+ d\Gamma.$$

<sup>(33)</sup> Dans ce qui suit la condition faisant intervenir  $\psi_+$  (resp.  $\psi_-$ ) devient sans objet si  $\psi_+ = +\infty$  (resp.  $\psi_- = -\infty$ ).

*Remarque 7.5*

Naturellement (7.45) équivaut à

$$|\Gamma| \psi_- \leq (f, 1) \leq |\Gamma| \psi_+, \quad |\Gamma| = \text{mesure de } \Gamma.$$

La condition (7.45) s'étend au cas (7.44) sous la forme

$$(7.45\text{bis}) \quad \int_{\Gamma} \psi_-(x) d\Gamma \leq (f, 1) \leq \int_{\Gamma} \psi_+(x) d\Gamma. \quad \blacksquare$$

*Remarque 7.6*

On peut prendre  $f \in V'$  donnée par

$$(7.46) \quad (f, v) = \int_{\Omega} f_0 v dx + \int_{\Gamma} f_1 v d\Gamma$$

où

$$f_0 \in L^2(\Omega), \quad f_1 \in L^2(\Gamma) \quad (\text{et même } \in H^{-1/2}(\Gamma)).$$

Alors

$$(f, 1) = \int_{\Omega} f_0 dx + \int_{\Gamma} f_1 d\Gamma. \quad \blacksquare$$

*Remarque 7.7*

Dans le cadre de la Remarque 2.5, on a :

$$\psi(\lambda) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda < h \\ 0 & \text{si } \lambda \geq h \end{cases}$$

donc  $\psi_+ = 0$ ,  $\psi_- = -\infty$  et (7.45) se réduit à

$$(7.47) \quad (f, 1) \leq 0.$$

Si l'on prend (7.46) avec  $f_1 = 0$ , on obtient

$$\int_{\Omega} f_0 dx \leq 0. \quad \blacksquare$$

*Démonstration du Théorème 7.3*

Prenons  $v = \lambda \in \mathbb{R}$ ; alors

$$J(\lambda) = \Psi(\lambda) - \lambda(f, 1) = \lambda[\lambda^{-1} \int_{\Gamma} \psi(\lambda) d\Gamma - (f, 1)]$$

et  $J(\lambda)$  n'est bornée inférieurement pour  $\lambda \rightarrow \pm \infty$  que si (7.45) a lieu.  $\blacksquare$

### 7.3.2. Conditions suffisantes pour l'existence d'une solution

**Théorème 7.4.** *On se place dans les hypothèses (7.35), (7.42) et l'on suppose que (conditions strictes correspondant à (7.45)) :*

$$(7.48) \quad \int_{\Gamma} \psi_- d\Gamma < (f, 1) < \int_{\Gamma} \psi_+ d\Gamma,$$

et que

$$(7.49) \quad \left| \begin{array}{l} \text{la fonction } \psi \text{ est lipschitzienne sur l'ensemble où } \psi(\lambda) \neq \infty. \\ \text{Alors il existe une solution du problème (7.36) ou (7.37).} \end{array} \right.$$

*Démonstration*

Pour  $v \in H^1(\Omega)$ , on pose

$$(7.50) \quad \bar{v} = |\Gamma|^{-1} \int v \, d\Gamma$$

et

$$(7.51) \quad \tilde{v} = v - \bar{v}.$$

Alors  $\int_{\Gamma} \tilde{v} \, d\Gamma = 0$  et (7.39) appliquée à  $\tilde{v}$  donne

$$(7.52) \quad a(\tilde{v}, \tilde{v}) \geq \beta_2 \|\tilde{v}\|^2.$$

Utilisant (7.51) on a :

$$(7.53) \quad J(v) = \frac{1}{2} a(\tilde{v}, \tilde{v}) - (f, \tilde{v}) + \Psi(\bar{v} + \tilde{v}) - \bar{v}(f, 1).$$

On va montrer (ce qui suffit pour montrer le Théorème) que

$$(7.54) \quad J(v) \rightarrow +\infty \quad \text{si} \quad \|v\| \rightarrow \infty.$$

Explicitons la démonstration dans le cas où

$$(7.55) \quad \psi(\lambda) = \infty \quad \text{si} \quad \lambda < h, \quad \psi_+ > 0 \text{ fini};$$

la démonstration est analogue si  $\psi_-$  et  $\psi_+$  sont finis.

D'après (7.55), on se borne aux fonctions  $v \in K$ ,  $K$  défini par

$$(7.56) \quad K = \{v \mid v(x) \geq h \text{ p.p. sur } \Gamma\}.$$

Noter que l'on a alors

$$(7.57) \quad \bar{v} \geq h.$$

Comme  $\psi$  est lipschitzienne, il existe une constante  $c$  telle que

$$\psi(\bar{v} + \tilde{v}(x)) - \psi(\bar{v}) \geq -c |\tilde{v}(x)|$$

et par conséquent, les  $\bar{c}$  désignant des constantes diverses :

$$(7.58) \quad \Psi(\bar{v} + \tilde{v}) - \Psi(\bar{v}) \geq -c \|\tilde{v}\|.$$

On déduit de (7.52) et (7.58) que

$$(7.59) \quad J(v) \geq \frac{1}{2} \beta_2 \|\tilde{v}\|^2 - c \|\tilde{v}\| + \bar{v}[\int_{\Gamma} (\psi(\bar{v})/\bar{v}) \, d\Gamma - (f, 1)].$$

Mais d'après (7.48) on a :

$$\int_{\Gamma} (\psi(\bar{v})/\bar{v}) \, d\Gamma - (f, 1) > 0$$

pour  $\bar{v}$  assez grand d'où (7.54). ■



### 7.3.3. Le problème de l'unicité sous l'hypothèse (7.48)

Commençons par un *contre-exemple* montrant qu'il n'y a pas nécessairement unicité de la solution. Prenons en effet  $\psi$  comme à l'Exemple 3.2 (Fig. 7). Alors :

$$(7.60) \quad \psi_+ = g_2, \quad \psi_- = g_1.$$

Soit  $f$  donnée avec

$$(7.61) \quad (f, 1) = 0;$$

donc (7.48) a lieu.

Il existe alors  $u$  solution du problème de Neumann

$$(7.62) \quad a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

toutes les solutions de (7.62) étant données par  $u + c$ . Donc

$$Au = f, \quad \partial u / \partial \nu_A = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Supposons que  $u$  est bornée sur  $\Gamma$  et supposons que les constantes  $h_1$  et  $h_2$  intervenant dans  $\psi$  vérifient

$$(7.63) \quad h_1 \leq u(x) \leq h_2, \quad x \in \Gamma.$$

Alors, pour toute constante  $c$  telle que  $w = u + c$  vérifie

$$h_1 \leq w(x) \leq h_2, \quad x \in \Gamma$$

on a :

$$a(w, v - w) + \Psi(v) - \Psi(w) \geq (f, v - w).$$

Le problème (7.36) peut donc admettre une infinité de solutions. ■

Le problème de l'unicité éventuelle ne peut donc être résolu qu'en examinant chaque cas particulier. Donnons un exemple d'unicité.

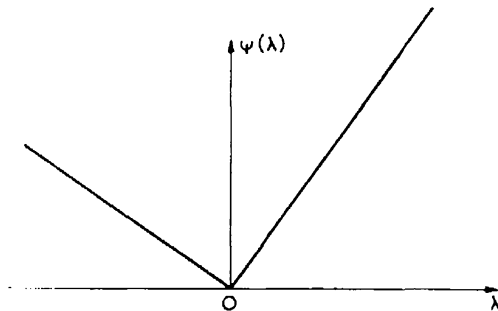


Figure 14.

On va supposer que  $\psi$  est donnée par (Fig. 14)

$$(7.64) \quad \psi(\lambda) = \begin{cases} g_1 \lambda & \text{si } \lambda \leq 0 \\ g_2 \lambda & \text{si } \lambda \geq 0. \end{cases}$$

On a encore (7.60). On va démontrer le

**Théorème 7.5.** *On suppose que (7.35) a lieu et que  $\psi$  est donnée par (7.64). On suppose que (7.48) a lieu <sup>(34)</sup> et que*

$$(f, v) = \int_{\Omega} f_0 v \, dx, \quad f_0 \in L^2(\Omega) \quad (35).$$

*Il y a alors unicité.*

*Démonstration <sup>(36)</sup>*

Si  $u$  et  $u_*$  sont deux solutions éventuelles de (7.36) alors faisant  $v = u_*$  (resp.  $v = u$ ) dans (7.36) (resp. l'inéquation analogue relative à  $u_*$ ) on obtient par addition

$$a(u - u_*, u - u_*) \leq 0$$

donc

$$u - u_* = c \quad (37).$$

Soient donc  $u$  et  $u + c$  deux solutions éventuelles. Il faut montrer que  $c = 0$ . Les conditions aux limites sont (cf. (3.69)) sur  $\Gamma$  :

$$(7.65) \quad \begin{cases} u > 0 \Rightarrow \partial u / \partial v_A + g_2 = 0, \\ u = 0 \Rightarrow -g_2 < \partial u / \partial v_A < -g_1, \\ u < 0 \Rightarrow \partial u / \partial v_A + g_1 = 0, \end{cases}$$

et

$$(7.66) \quad \begin{cases} u + c > 0 \Rightarrow \partial u / \partial v_A + g_2 = 0, \\ u + c = 0 \Rightarrow -g_2 < \partial u / \partial v_A < -g_1, \\ u + c < 0 \Rightarrow \partial u / \partial v_A + g_1 = 0. \end{cases}$$

Vérifions d'abord que les alternatives suivantes sont impossibles, ou entraînent  $c = 0$  :

$$(7.67) \quad \partial u / \partial v_A + g_1 = 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma \quad (\text{ou } \partial u / \partial v_A + g_2 = 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma),$$

$$(7.68) \quad -g_2 < \partial u / \partial v_A < -g_1 \quad \text{sur } E \subset \Gamma, \quad \text{mesure}(E) > 0.$$

En effet, de  $Au = f_0$  et (7.67) on déduit, avec la formule de Green, que

$$(f_0, 1) = \int_{\Gamma} g_1 \, d\Gamma,$$

<sup>(34)</sup> I.e.  $g_1 |\Gamma| < (f, 1) < g_2 |\Gamma|$ .

<sup>(35)</sup> Uniquement pour simplifier l'exposé.

<sup>(36)</sup> Cette démonstration peut être passée.

<sup>(37)</sup> Cela est *général*, i.e. indépendant du fait que  $\psi$  est donnée par (7.64).

ce qui est impossible d'après (7.48) ; si (7.68) a lieu alors d'après (7.65), (7.66) on a :

$$u = u + c = 0 \quad \text{sur} \quad E, \quad \text{donc} \quad c = 0.$$

Le seul cas qui reste à examiner est donc <sup>(38)</sup> celui où

$$(7.69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial u / \partial \nu_A = -g_1 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1, \quad \text{mesure}(\Gamma_1) > 0, \\ \partial u / \partial \nu_A = -g_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2, \quad \text{mesure}(\Gamma_2) > 0, \\ \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \quad (\text{à un ensemble de mesure nulle près}), \end{array} \right.$$

et il faut montrer que (7.69) entraîne  $c = 0$ .

D'après (7.65), (7.66) on a :

$$\begin{array}{ll} u < 0, & u + c < 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1, \\ u > 0, & u + c > 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2. \end{array}$$

Supposons  $c > 0$  (le raisonnement est le même pour  $c < 0$ ) ; alors

$$(7.70) \quad u < -c \quad \text{sur} \quad \Gamma_1, \quad u > 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2.$$

Mais, d'après (7.69),  $\partial u / \partial \nu_A \in L^2(\Gamma)$  ce qui d'après la théorie des problèmes aux limites non homogènes entraîne (cf. Lions-Magenes [1] <sup>(39)</sup>)

$$(7.71) \quad u \in H^1(\Gamma).$$

On va maintenant montrer <sup>(40)</sup> que (7.70), (7.71) entraînent  $c = 0$ .

Soit  $P$  l'opérateur de projection de  $\mathbb{R} \rightarrow [-c, 0]$  ; si  $\varphi \in L^2(\Gamma)$  désignons par  $P\varphi$  la fonction  $x \rightarrow P(\varphi(x))$ . L'application  $P$  opère (et est une contraction) de  $H^1(\Gamma)$  dans lui-même. Or d'après (7.70) on a :

$$(7.72) \quad Pu = \{ -c \quad \text{sur} \quad \Gamma_1, \quad 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \}.$$

Mais (7.72) implique que  $c = 0$  lorsque  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$  (à un ensemble de mesure nulle près) ; en effet, les dérivées du premier ordre de  $Pu$  prises au sens des distributions sur  $\Gamma$  ou au sens usuel coïncident (cf. par exemple Demy-Lions [1]) ; d'après (7.72) les dérivées premières usuelles de  $Pu$  sont nulles p.p. donc  $Pu = Cte$  sur  $\Gamma$  donc  $c = 0$ . ■

<sup>(38)</sup> C'est l'analogie du Bang Bang du contrôle optimal.

<sup>(39)</sup> On suppose  $\Gamma$  et les coefficients  $a_{ij}$  assez réguliers.

<sup>(40)</sup> Le raisonnement qui suit, qui nous a été indiqué par J. Demy, est emprunté à la théorie des « espaces de Dirichlet » ; cf. A. Beurling et J. Demy [1].

7.3.4. Les cas limites dans (7.48) <sup>(41)</sup>

On examine maintenant le cas où l'on a une égalité dans (7.48), dans le cadre du Théorème 7.5. On a le :

**Théorème 7.6.** *On suppose que (7.35) a lieu, que  $\psi$  est donnée par (7.64) et que*

$$(f, v) = \int_{\Omega} f_0 v \, dx, \quad f_0 \in L^2(\Omega).$$

*On suppose que*

$$(7.73) \quad (f, 1) = \int_{\Gamma} \psi_- \, d\Gamma \quad (= g_1 | \Gamma |)$$

*(resp. que*

$$(7.74) \quad (f, 1) = \int_{\Gamma} \psi_+ \, d\Gamma \quad (= g_2 | \Gamma |)).$$

*Soit  $w_1$  (resp.  $w_2$ ) la solution <sup>(42)</sup> de :*

$$(7.75) \quad Aw_1 = f_0, \quad \partial w_1 / \partial \nu_A + g_1 = 0, \quad \int_{\Gamma} w_1 \, d\Gamma = 0 \quad (43)$$

*(resp. de*

$$(7.76) \quad Aw_2 = f_0, \quad \partial w_2 / \partial \nu_A + g_2 = 0, \quad \int_{\Gamma} w_2 \, d\Gamma = 0).$$

*Le problème (7.36) (ou (7.37)) admet une solution si et seulement si*

$$(7.77) \quad w_1 \text{ (resp. } w_2) \text{ est bornée supérieurement (resp. inférieurement) sur } \Gamma.$$

*Si (7.77) a lieu, toutes les solutions sont données par*

$$(7.78) \quad u = w_i + c$$

*où  $c$  est n'importe quelle constante telle que*

$$(7.79) \quad w_1 + c \leq 0 \quad (\text{resp. } w_2 + c \geq 0) \text{ sur } \Gamma.$$

**Remarque 7.8**

Puisque  $f_0 \in L^2(\Omega)$  et  $g_i \in H^{1/2}(\Gamma)$  on a :  $w_i \in H^2(\Omega)$  donc  $w_i|_{\Gamma} \in H^{3/2}(\Gamma)$  et on montre (cf. J. Peetre [1]) que cela entraîne

$$(7.80) \quad w_i \in L^{\infty}(\Gamma) \quad \text{— et même } w_i \in \mathcal{C}^0(\Gamma) \text{ —,}$$

$$\text{si } \frac{1}{2} - \frac{3}{2(n-1)} < 0 \quad \text{i.e. } n < 4.$$

Donc l'hypothèse (7.77) est toujours réalisée si  $n \leq 3$  — i.e. dans tous les cas pratiques. ■

<sup>(41)</sup> Ce numéro peut être passé.

<sup>(42)</sup> Il y a existence de  $w_1$  (resp.  $w_2$ ) grâce à (7.73) (resp. (7.74)).

<sup>(43)</sup> Condition qui fixe  $w_1$  de façon unique et peut être remplacée par n'importe quelle autre condition linéaire fixant  $w_1$  de manière unique.

### Démonstration du Théorème 7.6

Démontrons le Théorème dans le cas (7.73). Si  $u$  est solution éventuelle, on a :

$$(7.81) \quad Au = f_0$$

et (cf. (7.65))  $-g_2 \leq \partial u / \partial v_A \leq -g_1$ .

Mais (7.81) et la formule de Green entraînent

$$(f, 1) + \int_{\Gamma} (\partial u / \partial v_A) d\Gamma = 0$$

ce qui entraîne avec (7.73) que l'on a nécessairement

$$\partial u / \partial v_A + g_1 = 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma.$$

Donc comparant à (7.75) on a nécessairement

$$u = w_1 + c$$

qui n'est effectivement solution que si (cf. (7.65))  $u \leq 0$  sur  $\Gamma$  i.e.  $w_1 \leq -c$  pour  $c$  constante convenable. D'où le résultat suit. ■

## 8. Commentaires

La bibliographie pour les Rappels de Mécanique du n° 1 est donnée dans le texte.

Les problèmes de thermique et de parois semi-perméables exposés au n° 2 ont été introduits par les auteurs : Duvaut-Lions [1], [2].

Les problèmes d'inéquations variationnelles d'évolution, dans le cas *parabolique*, ont été introduits dans Lions-Stampacchia [1], sous une forme moins générale que celle donnée au n° 3 (et qui est indispensable pour la résolution des problèmes posés au n° 2). On a essayé de donner une présentation de la théorie et, au n° 5, la solution des problèmes, aussi élémentaires que possible. Pour d'autres aspects de la théorie, cf. H. Brézis [1], [2] et J. L. Lions [1].

Les rappels du n° 4 donnent le strict indispensable pour la compréhension du livre. A la bibliographie indiquée dans le texte, on peut ajouter, outre l'ouvrage de S. L. Sobolev [1], le livre J. Nečas [1].

Les techniques du n° 6 sont des variantes de Y. Haugazeau [1]. On trouvera d'autres résultats dans M. Schatzman [1].

Les résultats des n°s 7.2 et 7.3 sont explicités pour la première fois ici.

Pour des propriétés supplémentaires en ce qui concerne la *régularité* des solutions, cf. H. Brézis [2].

# CHAPITRE 2

## PROBLÈMES D'ASSERVISSEMENTS THERMIQUES

### *Orientation*

La lecture de ce chapitre suppose connus les nos 1 à 5 du Chapitre 1.

Le lecteur non spécialement intéressé dans les problèmes de Thermique, peut passer ce (court) chapitre.

### 1. ASSERVISSEMENT THERMIQUE

Nous étudions le champ de températures à l'intérieur d'une région  $\Omega$  ouverte de frontière  $\Gamma$ , région occupée par un milieu continu. Dans tous les problèmes considérés dans ce numéro, la température en certains points est « asservie » à varier dans un sens déterminé lorsque  $t$  augmente.

Nous allons distinguer deux classes d'asservissement selon qu'il est *instantané* ou *retardé*.

#### 1.1. Asservissement instantané

##### 1.1.1. Asservissement de la température au bord

Si l'on « asservit » uniquement la température  $u(x, t)$  à la frontière, la fonction  $u$  satisfait à l'intérieur à l'équation de la chaleur :

$$(1.1) \quad \partial u / \partial t - \Delta u = f, \quad x \in \Omega, \quad t \in ]0, T[$$

ou, plus généralement à :

$$(1.2) \quad \partial u / \partial t + Au = f,$$

avec :

$$(1.3) \quad A\varphi = - (a_{ij}(x) \varphi_{,j})_{,i},$$

où les fonctions  $a_{ij}$  satisfont à :

$$(1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{ij} \in L^\infty(\Omega), \quad a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j \\ a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \xi_i \xi_i \quad \forall \xi_i \in R. \end{array} \right.$$

Par ailleurs la *température initiale* est donnée :

$$(1.5) \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

L'asservissement apparaît alors dans les *conditions aux limites*.

Donnons deux exemples :

*Exemple 1.1 (Parois minces)*

La température sur  $\Gamma$  est asservie à augmenter, ceci grâce à des injections de chaleur à travers la paroi, ce qui impose les conditions aux limites suivantes :

$$(1.6) \quad \begin{cases} \partial u(x, t)/\partial t > 0 \Rightarrow \partial u(x, t)/\partial v_A = 0, & (1) \\ \partial u(x, t)/\partial t = 0 \Rightarrow \partial u(x, t)/\partial v_A \geq 0. & \blacksquare \end{cases}$$

*Exemple 1.2 (Parois épaisses)*

Le flux de chaleur, si la paroi est épaisse, ne peut plus être instantané et l'asservissement est imposé par les conditions suivantes :

$$(1.7) \quad \begin{cases} \partial u(x, t)/\partial t > 0 \Rightarrow \partial u(x, t)/\partial v_A = 0, \\ \partial u(x, t)/\partial t \leq 0 \Rightarrow \partial u(x, t)/\partial v_A = -k \partial u(x, t)/\partial t \end{cases}$$

où  $k$  est un scalaire positif qui dépend de la paroi et du système d'asservissement.  $\blacksquare$

*Remarque 1.1*

L'un des exemples de climatisation (Chap. 1, n° 2.3) conduisait aux conditions aux limites :

$$(1.8) \quad \begin{cases} u > 0 \Rightarrow \partial u/\partial v_A = 0 \\ u = 0 \Rightarrow \partial u/\partial v_A \geq 0. \end{cases}$$

Comparant à (1.6) on voit qu'il s'agit de *conditions aux limites sous formes d'inégalités qui ne se réduisent pas les unes aux autres*.  $\blacksquare$

*Remarque 1.2*

Si dans l'Exemple 1.2,  $k \rightarrow +\infty$ , les conditions (1.7) donnent (formellement) à la limite les conditions (1.6). En fait on verra (au n° 3) que cela est justifié et que la solution  $u_k$  relative à l'Exemple 1.2 converge (dans une topologie convenable) vers la solution  $u$  relative à l'Exemple 1.1 lorsque  $k \rightarrow +\infty$ .  $\blacksquare$

*Remarque 1.3*

Bien évidemment la température peut être asservie à diminuer !

(1)  $\partial\varphi/\partial v_A = a_{i,j}(x) \varphi_{,j} \cos(n, x_i)$ , où la normale  $n$  à  $\Gamma$  est orientée vers l'extérieur de  $\Omega$ .

*Remarque 1.4*

On peut également imposer un asservissement sur une partie seulement, soit  $\Gamma_1$ , de  $\Gamma$ . Si  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  on peut ainsi arriver, par exemple, aux conditions suivantes :

$$(1.9) \quad u = 0 \quad \text{si} \quad x \in \Gamma_2, \quad t > 0,$$

et sur  $\Gamma_1$  les conditions analogues à (1.6) ou (1.7) selon que la paroi  $\Gamma_1$  est mince ou épaisse. ■

**1.1.2. Asservissement de la température à l'intérieur**

On peut également imaginer un système d'asservissement qui par injection d'une densité volumique de chaleur  $g$  dans  $\Omega$  impose à la température  $u = u(x, t)$  d'être croissante dans  $\Omega$ .

Donc, par exemple :

$$(1.10) \quad \begin{cases} \partial u(x, t)/\partial t > 0 \Rightarrow g(x, t) = 0, \\ \partial u(x, t)/\partial t \leq 0 \Rightarrow g(x, t) = -k \partial u(x, t)/\partial t, \end{cases} \quad k > 0.$$

Le champ des températures  $u$  est alors solution de

$$(1.11) \quad \partial u/\partial t + Au = f + g \quad \text{dans} \quad Q = \Omega \times ]0, T[,$$

avec encore (1.5) et comme condition aux limites *par exemple* :

$$(1.12) \quad u(x, t) = \theta(x, t) = \text{température imposée sur } \Sigma = \Gamma \times ]0, T[.$$

**1.1.3. Propriétés des solutions**

Il est physiquement « évident » que dans le cas (1.6), si  $f \geq 0$  et  $u_0 \geq 0$ , la température  $u$  est positive dans  $Q$ .

On montre effectivement cette propriété (et d'autres propriétés de ce genre) au n° 4.

**1.1.4. Autres asservissements**

On peut imaginer une foule d'autres asservissements. Par exemple on peut asservir la température au bord à augmenter mais « pas trop vite », d'où par exemple les conditions :

$$(1.13) \quad \begin{cases} 0 < \partial u(x, t)/\partial t < 1 \Rightarrow \partial u(x, t)/\partial v_A = 0, \\ \partial u(x, t)/\partial t = 0 \Rightarrow \partial u(x, t)/\partial v_A \geq 0, \\ \partial u(x, t)/\partial t = 1 \Rightarrow \partial u(x, t)/\partial v_A \leq 0. \end{cases}$$

Nous donnerons au n° 2 une formulation générale contenant toutes ces situations (et d'autres). ■



**1.2. Asservissement retardé**

Supposons maintenant que le dispositif d'asservissement ne contrôle les températures au bord que de façon discrète, c'est-à-dire aux instants  $n\tau$ ,  $n$  entier et  $\tau =$  intervalle de temps fini. Alors si l'on asservit les observations à augmenter, on aboutit aux conditions aux limites :

$$(1.14) \quad \begin{cases} u(x, t) - u(x, t - \tau) > 0 \Rightarrow \partial u(x, t) / \partial v_A = 0, \\ u(x, t) - u(x, t - \tau) \leq 0 \Rightarrow \partial u(x, t) / \partial v_A = -k[u(x, t) - u(x, t - \tau)]. \quad \blacksquare \end{cases}$$

*Remarque 1.5*

La « condition initiale » doit maintenant être remplacée par une « condition initiale épaisse » par exemple :

$$(1.15) \quad u(x, t) = u_0(x) \quad (\text{ou } u_0(x, t)) \quad \text{dans} \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad \blacksquare$$

*Remarque 1.6*

Bien entendu on peut imaginer des conditions analogues à l'intérieur de  $\Omega$ .  $\blacksquare$

**2. FORMULATION VARIATIONNELLE DES PROBLÈMES D'ASSERVISSEMENT**

**2.1. Notations**

On pose, comme au Chapitre 1 :

$$(2.1) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} a_{ij} u_{,j} v_{,i} dx.$$

*On notera que*

$$(2.2) \quad a(u, v) = a(v, u).$$

On introduit comme au Chapitre 1, n° 3.1, les fonctions  $\psi = \psi(\lambda)$  et les fonctionnelles

$$(2.3) \quad \Psi(v) = \int_{\Gamma} \psi(v) d\Gamma$$

ou

$$(2.4) \quad \Psi(v) = \int_{\Omega} \psi(v) dx.$$

**2.2. Inéquations variationnelles**

**2.2.1. Asservissement instantané**

On cherche une fonction  $u = u(x, t)$  telle que <sup>(2)</sup>  $u'(t) \in H^1(\Omega)$  et

$$(2.5) \quad \begin{aligned} (u'(t), v - u'(t)) + a(u(t), v - u'(t)) + \Psi(v) - \Psi(u'(t)) &\geq \\ &\geq (f(t), v - u'(t)) \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{aligned}$$

<sup>(2)</sup>  $u(t) = u(\cdot, t), \quad u'(t) = \partial u(\cdot, t) / \partial t.$

avec

$$(2.6) \quad u(0) = u_0.$$

*Remarque 2.1*

On précisera au n° 3 les propriétés imposées à la fonction  $t \rightarrow u(t)$ . ■

*Remarque 2.2*

Dans le cas où  $\Psi$  est donnée par (2.4) on pourra remplacer  $H^1(\Omega)$  par  $H_0^1(\Omega)$  (cf. Chap. 1). On peut aussi (pour résoudre le problème considéré à la Remarque 1.4) remplacer  $H^1(\Omega)$  par l'espace

$$(2.7) \quad V = \{ v \mid v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \}.$$
 ■

*Remarque 2.3*

Si l'on compare (2.5) à (3.14) Chapitre 1, on voit que  $v - u(t)$  qui apparaît dans (3.14) est remplacé ici par  $v - u'(t)$  et que l'expression  $\Psi(v) - \Psi(u(t))$  qui apparaît dans (3.14) est remplacée ici par  $\Psi(v) - \Psi(u'(t))$ .

Des exemples sont donnés à la section 2.3 ci-après. ■

### 2.2.2. Asservissement retardé

Posons :

$$(2.8) \quad Mu(t) = [u(t) - u(t - \tau)]/\tau.$$

On cherche une fonction  $u$  telle que  $u'(t) \in H^1(\Omega)$  et

$$(2.9) \quad \left| \begin{array}{l} (u'(t), v - Mu(t)) + a(u(t), v - Mu(t)) + \Psi(v) - \Psi(Mu(t)) \geq \\ \geq (f(t), v - Mu(t)) \quad \forall v \in H^1(\Omega), \end{array} \right.$$

avec

$$(2.10) \quad u(t) = u_0(t), \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad \blacksquare$$

On a des variantes analogues à celles indiquées à la Remarque 2.2.

## 2.3. Exemples

### 2.3.1. Fonction $\psi$ de type 1 <sup>(3)</sup>

On introduit :

$$(2.11) \quad \Phi(\lambda) = d\psi(\lambda)/d\lambda$$

et on vérifie, exactement comme au Chapitre 1, n° 3.3.1 que (2.5) équivaut à (dans le cas (2.3)) :

$$(2.12) \quad (u'(t), v) + a(u(t), v) + \int_{\Gamma} \Phi(u(t)) v \, d\Gamma = (f(t), v) \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

<sup>(3)</sup> Cf. définitions du chapitre 1, n° 3.

ou, dans le cas (2.4) à

$$(2.13) \quad \begin{cases} (u'(t), v) + a(u(t), v) + \int_{\Omega} \Phi(u(t)) v \, dx = (f(t), v) \\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (\text{par exemple}). \quad \blacksquare \end{cases}$$

*Interprétation de (2.12)*

On opère exactement comme au Chapitre 1, n° 3.3.1. On trouve que (2.5), (2.6) équivalent à :

$$(2.14) \quad \begin{cases} \partial u / \partial t + Au = f & \text{dans } Q = \Omega \times ]0, T[, \\ \partial u / \partial v_A + \Phi(u') = 0 & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times ]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

*Interprétation de (2.13)*

On trouve :

$$(2.15) \quad \begin{cases} \partial u / \partial t + Au + \Phi(\partial u / \partial t) = f & \text{dans } Q, \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega. \quad \blacksquare \end{cases}$$

*Exemple 2.1*

Prenons  $\psi$  par

$$(2.16) \quad \psi(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2} k \lambda^2 & \text{si } \lambda \leq 0, \\ 0 & \text{si } \lambda \geq 0. \end{cases}$$

Alors les conditions aux limites de (2.14) équivalent à :

$$\begin{cases} \partial u / \partial t \geq 0 \Rightarrow \partial u / \partial v_A = 0, \\ \partial u / \partial t \leq 0 \Rightarrow \partial u / \partial v_A + k \partial u / \partial t = 0, \end{cases}$$

i.e. les conditions (1.7).  $\blacksquare$

*Cas de l'asservissement retardé*

On vérifie, toujours par la méthode du Chapitre 1, n° 3, que (2.9) équivaut, dans le cas (2.3) à

$$(2.17) \quad (u'(t), v) + a(u(t), v) + \int_{\Gamma} \Phi(Mu(t)) v \, d\Gamma = (f(t), v) \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

dans le cas (2.4) à

$$(2.18) \quad (u'(t), v) + a(u(t), v) + \int_{\Omega} \Phi(Mu(t)) v \, dx = (f(t), v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega);$$

l'interprétation de (2.17) par exemple joint à (2.10), est :

$$(2.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial u / \partial t + Au = f \quad \text{dans } Q, \\ \frac{\partial u}{\partial v_A}(t) + \Phi\left(\frac{u(t) - u(t - \tau)}{\tau}\right) = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ u(x, t) = u_0(x, t), \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

### 2.3.2. Fonction $\psi$ de type 2

On introduit encore (cf. Chap. 1, n° 3.3.2) la dérivée  $\Phi(\lambda)$  de  $\psi(\lambda)$ , qui peut être *multivoque*.

On aboutit alors aux interprétations suivantes :

dans le cas (2.3), le problème équivaut à la recherche de  $u$  solution de :

$$(2.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial u / \partial t + Au = f \quad \text{dans } Q, \\ -\partial u(t) / \partial v_A \in \Phi(\partial u(t) / \partial t) \quad \text{sur } \Sigma, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \end{array} \right.$$

et dans le cas (2.4), le problème équivaut à :

$$(2.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\partial u(t) / \partial t + Au(t) - f(t) \in \Phi(\partial u(t) / \partial t), \\ u = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

#### Exemple 2.2

Prenons  $\psi$  donné par l'Exemple 3.2, Chapitre 1. Alors  $\Phi(\lambda)$  est donné par (3.42) Chapitre 1 et les conditions aux limites de (2.20) s'écrivent :

$$(2.22) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\partial u(t) / \partial v_A = g_1 & \text{si } \partial u(t) / \partial t \leq h_1, \\ g_1 \leq -\partial u(t) / \partial v_A \leq 0 & \text{si } \partial u(t) / \partial t = h_1, \\ \partial u(t) / \partial v_A = 0 & \text{si } h_1 < \partial u(t) / \partial t < h_2, \\ 0 \leq -\partial u(t) / \partial v_A \leq g_2 & \text{si } \partial u(t) / \partial t = h_2, \\ -\partial u(t) / \partial v_A = g_2 & \text{si } \partial u(t) / \partial t > h_2. \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

### 2.3.3. Fonction $\psi$ de type 3

On introduit alors (comme en (3.44), Chap. 1) :

$$(2.23) \quad K = \{ v \mid v \in H^1(\Omega), \Psi(v) < \infty \}.$$

Alors l'inéquation (2.5) équivaut à :

$$(2.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} u'(t) \in K \\ (u'(t), v - u'(t)) + a(u(t), v - u'(t)) + \Psi(v) - \Psi(u'(t)) \geq \\ \geq (f(t), v - u'(t)) \quad \forall v \in K, \end{array} \right.$$

ou encore (cf. Chap. 1, n° 3.3.3) :

$$(2.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} u'(t) \in K, \\ (u'(t), v - u'(t)) + a(u(t), v - u'(t)) + (\chi, v - u'(t)) \geq (f(t), v - u'(t)) \quad \forall v \in K, \\ \text{ct où } \chi \text{ est dans l'ensemble des éléments tels que} \\ \Psi(v) - \Psi(u'(t)) - (\chi, v - u'(t)) \geq 0 \quad \forall v \in K. \end{array} \right.$$

Lorsque  $\Psi$  est donnée par (2.3), le problème équivaut à :

$$(2.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial u / \partial t + Au = f \quad \text{dans } Q, \\ \partial u(t) / \partial t \in K, \quad \int_{\Gamma} (\partial u(t) / \partial t + \chi)(v - \partial u(t) / \partial t) d\Gamma \geq 0 \quad \forall v \in K, \\ u(0) = u_0. \end{array} \right.$$

### Exemple 2.3

Prenons  $\psi$  donnée par

$$(2.27) \quad \psi(\lambda) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{sur } [h_1, h_2], \\ +\infty & \text{ailleurs.} \end{array} \right.$$

Alors  $K = \{ v \mid h_1 \leq v \leq h_2 \text{ sur } \Gamma \}$  et l'on peut expliciter (2.26) de la façon suivante (cf. Chap. 1 (3.57)) :

$$(2.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial u / \partial t + Au = f \quad \text{dans } Q, \\ h_1 \leq \partial u(t) / \partial t \leq h_2 \quad \text{sur } \Sigma, \\ \partial u(t) / \partial t = h_1 \Rightarrow \partial u(t) / \partial v_A \geq 0, \\ h_1 < \partial u(t) / \partial t < h_2 \Rightarrow \partial u(t) / \partial v_A = 0, \\ \partial u(t) / \partial t = h_2 \Rightarrow \partial u(t) / \partial v_A \leq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \end{array} \right.$$

#### Cas particulier 1

$$h_1 = 0, \quad h_2 = +\infty;$$

on trouve les conditions (1.6).

#### Cas particulier 2

$$h_1 = 0, \quad h_2 = 1;$$

on trouve les conditions (1.13). ■

*Cas de l'asservissement retardé*

Dans le cas (2.3) on aboutit au problème :

$$(2.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial u / \partial t + Au = f \quad \text{dans } Q, \\ \frac{u(t) - u(t - \tau)}{\tau} \in K, \\ \int_{\Gamma} \left( \frac{u(t) - u(t - \tau)}{\tau} + \chi \right) \left( v - \frac{u(t) - u(t - \tau)}{\tau} \right) d\Gamma \geq 0 \quad \forall v \in K, \\ \chi \text{ vérifiant } \Psi(v) - \Psi \left( \frac{u(t) - u(t - \tau)}{\tau} \right) - \left( \chi, v - \left( \frac{u(t) - u(t - \tau)}{\tau} \right) \right) \geq 0, \\ u(t) = u_0(t), \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

**2.4. Orientation**

Nous allons maintenant résoudre les problèmes d'asservissement instantané (n° 3) puis donner quelques propriétés de la solution (au n° 4). Le cas de l'asservissement retardé sera examiné au n° 5.

**3. RÉOLUTION DES PROBLÈMES D'ASSERVISSEMENT INSTANTANÉ**

**3.1. Énoncé des résultats principaux**

Pour fixer les idées on prend

$$(3.1) \quad V = H^1(\Omega),$$

$a(u, v)$  donné par (2.1) de sorte que

$$(3.2) \quad a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V,$$

$$(3.3) \quad a(v, v) + c |v|^2 \geq \alpha \|v\|^2, \quad \alpha > 0, \quad c > 0 \quad (4).$$

On se donne une fonctionnelle  $v \rightarrow \Psi(v) = \int_{\Gamma} \psi(v) d\Gamma$  ayant les propriétés suivantes <sup>(5)</sup> :

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} v \rightarrow \Psi(v) \text{ est convexe de } V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{S.C.I. pour la topologie faible de } V, \\ \text{à valeurs dans } ]-\infty, +\infty], \end{array} \right.$$

<sup>(4)</sup>  $|v|$  = norme de  $v$  dans  $L^2(\Omega)$ ,  $\|v\|$  = norme de  $v$  dans  $H^1(\Omega)$ .

<sup>(5)</sup> Elles sont analogues à (5.2) (5.3) (5.4) (5.5), Chap. 1, avec seulement une petite différence technique entre (5.5) Chap. 1 et (3.7), différence sans importance du point de vue des applications.

et il existe une famille de fonctionnelles  $\Psi_j$  différentiables sur  $V$  telles que :

$$(3.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall v \in L^2(0, T; V) \text{ on a :} \\ \int_0^T \Psi_j(v) dt \rightarrow \int_0^T \Psi(v) dt, \quad j \rightarrow \infty, \end{array} \right.$$

$$(3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe une suite } \varphi_j \text{ bornée dans } V \text{ telle que :} \\ \Psi'_j(\varphi_j) = 0 \quad \forall j, \quad (\text{ou } \Phi_j(\varphi_j) = 0 \quad \text{si } \Phi_j = \Psi'_j), \end{array} \right.$$

$$(3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } v_j \rightarrow v \text{ dans } L^\infty(0, T; V) \text{ faible étoile et si } v'_j \rightarrow v' \text{ dans } L^2(0, T; H) \\ \text{faible } (H = L^2(\Omega)), \text{ avec } \int_0^T \Psi_j(v_j) dt \leq \text{Cte, alors} \\ \liminf \int_0^T \Psi_j(v_j) dt \geq \int_0^T \Psi(v) dt. \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

*Remarque 3.1*

On a vu au Chapitre 1, n° 5.3, comment les hypothèses précédentes étaient vérifiées dans toutes les applications. ■

On va obtenir les théorèmes d'existence de solutions « fortes » moyennant des hypothèses assez restrictives sur les données  $f$  et  $u_0$ .

On supposera :

$$(3.8) \quad f, f' \in L^2(0, T; H),$$

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_0 \text{ est donné dans } V \text{ avec } Au_0 \in L^2(\Omega); \text{ on peut trouver une suite} \\ u_{0j} \in V \text{ avec } Au_{0j} \in L^2(\Omega) \text{ et } u_{0j} \rightarrow u_0 \text{ dans } V, \\ Au_{0j} \rightarrow Au_0 \text{ dans } L^2(\Omega), \text{ chaque } u_{0j} \text{ vérifiant} \\ f(0) + Au_{0j} \in H^1(\Omega) \text{ et } \partial u_{0j} / \partial \nu_A + \Phi_j(f(0) - Au_{0j}) = 0 \text{ sur } \Gamma \\ \text{et } f(0) + Au_{0j} \rightarrow f(0) + Au_0 \text{ dans } H^1(\Omega). \end{array} \right.$$

On a alors les résultats suivants :

**Théorème 3.1.** *On se place dans les hypothèses (3.1)-(3.9). Il existe alors une fonction  $u$  et une seule telle que*

$$(3.10) \quad u \in L^\infty(0, T; V), \quad u' \in L^\infty(0, T; V), \quad u'' \in L^2(0, T; H),$$

$$(3.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u'(t), v - u'(t)) + a(u(t), v - u'(t)) + \Psi(v) - \Psi(u'(t)) \geq \\ \geq (f'(t), v - u'(t)) \quad \forall v \in V \quad (\text{p.p. en } t), \end{array} \right.$$

$$(3.12) \quad u(0) = u_0.$$

**Théorème 3.2. (Théorème d'approximation).** *Les hypothèses sont celles du Théorème 3.1. Soit  $u_j$  la solution de :*

$$(3.10)_j \quad u_j \in L^\infty(0, T; V), \quad u'_j \in L^\infty(0, T; V), \quad u''_j \in L^2(0, T; H),$$

$$(3.11)_j \quad (u'_j(t), v - u'_j(t)) + a(u_j(t), v - u'_j(t)) + \Psi_f(v) - \Psi_f(u'_j(t)) \geq \\ \geq (f(t), v - v'_j(t)) \quad \forall v \in V,$$

$$(3.12)_j \quad u_j(0) = u_{0j}.$$

Alors lorsque  $j \rightarrow \infty$  on a,  $u$  désignant la solution fournie par le Théorème 3.1,

$$(3.13) \quad u_j \rightarrow u, \quad u'_j \rightarrow u' \quad \text{dans } L^\infty(0, T; V) \text{ faible étoile},$$

$$(3.14) \quad u''_j \rightarrow u'' \quad \text{dans } L^2(0, T; H) \text{ faible}.$$

*Remarque 3.2*

Comme  $\Psi_j$  est différentiable, (3.11)<sub>j</sub> équivaut à l'équation

$$(3.15) \quad (u'_j(t), v) + a(u_j(t), v) + (\Phi_j(u'_j(t)), v) = (f(t), v). \quad \blacksquare$$

*Remarque 3.3*

Le Théorème 3.2 justifie (et précise) la Remarque 1.2.  $\blacksquare$

*Remarque 3.4*

Les observations faites au Chapitre 1, n° 5.4, sont valables dans la situation présente.  $\blacksquare$

### 3.2. Démonstration de l'unicité dans le théorème 3.1 (et 3.2)

La démonstration de l'unicité est une variante de la démonstration donnée au Chapitre 1, n° 5.5.

Soient  $u$  et  $u_*$  deux solutions éventuelles de (3.11); prenant  $v = u'_*(t)$  dans (3.11) (resp.  $v = u'(t)$  dans l'inéquation analogue à (3.11) relative à  $u_*$ ) et additionnant les deux inéquations, il vient, en posant  $w = u - u_*$

$$- |w'(t)|^2 - a(w(t), w'(t)) \geq 0,$$

ou encore, grâce au fait que  $a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V$ ,

$$(3.16) \quad |w'(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(w(t), w(t)) \leq 0.$$

On posera de façon générale

$$(3.17) \quad a(\varphi, \varphi) = a(\varphi).$$

Comme  $w(0) = 0$  on déduit de (3.16) que

$$(3.18) \quad a(w(t)) + 2 \int_0^t |w'(\sigma)|^2 d\sigma \leq 0.$$



Tenant compte de (3.3) <sup>(6)</sup> il résulte de (3.18) que

$$(3.19) \quad \alpha \|w(t)\|^2 + 2 \int_0^t |w'(\sigma)|^2 d\sigma \leq c |w(t)|^2 = c \left| \int_0^t w'(\sigma) d\sigma \right|^2 \leq \\ \leq ct \int_0^t |w'(\sigma)|^2 d\sigma$$

d'où  $w(t) = 0$  dans  $[0, t_0]$ ,  $t_0 = 2/c$ ; on intègre alors (3.16) de  $t_0$  à  $t$  et on obtient  $w(t) = 0$  dans  $[t_0, 2t_0]$  et ainsi de suite. ■

### 3.3. Démonstration des Théorèmes 3.1 et 3.2

Le plan de la démonstration est le suivant :

- 1) résolution de « l'approximation de Galerkin » de (3.15) ;
- 2) résolution de (3.15) avec  $u_j(0) = u_{0j}$  ;
- 3) estimations a priori sur les  $u_j$  ;
- 4) démonstration des résultats des théorèmes.

#### 3.3.1. Résolution de l'approximation de Galerkin de (3.15)

On introduit une « base »  $w_1, \dots, w_m, \dots$  de  $V$  telle que

$$(3.20) \quad u_{0j}, f(0) + Au_{0j}, \varphi_j \text{ en espace } [w_1, w_2, w_3] \text{ engendré par } w_1, w_2 \text{ et } w_3.$$

« L'approximation de Galerkin » pour (3.15),  $u_m(t)$ , est alors « définie » par la solution de

$$(3.21) \quad (u'_m(t), w_k) + a(u_m(t), w_k) + (\Phi_j(u'_m(t)), w_k) = (f(t), w_k), \quad 1 \leq k \leq m,$$

$$(3.22) \quad u_m(t) \in [w_1, \dots, w_m] = \text{espace engendré par } w_1, \dots, w_m,$$

$$(3.23) \quad u_m(0) = u_{0j} \text{ (possible grâce à (3.20) dès que } m \geq 3).$$

Mais à cause de la présence du facteur  $(\Phi_j(u'_m(t)), w_k)$ , le système d'équations différentielles (non linéaires) (3.21) pourrait a priori être singulier. Il faut donc d'abord vérifier que ce n'est pas le cas et que (3.21), (3.22), (3.23) définissent  $u_m$  de façon unique dans un intervalle  $[0, t_m]$  avec en fait — grâce aux estimations a priori —  $t_m = T$ .

Il y a pour cela plusieurs méthodes possibles, l'une consistant à « approcher » (3.21) par un système d'équations du deuxième ordre en  $t$ ; pour  $\varepsilon > 0$  on cherche  $\psi_{\varepsilon m}(t) = \psi_\varepsilon(t)$  vérifiant :

$$(3.24) \quad \psi_\varepsilon(t) \in [w_1, \dots, w_m],$$

$$(3.25) \quad \left| \begin{aligned} \varepsilon(\psi''_\varepsilon(t), w_k) + (\psi'_\varepsilon(t), w_k) + a(\psi_\varepsilon(t), w_k) + \\ + (\Phi_j(\psi'_\varepsilon(t)), w_k) = (f(t), w_k), \quad 1 \leq k \leq m, \end{aligned} \right.$$

<sup>(6)</sup> En fait dans les applications que nous avons en vue, on a aussi  $a(v, v) \geq 0$  et alors la démonstration est immédiate.

$$(3.26) \quad \begin{cases} \psi_\varepsilon(0) = u_{0j}, \\ \psi'_\varepsilon(0) = u_{ij} = f(0) - Au_{0j}; \end{cases}$$

les conditions (3.26) sont possibles dès que  $m \geq 3$  grâce à (3.20); on note que (3.21) pris pour  $t = 0$  donne :

$$(3.27) \quad \begin{aligned} & (u'_m(0), w_k) + (\Phi_j(u'_m(0)), w_k) = (f(0), w_k) - a(u_{0j}, w_k) = \\ & = (f(0) - Au_{0j}, w_k) - \int_\Gamma \frac{\partial u_{0j}}{\partial \nu_A} w_k \, d\Gamma \\ & = (\text{d'après (3.9)}) \quad (f(0) - Au_{0j}, w_k) + \int_\Gamma (\Phi_j(f(0) - Au_{0j}) w_k \, d\Gamma \end{aligned}$$

d'où résulte que  $u'_m(0) = f(0) - Au_{0j}$  est une solution; mais si l'on considère (3.27) comme une équation en  $u'_m(0)$ , il y a unicité; en effet si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux solutions éventuelles, on en déduit, par soustraction :

$$(\varphi - \psi, w_k) + (\Phi_j(\varphi) - \Phi_j(\psi), w_k) = 0, \quad 1 \leq k \leq m$$

d'où, comme  $\varphi$  et  $\psi \in [w_1, \dots, w_m]$  :

$$(3.28) \quad |\varphi - \psi|^2 + (\Phi_j(\varphi) - \Phi_j(\psi), \varphi - \psi) = 0.$$

Comme  $\Phi_j$  est monotone, il résulte de (3.28) que  $\varphi = \psi$  et par conséquent :

$$(3.29) \quad u'_m(0) = f(0) - Au_{0j}$$

ce qui justifie la deuxième condition (3.26).

Le système d'équations différentielles (3.24), (3.25), (3.26) est non singulier et définit donc  $\psi_\varepsilon$  de manière unique dans un intervalle  $[0, t_m]$ . ■

*Estimation a priori sur  $\psi_\varepsilon$  (1<sup>re</sup> partie)*

Grâce à (3.20) on déduit de (3.25) (en notant aussi que  $\Phi_j(\varphi_j) = 0$ ) :

$$(3.30) \quad \begin{aligned} \varepsilon(\psi''_\varepsilon(t), \psi'_\varepsilon(t) - \varphi_j) + (\psi'_\varepsilon(t), \psi'_\varepsilon(t) - \varphi_j) + a(\psi'_\varepsilon(t), \psi'_\varepsilon(t) - \varphi_j) + \\ + (\Phi_j(\psi'_\varepsilon(t)) - \Phi_j(\varphi_j), \psi'_\varepsilon(t) - \varphi_j) = (f(t), \psi'_\varepsilon(t) - \varphi_j) \end{aligned}$$

d'où, comme  $\Phi_j$  est monotone :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \varepsilon \frac{d}{dt} |\psi'_\varepsilon(t)|^2 + |\psi'_\varepsilon(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(\psi_\varepsilon(t)) \leq \\ & \leq \varepsilon(\psi''_\varepsilon(t), \varphi_j) + (\psi'_\varepsilon(t), \varphi_j) + a(\psi'_\varepsilon(t), \varphi_j) + (f(t), \psi'_\varepsilon(t) - \varphi_j) \end{aligned}$$

d'où par intégration en  $t$  :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \varepsilon |\psi'_\varepsilon(t)|^2 + \frac{1}{2} a(\psi_\varepsilon(t)) + \int_0^t |\psi'_\varepsilon(\sigma)|^2 d\sigma \leq \\
 & \leq \varepsilon(\psi'_\varepsilon(t), \varphi_j) - \varepsilon(u_{ij}, \varphi_j) + \int_0^t (\psi'_\varepsilon(\sigma), \varphi_j) d\sigma + \\
 & + \int_0^t a(\psi_\varepsilon(\sigma), \varphi_j) d\sigma + \int_0^t (f(\sigma), \psi'_\varepsilon(\sigma) - \varphi_j) d\sigma + \\
 & + \frac{1}{2} \varepsilon |u_{ij}|^2 + \frac{1}{2} a(u_{0j}) \leq \\
 & \leq \frac{1}{4} \varepsilon |\psi'_\varepsilon(t)|^2 + \frac{1}{2} \int_0^t |\psi'_\varepsilon(\sigma)|^2 d\sigma + \int_0^t a(\psi_\varepsilon(\sigma), \varphi_j) d\sigma + \\
 & \quad \quad \quad + c(1 + \int_0^t |f(\sigma)|^2 d\sigma) \quad (7)
 \end{aligned}$$

d'où

$$(3.31) \quad \frac{1}{2} \varepsilon |\psi'_\varepsilon(t)|^2 + a(\psi_\varepsilon(t)) + \int_0^t |\psi'_\varepsilon(\sigma)|^2 d\sigma \leq c(1 + \int_0^t |f(\sigma)|^2 d\sigma) + \int_0^t a(\psi_\varepsilon(\sigma), \varphi_j) d\sigma.$$

Pour un peu simplifier la suite de la démonstration supposons (mais ce n'est pas essentiel) que :

$$(3.32) \quad a(v, v) = a(v) \geq 0.$$

Alors

$$a(\psi_\varepsilon(\sigma), \varphi_j) \leq \frac{1}{2} a(\psi_\varepsilon(\sigma)) + \frac{1}{2} a(\varphi_j)$$

et (3.31) donne

$$(3.33) \quad \left| \begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \varepsilon |\psi'_\varepsilon(t)|^2 + a(\psi_\varepsilon(t)) + \int_0^t |\psi'_\varepsilon(\sigma)|^2 d\sigma \leq \\
 & \leq c(1 + \int_0^t |f(\sigma)|^2 d\sigma) + \frac{1}{2} \int_0^t a(\psi_\varepsilon(\sigma)) d\sigma.
 \end{aligned} \right.$$

On déduit en particulier de (3.33) que :

$$a(\psi_\varepsilon(t)) \leq c + \frac{1}{2} \int_0^t a(\psi_\varepsilon(\sigma)) d\sigma$$

d'où, grâce à l'inégalité de Gronwall :

$$(3.34) \quad a(\psi_\varepsilon(t)) \leq c.$$

Mais utilisant (3.34) dans (3.33) on en tire :

$$(3.35) \quad \varepsilon |\psi'_\varepsilon(t)|^2 \leq c,$$

$$(3.36) \quad \int_0^T |\psi'_\varepsilon(\sigma)|^2 d\sigma \leq c.$$

Mais alors  $\psi_\varepsilon(t) = u_{0j} + \int_0^t \psi'_\varepsilon(\sigma) d\sigma$  vérifie, grâce à (3.36) :

$$|\psi_\varepsilon(t)| \leq c$$

ce qui, joint à (3.34) donne :

$$(3.37) \quad \|\psi_\varepsilon(t)\| \leq c. \quad \blacksquare$$

(7) Les  $c$  désignent des constantes diverses.

*Remarque 3.5 (fondamentale)*

Les constantes  $c$  introduites ne dépendent ni de  $\varepsilon$ , ni de  $m$ , ni de  $j$ . ■

*Estimation a priori sur  $\psi_\varepsilon$  (2<sup>e</sup> partie)*

On note que  $u_{1j}$  a été choisi de sorte que (3.25) entraîne :

$$(3.38) \quad \psi_\varepsilon''(0) = 0.$$

Dérivons (3.25) en  $t$  — à moins de supposer la fonction  $\Phi_j$  lipschitzienne, cette dérivation est formelle — le calcul qui suit se justifiant en prenant des quotients différentiels au lieu de la dérivée. Il vient :

$$(3.39) \quad \varepsilon(\psi_\varepsilon''', w_k) + (\psi_\varepsilon'', w_k) + a(\psi_\varepsilon', w_k) + ((\Phi_j(\psi_\varepsilon'))', w_k) = (f', w_k).$$

On en déduit que :

$$(3.40) \quad \varepsilon(\psi_\varepsilon''', \psi_\varepsilon'') + |\psi_\varepsilon''|^2 + a(\psi_\varepsilon', \psi_\varepsilon'') + ((\Phi_j(\psi_\varepsilon'))', \psi_\varepsilon'') = (f', \psi_\varepsilon'').$$

Mais comme  $\Phi_j$  est monotone on a (cf. (5.41), Chap. 1) :

$$(\Phi_j(\psi_\varepsilon'(t))', \psi_\varepsilon''(t)) \geq 0$$

et donc (3.40) entraîne :

$$(3.41) \quad \frac{\varepsilon}{2} \frac{d}{dt} |\psi_\varepsilon''(t)|^2 + |\psi_\varepsilon''(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(\psi_\varepsilon'(t)) \leq (f'(t), \psi_\varepsilon''(t))$$

d'où, en tenant compte de (3.38) :

$$(3.42) \quad \frac{1}{2} \varepsilon |\psi_\varepsilon''(t)|^2 + \int_0^t |\psi_\varepsilon''(\sigma)|^2 d\sigma + \frac{1}{2} a(\psi_\varepsilon'(t)) \leq \frac{1}{2} a(u_{1j}) + \int_0^t |f'(\sigma)| |\psi_\varepsilon''(\sigma)| d\sigma.$$

D'après (3.9)  $a(u_{1j}) \leq c$  et donc (3.42) entraîne :

$$(3.43) \quad \varepsilon |\psi_\varepsilon''(t)|^2 + \int_0^t |\psi_\varepsilon''(\sigma)|^2 d\sigma + a(\psi_\varepsilon'(t)) \leq c + \int_0^t |f'(\sigma)|^2 d\sigma.$$

Par conséquent — les  $c$  étant ici encore indépendants de  $\varepsilon$ ,  $m$ ,  $j$  —

$$(3.44) \quad \varepsilon |\psi_\varepsilon''(t)|^2 \leq c,$$

$$(3.45) \quad \int_0^t |\psi_\varepsilon''(\sigma)|^2 d\sigma \leq c,$$

$$(3.46) \quad \|\psi_\varepsilon'(t)\| \leq c. \quad \blacksquare$$

*Passage à la limite en  $\varepsilon$*

D'après les estimations a priori obtenues, et le fait que (3.46) entraîne :

$$(3.47) \quad \|\Phi_j(\psi_\varepsilon'(t))\|_* \leq c,$$

on peut extraire une suite, encore notée  $\psi_\varepsilon$ , telle que lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  on ait :

$$(3.48) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_\varepsilon \rightarrow u_m, \quad \psi'_\varepsilon \rightarrow u'_m \text{ dans } L^\infty(0, T; V) \text{ faible étoile,} \\ \psi''_\varepsilon \rightarrow u''_m \text{ dans } L^2(0, T; H) \text{ faible,} \end{array} \right.$$

$$(3.49) \quad \Phi_j(\psi'_\varepsilon) \rightarrow \chi \text{ dans } L^\infty(0, T; V') \text{ faible étoile.}$$

On peut alors passer à la limite en  $\varepsilon$  dans (3.25),  $k$  fixé, grâce à (3.44),

$$\varepsilon(\psi''_\varepsilon, w_k) \rightarrow 0 \text{ dans } L^\infty(0, T) \text{ et on obtient}$$

$$(3.50) \quad (u'_m, w_k) + a(u_m, w_k) + (\chi, w_k) = (f, w_k), \quad 1 \leq k \leq m.$$

Comme  $\psi_\varepsilon(0) = u_{0j} \rightarrow u_m(0)$  dans  $V$  faible, on a :

$$u_m(0) = u_{0j}$$

et on aura donc résolu (3.21), (3.22), (3.23) si l'on montre que :

$$(3.51) \quad \chi = \Phi_j(u'_m).$$

On utilise pour cela un « raisonnement de monotonie ». Soit  $\varphi$  une fonction  $\in L^2(0, T; V)$ , à valeurs dans  $[w_1, \dots, w_m]$ . Posons :

$$(3.52) \quad X_\varepsilon = \int_0^T (\Phi_j(\psi'_\varepsilon) - \Phi_j(\varphi), \psi'_\varepsilon - \varphi) dt.$$

Grâce à la monotonie de  $\Phi_j$ , on a :  $X_\varepsilon \geq 0$ . Mais utilisant (3.25) on a :

$$(3.53) \quad \begin{aligned} X_\varepsilon = & -\varepsilon \int_0^T (\psi''_\varepsilon, \psi'_\varepsilon) dt - \int_0^T |\psi'_\varepsilon|^2 dt - \int_0^T a(\psi_\varepsilon, \psi'_\varepsilon) dt + \\ & + \int_0^T (f, \psi'_\varepsilon) dt - \int_0^T (\Phi_j(\psi'_\varepsilon), \varphi) dt - \int_0^T (\Phi_j(\varphi), \psi'_\varepsilon - \varphi) dt. \end{aligned}$$

Mais  $\varepsilon \int_0^T (\psi''_\varepsilon, \psi'_\varepsilon) dt \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \limsup (-\int_0^T |\psi'_\varepsilon|^2 dt) & \leq -\int_0^T |u'_m|^2 dt, \quad \limsup [-\int_0^T a(\psi_\varepsilon, \psi'_\varepsilon) dt] - \\ & - \limsup [-\frac{1}{2} a(\psi_\varepsilon(\Gamma)) + \frac{1}{2} a(u_{0j})] \leq -\frac{1}{2} a(u_m(T)) + \frac{1}{2} a(u_{0j}) = \\ & = \int_0^T a(u_m, u'_m) dt, \end{aligned}$$

d'où

$$(3.54) \quad \left| \begin{array}{l} 0 \leq \limsup X_\varepsilon \leq -\int_0^T [|u'_m(t)|^2 + a(u_m, u'_m) - (f, u'_m)] dt - \\ \quad - \int_0^T (\chi, \varphi) dt - \int_0^T (\Phi_j(\varphi), u'_m - \varphi) dt. \end{array} \right.$$

Mais d'après (3.50) :

$$-\int_0^T [|u'_m(t)|^2 + a(u_m, u'_m) - (f, u'_m)] dt = \int_0^T (\chi, u'_m) dt$$

et (3.54) donne

$$(3.55) \quad \int_0^T (\chi - \Phi_j(\varphi), u'_m - \varphi) dt \geq 0.$$

Prenons dans (3.55)  $\varphi = u'_m - \lambda\psi$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\psi \in L^2(0, T; V)$  à valeurs dans  $[w_1, \dots, w_m]$ ; alors après division par  $\lambda$  :

$$\int_0^T (\chi - \Phi_j(u'_m - \lambda\psi), \psi) dt \geq 0$$

d'où, faisant  $\lambda \rightarrow 0$  :

$$\int_0^T (\chi - \Phi_j(u'_m), \psi) dt \geq 0$$

d'où (3.51). ■

Notons que des estimations (3.37), (3.45), (3.46), on déduit que :

$$(3.56) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|u_m(t)\| + \|u'_m(t)\| \leq c, \\ \int_0^T |u''_m(t)|^2 dt \leq c, \end{array} \right.$$

$c$  étant des constantes indépendantes de  $m$  et de  $j$ . ■

### 3.3.2. Résolution de (3.15) et estimations a priori sur $u_j$

D'après (3.56) on peut extraire de  $u_m = u_{j_m}$  une suite  $u_\mu$  telle que :

$$(3.57) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_\mu \rightarrow u_j, \quad u'_\mu \rightarrow u'_j \quad \text{dans } L^\infty(0, T; V) \text{ faible étoile,} \\ u''_\mu \rightarrow u''_j \quad \text{dans } L^2(0, T; H) \text{ faible,} \end{array} \right.$$

et

$$(3.58) \quad \Phi_j(u'_\mu) \rightarrow \chi_j \quad \text{dans } L^\infty(0, T; V') \text{ faible étoile.}$$

En outre, d'après (3.56)

$$(3.59) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|u_j(t)\| + \|u'_j(t)\| \leq c, \\ \int_0^T |u''_j(t)|^2 dt \leq c. \end{array} \right.$$

Passant à la limite en  $m = \mu$  dans (3.21) (pour  $k$  fixé), on trouve que

$$(u'_j, w_k) + a(u_j, w_k) + (\chi_j, w_k) = (f, w_k)$$

et cela  $\forall k$ , donc :

$$(3.60) \quad (u'_j, v) + a(u_j, v) + (\chi_j, v) = (f, v) \quad \forall v \in V.$$

Mais l'on vérifie — exactement comme on vient de le faire pour (3.51) — que

$$(3.61) \quad \chi_j = \Phi_j(u'_j).$$

(On introduit  $y_\mu = \int_0^T (\Phi_j(u'_\mu) - \Phi_j(\varphi), u'_\mu - \varphi) dt \geq 0$ ,  $\varphi \in L^2(0, T; V)$ .)

On a donc construit  $u_j$  solution de (3.15) avec (3.12)<sub>j</sub> et l'on a les estimations (3.59).

En outre (conséquence de la deuxième condition (3.26)) :

$$(3.62) \quad u'_j(0) = f(0) - Au_{0j}. \quad \blacksquare$$

### 3.3.3. Démonstration des résultats des théorèmes

D'après (3.59) on peut extraire une suite, que l'on note encore  $u_j$ , telle que l'on ait (3.13), (3.14).

Comme (3.15) équivaut à (3.11)<sub>j</sub>, il reste seulement à montrer que  $u$  est solution de (3.11) (alors d'après l'unicité de la solution, l'extraction d'une sous-suite de  $u_j$  est inutile).

Fixant dans (3.11)<sub>j</sub>  $v = v_0$  tel que  $\Psi(v_0) < \infty$  on a (comme  $\Psi_j(v_0) \rightarrow \Psi(v_0)$ )  $\Psi_j(v_0) \leq c$  et on déduit de (3.11)<sub>j</sub> que :

$$(3.63) \quad \int_0^T \Psi_j(u'_j(t)) dt \leq C.$$

On peut donc utiliser (3.7) avec  $v_j = u'_j$ ,  $v = u'$ . Donc :

$$(3.64) \quad \liminf \int_0^T \Psi_j(u'_j) dt \geq \int_0^T \Psi(u') dt.$$

Prenons dans (3.11)<sub>j</sub>  $v = v(t)$ , où  $v \in L^2(0, T; V)$ . Alors

$$\begin{aligned} \int_0^T [(u'_j, v) + a(u_j, v) + \Psi_j(v) - (f, v - u'_j)] dt &\geq \\ &\geq \int_0^T [|u'_j|^2 + a(u_j, u'_j) + \Psi_j(u'_j)] dt = \\ &= \int_0^T |u'|^2 dt + \frac{1}{2} a(u_j(T)) - \frac{1}{2} a(u_{0j}) + \int_0^T \Psi_j(u'_j) dt \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, en utilisant notamment (3.63), que

$$\begin{aligned} \int_0^T [(u', v) + a(u, v) + \Psi(v) - (f, v - u')] dt &\geq \\ &\geq \int_0^T |u'|^2 dt + \frac{1}{2} a(u(T)) - \frac{1}{2} a(u_0) + \int_0^T \Psi(u') dt \end{aligned}$$

d'où

$$(3.65) \quad \begin{cases} \int_0^T [(u', v - u') + a(u, v - u') + \Psi(v) - \Psi(u') - (f, v - u')] dt \geq 0 \\ \forall v \in L^2(0, T; V). \quad \blacksquare \end{cases}$$

Mais exactement comme au raisonnement qui suit (5.59) au Chapitre 1, on vérifie que (3.64) implique (et équivaut à) (3.11).  $\blacksquare$

#### Remarque 3.6

Il résulte de (3.62) que la solution  $u$  donnée par le Théorème 3.1 vérifie

$$(3.66) \quad u'(0) = f(0) - Au_0. \quad \blacksquare$$

#### 4. UNE PROPRIÉTÉ DE LA SOLUTION DU PROBLÈME D'ASSERVISSEMENT INSTANTANÉ A PAROI MINCE

On considère la solution  $u$  du problème de l'Exemple 1.1, donc (cf. Exemple 2.3, Cas particulier 1) fourni par le Théorème 3.1 avec

$$(4.1) \quad \psi(\lambda) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda < 0, \\ 0 & \text{si } \lambda \geq 0, \end{cases}$$

$$(4.2) \quad \Psi(v) = \int_{\Gamma} \psi(v) \, d\Gamma.$$

On va démontrer le

**Théorème 4.1.** *On se place dans les hypothèses du Théorème 3.1 avec (4.1), (4.2). On suppose que les données  $f$  et  $u_0$  vérifient*

$$(4.3) \quad \partial f / \partial t \geq 0 \quad \text{p.p. dans } Q,$$

$$(4.4) \quad f(0) - Au_0 \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

$$(4.5) \quad \partial u_0 / \partial v_A = 0.$$

Alors la solution  $u$  du problème correspondant vérifie

$$(4.6) \quad \partial u / \partial t \geq 0 \quad \text{p.p. dans } Q.$$

*Démonstration*

1) On prend

$$(4.7) \quad \psi_j(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2} j \lambda^2 & \text{si } \lambda \leq 0 \\ 0 & \text{si } \lambda \geq 0, \end{cases}$$

$$(4.8) \quad \Psi_j(v) = \int_{\Gamma} \psi_j(v) \, d\Gamma,$$

de sorte que :

$$(4.9) \quad (\Phi_j(u), v) = \int_{\Gamma} \Phi_j(u(x)) v(x) \, d\Gamma,$$

où

$$(4.10) \quad \Phi_j(\lambda) = \begin{cases} j\lambda & \text{si } \lambda \leq 0, \\ 0 & \text{si } \lambda \geq 0. \end{cases}$$

On prend ensuite dans (3.9)

$$(4.11) \quad u_{0j} = u_0.$$

Les conditions du Théorème 3.2 sont satisfaites car, notamment :

$$\begin{aligned} \partial u_0 / \partial v_A + \Phi_j(f(0) - Au_0) &= \partial u_0 / \partial v_A \quad (\text{car } f(0) - Au_0 \geq 0) = \\ &= 0 \quad (\text{d'après (4.5)}). \end{aligned}$$



On peut donc appliquer le Théorème 3.2 et on aura (4.6) si l'on montre — ce qui a d'ailleurs un intérêt intrinsèque — que

$$(4.12) \quad \partial u_j / \partial t \geq 0 \quad \text{p.p. dans } Q.$$

2) Mais la fonction  $\Phi_j$  est lipschitzienne et l'on peut dériver en  $t$  l'équation (3.15) (avec le choix (4.9) ci-dessus). Donc :

$$(4.13) \quad (u_j'', v) + a(u_j', v) + ((\Phi_j(u_j))', v) = (f', v).$$

On prend dans (4.13)  $v = (u_j')^-$ ; observant que

$$\begin{aligned} (u_j'', (u_j')^-) &= - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (u_j')^- (u_j')^- \, dx = - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_j'(t)|^2, \\ a(u_j', (u_j')^-) &= - a(u_j', u_j') \end{aligned}$$

on déduit alors de (4.13) que

$$(4.14) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_j'(t)|^2 + a(u_j', (u_j')^-) - ((\Phi_j(u_j))', (u_j')^-) + (f', (u_j')^-) = 0.$$

Mais d'après (4.9), (4.10), on a :

$$- ((\Phi_j(u_j))', (u_j')^-) = - \int_r \frac{\partial}{\partial t} (ju_j) \cdot (u_j')^- \, d\Gamma$$

(car on intègre seulement là où  $u_j' \leq 0$ )

$$\begin{aligned} &= j \int_r \left( \frac{\partial}{\partial t} (u_j')^- \right) (u_j')^- \, d\Gamma \\ &= \frac{j}{2} \frac{d}{dt} \int_r ((u_j')^-)^2 \, d\Gamma \end{aligned}$$

et donc (4.14) s'écrit

$$(4.15) \quad \left| \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_j'(t)|^2 + a(u_j'(t)) + \frac{j}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_r (u_j')^-)^2 \, d\Gamma \right) + (f'(t), u_j'(t)^-) \right. = 0.$$

D'après (4.3),  $(f'(t), u_j'(t)^-) \geq 0$  et donc (4.15) donne (comme d'après (3.62)),

$$u_j'(0) = f(0) - Au_{0j} = (\text{par (4.11)}) \quad f(0) - Au_0 \geq 0,$$

on a :  $u_j'(0)^- = 0$  :

$$(4.16) \quad \frac{1}{2} |u_j'(t)^-|^2 + \int_0^t a(u_j'(\sigma)) d\sigma + \frac{1}{2} j \int_{\Gamma} u_j'(t)^2 d\Gamma \leq 0$$

d'où

$$u_j'(t)^- = 0$$

d'où (4.12). ■

## 5. RÉSULTATS PARTIELS SUR L'ASSERVISSEMENT RETARDÉ <sup>(8)</sup>

### 5.1. Enoncé d'un résultat

Le problème général de l'asservissement retardé est loin d'être complètement résolu. Nous allons donner ici un résultat partiel établi sous des hypothèses très restrictives sur la fonctionnelle  $\Psi$ , donnée par

$$(5.1) \quad \Psi(v) = \int_{\Gamma} \psi(v(x)) d\Gamma ;$$

on suppose que :

$$(5.2) \quad \left| \begin{array}{l} \text{la fonction } \psi \text{ est différentiable } ^{(9)}, \text{ sa dérivée } d\psi/d\lambda = \Phi \text{ étant} \\ \text{lipschitzienne.} \end{array} \right.$$

Alors « l'inéquation » (2.9) est en fait équivalente à l'équation :

$$(5.3) \quad (u', v) + a(u, v) + (\Phi(Mu), v) = (f, v) \quad \forall v \in H^1(\Omega) = V$$

où

$$(5.4) \quad (\Phi(w), v) = \int_{\Gamma} \Phi(w(x)) v(x) d\Gamma .$$

Il s'agit donc d'un problème d'équation aux dérivées partielles parabolique non linéaire avec retard <sup>(10)</sup>.

Nous allons démontrer le

**Théorème 5.1.** *On suppose que la forme  $a(u, v)$ , non nécessairement symétrique <sup>(11)</sup> est coercive au sens*

$$(5.5) \quad a(v, v) + c_3 |v|^2 \geq \alpha \|v\|^2, \quad \alpha > 0 .$$

<sup>(8)</sup> Ce numéro peut être passé.

<sup>(9)</sup> Donc de type 1 dans la terminologie du Chap. 1, n° 3.3.

<sup>(10)</sup> Cf. M. Artola [1].

<sup>(11)</sup> Il y a là une différence essentielle avec les résultats du n° 3. Il est probable (mais non démontré) que les problèmes du n° 3 sont généralement mal posés si  $a(u, v)$  (ou au moins sa « partie principale ») n'est pas symétrique. Il est donc probablement impossible d'obtenir les résultats du n° 3 à partir du Théorème 5.1 en faisant  $\tau \rightarrow 0$ . Nous n'avons d'ailleurs pas pu effectuer ce passage à la limite en  $\tau$  même en supposant  $a(u, v)$  symétrique.

On suppose que (5.2) a lieu. On donne  $f$  et  $u_0$  avec

$$(5.6) \quad f \in L^2(0, T; V'),$$

$$(5.7) \quad u_0 \in H^1(\Omega).$$

Il existe alors une fonction  $u$  et une seule telle que

$$(5.8) \quad \begin{cases} u \in L^2(0, T; V), \\ \partial u / \partial t \in L^2(0, T; V'), \end{cases}$$

$$(5.9) \quad u(t) = u_0 \quad \text{pour} \quad -\tau \leq t \leq 0,$$

et telle que l'on ait (5.3) p.p. pour  $t \in (0, T)$ .

## 5.2. Démonstration de l'existence dans le Théorème 5.1

On prend encore une « base »  $w_1, \dots, w_m, \dots$  de  $V$ , avec

$$(5.10) \quad w_1 = u_0 \quad (\text{si } u_0 \neq 0).$$

On définit  $u_m(t)$  par

$$(5.11) \quad u_m(t) \in [w_1, \dots, w_m] \quad (\text{espace engendré par } w_1, \dots, w_m),$$

$$(5.12) \quad (u'_m(t), w_k) + a(u_m(t), w_k) + (\Phi(Mu_m(t)), w_k) = (f(t), w_k), \quad 1 \leq k \leq m,$$

$$(5.13) \quad u_m(t) = u_0, \quad -\tau \leq t \leq 0.$$

Il s'agit là d'un système d'équations différentielles avec retard, définissant  $u_m$  (cf. Bellman-Cooke [1], Halanay [1]) dans un intervalle  $[0, t_m]$ ; les estimations a priori qui suivent montrent que l'on peut prendre  $t_m = T$ . ■

*Estimations a priori (I)*

On déduit de (5.12) que

$$(5.14) \quad (u'_m(t), u_m(t)) + a(u_m(t), u_m(t)) + (\Phi(Mu_m(t)), u_m(t)) = (f(t), u_m(t))$$

d'où

$$(5.15) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + \alpha \|u_m(t)\|^2 - c_3 |u_m(t)|^2 \leq \|f(t)\|_* \|u_m(t)\| + |(\Phi(Mu_m(t)), u_m(t))|.$$

Mais d'après (5.2) on a  $|(\Phi(\lambda))| \leq c_1 |\lambda| + c_2$  d'où

$$(5.16) \quad \left| (\Phi(Mu_m(t)), u_m(t)) \right| \leq \tau^{-1} \int_{\Gamma} (c_1 |u_m(t)| + |u_m(t - \tau)| + c_2) \times \\ \times |u_m(t)| d\Gamma \leq c_4(\tau) \int_{\Gamma} |u_m(t)|^2 d\Gamma + c_5(\tau) \int_{\Gamma} |u_m(t - \tau)|^2 d\Gamma$$

où les constantes  $c_4(\tau)$ ,  $c_5(\tau)$  dépendent de  $\tau$ .

On utilise notamment le résultat suivant (cf. par exemple Deny-Lions [1]) : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $c_\varepsilon$  telle que

$$(5.17) \quad \int_{\Gamma} |v|^2 d\Gamma \leq \varepsilon \|v\|^2 + c_\varepsilon |v|^2 \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Appliquant cette inégalité à (5.16) on en déduit :

$$(5.18) \quad |(\Phi(Mu_m(t)), u_m(t))| \leq \frac{1}{4} \alpha (\|u_m(t)\|^2 + \|u_m(t - \tau)\|^2) + c_6(\tau) (|u_m(t)|^2 + |u_m(t - \tau)|^2).$$

Utilisant l'inégalité

$$\|f(t)\|_* \|u_m(t)\| \leq \frac{1}{4} \alpha \|u_m(t)\|^2 + 4 \alpha^{-1} \|f(t)\|_*^2$$

on déduit alors de (5.15) que

$$(5.19) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + \frac{\alpha}{2} \|u_m(t)\|^2 - c_3 |u_m(t)|^2 \leq \frac{4}{\alpha} \|f(t)\|_*^2 + \frac{1}{4} \alpha \|u_m(t - \tau)\|^2 + c_6(T) (|u_m(t)|^2 + |u_m(t - \tau)|^2).$$

On intègre (5.19) de 0 à  $t$ ; il vient :

$$(5.20) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} |u_m(t)|^2 + \frac{1}{2} \alpha \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^2 d\sigma \leq \\ & \leq c_7(\tau) \int_0^t |u_m(\sigma)|^2 d\sigma + c_6(\tau) \int_0^t |u_m(t - \tau)|^2 d\tau + \\ & \quad + \frac{1}{4} \alpha \int_0^t \|u_m(\sigma - \tau)\|^2 d\sigma + 4 \alpha^{-1} \int_0^t \|f(\sigma)\|_*^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \int_0^t \|u_m(\sigma - \tau)\|^2 d\sigma &= \tau \|u_0\|^2 + \int_0^{t-\tau} \|u_m(\sigma)\|^2 d\sigma \leq \\ &\leq \tau \|u_0\|^2 + \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^2 d\sigma \end{aligned}$$

(et inégalité analogue avec la norme dans  $H$ ). Alors (5.20) donne :

$$(5.21) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} |u_m(t)|^2 + \frac{1}{4} \alpha \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^2 d\sigma &\leq c_8 + 4 \alpha^{-1} \int_0^t \|f(\sigma)\|_*^2 d\sigma + \\ &+ c_9(\tau) \int_0^t |u_m(\sigma)|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

On a donc en particulier :

$$\frac{1}{2} |u_m(t)|^2 \leq c_8 + 4 \alpha^{-1} \int_0^t \|f(\sigma)\|_*^2 d\sigma + c_9(\tau) \int_0^t |u_m(\sigma)|^2 d\sigma,$$

ce qui entraîne, d'après l'inégalité de Gronwall, que

$$(5.22) \quad |u_m(t)| \leq c(\tau) \quad (\text{constante indépendante de } m \text{ mais dépendant de } \tau),$$

et cela joint à (5.21) entraîne

$$(5.23) \quad \int_0^T \|u_m(t)\|^2 dt \leq c(\tau). \quad \blacksquare$$

*Estimations a priori* (11)

On obtient maintenant des estimations sur les *dérivées fractionnaires* de  $u_m$  en  $t$ , par transformation de Fourier (cf. Lions [1], Chap. 1, n° 6.5).

On déduit de (5.12) que

$$(5.24) \quad (u'_m(t), w_k) = (\xi_m(t), w_k)$$

et d'après (5.23) on vérifie que

$$(5.25) \quad \int_0^T \|\xi_m(t)\|_*^2 dt \leq c(\tau).$$

Prolongeons  $u_m, \xi_m$  en  $\tilde{u}_m, \tilde{\xi}_m$  par 0 hors de  $]0, T[$ ; on a :

$$(5.26) \quad \frac{d}{dt}(\tilde{u}_m(t), w_k) = (\tilde{\xi}_m(t), w_k) + (u_0, w_k) \delta(t) - (u_m(T), w_k) \delta(t - T)$$

d'où par transformation de Fourier en  $t$  (on pose :  $\hat{\varphi}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\pi its) \tilde{\varphi}(t) dt$ ) :

$$(5.27) \quad 2\pi is (\hat{u}_m(s), w_k) = (\hat{\xi}_m(s), w_k) + (u_0, w_k) - (u_m(T), w_k) \exp(-2\pi isT)$$

d'où l'on déduit que :

$$(5.28) \quad 2\pi is |\hat{u}_m(s)|^2 = (\hat{\xi}_m(s), \hat{u}_m(s)) + (u_0, \hat{u}_m(s)) - (u_m(T), \hat{u}_m(s)) \exp(-2\pi isT)$$

d'où ( $\beta > 0$  à choisir) formellement :

$$(5.29) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|s|}{1 + |s|^\beta} |\hat{u}_m(s)|^2 ds \leq c \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + |s|^\beta} \|\xi_m(s)\|_* \|\hat{u}_m(s)\| ds + c \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + |s|^\beta} |\hat{u}_m(s)| ds$$

(les  $c$  dépendent de  $\tau$ ).

Mais d'après (5.23) et (5.25) on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{\xi}_m(s)\|_* \|\hat{u}_m(s)\| ds \leq c$$

de sorte que (5.29) entraîne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|s|}{1 + |s|^\beta} |\hat{u}_m(s)|^2 ds \leq c + c \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{(1 + |s|^\beta)^2} \right)^{1/2} \times \\ \times \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}_m(s)|^2 ds \right)^{1/2} \leq c \quad \text{si } \beta > 1/2.$$

Par conséquent :

$$(5.30) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |s|^\gamma |\hat{u}_m(s)|^2 ds \leq c \quad \text{si } 0 < \gamma < 1/2.$$

*Passage à la limite*

Utilisant les estimations (5.23), (5.30) il résulte de Lions, loc. cit., Théorème 5.2, Chapitre 1 que l'on peut extraire une suite  $u_\mu$  telle que

$$(5.31) \quad \begin{cases} u_\mu \rightarrow u & \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible étoile,} \\ u_\mu \rightarrow u & \text{dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)) \text{ faible,} \end{cases}$$

$$(5.32) \quad u_\mu \rightarrow u \quad \text{dans } L^2(0, T; H^\rho(\Omega)) \text{ fort, } \rho \text{ fixé avec } 1/2 < \rho < 1.$$

Alors, l'application « trace »  $u \rightarrow u|_\Gamma = \gamma_0 u$  étant linéaire continue de

$$H^\rho(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$$

(cf. Lions-Magenes [1], Chap. 1) on a :

$$(5.33) \quad u_\mu \rightarrow u \quad \text{dans } L^2(\Sigma) \text{ fort}$$

et par conséquent

$$(5.34) \quad \Phi(Mu_\mu) \rightarrow \Phi(Mu) \quad \text{dans } L^2(\Sigma) \text{ fort.}$$

On peut alors passer à la limite dans (5.12) utilisée pour  $m = \mu$  avec  $k$  fixé ( $\leq \mu$ ). Il vient :

$$\frac{d}{dt} (u(t), w_k) + a(u(t), w_k) + (\Phi(Mu(t)), w_k) = (f(t), w_k)$$

et cela  $\forall k$  d'où résulte que  $u$  satisfait à (5.3). Comme on a évidemment (5.8), (5.9), on a démontré l'existence d'une solution.

### 5.3. Démonstration de l'unicité dans le Théorème 5.1

Soient  $u$  et  $u_*$  deux solutions éventuelles. Posant  $w = u - u_*$ , on a :

$$(w', v) + a(w, v) + (\Phi(Mu) - \Phi(Mu_*), v) = 0 \quad \forall v$$

d'où

$$(5.35) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w(t)|^2 + a(w(t), w(t)) + (\Phi(Mu) - \Phi(Mu_*), w(t)) = 0.$$

Comme  $\Phi$  est lipschitzienne on a :

$$\begin{aligned} |(\Phi(Mu) - \Phi(Mu_*), w(t))| &\leq c \int_\Gamma |w(t) - w(t - \tau)| |w(t)| d\Gamma \leq \\ &\leq (\text{d'après (5.17)}) \quad \frac{1}{4} \alpha \|w(t)\|^2 + \frac{1}{4} \alpha \|w(t - \tau)\|^2 + \\ &\quad + c |w(t)|^2 + c |w(t - \tau)|^2. \end{aligned}$$

On déduit donc de (5.35) que

$$(5.36) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w(t)|^2 + \frac{3\alpha}{4} \|w(t)\|^2 \leq c |w(t)|^2 + \frac{\alpha}{4} \|w(t-\tau)\|^2 + c |w(t-\tau)|^2.$$

On intègre (5.36) de 0 à  $t$ ; en notant que

$$\int_0^t \|w(\sigma - \tau)\|^2 d\sigma \leq \int_0^t \|w(\sigma)\|^2 d\sigma$$

(et inégalité analogue avec la norme  $|\cdot|$ ), il vient

$$\frac{1}{2} |w(t)|^2 + \frac{1}{2} \alpha \int_0^t \|w(\sigma)\|^2 d\sigma \leq c \int_0^t |w(\sigma)|^2 d\sigma$$

d'où  $w = 0$ .

## 6. COMMENTAIRES

Les problèmes étudiés dans ce chapitre ont été introduits par les Auteurs dans Duvaut-Lions [2]. Les détails des démonstrations sont donnés ici pour la première fois. D'autres méthodes pour ces problèmes sont données dans H. Brézis [2].

Comme il est indiqué dans le texte, les résultats du n° 5 sont très partiels. Pour d'autres résultats et d'autres modèles voisins, cf. D. Viaud [1].

# CHAPITRE 3

## PROBLÈMES CLASSIQUES ET PROBLÈMES DE FROTTEMENT EN ÉLASTICITÉ ET VISCO-ÉLASTICITÉ

La lecture du présent chapitre suppose seulement connus les numéros 1 et 4 du Chapitre 1.

### 1. INTRODUCTION

Nous abordons dans ce chapitre des problèmes d'élasticité et de visco-élasticité. Rappelons (ce qui sera évidemment précisé dans la suite) que la visco-élasticité se distingue de l'élasticité par le fait que l'état de contrainte présent dépend, dans le cas visco-élastique, de toutes les déformations subies aux instants passés (et n'en dépend pas dans le cas élastique).

L'objet principal du chapitre est l'étude des problèmes avec *conditions de frottement à la frontière*, ce qui conduit à des *nouveaux problèmes d'inéquations* : cela fait l'objet des numéros 5 et suivants, les premiers numéros (2 à 4) étudiant de manière assez complète (notamment avec une démonstration de l'outil de base qu'est l'*inégalité de Korn*) les problèmes classiques.

### 2. ÉLASTICITÉ LINÉAIRE CLASSIQUE

#### 2.1. Loi de comportement

Dans la théorie linéaire qui nous occupe pour commencer, la loi de comportement exprime une relation linéaire entre le tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  (Chap. 1, n° 1.1) et le tenseur des déformations linéarisé  $\varepsilon_{ij}(u)$  (Chap. 1, n° 1.3), soit

$$(2.1) \quad \sigma_{ij} = a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u) ;$$

dans (2.1) les  $a_{ijkh}$  sont les *coefficients d'élasticité*, indépendants du tenseur des déformations. Les coefficients d'élasticité ont les propriétés de *symétrie*

$$(2.2) \quad a_{ijkh} = a_{jihk} = a_{khij}$$

et d'*ellipticité*

$$(2.3) \quad a_{ijkh} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kh} \geq \alpha_1 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad \alpha_1 \text{ constante } > 0, \quad \forall \varepsilon_{ij}.$$



La loi (2.1) correspond en général à un matériau anisotrope. Dans le cas où le matériau est *non homogène*, les coefficients d'élasticité dépendent de  $x$  mais supposant alors qu'ils sont mesurables et bornés en  $x$ , tout ce qui suit s'adapte sans difficulté (il faudrait des hypothèses de *différentiabilité* en  $x$  si l'on étudiait la *régularité* des solutions).

Dans les hypothèses ci-dessus on peut « inverser » (2.1) :

$$(2.4) \quad \varepsilon_{ij}(u) = A_{ijkh} \sigma_{kh}$$

où

$$(2.5) \quad A_{ijkh} = A_{khij} = A_{jikh}$$

et

$$(2.6) \quad A_{ijkh} \sigma_{ij} \sigma_{kh} \geq \alpha_2 \sigma_{ij} \sigma_{ij}, \quad \alpha_2 > 0, \quad \forall \sigma_{ij}.$$

Posant

$$(2.7) \quad \alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$$

nous conserverons, à la place de (2.3) et (2.6), les relations

$$(2.8) \quad \begin{cases} a_{ijkh} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kh} \geq \alpha \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}, & \alpha > 0, \\ A_{ijkh} \sigma_{ij} \sigma_{kh} \geq \alpha \sigma_{ij} \sigma_{ij}. \quad \blacksquare \end{cases}$$

*Cas isotrope* (cf. P. Germain [1], W. Prager [1]).

Dans le cas isotrope les coefficients  $a_{ijkh}$  sont donnés par

$$(2.9) \quad a_{ijkh} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kh} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}),$$

où les scalaires  $\lambda$  et  $\mu$  sont les *coefficients de Lamé*. Alors (2.1) devient

$$(2.10) \quad \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij} \quad (\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(u)).$$

D'où

$$(2.11) \quad \sigma_{kh} = (3 \lambda + 2 \mu) \varepsilon_{kh}$$

de sorte que les relations inverses de (2.10) sont

$$(2.12) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2 \mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3 \lambda + 2 \mu} \sigma_{kk} \delta_{ij}.$$

On pose fréquemment :

$$(2.13) \quad 3 K = 3 \lambda + 2 \mu, \quad \frac{1}{E} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3 \lambda + 2 \mu)}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

où  $K$  est le *module de rigidité à la compression*,  $E$  le *module de Young* et  $\nu$  le *coefficient de Poisson*.

Les relations (2.12) s'expriment en fonction de  $\nu$  et  $E$  par

$$(2.14) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kh} \delta_{ij} . \quad \blacksquare$$

*Remarque 2.1*

De par leur interprétation physique,  $K$  et  $\mu$  (*module de cisaillement*) satisfont à

$$K \geq 0, \quad \mu \geq 0$$

ce qui implique

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \geq 0$$

lorsque  $\sigma_{ij}$  et  $\varepsilon_{ij}$  sont liés par la loi du comportement. Dans le cas non isotrope, cela implique :

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = A_{ijkh} \sigma_{ij} \sigma_{kh} = a_{ijkh} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kh} \geq 0 .$$

Les inégalités « *renforcées* » (2.8) sont généralement vérifiées dans la pratique mais n'ont pas un caractère physique « *basique* ». ■

*Remarque 2.2* (Elasticité non linéaire)

On peut développer des théories *non linéaires* <sup>(1)</sup> de l'élasticité des deux manières suivantes :

i) La loi de comportement est une relation entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations non linéaires (cf. Chap. 1, n° 1.3) ; on obtient alors suivant les cas, les matériaux de Type harmonique (cf. F. John [1] [2]) ou le matériau de Mooney [1].

ii) La loi de comportement est une relation *non linéaire* entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations linéarisé (cf. Dinca [1]).

Il est hors de doute que certains des problèmes résolus aux numéros 5 et suivants peuvent être abordés dans ces situations, mais cela reste à expliciter.

## 2.2. Les problèmes classiques d'élasticité linéaire

### 2.2.1. Linéarisation de l'équation de conservation de la masse et des équations du mouvement

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  occupé par le corps élastique dans son état non déformé. On suppose  $\Omega$  borné de frontière  $F$  régulière. Désignons par  $\{x_i\}$ , élément de  $\overline{\Omega}$ , les coordonnées d'une particule matérielle dans l'état non déformé et soient  $\{X_i\}$  les coordonnées à l'instant  $t$  de cette même particule. Nous avons

$$(2.15) \quad X_i = x_i + u_i(x, t) ,$$

<sup>(1)</sup> Il faudra bien noter que les problèmes étudiés à partir du n° 5 sont *non linéaires bien que relatifs à un matériau à loi de comportement linéaire*.

où  $\{u_i\}$  est le vecteur déplacement de la particule  $x = \{x_i\}$ . Supposant les déplacements « petits », nous linéarisons par rapport aux  $u_i$ . Alors, pour toute fonction  $\xi$ ,  $t \rightarrow f(\xi, t)$  régulière sur  $\mathbb{R}^3$  et en  $t \geq 0$ , on a :

$$(2.16) \quad f(X_i, t) = f(x_i, t) + \frac{\partial f}{\partial X_i}(X_i, t)_{x=x} u_i + \dots,$$

et

$$(2.17) \quad \partial f(X_i, t)/\partial X_i = \partial f(x_i, t)/\partial x_i + \dots$$

où les ... désignent des termes d'ordre en les  $u_i$  supérieur à celui du dernier terme écrit.

L'équation de conservation de la masse qui s'écrit (Chap. 1, n° 1.2)

$$(2.18) \quad d\rho/dt + \rho \partial v_i(X, t)/\partial X_i = 0$$

devient alors après linéarisation (en les  $u_i$ )

$$(2.19) \quad \partial \rho(x, t)/\partial t + \rho(x, t) \partial v_i(x, t)/\partial x_i = 0.$$

Pour  $x$  constant on a alors

$$d\rho/\rho + v_{i,i} dt = 0,$$

soit après intégration sur  $[0, t]$ ,

$$\text{Log}(\rho(x, t)/\rho(x, 0)) + \int_0^t v_{i,i}(x, \tau) d\tau = 0.$$

Comme  $u_i(x, t)$  est petit, il est loisible de supposer que  $v_{i,i} = \partial^2 u_i/\partial x \partial t$  est également petit et par conséquent la relation précédente donne, au premier ordre,

$$(2.20) \quad \rho(x, t) = \rho_0(x) [1 - \int_0^t v_{i,i}(x, \tau) d\tau],$$

où l'on a posé  $\rho_0(x) = \rho(x, 0)$ .

Le terme  $\rho \gamma_i$  dans les équations du mouvement se linéarise alors en  $\rho_0 \partial^2 u_i/\partial t^2$  et ces équations deviennent

$$(2.21) \quad \rho_0(x) (\partial^2 u_i/\partial t^2) = \sigma_{ij,j} + f_i.$$

Dans la suite nous ferons l'hypothèse :

$$\rho_0 \equiv 1$$

supposant par là que dans son état non déformé le matériau est de densité constante. Tout ce qui suit s'étend sans difficultés autres que techniques au cas où  $\rho_0(x)$  est une fonction mesurable et bornée telle que

$$\rho_0(x) \geq \rho_0 > 0$$

(remplacer dans la suite le produit scalaire  $\int_{\Omega} fg dx$  par le produit scalaire équivalent  $\int_{\Omega} \rho_0(x) fg dx$ ).

En résumé, les équations de l'élasticité linéaire sont :

$$(2.22) \quad \partial^2 u_i / \partial t^2 = \sigma_{ij,j} + f_i \quad \text{dans } \Omega ,$$

$$(2.23) \quad \sigma_{ij} = a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u) ,$$

la densité après déformation étant donné par (2.20) (où  $\rho_0(x) = 1$ ) ; le vecteur  $f = \{ f_i \}$  représente une densité volumique de forces données.

### 2.2.2. Les conditions aux limites <sup>(2)</sup>

Nous supposons que les *déplacements* sont donnés sur une partie  $\Gamma_U$  de  $\Gamma$  et que les *forces surfaciques* sont données sur le reste  $\Gamma_F$  de la frontière. **On suppose que  $\Gamma_U$  et  $\Gamma_F$  ne dépendent pas du temps** <sup>(3)</sup>. Donc :

$$(2.24) \quad \Gamma = \Gamma_U \cup \Gamma_F, \quad \Gamma_U \cap \Gamma_F = \emptyset ,$$

$$(2.25) \quad \left| \begin{array}{l} u_i = U_i \text{ sur } \Gamma_U, \quad \{ U_i \} = \text{champ de vecteurs donné sur } \Gamma_U, \\ \text{dépendant ou non du temps,} \end{array} \right.$$

$$(2.26) \quad \left| \begin{array}{l} \sigma_{ij} n_j = F_i \text{ sur } \Gamma_F, \quad \{ F_i \} = \text{densité surfacique de forces don-} \\ \text{nées sur } \Gamma_F, \text{ dépendant ou non du temps. } \blacksquare \end{array} \right.$$

*Remarque 2.3*

L'un des ensembles  $\Gamma_U$  ou  $\Gamma_F$  peut éventuellement être vide.

*Remarque 2.4*

Les données aux limites (2.25) et (2.26) peuvent en fait être généralisées sans difficulté nouvelle fondamentale : on peut supposer qu'en chaque point de  $\Gamma$  on donne la composante du déplacement (resp. de la force contrainte) dans une direction et les composantes de la force de contrainte (resp. du déplacement) dans le plan perpendiculaire à cette direction.

### 2.2.3. Résumé. Orientation

En résumé, on cherche  $u$  et  $\sigma_{ij}$  liés par les équations (2.22), (2.23), avec les *conditions aux limites* (2.25), (2.26), à quoi on ajoute naturellement les *conditions initiales*

$$(2.27) \quad \left| \begin{array}{l} u_i(x, 0) = u_{0i}(x) , \\ \partial u_i(x, 0) / \partial t = u_{1i}(x) . \end{array} \right.$$

<sup>(2)</sup> Ce sont les conditions aux limites qui devront être modifiées lorsque nous introduirons (au n° 5) le frottement.

<sup>(3)</sup> L'abandon de cette hypothèse semble conduire à des problèmes ouverts et fort intéressants.

Dans le cas *stationnaire* (étudié au n° 3) on fait  $\partial^2 u_i / \partial t^2 = 0$  dans (2.22) et évidemment les conditions (2.27) deviennent sans objet.

Nous allons maintenant donner la *formulation variationnelle* du problème d'évolution.

### 2.3. Formulation variationnelle du problème d'évolution

#### 2.3.1. Formule de Green

On pose :

$$(2.28) \quad (Au)_i = - \partial / \partial x_j (\sigma_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u)),$$

le système différentiel  $A$  étant le système de l'élasticité.

De manière générale, on posera :

$$(f, g) = \int_{\Omega} f_i g_i \, dx \quad \text{pour } f, g \in (L^2(\Omega))^3,$$

et pour deux vecteurs  $u$  et  $v$ , on pose :

$$(2.29) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{ij}(v) \, dx.$$

Alors,  $\sigma_{ij}$  et  $u$  étant liés par (2.1) on a

$$\begin{aligned} (Au)_i &= - \sigma_{ij,j}, \\ a(u, v) &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(v) \, dx = \int_{\Omega} \sigma_{ij} (\partial v_i / \partial x_j) \, dx \\ &= - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} v_i \, dx + \int_{\Gamma} (\sigma_{ij} n_j) v_i \, d\Gamma. \end{aligned}$$

On obtient donc la *formule de Green* :

$$(2.30) \quad \left| \begin{array}{l} (Au, v) = a(u, v) - \int_{\Gamma} (\sigma_{ij} n_j) v_i \, d\Gamma \\ (\sigma_{ij} \text{ lié à } u \text{ par (2.1)}) \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

*Remarque 2.5*

On utilisera plus loin les notions (classiques) suivantes. On introduit :

$$(2.31) \quad \left| \begin{array}{l} \sigma_N = \sigma_{ij} n_i n_j, \\ \sigma_T = \{ \sigma_{iT} \}, \\ \sigma_{iT} = \sigma_{ij} n_j - \sigma_N n_i \end{array} \right.$$

et

$$(2.32) \quad v_N = v_i n_i, \quad v_T = v - n v_N \quad (n = \{ n_i \}).$$

Alors

$$(\sigma_{ij} n_j) v_i = \sigma_T v + \sigma_N v_N = \sigma_T v_T + \sigma_N v_N$$

d'où, en portant dans (2.30) :

$$(2.33) \quad (Au, v) = a(u, v) - \int_{\Gamma} (\sigma_T v_T + \sigma_N v_N) \, d\Gamma. \quad \blacksquare$$

*Remarque 2.6*

Il résulte de (2.2), (2.8) que

$$(2.34) \quad a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v,$$

$$(2.35) \quad a(v, v) \geq \alpha \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) \, dx.$$

**2.3.2. Formulation variationnelle**

Avec les notations du n° 2.3.1 précédent, (2.22) s'écrit :

$$(2.36) \quad \partial^2 u / \partial t^2 + Au = f \quad \text{dans } Q = \Omega \times ]0, T[ \quad (^4)$$

avec les conditions aux limites (2.25), (2.26) et les conditions initiales que l'on écrit dans la notation déjà utilisée aux chapitres précédents

$$(u(t) = \text{fonction } x \rightarrow u(x, t), \quad u'(t) = \partial u(t) / \partial t) :$$

$$(2.37) \quad u(0) = u_0,$$

$$(2.38) \quad u'(0) = u_1.$$

Prenant le produit scalaire de (2.36) avec  $v - u(t)$  où  $v$  est une fonction test telle que

$$(2.39) \quad v_i = U_i \quad \text{sur } \Gamma_U \quad (^5),$$

il vient (condition équivalente à (2.36)) :

$$(2.40) \quad (u''(t), v - u(t)) + (Au(t), v - u(t)) = (f(t), v - u(t));$$

naturellement comme toujours dans la première étape des formulations faibles on suppose toutes les fonctions régulières, les intégrations par parties étant alors légitimes.

Utilisant (2.30) on a, comme  $v = u$  sur  $\Gamma_U$  :

$$(Au(t), v - u(t)) = a(u(t), v - u(t)) - \int_{\Gamma_F} (\sigma_{ij} n_j) (v_i - u_i(t)) \, d\Gamma$$

d'où en tenant compte de (2.26) :

$$(2.41) \quad (Au(t), v - u(t)) = a(u(t), v - u(t)) - \int_{\Gamma_F} F(t) (v - u(t)) \, d\Gamma$$

et alors (2.40) entraîne

$$(2.42) \quad \left| \begin{array}{l} (u''(t), v - u(t)) + a(u(t), v - u(t)) = \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad = (f(t), v - u(t)) + \int_{\Gamma_F} F(t) (v - u(t)) \, d\Gamma \\ \forall v \quad \text{avec } (2.39). \end{array} \right.$$

(<sup>4</sup>)  $T$  fixé quelconque. On pourra faire  $T \rightarrow +\infty$ .

(<sup>5</sup>) On verra plus loin pourquoi il est intéressant de prendre le produit scalaire par  $v - u$ .  
Noter que  $v$  parcourt un espace affine.

Réciproquement si  $u = u(t)$  est une fonction (régulière) *satisfaisant* à (2.25) ( $u_i = U_i$  sur  $\Gamma_U$ ), à (2.42) et (2.37), (2.38), *alors*  $u$  est solution du problème cherché (il suffit de « remonter les calculs »).

### Orientation

Nous allons dans la suite (en fait au n° 4) résoudre ce problème, dans un sens convenable. Auparavant (n° 3) nous allons étudier le *cas stationnaire*, important en lui-même et qui nécessite l'introduction *des outils de base* pour la résolution du problème d'évolution.

## 3. PROBLÈMES STATIQUES

### 3.1. Formulation classique

Avec les notations du n° 2, il s'agit de trouver, dans le cas statique, une fonction  $u$  solution de

$$(3.1) \quad Au = f \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(3.2) \quad u_i = U_i \quad \text{sur } \Gamma_U$$

$$(3.3) \quad \sigma_{ij} n_j = F_i \quad \text{sur } \Gamma_F.$$

### 3.2. Formulation variationnelle

De manière formelle (cf. le § 2.3.2) le problème *équivalent* à la recherche de  $u$  *vérifiant* (3.2) *et tel que* :

$$(3.4) \quad a(u, v - u) = (f, v - u) + \int_{\Gamma_F} F(v - u) d\Gamma$$

$\forall v$  tel que

$$(3.5) \quad v_i = U_i \quad \text{sur } \Gamma_U.$$

### Interprétation

Un champ de vecteurs  $v = \{v_i\}$  satisfaisant (3.5) est dit *cinématiquement admissible* (on dit en abrégé que  $v$  est un c.c.a.). Alors

$u$  est un c.c.a. vérifiant (3.4) pour tous les c.c.a.,

*ou encore* :  $u$  est un c.c.a. qui *minimise*, parmi tous les c.c.a. l'énergie potentielle de  $v$  définie par

$$(3.6) \quad I(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v) - \int_{\Gamma_F} Fv d\Gamma.$$

Naturellement, il faut encore préciser un peu. On posera <sup>(6)</sup>

$$(3.7) \quad V = \{v \mid v = \{v_i\}, v_i \in H^1(\Omega)\} = (H^1(\Omega))^3,$$

<sup>(6)</sup> On utilise maintenant le Chapitre 1, n° 4.

qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(3.8) \quad \begin{aligned} (u, v) &= (u_i, v_i)_{H^1(\Omega)} \\ &= \int_{\Omega} (u_i v_i + u_{i,j} v_{i,j}) \, dx. \end{aligned}$$

Pour  $v \in V$ , on peut définir la trace de  $v_i$  sur  $\Gamma$  et  $v_i \in H^{1/2}(\Gamma)$ . On définit donc les c.c.a. par :  $v \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$  où

$$(3.9) \quad \mathcal{U}_{\text{ad}} = \{ v \mid v \in V, \quad v_i = U_i \text{ sur } \Gamma_U \},$$

ce qui a un sens (i.e. définit un ensemble non vide) pourvu que

$$(3.10) \quad U_i \in H^{1/2}(\Gamma) \quad \forall i.$$

Alors  $\mathcal{U}_{\text{ad}}$  est une variété linéaire affine fermée dans  $V$ .

Par ailleurs, pour  $v \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$  on peut définir  $v_i$  sur  $\Gamma_F$  et  $v_i$  appartient en particulier à  $H^{1/2}(\Gamma_F)$ , mais ne parcourt pas tout  $H^{1/2}(\Gamma_F)$ ; les  $v_i$  doivent satisfaire à une « condition de raccord » à l'interface entre  $\Gamma_F$  et  $\Gamma_U$ , puisque  $v_i = u_i = U_i$  sur  $\Gamma_U$ ; ces conditions de raccord sont techniquement compliquées (cf. Lions-Magenes [1], Vol. 1, Chap. 1 et 2 pour des questions analogues); pour éviter ces difficultés (d'ordre technique) nous supposons que

$$(3.11) \quad F \in (L^2(\Gamma_F))^3;$$

alors  $v \rightarrow \int_{\Gamma_F} Fv \, d\Gamma$  est continu sur  $V$  et nous pouvons énoncer le problème statique de la façon (définitive) suivante :

### Problème 3.1

Minimiser sur  $\mathcal{U}_{\text{ad}}$  la fonctionnelle « énergie potentielle » donnée par  $I(v)$ , ou, ce qui revient au même : trouver  $u \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$  tel que l'on ait (3.4)  $\forall v \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$ .

Le problème de base est maintenant celui de la coercivité de  $a(v, v)$ , cette question reposant sur l'inégalité de Korn qui fait l'objet du n° 3.3 ci-après.

## 3.3. Inégalité de Korn et conséquences

**Théorème 3.1.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de frontière régulière <sup>(7)</sup>. Il existe une constante  $c > 0$  (dépendant de  $\Omega$ ) telle que

$$(3.12) \quad \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) \, dx + \int_{\Omega} v_i v_i \, dx \geq c \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

<sup>(7)</sup> Plus généralement le résultat est valable si  $\Omega$  est un ouvert borné ou non dont la frontière  $\Gamma$  peut être décrite par un nombre fini de cartes « locales » qui soient des fonctions une fois continûment différentiables et bornées dans les deux sens. C'est le cas pour un ouvert  $\Omega$  dont la frontière régulière est bornée ou « va régulièrement à l'infini ».



Ce résultat n'est pas une banalité : en effet le premier membre de (3.12) ne fait intervenir que *certaines combinaisons* de dérivées premières, à savoir  $v_{i,j} + v_{j,i}$  alors que le deuxième membre de (3.12) fait intervenir *toutes* les dérivées premières ; évidemment l'inégalité « inverse » est évidente, de sorte que (3.12) équivaut à dire que

$$(3.13) \quad \left| \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) dx + \int_{\Omega} v_i v_i dx \right|^{1/2} \text{ est une norme sur } V \text{ équivalente à } \|v\|_V.$$

Le Théorème 3.1 est une conséquence facile (comme on va voir) du

**Théorème 3.2.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de frontière régulière <sup>(8)</sup>. Soit  $v$  une distribution sur  $\Omega$  telle que

$$(3.14) \quad v \in H^{-1}(\Omega), \quad v_{,i} \in H^{-1}(\Omega) \quad \forall i.$$

Alors

$$(3.15) \quad v \in L^2(\Omega).$$

*Démonstration du Théorème 3.1 à partir du Théorème 3.2.*

Soit  $E$  l'espace des  $v \in (L^2(\Omega))^3$  tels que

$$\varepsilon_{ij}(v) \in L^2(\Omega) \quad \forall i, j;$$

$E$  est un espace de Hilbert pour la norme

$$\left( \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) dx + \int_{\Omega} v_i v_i dx \right)^{1/2}.$$

On a :

$$(3.16) \quad \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon_{ik}(v) + \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{ij}(v) - \frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon_{jk}(v).$$

Si  $v \in E$  alors  $\varepsilon_{ij}(v) \in L^2(\Omega)$ , donc  $\partial \varepsilon_{ij}(v) / \partial x_k \in H^{-1}(\Omega)$  et donc (3.16) donne

$$(3.17) \quad \partial^2 v_i / \partial x_j \partial x_k \in H^{-1}(\Omega) \quad \forall i, j, k.$$

Appliquant le Théorème 3.2 à  $v_{i,k}$  on voit que (3.17) entraîne

$$v_{i,k} \in L^2(\Omega) \quad \forall i, k$$

donc  $v \in (H^1(\Omega))^3$ . Donc on a l'égalité algébrique  $E = (H^1(\Omega))^3$ . Comme l'injection de  $(H^1(\Omega))^3 \rightarrow E$  est continue et, on vient de le voir, surjective, c'est (d'après le théorème du graphe fermé) un isomorphisme d'où (3.12). ■

<sup>(8)</sup> Cf. note <sup>(7)</sup> du Théorème 3.1.

*Remarque 3.1*

Une variante de la démonstration précédente montre que le Théorème 3.2 implique l'existence d'une constante  $c_1$  telle que

$$(3.18) \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c_1 (\|v\|_{H^{-1}(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|v_i\|_{H^{-1}(\Omega)}),$$

d'où l'on peut déduire de nouveau (3.12). ■

*Démonstration du Théorème 3.2*

Introduisons, pour la démonstration, l'espace

$$(3.19) \quad X(\Omega) = \{v \mid v \in H^{-1}(\Omega), v_i \in H^{-1}(\Omega) \quad \forall i\},$$

(qui est un espace de Hilbert pour la norme

$$(\|v\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \|v_i\|_{H^{-1}(\Omega)}^2)^{1/2}.$$

Il s'agit de montrer que

$$(3.20) \quad X(\Omega) = L^2(\Omega).$$

La démonstration s'effectue en plusieurs pas.

i) La propriété (3.20) est vraie pour  $\Omega = R^3$  <sup>(9)</sup>.

En effet, par transformation de Fourier (cf. Chap. 1, n° 4) l'hypothèse (3.14) équivaut alors à

$$(1 + |\xi|^2)^{-1/2} \hat{v} \in L^2(R_\xi^3), \quad (1 + |\xi|^2)^{-1/2} \xi_i \hat{v} \in L^2(R_\xi^3)$$

donc

$$\int_{R^3} (1 + |\xi|^2)^{-1} \left(1 + \sum_{i=1}^n \xi_i^2\right) |\hat{v}|^2 d\xi < \infty$$

i.e.

$$v \in L^2(R^3) = L^2(\Omega).$$

ii) Il suffit de montrer (3.20) pour un demi-espace

$$(3.21) \quad \Omega = \{x \mid x_3 > 0\}.$$

En effet soit  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N$  avec

$$(3.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \alpha_i \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}), \quad i = 1, \dots, N, \quad \sum_{i=0}^N \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \text{ à sup-} \\ \text{port dans une carte locale définissant } \Gamma \text{ (}^{10}\text{).} \end{array} \right.$$

<sup>(9)</sup> Naturellement, le fait que la dimension soit égale à 3 ne joue ici aucun rôle.

<sup>(10)</sup> Si  $\Gamma$  n'est pas bornée, certaines des  $\alpha_i$  ne sont pas à support compact mais sont par exemple dans une carte où l'on peut introduire l'image dans le demi-espace (3.21).

De façon générale si  $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ ,  $v \rightarrow \varphi v$  applique  $X(\Omega) \rightarrow X(\Omega)$ ; alors

$$(3.23) \quad v = \sum_{i=0}^N \alpha_i v ;$$

mais on peut considérer  $\alpha_0 v$  comme élément de  $X(R^3)$  (prolongeant par 0 hors de  $\Omega$ ) donc d'après i)  $\alpha_0 v \in L^2(\Omega)$ . D'après (3.23) on aura donc le résultat si l'on montre que  $\alpha_i v \in L^2(\Omega)$ . Mais  $\alpha_i v$  est à support dans une carte locale; on peut donc considérer son image dans le demi-espace (3.21), si l'on suppose  $\Gamma$  variété de dimension  $(n - 1)$ , une fois continûment différentiable. L'image de  $\alpha_i v$  est dans l'espace  $X(\Omega)$  pour  $\Omega$  donné par (3.21). D'où l'assertion ii).

On suppose donc désormais  $\Omega$  donné par (3.21).

iii) On introduit :

$$H_0^1(0, \infty ; L^2(R^2)) = \{ \varphi \mid \varphi, \quad d\varphi/dx_3 \in L^2(0, \infty ; L^2(R^2)), \\ \varphi(x', 0) = 0 \}$$

(où  $x' = \{ x_1, x_2 \}$ ),

$H^{-1}(0, \infty ; L^2(R^2)) = \text{dual de } H_0^1(0, \infty ; L^2(R^2))$  (lorsque  $L^2(R^3)$  est identifié à son dual).

$$(3.24) \quad Y(\Omega) = \{ v \mid v, \quad dv/dx_3 \in H^{-1}(0, \infty ; L^2(R^2)) \} .$$

On a :  $Y(\Omega) \subset X(\Omega)$  et plus précisément

$$(3.25) \quad Y(\Omega) \text{ est dense dans } X(\Omega) .$$

En effet soit  $\rho_m$  une suite régularisante de  $\mathcal{D}(R_x^2)$  <sup>(11)</sup>; pour  $v \in X(\Omega)$  on définit

$$(3.26) \quad v_m = v_{(x')}^* \rho_m$$

(pour toute distribution  $f$  sur  $]0, \infty[$  à valeurs dans  $L^2(R_x^2)$ , et tout opérateur  $\pi$  linéaire continu de  $L^2(R_x^2)$  dans lui-même, on définit  $\pi f$  comme distribution sur  $]0, \infty[$  à valeurs dans  $L^2(R_x^2)$ ); formellement

$$\pi v_m(x) = \int_{R^2} v(x' - y', x_3) \rho_m(y') dy', \quad y' = \{ y_1, y_2 \} .$$

Alors lorsque  $m \rightarrow \infty$  on a :  $v_m \rightarrow v$  dans  $X(\Omega)$  et  $v_m$  est en particulier dans  $Y(\Omega)$ ; (en fait  $v_m$  et  $dv_m/dx_3$  sont dans  $H^{-1}(0, \infty ; H^k(R^2)) \quad \forall k$ ).

iv)  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  est dense dans  $X(\Omega)$ .

En vertu de (3.25) il suffit de montrer que

$$(3.27) \quad \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \text{ est dense dans } Y(\Omega) .$$

<sup>(11)</sup> Donc  $\rho_m$  est une suite de fonctions  $\geq 0$  de  $\mathcal{D}(R^2)$ ,  $\int \rho_m(x') dx' = 1$ , support de  $\rho_m$  contenu dans une boule de centre l'origine, rayon  $\varepsilon_m$ ,  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  si  $m \rightarrow \infty$ .

On utilise à cet effet le Théorème de Hahn-Banach. Soit  $v \rightarrow M(v)$  une forme linéaire continue sur  $Y(\Omega)$ , donc de la forme

$$(3.28) \quad \begin{cases} M(v) = \int_0^\infty [(f, v) + (g, dv/dx_3)] dx_3, \\ f, g \in H_0^1(0, \infty; L^2(\mathbb{R}_x^2)). \end{cases}$$

On suppose que  $M(v) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$  et il faut montrer que  $M = 0$ . Mais si  $\tilde{f}, \tilde{g}$  désignent les prolongements de  $f$  et  $g$  par 0 pour  $x_3 < 0$ , la condition

$$\ll M(v) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \gg$$

équivalent à

$$(3.29) \quad \tilde{f} - d\tilde{g}/dx_3 = 0$$

donc

$$d\tilde{g}/dx_3 \in H^1(-\infty, +\infty; L^2(\mathbb{R}_x^2))$$

et par conséquent

$$(3.30) \quad g \in H_0^2(0, \infty; L^2(\mathbb{R}_x^2)).$$

Mais alors

$$\int_0^\infty (g, dv/dx_3) dx_3 = - \int_0^\infty (dg/dx_3, v) dx_3 \quad \forall v \in Y(\Omega)$$

et donc  $M(v) = 0 \quad \forall v \in Y(\Omega)$ .

v) Pour  $v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$  on pose maintenant

$$(3.31) \quad Pv(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si } x_3 > 0 \\ a_1 v(x', -x_3) + a_2 v(x', -2x_3) \end{cases}$$

où

$$(3.32) \quad a_1 + a_2 = 1, \quad a_1 + a_2/2 = -1 \quad (\text{i.e. } a_1 = -3, a_2 = 4).$$

On vérifie que

$$(3.33) \quad \begin{cases} v \rightarrow Pv \text{ est continue de } \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \text{ muni de la topologie induite par} \\ X(\Omega) \rightarrow X(\mathbb{R}^3). \end{cases}$$

Admettant un instant ce point, on voit que, d'après iv), on peut prolonger  $v \rightarrow Pv$  en une application encore notée  $v \rightarrow Pv$  linéaire continue de  $X(\Omega) \rightarrow X(\mathbb{R}^3)$  et telle que

$$(3.34) \quad Pv \text{ restreint à } \Omega = v.$$

Alors pour  $v \in X(\Omega)$ ,  $Pv \in X(\mathbb{R}^3)$  donc par i)  $Pv \in L^2(\mathbb{R}^3)$  donc par (3.34)

$$v \in L^2(\Omega).$$

Reste donc à montrer (3.33).

Comme  $a_1 + a_2 = 1$  on a :

$$\frac{\partial}{\partial x_3} P v = \begin{cases} \partial u / \partial x_3, & x_3 > 0 \\ -a_1 \frac{\partial v}{\partial x_3}(x', -x_3) - 2a_2 \frac{\partial v}{\partial x_3}(x', -2x_3), & x_3 < 0. \end{cases}$$

Posant  $\partial v / \partial x_3 = w$  on introduit

$$(3.35) \quad Q w = \begin{cases} w & \text{si } x_3 > 0 \\ -a_1 w(x', -x_3) - 2a_2 w(x', -2x_3) & \text{si } x_3 < 0. \end{cases}$$

Il s'agit donc de montrer que  $P$  (resp.  $Q$ ) est continu de  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  muni de la topologie induite par  $H^{-1}(\Omega) \rightarrow H^{-1}(R^3)$ , donc, par transposition, que  $'P$  (resp.  $'Q$ ) est linéaire continu de  $H^1(R^3) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ .

Or pour  $\varphi \in H^1(R^3)$  on a :

$$\begin{aligned} 'P\varphi(x) &= \varphi(x) + a_1 \varphi(x', -x_3) + \frac{1}{2} a_2 \varphi(x', -x_3/2), \\ 'Q\varphi(x) &= \varphi(x) - a_1 \varphi(x', -x_3) - a_2 \varphi(x', -x_3/2). \end{aligned}$$

Alors  $'P\varphi(x', 0) = 'Q\varphi(x', 0) = 0$  grâce à (3.32), d'où le résultat. ■

*Remarque 3.2*

On trouvera une autre démonstration dans Gobert [1] valable dans des conditions plus générales sur  $\Omega$  (il suffit que  $\Omega$  ait la « propriété du cône »), mais utilisant la théorie des intégrales singulières. ■

On va maintenant déduire des résultats précédents des conséquences fondamentales pour la suite du Chapitre.

**Théorème 3.3.** *On se place dans les hypothèses du Théorème 3.1. Soit  $\Gamma_0 \subset \Gamma$ ,  $\Gamma_0$  de mesure positive. Soit*

$$(3.36) \quad V_0 = \{ v \mid v \in (H^1(\Omega))^3, v = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \}.$$

Alors il existe  $\alpha_0 > 0$  tel que

$$(3.37) \quad a(v, v) \geq \alpha_0 \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V_0.$$

*Démonstration*

1) De façon générale

$$(3.38) \quad \begin{cases} a(v, v) = 0 \Leftrightarrow v \in \mathcal{R}, \\ v \in V \end{cases}$$

où

$$(3.39) \quad \mathcal{R} = \{ v \mid v(x) = a + b \wedge x, a, b \in R^3 \} \quad (12)$$

(12)  $\mathcal{R}$  = ensemble des déplacements rigides.

Puisque  $\Gamma_U$  est de mesure positive,

$$v \in \mathcal{R} \cap V_0 \Rightarrow v = 0$$

et par conséquent

$$(3.40) \quad a(v, v) = 0, \quad v \in V_0 \Leftrightarrow v = 0.$$

2) On voit donc que  $a(v, v)^{1/2}$  est une *norme* sur  $V_0$  et il faut montrer que c'est une norme *équivalente* à  $\|v\|_V$ . Pour simplifier l'écriture, posons :

$$(3.41) \quad \varepsilon(v) = \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) \, dx.$$

D'après (2.35) et le Théorème 3.1, tout revient à montrer l'existence de  $c_0 > 0$  telle que

$$(3.42) \quad \varepsilon(v) \geq c_0 |v|^2, \quad |v|^2 = \int_{\Omega} v_i v_i \, dx, \quad \forall v \in V_0.$$

Remplaçant  $v$  par  $v |v|^{-1}$  on peut supposer que  $|v| = 1$  et il faut alors montrer l'existence de  $c_0 > 0$  avec  $\varepsilon(v) \geq c_0$ . Raisonnons par l'absurde. Si le résultat était inexact, il existerait une suite  $v_n \in V_0$  avec :

$$(3.43) \quad |v_n| = 1, \quad \varepsilon(v_n) \rightarrow 0.$$

D'après le Théorème 3.1 on a alors :  $\|v_n\|_V \leq C$ ; on peut donc extraire une suite encore notée  $v_n$  telle que

$$(3.44) \quad v_n \rightarrow v \quad \text{dans } V \text{ faible.}$$

Mais alors :

$$\liminf \varepsilon(v_n) \geq \varepsilon(v)$$

donc  $\varepsilon(v) = 0$  donc d'après 1)  $v = 0$ .

Par ailleurs  $\Omega$  étant borné de frontière régulière, l'injection  $V \rightarrow (L^2(\Omega))^3$  est *compacte* et par conséquent  $v_n \rightarrow 0$  dans  $(L^2(\Omega))^3$  *fort*, ce qui contredit l'hypothèse  $|v_n| = 1$ , d'où le résultat. ■

**Corollaire 3.1.** *On suppose  $\Omega$  borné de frontière régulière et  $\Gamma_U$  de mesure positive. Alors  $I(v)$  étant donnée par (3.6) on a :*

$$(3.45) \quad I(v) \rightarrow +\infty \quad \text{si} \quad \|v\|_V \rightarrow +\infty, \quad v \in \mathcal{U}_{\text{ad}}.$$

*Démonstration*

Soit  $\Phi \in V$ , avec

$$\Phi = U \quad \text{sur} \quad \Gamma_U.$$

Alors si  $v \in \mathcal{U}_{ad}$ ,  $v - \Phi \in V_0$ . Posons  $v - \Phi = v_0$ . Alors

$$I(v) = \frac{1}{2} a(v_0, v_0) + a(v_0, \Phi) + \frac{1}{2} a(\Phi, \Phi) - (f, \Phi + v_0) - \int_{\Gamma_F} F(v_0 + \Phi) d\Gamma$$

et d'après le Théorème 3.3 on a donc

$$I(v) \geq \frac{1}{2} \alpha_0 \|v_0\|_V^2 - c_1 \|v_0\|_V - c_2,$$

d'où

$$(3.46) \quad I(v) \geq \alpha_1 \|v\|_V^2 - c_3 \|v\|_V - c_4 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad},$$

d'où en particulier (3.45). ■

Examinons maintenant le cas où  $\Gamma_U = \Phi$ . Alors  $a(v, v)^{1/2}$  n'est plus une norme sur  $V_0 = V$  mais une semi-norme. D'après (3.38) on passe au quotient par  $\mathcal{R}$ ; on introduit donc :

$$(3.47) \quad V^* = V/\mathcal{R}.$$

Pour  $u^*, v^* \in V^*$  on définit

$$(3.48) \quad a(u^*, v^*) = a(u, v), \quad u \in u^*, \quad v \in v^*.$$

On a le

**Théorème 3.4.** *On se place dans les hypothèses du Théorème 3.1. Alors*

$$(3.49) \quad a(v^*, v^*) \geq \alpha \|v^*\|_{V^*}^2, \quad \alpha > 0, \quad \forall v^* \in V^*.$$

*Démonstration*

D'après le Théorème 3.1 on peut prendre comme norme sur  $V$

$$(\varepsilon(v) + |v|^2)^{1/2}.$$

Alors (3.49) équivaut à

$$(3.50) \quad \varepsilon(v) \geq \alpha \left[ \inf_{\rho \in \mathcal{R}} |v + \rho|^2 + \varepsilon(v) \right].$$

Définissons :

$$(3.51) \quad \left| \begin{array}{l} P = \text{opérateur de projection orthogonale dans } (L^2(\Omega))^3 \text{ (pour le pro-} \\ \text{duit scalaire correspondant à } |v| \text{) de } (L^2(\Omega))^3 \rightarrow \mathcal{R}. \end{array} \right.$$

Alors

$$\inf_{\rho \in \mathcal{R}} |v + \rho|^2 = |v - Pv|^2$$

et (3.50) revient à montrer que (comparer à (3.42))

$$(3.52) \quad \varepsilon(v) \geq c_1 |v - Pv|^2 \quad \forall v \in V.$$

On raisonne comme pour (3.42). Remplaçant  $v$  par  $v | v - Pv |^{-1}$ , on se ramène à

$$(3.53) \quad |v - Pv| = 1,$$

et il faut alors montrer l'existence de  $c_1 > 0$  tel que

$$(3.54) \quad \varepsilon(v) \geq c_1.$$

On raisonne par l'absurde. Si (3.54) n'est pas vrai, on peut trouver une suite  $v_n$  de  $V$  telle que

$$(3.55) \quad |v_n - Pv_n| = 1, \quad \varepsilon(v_n) \rightarrow 0.$$

Mais alors si l'on pose

$$(3.56) \quad w_n = v_n - Pv_n$$

on a :

$$|w_n| = 1, \quad \varepsilon(w_n) \rightarrow 0$$

d'où l'on déduit (comme pour (3.43)) que l'on peut extraire une suite encore notée  $w_n$ , telle que

$$w_n \rightarrow w \quad \text{dans } V \text{ faible}, \quad \varepsilon(w) = 0.$$

Alors  $w \in \mathcal{H}$ . D'un autre côté  $w_n \in \mathcal{H}^\perp$  (\*) donc  $w \in \mathcal{H}^\perp$  et donc  $w = 0$ . Mais alors  $w_n \rightarrow 0$  dans  $(L^2(\Omega))^3$  fort ce qui est absurde car  $|w_n| = 1$ . ■

### 3.4. Résultats

#### 3.4.1. Le cas « $\Gamma_U$ de mesure positive »

On déduit aussitôt du Corollaire 3.1 et de la *stricte convexité* de la fonctionnelle (continue)  $v \rightarrow I(v)$  sur  $\mathcal{H}_{\text{ad}}$  que :

**Théorème 3.5.** *On se place dans les hypothèses du Théorème 3.1. Alors le Problème 3.1 admet une solution unique.*

#### Remarque 3.3

Revenons sur la formulation (3.4), (3.5). On peut ramener cette formulation au cas des espaces vectoriels ; introduisant  $\Phi \in V$  avec  $\Phi = U$  sur  $\Gamma_U$ , on pose :

$$(3.57) \quad u - \Phi = u_0, \quad v - \Phi = v_0, \quad u_0, v_0 \in V_0, \quad V_0 \text{ défini en (3.36)}$$

et alors (3.4), (3.5) équivalent à la recherche de  $u_0 \in V_0$  tel que

$$(3.58) \quad a(u_0, v_0) = (f, v_0) + \int_{\Gamma_F} Fv_0 \, d\Gamma - a(\Phi, v_0) \quad \forall v_0 \in V_0. \quad \blacksquare$$

(\*)  $\mathcal{H}^\perp$  est le sous-espace de  $V$  orthogonal à  $\mathcal{H}$  dans la structure hilbertienne induite par  $(L^2(\Omega))^3$ .



### 3.4.2. Le cas « $\Gamma_U$ vide » <sup>(13)</sup>

Lorsque  $\Gamma_U$  est vide on a vu qu'il fallait passer au quotient par  $\mathcal{H}$ . Dans ce cas  $\mathcal{U}_{ad} = V =$  espace vectoriel de sorte que (3.4), (3.5) équivalent à (sous la transformation (3.57)) la recherche de  $u \in V$  tel que

$$(3.59) \quad a(u, v) = (f, v) + \int_{\Gamma} Fv \, d\Gamma \quad \forall v \in V, \quad (\Gamma_F = \Gamma).$$

Le problème n'est possible que si la forme linéaire du deuxième membre de (3.59) est nulle sur  $\mathcal{H}$ , i.e. si

$$(3.60) \quad \int_{\Omega} f_i \rho_i \, dx + \int_{\Gamma} F_i \rho_i \, d\Gamma = 0 \quad \forall \rho \in \mathcal{H}.$$

Du point de vue mécanique (3.60) exprime que le torseur des forces  $\{f_i\}$  et  $\{F_i\}$  (qui sont les seules données) soit équivalent à zéro.

Si l'on pose

$$(3.61) \quad L(v) = (f, v) + \int_{\Gamma} Fv \, d\Gamma,$$

on peut « passer au quotient par  $\mathcal{H}$  » : on définit  $L^*$ , forme linéaire continue sur  $V^* = V/\mathcal{H}$  par

$$(3.62) \quad L^*(v^*) = L(v), \quad v \in v^*$$

et (3.59) équivaut à

$$(3.63) \quad a(u^*, v^*) = L^*(v^*) \quad \forall v^* \in V^*.$$

D'après le Théorème 3.4, ce problème admet une solution unique, donc

**Théorème 3.6.** *On suppose  $\Gamma_U = \emptyset$ . Les forces  $f_i$  et  $F_i$  satisfont à (3.60). Le Problème 3.1 admet alors une solution  $u$ , définie à un déplacement rigide quelconque près.*

*Remarque 3.4*

Dans le Théorème 3.6, il y a unicité des champs de déformations et de contraintes. ■

*Remarque 3.5*

Comme on a déjà signalé, il y a bien sûr des situations « intermédiaires » entre «  $\Gamma_U$  de mesure positive » et «  $\Gamma_U = \emptyset$  ».

Par exemple, lorsque, au lieu de densité de forces, on considère des forces ponctuelles, alors  $\Gamma_F$  est réduit à un nombre fini de points. ■

*Remarque 3.6*

Nous nous sommes intéressés uniquement aux solutions faibles. Pour l'étude de la régularité des solutions, nous renvoyons aux ouvrages généraux sur les équations elliptiques : Lions-Magenes [1], Nécas [1].

<sup>(13)</sup> Il y a évidemment des possibilités intermédiaires entre les hypothèses 3.4.1 et 3.4.2. Cf. Remarque 3.5.

## 3.5. Formulations duales

Nous allons examiner les formulations duales de deux points de vue légèrement différents.

## 3.5.1. Champs statiquement admissibles et énergie potentielle

Nous reprenons le problème (3.1), (3.2), (3.3), ou encore :

$$(3.64) \quad \begin{cases} \sigma_{ij,j} + f_i = 0, \\ \sigma_{ij} = a_{ijkl} c_{kh}(u) & \text{dans } \Omega, \\ \sigma_{ij} n_j = F_i & \text{sur } \Gamma_F, \\ u_i = U_i & \text{sur } \Gamma_U. \end{cases}$$

On introduit l'ensemble  $K$  des champs statiquement admissibles (c.s.a.) de la manière suivante :

$$(3.65) \quad K = \{ \tau \mid \tau_{ij} \in L^2(\Omega) \quad \forall i, j, \quad \tau_{ij} = \tau_{ji}, \quad \tau_{ij,j} + f_i = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \tau_{ij} n_j = F_i \quad \text{sur } \Gamma_F \}.$$

*Remarque 3.7*

Introduisons l'espace

$$(3.66) \quad H = \{ \tau \mid \tau_{ij} \in L^2(\Omega) \quad \forall i, j \},$$

muni de la structure *hilbertienne* :

$$(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx.$$

On vérifie que si  $\tau \in H$  et vérifie

$$\tau_{ij,j} + f_i = 0$$

i.e.  $\tau_{ij,j} \in L^2(\Omega)$ , alors on peut définir, de manière unique

$$(3.67) \quad \tau_{ij} n_j \in H^{-1/2}(\Gamma)$$

de telle sorte que la définition (3.65) de  $K$  a un sens. L'ensemble  $K$  est une variété affine fermée de  $H$ . ■

Pour  $\tau \in K$  on définit son énergie potentielle  $J(\tau)$  par

$$(3.68) \quad J(\tau) = \frac{1}{2} \mathcal{A}(\tau, \tau) - \int_{\Gamma_U} \tau_{ij} n_j U_i d\Gamma$$

où de façon générale

$$(3.69) \quad \mathcal{A}(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} A_{ijkl} \sigma_{kh} \tau_{ij} dx.$$

Un problème *dual* du problème initial est alors :

**Problème 3.2.** *Minimiser  $J(\tau)$  sur  $K$ .* ■

*Remarque 3.8*

Le Problème 3.2 suppose  $K$  non vide.

Si  $\Gamma_U$  est de mesure positive,  $K$  n'est pas vide dès que  $U_i \in H^{1/2}(\Gamma_U)$  (plus précisément : est restriction à  $\Gamma_U$  d'éléments de  $H^{1/2}(\Gamma)$ ).

Si  $\Gamma_U = \emptyset$ ,  $K$  n'est pas vide si et seulement si le torseur des forces  $f_i$  et  $F_i$  est équivalent à zéro. ■

D'après (2.8) on a :

$$\mathcal{A}(\tau, \tau) \geq \alpha \int_{\Omega} \tau_{ij} \tau_{ij} dx = \alpha \|\tau\|_H^2$$

d'où aussitôt le

**Théorème 3.7.** *Supposant  $K$  non vide (cf. Remarque 3.8) le Problème 3.2 admet une solution  $\sigma$  et une seule.*

Reste à expliciter la relation entre le problème initial (ou primal) et le problème « dual » (ce qui n'est jusqu'ici qu'une *définition* !); c'est l'objet du

**Théorème 3.8.** *On suppose  $K$  non vide. Soit  $\sigma$  la solution du problème 3.2. Alors les équations*

$$(3.70) \quad \varepsilon_{ij}(u) = A_{ijkh} \sigma_{kh}$$

*et les conditions aux limites*

$$(3.71) \quad u = U \quad \text{sur} \quad \Gamma_U$$

(resp. sans conditions aux limites si  $\Gamma_U = \emptyset$ ) définissent  $u$  de façon unique (resp. à un déplacement rigide près),  $u$  étant la (resp. une) solution du Problème 3.1.

*Démonstration*

Il n'y a plus qu'à montrer que si  $u$  est la (ou une) solution du Problème 3.1 alors  $\sigma$  donné par  $\sigma_{ij} = a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u)$  minimise  $J$  sur  $K$ , i.e. vérifie

$$\mathcal{A}(\sigma, \tau - \sigma) - \int_{\Gamma_U} U_i(\tau_{ij} n_j - \sigma_{ij} n_j) d\Gamma = 0.$$

Or utilisant (3.70) dans (3.69) on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\sigma, \tau - \sigma) &= \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(u) (\tau_{ij} - \sigma_{ij}) dx = \int_{\Omega} u_{i,j} (\tau_{ij} - \sigma_{ij}) dx \\ &= \int_{\Gamma} u_i (\tau_{ij} n_j - \sigma_{ij} n_j) d\Gamma - \int_{\Omega} u_i (\tau_{i,j,j} - \sigma_{i,j,j}) dx \\ &= \int_{\Gamma_U} u_i (\tau_{ij} n_j - \sigma_{ij} n_j) d\Gamma \quad \text{car} \quad \sigma, \tau \in K \end{aligned}$$

d'où le résultat comme  $u_i = U_i$  sur  $\Gamma_U$ . ■

### 3.5.2. Dualité et multiplicateurs de Lagrange

On va maintenant obtenir les résultats précédents sous un jour différent, en utilisant des « multiplicateurs de Lagrange » notés  $q_{ij}$  dans ce qui suit <sup>(14)</sup>.

On part de la fonctionnelle  $I(v)$  et on considère les égalités

$$(3.72) \quad a_{ijkh} v_{kh}(v) = \tau_{ij}$$

comme des *contraintes*, pour lesquelles on introduit les multiplicateurs  $q_{ij}$ .

On note que, sous la contrainte (3.72) on a :

$$a(v, v) = \mathcal{A}(\tau, \tau)$$

et on introduit alors la fonctionnelle

$$(3.73) \quad I(\tau, v, q) = \frac{1}{2} \mathcal{A}(\tau, \tau) - (f, v) - \int_{\Gamma_F} Fv \, d\Gamma - \int_{\Omega} q_{ij} (\tau_{ij} - a_{ijkh} v_{kh}(v)) \, dx,$$

où  $\tau, v, q$  sont des *variables indépendantes*,  $\tau, q \in H$ ,  $v \in V$ , avec  $v_i = U_i$  sur  $\Gamma_U$  i.e.  $v \in \mathcal{U}_{ad}$  <sup>(15)</sup>.

On note que

$$(3.74) \quad \inf_{\tau, v \in H} I(\tau, v, q) = \hat{I}(q) \leq \inf I(\tau, v, q) = \inf I(v) = I(u) \\ [\tau, v \text{ vérifiant (3.72)}],$$

et donc

$$(3.75) \quad \sup \hat{I}(q) \leq I(u).$$

Calculons explicitement  $\hat{I}(q)$ . On a :

$$I(\tau, v, q) = I_1(\tau, v, q) + I_2(\tau, v, q),$$

où

$$I_1(\tau, v, q) = I_1(\tau, q) = \frac{1}{2} \mathcal{A}(\tau, \tau) - \int_{\Omega} q_{ij} \tau_{ij} \, dx,$$

$$I_2(\tau, v, q) = I_2(v, q) = - (f, v) - \int_{\Gamma_F} Fv \, d\Gamma + \int_{\Omega} q_{ij} a_{ijkh} v_{kh}(v) \, dx.$$

On vérifie facilement que

$$(3.76) \quad \inf I_1(\tau, q) = - \frac{1}{2} \mathcal{A}(\tau, \tau), \quad \text{où } a_{ijkh} \tau_{kh} = q_{ij}.$$

Ensuite

$$I_2(v, q) = - (f, v) - \int_{\Gamma_F} Fv \, d\Gamma + \int_{\Omega} \tau_{kh} v_{k,h} \, dx$$

<sup>(14)</sup> On donne un exposé *direct*, sans recours à des théorèmes généraux de dualité, pour lesquels nous renvoyons en particulier à Rockafellar [1] et Tcman [2].

<sup>(15)</sup> On pourrait « mettre en contrainte » avec multiplicateurs adéquats les conditions  $v_i = U_i$  sur  $\Gamma$ ; il y a plusieurs formes duales possibles.

et on vérifie que

$$\inf_{v \in \mathcal{Q}_{ad}} I_2(v, q) = -\infty \text{ sauf si } \tau \in K, \text{ auquel cas}$$

$$\inf I_2(v, q) = \int_{\Gamma_U} \tau_{kh} n_h U_k d\Gamma.$$

Donc :

$$(3.77) \quad \hat{I}(q) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \mathcal{A}(\tau, \tau) + \int_{\Gamma_U} \tau_{kh} n_h U_k d\Gamma & \text{si } \tau \in K, \text{ où } q_{ij} = A_{ijkh} \tau_{kh}, \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Mais

$$(3.78) \quad I(u) = -\frac{1}{2} a(u, u) + \int_{\Gamma_U} \sigma_{ij} n_j U_i d\Gamma$$

de sorte que

$$I(u) = -\frac{1}{2} \mathcal{A}(\sigma, \sigma) + \int_{\Gamma_U} \sigma_{ij} n_j U_i d\Gamma$$

et donc

$$\begin{aligned} \sup_q \hat{I}(q) &= \sup_{\tau \in H} \left( -\frac{1}{2} \mathcal{A}(\tau, \tau) + \int_{\Gamma_U} \tau_{kh} n_h U_k d\Gamma \right) \geq \\ &\geq -\frac{1}{2} \mathcal{A}(\sigma, \sigma) + \int_{\Gamma_U} \sigma_{kh} n_h U_k d\Gamma = I(u) \end{aligned}$$

ce qui, en comparant à (3.75) montre que

$$(3.79) \quad \sup \hat{I}(q) = I(u).$$

Remplaçant  $\hat{I}(q)$  par sa valeur (3.77) on a donc :

$$(3.80) \quad \inf_{\tau \in K} \left[ \frac{1}{2} \mathcal{A}(\tau, \tau) - \int_{\Gamma_U} \tau_{kh} n_h U_k d\Gamma \right] + I(u) = 0$$

ou encore

$$(3.81) \quad \inf_{\tau \in K} \left[ \frac{1}{2} \mathcal{A}(\tau, \tau) - \int_{\Gamma_U} \tau_{kh} n_h U_k d\Gamma \right] + \inf_{v \in \mathcal{Q}_{ad}} I(v) = 0.$$

En outre si le premier inf (resp. second) est atteint en  $\sigma$  (resp.  $u$ ),  $\sigma$  et  $u$  sont liés par

$$\sigma_{ij} = a_{ijkh} v_{kh}(u). \quad \blacksquare$$

Remarque 3.9

On trouvera une étude exhaustive des formulations variationnelles des problèmes d'élasticité dans Tonti [1].

## 4. PROBLÈMES DYNAMIQUES

### 4.1. Énoncé des résultats principaux

Utilisant les outils du n° 3 nous sommes maintenant en mesure de résoudre des problèmes dynamiques considérés au n° 2.

On introduit une fonction  $\Phi(t)$  telle que <sup>(16)</sup>

$$(4.1) \quad \Phi(t) \in (H^1(\Omega))^3, \quad \Phi_i(t) = U_i(t) \quad \text{sur } \Gamma_U.$$

Alors remplaçant  $u(t)$  par  $u(t) - \Phi(t)$  et gardant la notation  $u(t)$ , le problème (2.42) équivaut au suivant : on définit

$$(4.2) \quad V_0 = \{ v \mid v \in (H^1(\Omega))^3, \quad v_i = 0 \quad \text{sur } \Gamma_U \}$$

(donc  $V_0 = V = (H^1(\Omega))^3$  si  $\Gamma_U = \emptyset$ ); on cherche une fonction  $t \rightarrow u(t)$  de  $[0, T] \rightarrow V_0$  telle que

$$(4.3) \quad (u''(t), v) + a(u(t), v) = (\Psi(t), v) \quad \forall v \in V_0$$

où

$$(4.4) \quad (\Psi(t), v) = (f(t), v) + \int_{\Gamma_F} F(t) v \, d\Gamma + (\Phi''(t), v) + a(\Phi(t), v),$$

avec les conditions initiales

$$(4.5) \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1.$$

On introduit

$$(4.6) \quad H = (L^2(\Omega))^3;$$

on note que

$$(4.7) \quad V_0 \subset H, \quad V_0 \text{ dense dans } H.$$

On désignera par  $\| \cdot \|$  (resp.  $|\cdot|$ ) la norme dans  $V_0$  (resp.  $H$ ) et par  $(\cdot, \cdot)$  le produit scalaire dans  $H$ .

On identifie  $H$  à son dual : alors

$$(4.8) \quad H \subset V_0', \quad V_0' \text{ dual de } V_0.$$

On désigne par  $(\cdot, \cdot)$  le produit scalaire entre  $V_0'$  et  $V_0$ , compatible avec le produit scalaire dans  $H$ .

On désigne par  $\| \cdot \|_*$  la norme dans  $V_0'$  duale de  $\| \cdot \|$ , donc :

$$\| f \|_* = \sup |(f, v)|, \quad v \in V_0, \quad \| v \| \leq 1.$$

On va démontrer alors le

**Théorème 4.1.** *On suppose que*

$$(4.9) \quad \Psi, \Psi' \in L^2(0, T; V_0') \quad (17),$$

$$(4.10) \quad u_0 \in V_0, \quad u_1 \in H.$$

<sup>(16)</sup> Le mode de dépendance de  $t$  sera précisé plus loin.

<sup>(17)</sup> Des conditions suffisantes pour que cela ait lieu sont indiquées à la Remarque 4.1.

Il existe une fonction  $u$  et une seule telle que

$$(4.11) \quad u \in L^\infty(0, T; V_0),$$

$$(4.12) \quad u' \in L^\infty(0, T; H),$$

$$(4.13) \quad u'' \in L^\infty(0, T; V_0')$$

et vérifiant (4.3), (4.5).

*Remarque 4.1*

Supposons que

$$(4.14) \quad f_i, \partial f_i / \partial t \in L^2(Q), \quad Q = \Omega \times ]0, T[,$$

$$(4.15) \quad F_i, \partial F_i / \partial t \in L^2(\Sigma), \quad \Sigma = \Gamma \times ]0, T[,$$

$$(4.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_i \text{ est restriction à } \Gamma_0 \times ]0, T[ \text{ de } \tilde{U}_i \text{ avec} \\ \tilde{U}_i, \partial \tilde{U}_i / \partial t, \partial^2 \tilde{U}_i / \partial t^2, \partial^3 \tilde{U}_i / \partial t^3 \in L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma)). \end{array} \right.$$

Alors on peut choisir  $\Phi$  de façon que  $\Psi$  définie par (4.4) satisfasse à (4.9).

En effet on peut choisir  $\Phi$  de façon que

$$(4.17) \quad \Phi, \dots, \Phi''' \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))^3) \quad (1^8).$$

Vérifions qu'alors  $\Psi' \in L^2(0, T; V_0')$ . On a :

$$\begin{aligned} (\Psi'(t), v) &= (f'(t), v) + \int_{\Gamma_F} F'(t) v \, d\Gamma + (\Phi'''(t), v) + a(\Phi'(t), v) \\ \text{d'où} \quad |(\Psi'(t), v)| &\leq c_1 [|f'(t)| |v| + \|F''(t)\|_{(L^2(\Gamma))^3} \|v\| + \\ &\quad + |\Phi'''(t)| |v| + \|\Phi'(t)\| \|v\|] \\ \text{d'où} \quad \|\Psi'(t)\|_* &\leq c_2 [|f'(t)| + \|F'(t)\|_{(L^2(\Gamma))^3} + \|\Phi'(t)\| + |\Phi'''(t)|] \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

*Remarque 4.2*

D'après ce qu'on a vu au n° 3, on a :

$$(4.18) \quad a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V_0,$$

$$(4.19) \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in V, \quad \alpha > 0 \quad \text{si } \Gamma_0 \neq \emptyset,$$

$$(4.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \lambda > 0, \text{ il existe } \alpha > 0 \text{ tel que} \\ a(v, v) + \lambda |v|^2 \geq \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in V, \\ \text{si } \Gamma_0 = \emptyset \quad (V_0 = V). \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

(1<sup>8</sup>) On pourrait généraliser les hypothèses sur  $U_i$ , ce dont on a besoin sur  $\Phi$  étant :

$$\Phi, \Phi' \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))^3), \quad \Phi'', \Phi''' \in L^2(0, T; H).$$

On va dans la suite démontrer le Théorème 4.1 dans le cadre « abstrait » où n'intervient que  $V_0$ ,  $H$ ,  $V'_0$  et  $a(u, v)$  satisfaisant (4.20). ■

*Remarque 4.3*

Il peut arriver que, dans certaines applications (par exemple en thermo-élasticité linéarisée, en découplant la température) que les coefficients  $a_{ijkh}$  soient fonctions de  $x$  et de  $t$  :

$$a_{ijkh} = a_{ijkh}(x, t).$$

On a alors à considérer une forme  $a(t; u, v)$  bilinéaire continue sur  $V_0$  dépendant de  $t$  et le Théorème 4.1 est valable (avec une démonstration analogue) si

$$(4.21) \quad a(t; u, v) = a(t; v, u) \quad \forall u, v \in V_0,$$

$$(4.22) \quad \left| \begin{array}{l} \text{il existe } \lambda > 0 \text{ tel que} \\ a(t; v, v) + \lambda \|v\|^2 \geq \alpha \|v\|^2, \quad \alpha > 0, \quad \forall v \in V_0, \quad \forall t \in [0, T], \end{array} \right.$$

$$(4.23) \quad \left| \begin{array}{l} \forall u, v \in V_0 \text{ la fonction } t \rightarrow a(t; u, v) \text{ est une fois continûment diffé-} \\ \text{rentiable dans } [0, T]. \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

*Remarque 4.4*

*Le cas  $\Gamma_U = \emptyset$ .*

L'énoncé du Théorème 4.1 n'établit pas de distinction, lorsque  $\Gamma_U = \emptyset$ , entre le cas où,  $\forall t$ , les forces  $f_i(t)$  et  $F_i(t)$  constituent un torseur équivalent à zéro, i.e.

$$(4.24) \quad (f(t), \rho) + \int_{\Gamma_F} F_i(t) \rho_i d\Gamma = 0 \quad \forall \rho \in \mathcal{R}$$

et le cas où (4.24) n'a pas lieu.

Examinons de plus près ces deux cas :

i) On a (4.24)

Alors on peut préciser la nature de la structure de la solution  $u$  de la façon suivante <sup>(19)</sup> :

$$(4.25) \quad u(t) = u_0 + tu_1 + w(t),$$

où  $w$  satisfait à

$$(4.26) \quad (w(t), \rho) = 0 \quad \forall \rho \in \mathcal{R}.$$

En effet définissant  $w(t)$  par (4.25) et portant dans (4.3) il vient :

$$(4.27) \quad (w''(t), v) + a(u_0 + tu_1 + w(t), v) = (f(t), v) + \int_{\Gamma_F} F_i(t) v d\Gamma,$$

(car  $\Gamma_U = \emptyset$  donc  $\Phi(t) = 0$ ).

<sup>(19)</sup> On suppose  $u_1 \in V (= V_0)$ . Sinon il faut utiliser un « relèvement » plus compliqué que  $u_0 + tu_1$  dans (4.25).



Prenant dans (4.27)  $v = \rho \in \mathcal{R}$  on en déduit, comme  $a(u(t), \rho) = 0$  et comme on a (4.24) :

$$(w''(t), \rho) = 0$$

ce qui, joint à  $w(0) = 0, w'(0) = 0$ , montre (4.26).

Examinons maintenant le deuxième cas :

ii) *La relation (4.24) n'a pas lieu*

Dans ce cas les forces appliquées au corps élastique lui confèrent un mouvement de solide rigide auquel se superposent des déformations élastiques.

Le mouvement étant alors de grande amplitude, la linéarisation n'est plus légitime. Donc le Théorème 4.1 est toujours correct mais le modèle n'est plus adéquat. On doit alors dans un premier temps déterminer le mouvement de solide rigide. Ensuite, dans un repère lié au mouvement ainsi déterminé, on traite le problème des déformations élastiques avec cette fois linéarisation légitime mais en ajoutant aux forces  $f_i$  et  $F_i$  les forces d'inertie d'entraînement et complémentaires soit  $\mathcal{F}$ . L'ensemble des forces  $f(t), F(t)$  et  $\mathcal{F}(t)$  a alors, à tout instant, un torseur équivalent à zéro et on est ramené au cas i). ■

4.2. Démonstration du Théorème 4.1

Pour montrer l'existence d'une solution dans le Théorème 4.1, on utilise une méthode d'approximation analogue à celle utilisée au Chapitre 1, n° 5.6.1.

L'espace  $V_0$  est séparable (20). On peut donc choisir une suite  $w_1, \dots, w_m, \dots$ , telle que,  $\forall m, w_1, \dots, w_m$  soient linéairement indépendants et que les combinaisons linéaires finies de  $w_j$  soient denses dans  $V_0$ . On suppose en outre que,

$$w_1 = u_0 \quad (\text{si } u_0 \neq 0).$$

On définit  $u_m$  « solution approchée d'ordre  $m$  » par :

$$(4.28) \quad \begin{cases} u_m(t) \in [w_1, \dots, w_m] = \text{espace engendré par } w_1, \dots, w_m, \\ (u_m''(t), v) + a(u_m(t), v) = (\Psi(t), v) \quad \forall v \in [w_1, \dots, w_m], \\ u_m(0) = u_0, \\ u_m'(0) = u_{1m}, \quad u_{1m} \in [w_1, \dots, w_m], \quad u_{1m} \rightarrow u_1 \text{ dans } H \text{ lorsque } m \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Le système (4.28) est un système de  $m$  équations différentielles linéaires du deuxième ordre, non singulier car les  $w_1, \dots, w_m$  sont linéairement indépendants ; donc (4.28) définit  $u_m$  de façon unique.

Estimations a priori sur  $u_m$

Prenant, ce qui est loisible,  $v = u_m'(t)$  dans (4.28) il vient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m'(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(u_m(t), u_m(t)) = (\Psi(t), u_m'(t))$$

(20) C'est une hypothèse (d'ailleurs non essentielle !) dans le cas « abstrait ».

d'où

$$(4.29) \quad \begin{aligned} |u'_m(t)|^2 + a(u_m(t), u_m(t)) &= |u_{1m}|^2 + a(u_0, u_0) + 2 \int_0^t (\Psi(\sigma), u'_m(\sigma)) \, d\sigma = \\ &= |u_{1m}|^2 + a(u_0, u_0) + 2(\Psi(t), u_m(t)) - 2(\Psi(0), u_0) - \\ &\quad - 2 \int_0^t (\Psi'(\sigma), u_m(\sigma)) \, d\sigma. \end{aligned}$$

Mais les  $c$  désignant des constantes  $> 0$  diverses

$$\begin{aligned} a(v, v) &\geq \alpha \|v\|^2 - c|v|^2, \\ |u_{1m}| &\leq c|u_1| \\ 2|(\Psi(t), u_m(t))| &\leq \frac{1}{2}\alpha \|u_m(t)\|^2 + c\|\Psi(t)\|_*^2 \end{aligned}$$

de sorte que (4.29) donne

$$(4.30) \quad \left| \begin{aligned} |u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}\alpha \|u_m(t)\|^2 &\leq c(|u_1|^2 + \|u_0\|^2 + \|\Psi(0)\|_*^2) + \\ &+ c\|\Psi(t)\|_*^2 + c|u_m(t)|^2 + c \int_0^t \|\Psi'(\sigma)\|_* \|u_m(\sigma)\| \, d\sigma. \end{aligned} \right.$$

Mais

$$\begin{aligned} u_m(t) &= u_0 + \int_0^t u'_m(\sigma) \, d\sigma \quad \text{donne} \\ |u_m(t)|^2 &\leq 2|u_0|^2 + c \int_0^t |u'_m(\sigma)|^2 \, d\sigma, \end{aligned}$$

de sorte que (4.30) donne

$$(4.31) \quad \left| \begin{aligned} |u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2 &\leq c(|u_1|^2 + \|u_0\|^2 + \|\Psi(0)\|_*^2 + \|\Psi(t)\|_*^2 + \\ &+ \int_0^t \|\Psi'(\sigma)\|_*^2 \, d\sigma) + c \int_0^t (|u'_m(\sigma)|^2 + \|u_m(\sigma)\|^2) \, d\sigma. \end{aligned} \right.$$

Posons

$$(4.32) \quad \|\|\Psi\|\|^2 = \int_0^t (\|\Psi(t)\|_*^2 + \|\Psi'(t)\|_*^2) \, dt$$

et

$$(4.33) \quad \varphi_m(t) = |u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2.$$

Alors (4.31) donne

$$(4.34) \quad \varphi_m(t) \leq c(|u_1|^2 + \|u_0\|^2 + \|\|\Psi\|\|^2) + c \int_0^t \varphi_m(\sigma) \, d\sigma$$

d'où d'après l'inégalité de Gronwall :

$$(4.35) \quad \varphi_m(t) \leq c(|u_1|^2 + \|u_0\|^2 + \|\|\Psi\|\|^2) \exp(ct).$$

*Conclusion*

$$(4.36) \quad \left| \begin{aligned} u_m \text{ (resp. } u'_m) \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; V_0) \text{ (resp. } L^\infty(0, T; H)) \\ \text{lorsque } m \rightarrow \infty. \quad \blacksquare \end{aligned} \right.$$

On déduit donc de (4.36) que l'on peut extraire de  $u_m$  une sous-suite  $u_\mu$  telle que :

$$(4.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_\mu \text{ (resp. } u'_\mu) \rightarrow u \text{ (resp. } u') \text{ dans } L^\infty(0, T; V_0) \text{ (resp. } L^\infty(0, T; H)) \\ \text{faible étoile } (2^1). \end{array} \right.$$

On va maintenant vérifier que  $u$  est solution du problème. On introduit l'espace  $E$  des fonctions  $\varphi$  de la forme

$$(4.38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(t) = \sum_{j=1}^{\mu_0} \varphi_j(t) w_j, \quad \varphi_j \in C^1([0, T]), \quad \varphi_j(T) = 0, \\ \mu_0 \text{ fini quelconque.} \end{array} \right.$$

On déduit de (4.28) pour  $m = \mu \geq \mu_0$  que

$$(u''_\mu, \varphi) + a(u_\mu, \varphi) - (\Psi, \varphi) = 0 \quad \text{pour } \varphi \text{ donnée par (4.38),}$$

d'où

$$(4.39) \quad \int_0^T [- (u'_\mu, \varphi') + a(u_\mu, \varphi) - (\Psi, \varphi)] dt = (u_{1\mu}, \varphi(0)).$$

On peut passer à la limite en  $\mu$  dans (4.39) d'où,  $\forall \varphi \in E$  :

$$(4.40) \quad \int_0^T [- (u', \varphi') + a(u, \varphi) - (\Psi, \varphi)] dt = (u_1, \varphi(0)).$$

Comme les combinaisons linéaires finies de  $w_j$  sont denses dans  $V_0$  on a (4.40)

$$\forall \varphi \in C^1([0, T]; V), \quad \varphi(T) = 0.$$

On en déduit que, au sens des distributions sur  $]0, T[$  à valeurs dans  $V_0$ ,

$$(4.41) \quad u'' + Au = \Psi,$$

où  $A \in \mathcal{L}(V_0; V_0)$  est défini par

$$(4.42) \quad a(u, v) = (Au, v), \quad \forall u, v \in V_0.$$

Donc  $u'' = \Psi - Au \in L^\infty(0, T; V'_0)$  (22). Prenant les produits scalaires des deux membres de (4.41) avec  $\varphi \in E$  (par exemple) et comparant à (4.40) on en déduit que

$$(u_1, \varphi(0)) = (u'(0), \varphi(0)) \quad \forall \varphi \in E$$

d'où  $u'(0) = u_1$ . Comme (4.37) entraîne que  $u_\mu(0) = u_0 \rightarrow u(0)$  on a :  $u(0) = u_0$  et  $u$  satisfait aux conditions du Théorème 4.1. ■

(21) I. e. par exemple

$$\int_0^T ((u_\mu, \varphi)) dt \rightarrow \int_0^T ((u, \varphi)) dt \quad \forall \varphi \in L^1(0, T; V_0).$$

(22) Car les hypothèses (4.9) impliquent que

$$\Psi \in C^0([0, T]; V'_0) \subset L^\infty(0, T; V'_0).$$

Démontrons maintenant l'*unicité* de la solution <sup>(23)</sup>. Soit  $u$  vérifiant (4.11), (4.12), (4.13) et

$$(4.43) \quad u'' + Au = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0.$$

Pour  $\varphi \in C^1([0, T]; V'_0)$  (par exemple) il existe d'après la première partie de la démonstration <sup>(24)</sup> une fonction  $w$  telle que

$$(4.44) \quad w \in L^\infty(0, T; V_0), \quad w' \in L^\infty(0, T; H), \quad w'' \in L^\infty(0, T; V'_0),$$

$$(4.45) \quad w'' + Aw = \varphi,$$

$$(4.46) \quad w(T) = 0, \quad w'(T) = 0.$$

La formule d'intégrations par parties suivante est valable :

$$(4.47) \quad \int_0^T (u'', w) dt = \int_0^T (u, w'') dt;$$

prenant donc le produit scalaire des deux membres de (4.43) avec  $w$  et utilisant (4.47) on a donc (comme  $a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v$ ) :

$$\begin{aligned} \text{i.e.} \quad & \int_0^T (u, w'' + Aw) dt = 0 \\ & \int_0^T (u, \varphi) dt = 0 \quad \forall \varphi \in C^1([0, T]; V'_0), \quad \text{donc } u = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 4.3. Autres conditions aux limites

On considère quelques variantes des problèmes aux limites étudiés précédemment.

#### 4.3.1. Variante n° 1 (par exemple corps sur un support rigide)

On cherche  $u$  solution de

$$(4.48) \quad \partial^2 u / \partial t^2 + Au = f \quad \text{dans } Q,$$

avec les conditions aux limites :

$$(4.49) \quad \sigma_{ij} n_j = F_i \quad \text{pour } i = 1, 2 \quad \text{sur } \Gamma \times ]0, T[ = \Sigma,$$

$$(4.50) \quad u_3 = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

et naturellement les conditions initiales (4.5).

L'interprétation mécanique de ce problème est la suivante :

on donne sur la frontière  $\Gamma$  les deux premières composantes de la densité surfacique de forces  $F_1$  et  $F_2$  et la troisième composante  $u_3$  du déplacement. Ce type de conditions aux limites intervient par exemple dans le problème suivant : un corps élastique comportant une face plane (exemple : demi-sphère limitée par un plan

<sup>(23)</sup> Cette démonstration est due à L. Tartar.

<sup>(24)</sup> Changer  $t$  en  $T - t$ .

équatorial) repose sans frottement sur un plan horizontal fixe. Si on suppose que lors de la déformation il n'y a jamais « décollement », les conditions aux limites sur la face plane sont (4.49), (4.50). Sur le reste de la frontière on a par exemple  $F_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . ■

Le problème statique correspondant est :

$$(4.51) \quad Au = f$$

avec (4.49), (4.50). ■

Pour la formulation variationnelle on introduit

$$(4.52) \quad V_1 = \{ v \mid v \in V = (H^1(\Omega))^3, v_3 = 0 \text{ sur } \Gamma \}.$$

On vérifie alors sans peine que le problème dynamique (resp. statique) équivaut à la recherche de  $u = u(t)$  solution de

$$(4.53) \quad (u''(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v) + \int_{\Gamma} [F_1(t) v_1 + F_2(t) v_2] d\Gamma \quad \forall v \in V_1,$$

avec

$$(4.54) \quad u \in L^\infty(0, T; V_1), \quad u' \in L^\infty(0, T; H), \quad u'' \in L^\infty(0, T; V_1')$$

et (4.5) (resp. à la recherche de  $u \in V_1$  solution de

$$(4.55) \quad a(u, v) = (f, v) + \int_{\Gamma} [F_1 v_1 + F_2 v_2] d\Gamma \quad \forall v \in V_1).$$

Pour la résolution de ces problèmes, on note que  $a(u, v)$  n'est pas coercif sur  $V_1$  car

$$(4.56) \quad a(v, v) = 0, \quad v \in V_1 \Leftrightarrow v \in \mathcal{R}_1$$

où

$$(4.57) \quad \mathcal{R}_1 = \{ \rho \mid \rho \in R, \rho_3 = 0 \text{ sur } \Gamma \}.$$

Alors pour le problème statique on introduit

$$V_1^* = V_1 / \mathcal{R}_1;$$

$$a(u^*, v^*) = a(u, v), \quad u \in u^*, \quad v \in v^*, \quad u^*, v^* \in V_1^*;$$

le problème (4.55) n'est possible que si

$$(4.58) \quad (f, \rho) + \int_{\Gamma} [F_1 \rho_1 + F_2 \rho_2] d\Gamma = 0 \quad \forall \rho \in \mathcal{R}_1;$$

l'interprétation mécanique de (4.58) est : le torseur des forces volumiques  $(f_1, f_2, 0)$  et surfaciques  $(F_1, F_2, 0)$  est équivalent à zéro.

Alors on vérifie, comme au n° 3.4.2 que, si (4.58) a lieu, le problème statique (4.55) admet une solution déterminée à l'addition d'un élément de  $\mathcal{R}_1$  près. ■

Pour le problème dynamique, comme  $\forall \lambda > 0$ , il existe  $\alpha > 0$  telle que

$$a(v, v) + \lambda \|v\|^2 \geq \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in V_1,$$

on peut appliquer le Théorème 4.1, ce qui montre l'existence et l'unicité d'une solution de (4.53), (4.54), (4.55).

Si,  $\forall t \in [0, T]$ , on a :

$$(4.59) \quad (f(t), \rho) + \int_{\Gamma} [F_1(t) \rho_1 + F_2(t) \rho_2] d\Gamma = 0 \quad \forall \rho \in \mathcal{H}_1$$

alors, en supposant que  $u_1 \in V_1$ , on a :

$$(4.60) \quad u(t) = u_0 + tu_1 + w(t),$$

où

$$(4.61) \quad (w(t), \rho) = 0 \quad \forall \rho \in \mathcal{H}_1.$$

Même démonstration qu'à la Remarque 4.4.

Si (4.59) n'a pas lieu, alors, comme à la Remarque 4.4, le modèle n'est plus adéquat et il faut faire des modifications analogues à celles indiquées au point ii) de la Remarque 4.4. ■

#### 4.3.2. Variante n° 2 (corps placé dans une enveloppe élastique)

On cherche  $u$  solution de (4.48) avec les conditions aux limites .

$$(4.62) \quad \sigma_T = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (2^5),$$

$$(4.63) \quad \sigma_N + ku_N = 0 \quad (k > 0) \quad \text{sur } \Sigma,$$

avec les conditions initiales (4.5) ; le cas statique correspond à (4.51) et (4.62), (4.63).

L'interprétation mécanique de (4.62), (4.63) est la suivante : les déplacements tangentiels des points de  $\Gamma$  ont lieu librement tandis que les forces normales sont des forces de rappel élastique dont la valeur absolue est proportionnelle au déplacement normal. Des conditions aux limites de ce genre peuvent se rencontrer dans les cas d'un corps soumis à des attaches élastiques ou d'un corps à l'intérieur d'une enceinte élastique.

##### Formulation variationnelle

On vérifie sans peine que le problème statique équivaut à la recherche de

$$u \in V = (H^1(\Omega))^3$$

tel que

$$(4.64) \quad a_1(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V$$

où

$$(4.65) \quad a_1(u, v) = a(u, v) + k \int_{\Gamma} u_N v_N d\Gamma.$$

(2<sup>5</sup>) Les notations sont celles de la Remarque 2.5.

*Le problème dynamique* équivaut à la recherche de  $u = u(t)$  telle que

$$(4.66) \quad (u'(t), v) + a_1(u(t), v) = (f(t), v) \quad \forall v \in V$$

avec

$$(4.67) \quad u \in L^\infty(0, T; V), \quad u' \in L^\infty(0, T; H), \quad u'' \in L^\infty(0, t; V'),$$

et (4.5).

Pour la résolution de ces problèmes, montrons le

**Théorème 4.2.** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $R^3$ . Alors,  $a_1(u, v)$  étant définie par (4.65), on a :*

$$(4.68) \quad a_1(v, v) \geq \alpha_1 \|v\|^2 \quad \forall v \in V.$$

*Démonstration*

Tout revient à montrer (avec la notation déjà utilisée :

$$\varepsilon(v) = \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) \, dx$$

que

$$(4.69) \quad \varepsilon(v) + \int_{\Gamma} v_N^2 \, d\Gamma \geq c |v|^2.$$

Remplaçant  $v$  par  $v |v|^{-1}$ , tout revient à montrer que

$$(4.70) \quad \varepsilon(v) + \int_{\Gamma} v_N^2 \, d\Gamma \geq c > 0, \quad |v| = 1, \quad v \in V.$$

Supposant (4.70) inexact, il existerait une suite  $v_\alpha$  telle que

$$(4.71) \quad v_\alpha \in V, \quad |v_\alpha| = 1, \quad \varepsilon(v_\alpha) + \int_{\Gamma} v_{\alpha N}^2 \, d\Gamma \rightarrow 0.$$

Alors  $\|v_\alpha\| \leq Cte$ , donc on peut extraire une suite, encore notée  $v_\alpha$ , telle que

$$(4.72) \quad v_\alpha \rightarrow v \quad \text{dans } V \text{ faible}$$

et l'injection  $V \rightarrow (L^2(\Omega))^3$  étant compacte,

$$(4.73) \quad v_\alpha \rightarrow v \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^3 \text{ fort.}$$

Mais

$$\liminf [\varepsilon(v_\alpha) + \int_{\Gamma} v_{\alpha N}^2 \, d\Gamma] = 0 \geq \varepsilon(v) + \int_{\Gamma} v_N^2 \, d\Gamma,$$

donc  $\varepsilon(v) = 0$  et  $v_N = 0$  sur  $\Gamma$ . Alors  $v \in \mathcal{R}$ , soit  $v = a + b \wedge x$  et  $v_N = 0$  équivaut à  $an + (b \wedge x)n = 0$  sur  $\Gamma$ , ce qui est impossible ( $\Gamma$  ne pouvant être un plan). Donc  $v = 0$  et donc (4.73) équivaut à  $|v_\alpha| \rightarrow 0$  ce qui est absurde puisque

$$|v_\alpha| = 1 \quad \forall \alpha. \quad \blacksquare$$

On déduit aussitôt du Théorème 4.2 et des résultats antérieurs que

**Corollaire 4.1.** *Le problème dynamique (4.66), (4.67), (4.5) (resp. le problème statique (4.64)) admet une solution unique. ■*

## 5. ÉLASTICITÉ LINÉAIRE AVEC FROTTEMENT OU CONTRAINTES UNILATÉRALES

### 5.1. Premières lois de frottement. Cas dynamique

#### *Orientation*

Nous envisageons dans ce paragraphe des déformations d'un corps élastique linéaire dont les frontières sont soumises éventuellement à des conditions aux limites classiques du type de celles étudiées précédemment mais également, au moins sur une partie de la frontière, à des conditions de frottement.

Nous retenons pour commencer la loi de Coulomb (cf. 5.1.1 ci-après), d'autres lois étant étudiées au n° 5.4.

#### 5.1.1. Loi de Coulomb

Considérons deux corps solides élastiques  $S_1$  et  $S_2$  en contact (cf. Fig. 1) en  $C$ , où la normale unitaire extérieure à  $S_1$  est  $\mathbf{n}$ . Soit  $\mathbf{F}$  la force exercée par  $S_2$  sur  $S_1$  en  $C$  (où la densité de force s'il s'agit d'un contact sur toute une région autour de  $C$ ). Décomposons  $\mathbf{F}$  :

$$(5.1) \quad \mathbf{F} = F_N \mathbf{n} + \mathbf{F}_T, \quad F_N = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}.$$

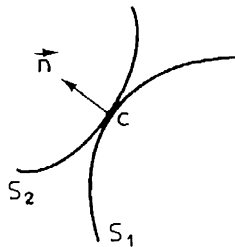


Figure 15.

Soit par ailleurs un coefficient scalaire positif  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(C)$ , appelé *coefficient de frottement au point C* (et qui, naturellement, dépend de la nature des frontières de  $S_1$  et  $S_2$  en  $C$ ).

Il faut distinguer deux natures de contact en  $C$  :

- i) *contact bilatéral*, i.e. le contact est maintenu quelle que soit la direction des efforts ;
- ii) *contact unilatéral*, i.e. le contact est maintenu seulement si les efforts appliquent les solides l'un contre l'autre.



Traduisons maintenant *la loi de Coulomb* dans chacun de ces cas :

$$\begin{array}{l}
 \text{(5.2)} \quad \left\{ \begin{array}{l}
 \text{(Loi de Coulomb avec contact bilatéral.)} \\
 \text{On se place à l'instant } t; \text{ alors} \\
 |F_T(C)| < \mathcal{F}(C) |F_N(C)| \Rightarrow \partial u_T(C)/\partial t = 0, \quad (26) \\
 |F_T(C)| = \mathcal{F}(C) |F_N(C)| \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que} \\
 \partial u_T(C)/\partial t = -\lambda F_T(C).
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{(5.3)} \quad \left\{ \begin{array}{l}
 \text{(Loi de Coulomb avec contact unilatéral.)} \\
 \text{On doit avoir } F_N(C) \leq 0 \text{ et} \\
 |F_T(C)| < -\mathcal{F}(C) F_N(C) \Rightarrow \partial u_T(C)/\partial t = 0, \\
 |F_T(C)| = -\mathcal{F}(C) F_N(C) \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que} \\
 \partial u_T/\partial t = -\lambda F_T. \quad \blacksquare
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

*Remarque 5.1*

On peut aussi envisager, dans le cas d'un contact bilatéral, que le coefficient de frottement  $\mathcal{F}(C)$  soit différent (soit  $\mathcal{F}_1(C)$ ,  $\mathcal{F}_2(C)$ , distincts) selon que  $F_N(C) < 0$  ou  $F_N(C) > 0$ , d'où la loi (27) :

$$\text{(5.4)} \quad \left\{ \begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l}
 |F_T(C)| < \mathcal{F}_1(C) F_N(C)^- \\
 \text{ou bien} \\
 |F_T(C)| > \mathcal{F}_2(C) F_N(C)^+
 \end{array} \right\} \Rightarrow \partial u_T(C)/\partial t = 0, \\
 |F_T(C)| = \mathcal{F}_1(C) F_N(C)^- \Rightarrow \text{il existe } \lambda_1 \geq 0 \text{ tel que} \\
 \partial u_T(C)/\partial t = -\lambda_1 F_T(C), \\
 |F_T(C)| = \mathcal{F}_2(C) F_N(C)^+ \Rightarrow \text{il existe } \lambda_2 \geq 0 \text{ tel que} \\
 \partial u_T(C)/\partial t = -\lambda_2 F_T(C).
 \end{array} \right.$$

Cette variante n'introduit que de petites modifications dans les considérations qui suivent : cf. Remarque 5.2. ■

### 5.1.2. Problèmes envisagés

Une partie  $\Gamma_{\mathcal{F}}$  de la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$  (corps élastique considéré) sera soumise à des conditions de frottement.

La partie complémentaire  $\Gamma - \Gamma_{\mathcal{F}}$  est soumise à des conditions de type classique, par exemple forces données ou déplacements donnés.

Pour un peu simplifier l'exposé, nous allons supposer que sur  $\Gamma - \Gamma_{\mathcal{F}}$  ce sont les déplacements qui sont donnés (le cas où l'on donne déplacements sur une partie

(26) On a décomposé  $\vec{u}(C)$  comme  $\vec{F}$  :  $\vec{u}(C) = u_N(C) \vec{n} + \vec{u}_T(C)$ .

(27)  $x^+ = \sup(x, 0)$ ,  $x^- = \sup(-x, 0)$ .

de  $\Gamma - \Gamma_{\mathcal{F}}$  et forces sur le reste de  $\Gamma - \Gamma_{\mathcal{F}}$  n'introduit de difficulté nouvelle que d'écriture). On posera :

$$(5.5) \quad \Gamma - \Gamma_{\mathcal{F}} = \Gamma_U.$$

Alors les conditions aux limites sur  $\Gamma_U$  sont, si  $u = u(x, t)$  désigne le champ de déplacements (que nous cherchons) :

$$(5.6) \quad u_i = U_i \quad \text{sur } \Sigma_U = \Gamma_U \times ]0, T[.$$

Sur  $\Sigma_{\mathcal{F}} = \Gamma_{\mathcal{F}} \times ]0, T[$ , la contrainte normale est donnée, soit :

$$(5.7) \quad \sigma_N = F_N \quad \text{sur } \Sigma_{\mathcal{F}} \quad (2^8),$$

et l'on a ensuite, dans le cas bilatéral (cf. (5.2))

$$(5.8) \quad \begin{cases} |\sigma_T| < \mathcal{F}(x) |F_N| \Rightarrow \partial u_T / \partial t = 0, \\ |\sigma_T| = \mathcal{F}(x) |F_N| \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \partial u_T / \partial t = -\lambda \sigma_T, \end{cases}$$

où  $x \in \Gamma_{\mathcal{F}}$ ,  $\mathcal{F}(x)$  = coefficient de frottement en  $x$ ; on suppose que la fonction  $x \rightarrow \mathcal{F}(x)$  est mesurable et bornée sur  $\Gamma_{\mathcal{F}}$  et

$$(5.9) \quad \mathcal{F}(x) \geq \mathcal{F}_0 > 0, \quad x \in \Gamma_{\mathcal{F}}.$$

Posant pour simplifier l'écriture

$$(5.10) \quad \mathcal{F} |F_N| = g, \quad g \in L^\infty(\Gamma_{\mathcal{F}})$$

on arrive au problème suivant :

**Problème 5.1.** (Dynamique avec frottement)

Le champ de déplacements  $u = u(x, t)$  satisfait à

$$(5.11) \quad \begin{cases} \partial^2 u_i / \partial t^2 = \sigma_{i,j,j} + f_i & \text{dans } Q, \\ \sigma_{ij} = a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u) \end{cases}$$

avec les conditions aux limites

$$(5.12) \quad u_i = U_i \quad \text{sur } \Gamma_U \times ]0, T[ = \Sigma_U,$$

et

$$(5.13) \quad \begin{cases} \sigma_N = F_N & \text{sur } \Sigma_{\mathcal{F}} = \Gamma_{\mathcal{F}} \times ]0, T[, \\ |\sigma_T| < g \Rightarrow \partial u_T / \partial t = 0 \\ |\sigma_T| = g \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \partial u_T / \partial t = -\lambda \sigma_T \end{cases}$$

(2<sup>8</sup>) On suppose  $F_N$  mesurable et bornée sur  $\Gamma_{\mathcal{F}}$ . Pour un peu simplifier l'exposé on suppose que  $F_N$  est indépendante de  $t$  mais on pourrait aussi considérer le cas où  $F_N$  dépend de  $t$ .

et les conditions initiales

$$(5.14) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \partial u(x, 0)/\partial t = u_1(x), \quad x \in \Omega. \quad \blacksquare$$

*Remarque 5.2*

Dans le cas bilatéral avec coefficients différents selon le sens de  $F_N$  (cf. Remarque 5.1) on arrive au problème : trouver  $u$  (et  $\sigma$ ) avec (5.11), (5.12) et (les conditions (5.14) étant inchangées) au lieu de (5.13) :

$$(5.15) \quad \sigma_N = F_N \quad \text{sur} \quad \Sigma_{\mathcal{F}},$$

$$(5.16) \quad \left. \begin{array}{l} |\sigma_T| < \mathcal{F}_1 F_N^- \\ \text{ou} \\ |\sigma_T| < \mathcal{F}_2 F_N^+ \end{array} \right\} \Rightarrow \partial u_T / \partial t = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_T = \mathcal{F}_1 F_N \Rightarrow \text{il existe } \lambda_1 \geq 0 \text{ tel que } \partial u_T / \partial t = -\lambda_1 \sigma_T, \\ \sigma_T = \mathcal{F}_2 F_N \Rightarrow \text{il existe } \lambda_2 \geq 0 \text{ tel que } \partial u_T / \partial t = -\lambda_2 \sigma_T. \end{array} \right\} \blacksquare$$

*Remarque 5.3*

Dans le cas unilatéral, si on a en tout point  $x \in \Gamma$  :  $F_N < 0$ , alors (5.13) subsiste. Si par contre en certains points on a  $F_N \geq 0$ , le contact qui provoque le frottement peut alors cesser et on a un problème du type « Signorini avec frottement » (cf. n° 5.4.5).  $\blacksquare$

*Orientation*

On va maintenant considérer *les problèmes* statiques associés à des lois de frottement analogues aux précédentes puis développer les outils nécessaires à la résolution du cas statique.

Nous examinerons ensuite *d'autres lois de frottement* pour revenir enfin aux cas dynamiques.  $\blacksquare$

## 5.2. Loi de Coulomb. Cas statique

### 5.2.1. Problèmes envisagés

Le problème *statique* correspondant au Problème 5.1 est le suivant :

*Problème 5.2*

Trouver un champ de déplacements  $u = u(x)$  tel que

$$(5.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij,j} + f_i = 0, \\ \sigma_{ij} = a_{ijkh} e_{kh}(u) \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(5.18) \quad u_i = U_i \quad \text{sur} \quad \Gamma_U,$$

$$(5.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_N = F_N \quad \text{sur} \quad \Gamma_{\mathcal{F}}, \\ |\sigma_T| < g \Rightarrow u_T = 0, \\ |\sigma_T| = g \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } u_T = -\lambda \sigma_T. \end{array} \right. \blacksquare$$

*Remarque 5.4*

L'analogue statique de la situation de la Remarque 5.2 est le problème suivant : trouver  $u$  avec (5.17), (5.18) et, au lieu de (5.19) :

$$(5.20) \quad \sigma_N = F_N \quad \text{sur } \Gamma_{\mathcal{F}},$$

$$(5.21) \quad \left. \begin{array}{l} |\sigma_T| < \mathcal{F}_1 F_N^- \\ \text{ou} \\ |\sigma_T| < \mathcal{F}_2 F_N^+ \end{array} \right\} \Rightarrow u_T = 0,$$

$$\left. \begin{array}{l} |\sigma_T| = \mathcal{F}_1 F_N^- \Rightarrow \exists \lambda_1 > 0 \\ |\sigma_T| = \mathcal{F}_2 F_N^+ \Rightarrow \exists \lambda_2 > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{tel que } u_T = -\lambda_1 \sigma_T, \\ \text{tel que } u_T = -\lambda_2 \sigma_T. \quad \blacksquare \end{array}$$

*Remarque 5.5*

L'analogue statique de la situation de la Remarque 5.3 est, lorsque  $F_N < 0$  en tout point de  $\Gamma$ , identique à (5.19). ■

**5.2.2. Formulation variationnelle**

On utilise les notations du n° 2.3.

On introduit en outre la fonctionnelle

$$(5.22) \quad j(v) = \int_{\Gamma} g(x) |v_T(x)| \, d\Gamma,$$

qui est une *fonctionnelle continue convexe non différentiable* sur l'espace  $V = (H^1(\Omega))^3$ .

On va vérifier que le Problème 5.2 « équivaut » <sup>(29)</sup> au problème suivant :

*Problème 5.3*

Trouver  $u \in V$  tel que

$$(5.23) \quad u = U \quad \text{sur } \Gamma_U,$$

$$(5.24) \quad \begin{cases} a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq (f, v - u) + \int_{\Gamma} F_N(v_N - u_N) \, d\Gamma \\ \forall v \in V \quad \text{tel que } v = U \quad \text{sur } \Gamma_U. \end{cases}$$

En effet, si (5.19) a lieu, alors

$$(5.25) \quad \sigma_T(v_T - u_T) + g(|v_T| - |u_T|) \geq 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\mathcal{F}}.$$

Prenant le produit scalaire de (5.17) avec  $v - u$  et utilisant la formule de Green sous la forme (2.33), il vient :

$$(5.26) \quad a(u, v - u) - \int_{\Gamma_{\mathcal{F}}} [\sigma_T(v_T - u_T) + \sigma_N(v_N - u_N)] \, d\Gamma - \int_{\Gamma_U} \sigma(v - u) \, d\Gamma = (f, v - u).$$

<sup>(29)</sup> L'équivalence est *formelle* puisque dans le Problème 5.2 on ne précise pas dans quelle classe on cherche la solution  $u$ .

Mais  $\sigma_N = F_N$  sur  $\Gamma_{\neq}$  et  $v = u = U$  sur  $\Gamma_U$  donc :

$$\begin{aligned} a(u, v - u) - (f, v - u) - \int_{\Gamma_{\neq}} F_N(v_N - u_N) d\Gamma &= \int_{\Gamma_{\neq}} \sigma_T(v_T - u_T) d\Gamma \\ \text{d'où} \quad a(u, v - u) + j(v) - j(u) - (f, v - u) - \int_{\Gamma_{\neq}} F_N(v_N - u_N) d\Gamma &= \\ &= \int_{\Gamma_{\neq}} [\sigma_T(v_T - u_T) + g |v_T| - g |u_T|] d\Gamma \geq 0 \end{aligned}$$

d'après (5.25), d'où (5.24).

Réciproquement, si  $u$  vérifie (5.23), (5.24) alors, prenant d'abord  $v = u \pm \varphi$ ,  $\varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^3$ , on trouve  $Au = f$  d'où (5.17), d'où (5.26) (utilisation formelle de la formule de Green, mais qui peut être justifiée comme dans Lions-Magenes [1], Volume 1, Chapitre 2 ; il n'y a d'ailleurs aucune difficulté logique à effectuer ce calcul de manière formelle, puisqu'on prend ensuite comme *définition* l'énoncé du Problème 5.3).

Mais avec (5.26), (5.24) donne comme  $v = u = U$  sur  $\Gamma_U$  :

$$(5.27) \quad \begin{cases} \int_{\Gamma_{\neq}} [\sigma_T(v_T - u_T) + g(|v_T| - |u_T|)] d\Gamma + \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + \int_{\Gamma_{\neq}} (\sigma_N - F_N)(v_N - u_N) d\Gamma \geq 0, \\ \forall v \in (H^1(\Omega))^3 \quad \text{tel que } v = U \text{ sur } \Gamma_U. \end{cases}$$

On note que lorsque  $v$  parcourt  $(H^1(\Omega))^3$ ,  $v_N$  parcourt  $H^{1/2}(\Gamma)$  et  $v_T$  parcourt le sous-espace de  $(H^{1/2}(\Gamma))^3$  des fonctions vérifiant  $nv_T = 0$ .

On peut donc prendre dans (5.27)  $v_T = u_T$  et  $v_N =$  fonction *quelconque* de  $H^{1/2}(\Gamma)$  à support dans l'intérieur de  $\Gamma_{\neq}$  <sup>(30)</sup> d'où :

$$\sigma_N = F_N.$$

Alors (5.27) se réduit à

$$(5.28) \quad \int_{\Gamma_{\neq}} [\sigma_T(v_T - u_T) + g(|v_T| - |u_T|)] d\Gamma \geq 0.$$

Soit

$$(5.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi = \text{espace des fonctions } \psi \in (H^{1/2}(\Gamma))^3, \text{ à support dans l'intérieur} \\ \text{de } \Gamma_{\neq}. \end{array} \right.$$

Si  $\psi \in \Psi$ , on le décompose en

$$\psi = \psi_N n + \psi_T, \quad \psi_N = n\psi,$$

et l'on peut prendre dans (5.28)  $v_T = \psi_T$ . Mais comme  $\sigma_T n = 0$  on a :

$$\sigma_T \psi_T = \sigma_T \psi$$

<sup>(30)</sup> On suppose la frontière de  $\Gamma_{\neq}$  dans  $\Gamma$  régulière.

donc (5.28) donne

$$(5.30) \quad \int_{\Gamma_g} [\sigma_T \psi + g |\psi_T|] d\Gamma - \int_{\Gamma_g} [\sigma_T u_T + g |u_T|] d\Gamma \geq 0.$$

Comme  $|\psi_T| \leq |\psi|$  on déduit de (5.30) que

$$(5.31) \quad \int_{\Gamma_g} [\sigma_T \psi + g |\psi|] d\Gamma - \int_{\Gamma_g} [\sigma_T u_T + g |u_T|] d\Gamma \geq 0, \quad \forall \psi \in \Psi.$$

Remplaçant dans (5.31)  $\psi$  par  $\pm \lambda \psi$ ,  $\lambda \geq 0$ , on en déduit que

$$\lambda \int_{\Gamma_g} [\pm \sigma_T \psi + g |\psi|] d\Gamma - \int_{\Gamma_g} [\sigma_T u_T + g |u_T|] d\Gamma \geq 0 \quad \forall \lambda \geq 0,$$

d'où

$$\int_{\Gamma_g} [\pm \sigma_T \psi + g |\psi|] d\Gamma \geq 0$$

i.e.

$$(5.32) \quad \left| \int_{\Gamma_g} \sigma_T \psi d\Gamma \right| \leq \int_{\Gamma_g} g |\psi| d\Gamma \quad \forall \psi \in \Psi$$

et

$$(5.33) \quad \int_{\Gamma_g} [\sigma_T u_T + g |u_T|] d\Gamma \leq 0.$$

Mais (5.32) exprime que la forme

$$\psi \rightarrow \int_{\Gamma_g} \sigma_T \psi d\Gamma = \int_{\Gamma_g} (g^{-1} \sigma_T) g \psi d\Gamma$$

est *continue* sur  $\Psi$  muni de la topologie induite par  $(L^1(\Gamma_g))^3$  et de norme  $\leq 1$  pour la norme

$$\int_{\Gamma_g} g |\psi| d\Gamma \quad \text{sur } (L^1(\Gamma_g))^3.$$

Comme  $\Psi$  est *dense* dans  $(L^1(\Gamma_g))^3$ , on a donc :

$$g^{-1} \sigma_T \in (L^\infty(\Gamma_g))^3, \quad \text{de norme } \leq 1$$

i.e.

$$(5.34) \quad |\sigma_T| \leq g \quad \text{p.p. sur } \Gamma_g.$$

Mais alors  $\sigma_T u_T + g |u_T| \geq 0$  ce qui, joint à (5.33), montre que

$$(5.35) \quad \sigma_T u_T + g |u_T| = 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_g.$$

Mais (5.34), (5.35) équivalent aux dernières conditions (5.19) d'où l'équivalence annoncée. ■

On prendra désormais comme *définition du problème* l'énoncé du Problème 5.3 : *c'est la formulation sous forme d'inéquation variationnelle du problème statique de frottement*, avec la loi de Coulomb et contact bilatéral. ■

*Remarque 5.6*

Naturellement tout ce qui vient d'être dit vaut avec  $\Gamma_V = \emptyset$ . ■

*Remarque 5.7*

Si  $g = 0$  sur  $\Gamma_{\mathcal{F}}$ , (5.24) se réduit à

$$(5.36) \quad a(u, v - u) = (f, v - u) + \int_{\Gamma_{\mathcal{F}}} F_N (v_N - u_N) d\Gamma ;$$

le problème correspondant est du type de ceux étudiés au n° 3 :

$$(5.37) \quad Au = f ,$$

$$(5.38) \quad u = U \quad \text{sur} \quad \Gamma_U ,$$

$$(5.39) \quad \sigma_N = F'_N , \quad \sigma_T = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{\mathcal{F}} = \Gamma - \Gamma_U . \quad \blacksquare$$

*Remarque 5.8*

La formulation variationnelle du problème de la Remarque 5.4 s'obtient en décomposant  $\Gamma_{\mathcal{F}}$  en

$$\Gamma_{\mathcal{F}^+} \quad \text{où} \quad F_N \geq 0 \quad \text{et} \quad \Gamma_{\mathcal{F}^-} \quad \text{où} \quad F_N < 0 . \quad \blacksquare$$

### 5.2.3. Résultats. Le cas « $\Gamma_U$ de mesure positive »

On note que, la forme  $a(u, v)$  étant symétrique, le Problème 5.3 équivaut à la minimisation sur l'ensemble  $\mathcal{U}_{\text{ad}}$  :

$$(5.40) \quad \mathcal{U}_{\text{ad}} = \{ v \mid v \in V = (H^1(\Omega))^3, \quad v = U \quad \text{sur} \quad \Gamma_U \}$$

de la fonctionnelle

$$(5.41) \quad I(v) = \frac{1}{2} a(v, v) + j(v) - (f, v) - \int_{\Gamma_{\mathcal{F}}} F_N v_N d\Gamma .$$

L'expression  $I(v)$  représente l'énergie potentielle du champ cinématiquement admissible  $v$ .

On fait les hypothèses :

$$(5.42) \quad F_N \in L^{\infty}(\Gamma_{\mathcal{F}}) \quad (3^1) ,$$

$$(5.43) \quad f \in L^2(\Omega) .$$

Alors comme  $j(v) \geq 0$  le Corollaire 3.1 montre que l'on a le

**Théorème 5.1.** *Le Problème 5.3 admet une solution unique.*  $\blacksquare$

*Remarque 5.9* (sur la dépendance en  $g$ )

Pour rappeler la dépendance en  $g$ , écrivons  $j_g(v)$  au lieu de  $j(v)$  et soit  $u_g$  la solution de (5.23), (5.24) correspondante. On a alors :

$$(5.44) \quad \| u_{g_1} - u_{g_2} \| \leq c \| g_1 - g_2 \|_{L^2(\Gamma_{\mathcal{F}})} .$$

(3<sup>1</sup>) Ce qui peut être étendu.

En effet prenant  $v = u_{g_2}$  (resp.  $v = u_{g_1}$ ) dans l'inéquation analogue à (5.24) relative à  $u_{g_1}$  (resp.  $u_{g_2}$ ) et additionnant, on a, en posant  $w = u_{g_1} - u_{g_2}$  :

$$(5.45) \quad -a(w, w) - \int_{\Gamma_{\mathcal{F}}} (g_1 - g_2) (|u_{g_1}| - |u_{g_2}|) d\Gamma \geq 0$$

d'où comme  $w \in V_0$  (dans la notation (3.36)) en utilisant (3.37)

$$\alpha_0 \|w\|^2 \leq \|g_1 - g_2\|_{L^2(\Gamma_{\mathcal{F}})} \|u_{g_1} - u_{g_2}\|_{L^2(\Gamma_{\mathcal{F}})}$$

et comme  $\|\varphi\|_{L^2(\Gamma_{\mathcal{F}})} \leq c \|\varphi\|$ , on en déduit (5.44). La fonction  $g \rightarrow u_g$  est donc dans un certain sens (précisée par (5.44)) *lipschitzienne*.

On vérifiera que, si  $g \rightarrow 0$  dans  $L^2(\Gamma_{\mathcal{F}})$ ,  $u_g \rightarrow u$  dans  $(H^1(\Omega))^3$ , où  $u$  est la solution du problème énoncé à la Remarque 5.7. ■

#### 5.2.4. Résultats. Le cas « $\Gamma_U = \emptyset$ »

Si  $\Gamma_U = \emptyset$  le problème est : trouver  $u \in V = (H^1(\Omega))^3$  telle que

$$(5.46) \quad a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq (f, v - u) + \int_{\Gamma} F_N(v_N - u_N) d\Gamma \quad \forall v \in V.$$

Faisant  $v = 0$  puis  $v = 2u$  dans (5.46) on voit que :

$$(5.47) \quad a(u, u) + j(u) = (f, u) + \int_{\Gamma} F_N u_N d\Gamma$$

de sorte que (5.46) équivaut à (5.47) et

$$(5.48) \quad a(u, v) + j(v) \geq (f, v) + \int_{\Gamma} F_N v_N d\Gamma, \quad \forall v \in V.$$

Changeant  $v$  en  $-v$  on voit finalement que (5.46) équivaut à

$$(5.49) \quad \left| \begin{array}{l} a(u, v) - (f, v) - \int_{\Gamma} F_N v_N d\Gamma \\ \text{avec égalité si } v = u. \end{array} \right| \leq j(v) \quad \forall v \in V$$

Prenant alors  $v = \rho \in \mathcal{R}$  dans (5.49) on voit que le problème ne peut admettre de solution que si

$$(5.50) \quad |(f, \rho) + \int_{\Gamma} F_N \rho_N d\Gamma| \leq j(\rho) = \int_{\Gamma} g |\rho_T| d\Gamma \quad \forall \rho \in \mathcal{R}.$$

Nous allons dans la suite résoudre le problème sous l'hypothèse plus forte où l'inégalité dans (5.50) est stricte, i.e.

$$(5.51) \quad \int_{\Gamma} g |\rho_T| d\Gamma - |(f, \rho) + \int_{\Gamma} F_N \rho_N d\Gamma| > 0 \quad \forall \rho \in \mathcal{R}, \quad \rho \neq 0$$

ce qui équivaut, l'espace  $\mathcal{R}$  étant de dimension finie, à l'existence de  $c > 0$  telle que

$$(5.52) \quad \int_{\Gamma} g |\rho_T| d\Gamma - |(f, \rho) + \int_{\Gamma} F_N \rho_N d\Gamma| \geq c |\rho| \quad (3^2).$$

(3<sup>2</sup>) Où, comme dans les numéros antérieurs,

$$|f| = \|f\|_{(L^2(\Omega))^3} = (\int_{\Omega} f_i f_i dx)^{1/2}.$$



On a alors le

**Théorème 5.2.** *On suppose que  $\Gamma_v = \emptyset$  et que (5.52) a lieu. Il existe alors  $u \in V$  solution de (5.46) ou, ce qui revient au même, minimisant sur  $V$  la fonctionnelle  $I(v)$  donnée par (5.41) (avec  $\Gamma_{\mathcal{F}} = \Gamma$ ).*

*Démonstration*

La fonction  $v \rightarrow I(v)$  est continue convexe sur  $V$ ; il suffit donc de montrer que

$$(5.53) \quad I(v) \rightarrow +\infty \quad \text{si} \quad \|v\| \rightarrow \infty.$$

Or posons

$$(5.54) \quad \left\{ \begin{array}{l} w = v - Pv, \\ V \rightarrow \mathcal{R}, \end{array} \right. \quad Pv = \text{projection orthogonale dans } (L^2(\Omega))^3 \text{ de}$$

et

$$(5.55) \quad v = w + \rho, \quad \rho \in \mathcal{R}.$$

Alors d'après (3.52),  $\varepsilon(w) \geq c_1 \|w\|^2$  de sorte que

$$(5.56) \quad a(w, w) \geq \alpha \|w\|^2, \quad \alpha > 0,$$

et par ailleurs

$$\|v\|^2 = \varepsilon(v) + |v|^2 = \varepsilon(w) + |w|^2 + |\rho|^2,$$

de sorte que

$$(5.57) \quad \|v\| \text{ est une norme équivalente à } \|w\| + |\rho|.$$

On a :

$$\begin{aligned} I(v) &= I(w + \rho) = \frac{1}{2} a(w, w) + j(w + \rho) - (f, w) - \int_{\Gamma} F_N w_N d\Gamma - \\ &\quad - [(f, \rho) + \int_{\Gamma} F_N \rho_N d\Gamma] \geq (\text{d'après (5.52)}) \geq \\ &\geq \frac{1}{2} a(w, w) + j(w + \rho) - j(\rho) + c |\rho| - (f, w) - \int_{\Gamma} F_N w_N d\Gamma \geq \\ &\geq c(\|w\|^2 + |\rho|) - c \|w\| \end{aligned}$$

d'où le résultat d'après (5.57). ■

Le problème de l'unicité de la solution de (5.46) est ouvert; on a vu au Chapitre 1, n° 7, Théorème 7.5, une situation ayant quelques analogies et dans laquelle on pouvait conclure à l'unicité; nous n'avons pu étendre le raisonnement à la situation présente. Une remarque immédiate est la suivante :

Si  $u_1$  et  $u_2$  sont deux solutions éventuelles de (5.46), alors faisant  $v = u_2$  (resp.  $v = u_1$ ) dans l'inéquation relative à  $u_1$  (resp.  $u_2$ ) et additionnant, il vient :

$$(5.58) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0, \quad \text{donc} \quad u_1 - u_2 \in \mathcal{R} \quad \text{donc} \\ \text{dans les conditions du Théorème 5.2 il y a unicité des champs de contraintes} \\ \text{et des champs de déformation.} \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

### 5.3. Formulation variationnelle duale

Comme au n° 3.5 nous allons examiner la dualité de deux points de vue légèrement différents.

#### 5.3.1. Champs statiquement admissibles et énergie potentielle

On désigne par  $K$  l'ensemble des champs (de contraintes) statiquement admissibles (c.s.a.), défini comme suit :

$$(5.59) \quad \left\{ \begin{array}{l} K = \{ \tau \mid \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2(\Omega), \tau_{ij,j} + f_i = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \tau_N = F_N \text{ sur } \Gamma_{\mathcal{F}}, \quad |\tau_T| \leq g \text{ sur } \Gamma_{\mathcal{F}} \}. \end{array} \right. \quad (33).$$

*Remarque 5.10*

Pour  $\tau$  tel que  $\tau_{ij,j} + f_i = 0$ , on peut définir (cf. Remarque 3.8)

$$\tau_{ij} n_j \in H^{-1/2}(\Gamma) \quad \forall i.$$

Alors

$$(5.60) \quad \tau_N = \tau_{ij} n_j n_i \quad \text{est défini dans } H^{-1/2}(\Gamma)$$

et

$$(5.61) \quad \tau_{iT} = \tau_{ij} n_j - \tau_N n_i \in H^{-1/2}(\Gamma),$$

de sorte que

$$(5.62) \quad \tau_T = \{ \tau_{iT} \} \in (H^{-1/2}(\Gamma))^3.$$

La condition «  $|\tau_T| \leq g$  sur  $\Gamma_{\mathcal{F}}$  » signifie : la restriction de  $\tau_T$  à  $\Gamma_{\mathcal{F}}$  est dans  $(L^\infty(\Gamma_{\mathcal{F}}))^3$ , avec

$$|\tau_T(x)| \leq g(x) \quad \text{p.p. sur } \Gamma_{\mathcal{F}}.$$

L'ensemble  $K$  défini par (5.59) est alors un ensemble convexe fermé de l'espace  $H$  défini par

$$(5.63) \quad H = \{ \tau \mid \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2(\Omega) \}$$

(muni du produit scalaire  $\int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx$ ). ■

Pour  $\tau \in K$  on définit son énergie potentielle  $J(\tau)$  par

$$(5.64) \quad J(\tau) = \frac{1}{2} \mathcal{A}(\tau, \tau) - \int_{\Gamma_U} \tau_{ij} n_j U_i d\Gamma$$

(comme en (3.68), avec la notation (3.69)).

Un problème dual du problème initial est alors :

*Problème 5.4. Minimiser  $J(\tau)$  sur  $K$ .* ■

(33) Cf. Remarque 5.12 ci-après.

*Remarque 5.11*

Comparant au Problème 3.2 on voit que la présence de frottement ne change que le convexe  $K$  (de manière essentielle il est vrai, puisqu'on passe d'un convexe variété linéaire affine à un convexe « non linéaire »). ■

*Remarque 5.12*

Naturellement le Problème 5.4 suppose  $K$  non vide. On note que, si  $u$  est solution de (5.23), (5.24),  $\text{Mes } \Gamma_U > 0$  (resp. de (5.46) si  $\Gamma_U = \emptyset$ ) alors

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u) \in K$$

de telle sorte que, d'après les résultats des numéros antérieurs on a :

$$(5.65) \quad \text{si } \text{Mes } \Gamma_U > 0 \quad (\text{resp. si } \Gamma_U = \emptyset \text{ et si (5.52) a lieu}) \quad \text{alors } K \neq \emptyset.$$

On en déduit aussitôt le

**Théorème 5.3.** *Si  $\text{Mes } \Gamma_U > 0$  (resp. si  $\Gamma_U = \emptyset$  et si (5.52) a lieu) alors il existe  $\sigma$  unique dans  $K$  tel que*

$$(5.66) \quad J(\sigma) \leq J(\tau) \quad \forall \tau \in K$$

ou encore

$$(5.67) \quad \mathcal{A}(\sigma, \tau - \sigma) \geq \int_{\Gamma_U} U_i(\tau_{ij} n_j - \sigma_{ij} n_j) d\Gamma, \quad \forall \tau \in K.$$

Il reste à expliciter la relation entre le problème initial (ou « primal ») et le problème dual.

On va montrer que le problème primal et le problème dual sont liés par une relation analogue à (3.81) (cf. (5.76) ci-après) et que les solutions  $u$  et  $\sigma$  de ces problèmes sont liées par

$$(5.68) \quad \sigma_{ij} = a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u) \quad \text{dans } \Omega.$$

$$(5.69) \quad \sigma_T u_T + g |u_T| = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\mathcal{F}}.$$

### 5.3.2. Dualité et multiplicateurs de Lagrange

On va maintenant étendre à la situation présente « avec frottement » les considérations du n° 3.5.2.

Avec les notations du n° 3.5.2, on introduit (utilisant (3.73)) :

$$(5.70) \quad I_*(\tau, v, q) = I(\tau, v, q) + j(v) \quad (3^4),$$

$$(5.71) \quad I_*(q) = \sup_{\tau, v} I_*(\tau, v, q), \quad v = U \quad \text{sur } \Gamma_U.$$

(3<sup>4</sup>) Avec  $\int_{\Gamma_{\mathcal{F}}} Fv d\Gamma$  remplacé par  $\int_{\Gamma_{\mathcal{F}}} F_N v_N d\Gamma$ .

Comme en (3.75) on a :

$$(5.72) \quad \sup_q I_*(q) \leq I(u).$$

Avec les notations du n° 3.5.2 on a :

$$\begin{aligned} I_*(\tau, v, q) &= I_1(\tau, q) + I_3(v, q) \\ I_3(v, q) &= j(v) - (f, v) - \int_{\Gamma_{\mathcal{F}}} F_N v_N \, d\Gamma + \int_{\Omega} q_{ij} a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(v) \, dx. \end{aligned}$$

On a (cf. (3.76))

$$(5.73) \quad \inf I_1(\tau, q) = -\frac{1}{2} \mathcal{A}(\tau, \tau), \quad \text{où} \quad A_{ijkh} \tau_{kh} = q_{ij},$$

puis

$$I_3(v, q) = j(v) - (f, v) - \int_{\Gamma_{\mathcal{F}}} F_N v_N \, d\Gamma + \int_{\Omega} q_{ij} a_{ijkh} (\partial v_k / \partial x_h) \, dx,$$

d'où l'on déduit que

$$\inf_v I_3(v, q) = -\infty \quad \text{si} \quad \tau \in K, \quad v = U \quad \text{sur} \quad \Gamma_U,$$

$$\inf I_3(v, q) = \int_{\Gamma_U} \tau_{kh} n_h U_k \, d\Gamma \quad \text{si} \quad \tau \in K.$$

Donc :

$$(5.74) \quad \hat{I}(q) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \mathcal{A}(\tau, \tau) + \int_{\Gamma_U} \tau_{kh} n_h U_k \, d\Gamma & \text{si} \quad \tau \in K, \\ \text{où} \quad q_{ij} = A_{ijkh} \tau_{kh}, \\ -\infty \text{ sinon.} \end{cases}$$

Mais

$$(5.75) \quad I(u) = -\frac{1}{2} a(u, u) + \int_{\Gamma_U} \sigma_{ij} n_j U_i \, d\Gamma.$$

En effet de  $Au = f$ ,  $u = U$  sur  $\Gamma_U$ ,  $\sigma_N = F_N$  sur  $\Gamma_{\mathcal{F}}$ ,

$$|\sigma_T| \leq g, \quad \sigma_T U_T + g |u_T| = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{\mathcal{F}}$$

on déduit que

$$a(u, u) = \int_{\Gamma_U} \sigma_{ij} n_j U_i \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{\mathcal{F}}} F_N u_N \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{\mathcal{F}}} \sigma_T u_T \, d\Gamma = (f, u)$$

et donc, comme

$$- \int_{\Gamma_{\mathcal{F}}} \sigma_T u_T \, d\Gamma = j(u),$$

on en déduit (5.75).

Mais alors

$$\sup \hat{I}(q) \geq -\frac{1}{2} \mathcal{A}(\sigma, \sigma) + \int_{\Gamma_U} \sigma_{kh} n_h U_k \, d\Gamma = I(u)$$

d'où la conclusion analogue à (3.81) :

**Théorème 5.4.** On a :

$$(5.76) \quad \inf_{\tau \in K} \left[ \frac{1}{2} \mathcal{A}(\tau, \tau) - \int_{\Gamma_U} \tau_{kh} u_h U_k d\Gamma \right] + \inf_{v=U \text{ sur } \Gamma_U} I(v) = 0.$$

En outre, les solutions  $\sigma$  et  $u$  sont liées par (5.68), (5.69). ■

#### 5.4. Autres conditions aux limites et questions ouvertes

##### Orientation

On va indiquer dans ce numéro d'autres conditions aux limites que l'on peut rencontrer, en restant dans le cadre de la loi de frottement de Coulomb ou non.

On est ainsi conduit à des problèmes dont certains sont de simples variantes des précédents mais où d'autres semblent ouverts.

##### 5.4.1. Déplacement normal avec frottement

Dans les problèmes abordés au n° 5.1.2 le frottement agit sur le *déplacement tangentiel*. Nous allons maintenant considérer le cas où c'est le *déplacement normal* qui a lieu avec frottement <sup>(35)</sup>.

Les conditions du problème sont alors, en gardant les notations et les hypothèses précédentes : on cherche  $u$  solution de (5.17) avec (5.18) et, sur  $\Gamma_{\mathcal{F}}$ , les conditions suivantes : soient  $g_1$  et  $g_2$  données dans  $L^\infty(\Gamma_{\mathcal{F}})$  (ou plus généralement dans  $H^{-1/2}(\Gamma')$ ) et dont on considère les restrictions à  $\Gamma_{\mathcal{F}}$  ; on suppose que

$$(5.77) \quad g_1 \leq 0 \leq g_2 ;$$

alors, pour  $x \in \Gamma_{\mathcal{F}}$ , on a

$$(5.78) \quad \begin{cases} g_1 < \sigma_N(x) < g_2 & \Rightarrow u_N(x) = 0, \\ \sigma_N(x) = g_1 & \Rightarrow u_N(x) \geq 0, \\ \sigma_N(x) = g_2 & \Rightarrow u_N(x) \leq 0 \end{cases}$$

à quoi on ajoute, par exemple, la condition classique

$$(5.79) \quad \sigma_T = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\mathcal{F}}.$$

On vérifie alors sans peine que le problème précédent « équivaut » <sup>(36)</sup> à la minimisation de la fonctionnelle

$$(5.80) \quad I_1(v) = \frac{1}{2} a(v, v) + j_1(v) - (f, v)$$

où

$$(5.81) \quad j_1(v) = \int_{\Gamma_{\mathcal{F}}} (-g_1 v_N^+ + g_2 v_N^-) d\Gamma,$$

<sup>(35)</sup> Cette situation peut intervenir dans certains montages mécaniques.

<sup>(36)</sup> C'est toujours une équivalence formelle, comme on a déjà signalé à plusieurs occasions puisque dans le Problème (5.17) (5.18) (5.78) (5.79) on ne précise pas les hypothèses de différentiabilité sur  $u$ .

la minimisation étant effectuée sur l'ensemble  $\mathcal{U}_{ad}$  des fonctions  $v \in (H^1(\Omega))^3$  telles que

$$v = U \quad \text{sur } \Gamma_U.$$

En effet si  $u$  est une solution dans  $\mathcal{U}_{ad}$  minimisant  $I_1(v)$ , on a :

$$(5.82) \quad a(u, v - u) + j_1(v) - j_1(u) - (f, v - u) \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

On en déduit que (prenant  $v = u \pm \varphi$ ,  $\varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^3$ ) :

$$Au = f,$$

d'où d'après la formule de Green (2.33) (comme  $v = u = U$  sur  $\Gamma_U$ ) :

$$\begin{aligned} a(u, v - u) - \int_{\Gamma_T} [\sigma_T(v_T - u_T) + \sigma_N(v_N - u_N)] d\Gamma &= (f, v - u) \leq \\ &\leq a(u, v - u) + j_1(v) - j_1(u) \end{aligned}$$

d'où

$$(5.83) \quad j_1(v) - j_1(u) + \int_{\Gamma_T} [\sigma_T(v_T - u_T) + \sigma_N(v_N - u_N)] d\Gamma \geq 0.$$

Prenant  $v_T - u_T = \psi$ ,  $\psi \in (H^{1/2}(\Gamma))^3$ ,  $n\psi = 0$  sur  $\Gamma$ , et prenant  $v_N - u_N = 0$  (c'est loisible), on déduit de (5.83) que l'on a (5.79) et alors (5.83) se réduit à

$$(5.84) \quad j_1(v) - j_1(u) + \int_{\Gamma_T} \sigma_N(v_N - u_N) d\Gamma \geq 0,$$

ou encore :

$$(5.85) \quad \int_{\Gamma_T} [(\sigma_N - g_1) v_N^+ + (g_2 - \sigma_N) v_N^-] d\Gamma - \int_{\Gamma_T} [(\sigma_N - g_1) u_N^+ + (g_2 - \sigma_N) u_N^-] d\Gamma \geq 0.$$

Prenant  $v_N = \pm \lambda \varphi$ ,  $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ ,  $\varphi \geq 0$ , puis faisant  $\lambda \rightarrow +\infty$  on trouve que

$$(5.86) \quad \sigma_N - g_1 \geq 0, \quad g_2 - \sigma_N \geq 0$$

et

$$\int_{\Gamma_T} [(\sigma_N - g_1) u_N^+ + (g_2 - \sigma_N) u_N^-] d\Gamma \leq 0$$

ce qui, joint à (5.86), équivaut à

$$(5.87) \quad (\sigma_N - g_1) u_N^+ + (g_2 - \sigma_N) u_N^- = 0.$$

Mais (5.86), (5.87) équivalent à (5.78), d'où le résultat. ■

### Conséquences

Par les méthodes antérieures, on voit que, si  $\text{Mes } \Gamma_U > 0$ , le problème admet une solution unique.

Dans le cas où  $\Gamma_U = \emptyset$ , pour que le problème admette une solution il est nécessaire que

$$(5.88) \quad j_1(\rho) - (f, \rho) \geq 0 \quad \forall \rho \in \mathcal{R}$$

(d'où l'on déduit (en changeant  $\rho$  en  $-\rho$ )

$$(5.89) \quad - \int_{\Gamma} (-g_1 \rho_N^- + g_2 \rho_N^+) d\Gamma \leq (f, \rho) \leq \int_{\Gamma} (-g_1 \rho_N^+ + g_2 \rho_N^-) d\Gamma, \quad \forall \rho \in \mathcal{R}.$$

On montre alors — par des méthodes analogues à celles du Théorème 5.2 — que, si l'on a la condition (5.88) renforcée, i.e. si

$$(5.90) \quad j_1(\rho) - (f, \rho) > 0 \quad \forall \rho \in \mathcal{R}, \quad \rho \neq 0 \quad (37),$$

alors le problème admet au moins une solution. Il y a unicité des champs de déformations et de contraintes. ■

#### 5.4.2. Le problème de Signorini comme cas limite de problèmes de frottements

Nous considérons d'abord le cas particulier du n° 5.4.1 où  $g_1 = 0$  et  $g_2 = g > 0$ . Nous introduisons

$$(5.91) \quad \mathfrak{J}(v) = \int_{\Gamma} v_N^- d\Gamma.$$

Le problème correspond alors à la minimisation (sur l'espace des  $v$  tels que  $v = U$  sur  $\Gamma_U$ ) de

$$(5.92) \quad \frac{1}{2} a(v, v) + g\mathfrak{J}(v) - (f, v).$$

Nous considérons le cas — le plus délicat — où

$$(5.93) \quad \Gamma_U = \emptyset.$$

Alors, si l'on suppose que (5.90) a lieu, i.e. ici :

$$(5.94) \quad - (f, \rho) + g\mathfrak{J}(\rho) > 0 \quad \forall \rho \in \mathcal{R}, \quad \rho \neq 0,$$

il existe  $u_g$  minimisant (5.92) sur  $V = (H^1(\Omega))^3 - u_g$  étant caractérisé par

$$(5.95) \quad a(u_g, v - u_g) + g\mathfrak{J}(v) - g\mathfrak{J}(u_g) - (f, v - u_g) \geq 0 \quad \forall v \in V;$$

il y a unicité du champ de déformations et de contraintes.

(37) Ou encore,  $\mathcal{R}$  étant de dimension finie,

$$j_1(\rho) - (f, \rho) \geq \beta |\rho|, \quad \beta > 0, \quad \rho \in \mathcal{R}.$$

On va maintenant faire tendre  $g$  vers  $+\infty$ .

On introduit l'ensemble

$$(5.96) \quad K = \{ v \mid v \in V, v_N \geq 0 \text{ sur } \Gamma \}$$

qui est convexe fermé dans  $V$ .

On fait l'hypothèse :

$$(5.97) \quad - (f, \rho) + g_0 \mathfrak{J}(\rho) > 0 \quad \forall \rho \in \mathcal{R}, \quad \rho \neq 0, \quad g_0 > 0 \text{ fixé.}$$

On note alors que (5.94) a lieu  $\forall g \geq g_0$ , donc  $u_g$  existe pour  $g \geq g_0$ . On va montrer que

$$(5.98) \quad \left| \begin{array}{l} \text{on peut trouver une suite } g \rightarrow +\infty \text{ telle que } u_g \text{ converge dans } V \text{ faible} \\ \text{vers } u \text{ solution dans } K \text{ de} \\ a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K. \end{array} \right.$$

Interprétons l'inéquation dans (5.98); on trouve :

$$(5.99) \quad \left| \begin{array}{l} Au = f, \\ \sigma_T = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ u_N \geq 0, \quad \sigma_N \geq 0, \quad \sigma_N u_N = 0 \quad \text{sur } \Gamma; \end{array} \right.$$

c'est le *problème de Signorini* (cf. G. Fichera [1]).

Notons que la démonstration de (5.98) *montre l'existence* d'une solution du problème de Signorini *sous l'hypothèse* (5.97), *qui implique*

$$(5.100) \quad - (f, \rho) > 0 \quad \forall \rho \in \mathcal{R} \cap K, \quad \rho \neq 0.$$

Il est démontré dans G. Fichera [1] (cf. aussi Lions-Stampacchia [1]) l'existence d'une solution du problème de Signorini <sup>(38)</sup> sous *la seule* hypothèse (5.100). On obtient ici que sous l'hypothèse plus forte (5.97) *le problème de Signorini est un cas limite de problèmes de frottements.* ■

*Démonstration de (5.98)*

Il résulte de (5.97) que

$$- (f, \rho) + g_0 \mathfrak{J}(\rho) \geq c_0 \| \rho \|$$

où  $\| \cdot \|$  désigne la norme dans  $V$ . Par conséquent, si l'on décompose  $v \in V$  en

$$v = w + \rho$$

<sup>(38)</sup> Il est montré dans G. Fichera *loc. cit.* que la condition (5.100) est *nécessaire*. Pour de nombreuses extensions de toutes ces questions cf. M. Schatzman [1].



(comme dans le Théorème 5.2), on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a(v, v) + g\mathfrak{J}(v) - (f, v) &= \frac{1}{2} a(w, w) - (f, w) + g\mathfrak{J}(w + \rho) - (f, \rho) \\ &= \frac{1}{2} a(w, w) - (f, w) - (f, \rho) + g_0 \mathfrak{J}(\rho) + \\ &\quad + (g - g_0) \mathfrak{J}(w + \rho) + g_0(\mathfrak{J}(w + \rho) - \mathfrak{J}(\rho)) \\ &\geq \text{(utilisant (5.56) et supposant } g \geq g_0) \\ &\geq \frac{1}{2} \alpha \|w\|^2 - c_1 \|w\| + c_0 \|\rho\| + g_0(\mathfrak{J}(w + \rho) - \mathfrak{J}(\rho)). \end{aligned}$$

Mais

$$\mathfrak{J}(w + \rho) - \mathfrak{J}(\rho) \geq -\mathfrak{J}(w) \geq -c_2 \|w\|,$$

d'où

$$\frac{1}{2} a(v, v) + g\mathfrak{J}(v) - (f, v) \geq c_3(\|w\|^2 + \|\rho\|) - c_4 \|w\|$$

où  $c_3$  et  $c_4$  sont des constantes *indépendantes* de  $g$ . Donc  $u_g$  — qui est l'un des éléments minimisant  $\frac{1}{2} a(v, v) + g\mathfrak{J}(v) - (f, v)$  — demeure dans un borné de  $V$ .

Mais on déduit alors de (5.95) (en faisant par exemple  $v = 0$ ) que

$$g\mathfrak{J}(u_g) \leq c_5,$$

donc

$$(5.101) \quad \mathfrak{J}(u_g) \rightarrow 0 \quad \text{si } g \rightarrow +\infty;$$

on peut donc extraire une suite, encore notée  $u_g$ , telle que  $u_g \rightarrow u$  dans  $V$  faible et d'après (5.101)  $\mathfrak{J}(u) = 0$ , donc  $u \in K$ .

Si l'on prend dans (5.95)  $v \in K$  il vient (puisque  $\mathfrak{J}(v)$  est alors nul) :

$$(5.102) \quad a(u_g, v) - (f, v - u_g) \geq a(u_g, u_g).$$

Passant à la limite dans (5.102) on obtient

$$a(u, v) - (f, v - u) \geq a(u, u) \quad \forall v \in K$$

d'où le résultat. ■

### 5.4.3. Autre condition de frottement avec déplacement normal imposé

Il peut arriver, dans certaines conditions aux limites avec frottement, que le déplacement normal soit imposé et que, *simultanément* on ait connaissance, au moins de façon approchée, de la contrainte normale. On est alors conduit aux conditions aux limites suivantes sur  $\Gamma_{\mathcal{F}}$  <sup>(39)</sup> :

$$(5.103) \quad u_N = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\mathcal{F}},$$

$$(5.104) \quad \begin{cases} |\sigma_T| < g & \Rightarrow u_T = 0 \\ |\sigma_T| = g & \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } u_T = -\lambda \sigma_T. \end{cases}$$

<sup>(39)</sup> Les conditions aux limites sur  $\Gamma_U$  sont inchangées.

La condition (5.104) fait apparaître une loi de frottement différente de la loi de Coulomb. La formulation variationnelle correspondante est

$$(5.105) \quad \left| \begin{array}{l} a(u, v - u) + \int_{\Gamma_{\mathcal{F}}} g(|v_T| - |u_T|) d\Gamma \geq (f, v - u) \\ \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \text{ et satisfaisant (5.103)}. \end{array} \right.$$

La résolution s'effectue comme au n° 5.2.

#### 5.4.4. Frottement de Coulomb avec déplacement normal imposé

On reprend la loi de Coulomb envisagée au 5.1.2 mais on suppose cette fois que sur  $\Gamma_{\mathcal{F}} = \Gamma - \Gamma_U$  c'est le *déplacement normal* qui est donné au lieu de la *contrainte normale*.

On aboutit ainsi (cf. (5.7), (5.8)) au problème suivant :

Trouver  $u$  solution de (5.17), (5.18) avec

$$(5.106) \quad u_N = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\mathcal{F}},$$

et, encore sur  $\Gamma_{\mathcal{F}}$  :

$$(5.107) \quad \left| \begin{array}{l} |\sigma_T| \leq \mathcal{F} |\sigma_N|, \quad \text{avec} \\ |\sigma_T| < \mathcal{F} |\sigma_N| \Rightarrow u_T = 0, \\ |\sigma_T| = \mathcal{F} |\sigma_N| \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } u_T = -\lambda \sigma_T. \end{array} \right.$$

Ce problème semble *ouvert*. Nous nous bornerons à la remarque suivante : si l'on introduit

$$(5.108) \quad \mathcal{U}_{ad} = \{ v \mid v \in (H^1(\Omega))^3, v = U \text{ sur } \Gamma_U, v_N = 0 \text{ sur } \Gamma_{\mathcal{F}} \}$$

alors  $u$  est solution de (5.17), (5.18), (5.106), (5.107) si et seulement si  $u$  est solution dans  $\mathcal{U}_{ad}$  de l'inéquation suivante :

$$(5.109) \quad a(u, v - u) + \int_{\Gamma_{\mathcal{F}}} |\sigma_N(u)| (|v_T| - |u_T|) d\Gamma \geq (f, v - u) \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

L'équivalence formelle est facile à vérifier. Mais le problème (5.109) présente plusieurs difficultés :

i) Il faut donner un sens à (5.109) ; or pour  $u \in \mathcal{U}_{ad}$ ,  $\sigma_N(u)$  n'est pas défini sur  $\Gamma_{\mathcal{F}}$  ; toutefois, si  $u$  est « solution » de (5.109), alors nécessairement on a  $Au = f$  et il est possible (mais non démontré) que si  $u \in (H^1(\Omega))^3$  et  $Au \in (L^2(\Omega))^3$  alors on puisse définir  $|\sigma_N(u)|$  dans  $H^{-1/2}(\Gamma)$  ;

ii) Même i) surmonté, l'inéquation (5.109) — qui n'est pas une inéquation de type usuel — n'est pas entièrement résolue.

On peut montrer l'existence de  $u$  solution de l'inéquation régularisée

$$(5.110) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(Au, A(v-u)) + a(u, v-u) + \int_{\Gamma_e} \mathcal{F} |\sigma_N(u)| (|v_T| - |u_T|) d\Gamma \geq \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \geq (f, v-u), \\ u, v \in (H^2(\Omega))^3, \quad u=v=U \text{ sur } \Gamma_U, \quad u_N=v_N=0 \text{ sur } \Gamma_{\mathcal{F}}. \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

#### 5.4.5. Problème de Signorini avec frottement (G. Duvaut [5])

Il s'agit de l'étude de la déformation d'un corps élastique qui repose sur un support rigide. Dans l'état initial sans contrainte le corps occupe une région  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  de frontière  $\Gamma$  dont une partie  $\Gamma_1$  est en contact avec un support rigide  $S$ . Le corps  $\Omega$  est soumis à des forces volumiques  $\{f_i\}$  et des forces surfaciques  $\{F_i\}$  sur  $\Gamma - \Gamma_1 (= \Gamma_2)$ . Ces forces engendrent une déformation du corps élastique, et les déplacements correspondants sur  $\Gamma_1$  sont tels que la composante normale est négative ou nulle (comme dans le problème de Signorini classique) tandis que la composante tangentielle est un déplacement avec frottement lorsque la composante normale est nulle.

Les champs de déplacements  $\{u_i\}$  et contraintes  $\{\sigma_{ij}\}$  satisfont aux équations et conditions

$$(5.111) \quad \sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(5.112) \quad \sigma_{ij} = a_{ijk} v_{k,h}(u) \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(5.113) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij} n_j = F_i \quad \text{sur } \Gamma_2 \\ u_N \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \\ u_N < 0 \Rightarrow \sigma_{ij} n_j = 0 \\ u_N = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \sigma_N \leq 0 \\ \text{cl} \left\{ \begin{array}{l} |\sigma_T| < \mathcal{F} |\sigma_N| \Rightarrow u_T = 0 \\ |\sigma_T| = \mathcal{F} |\sigma_N| \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \quad u_T = -\lambda \sigma_T \end{array} \right. \right\} \end{array} \right| \text{sur } \Gamma_1.$$

Si l'on pose

$$\mathcal{U}_{\text{ad}} = \{v \mid v = \{v_i\}, \quad v_i \in H^1(\Omega), \quad v_i n_i = v_N \leq 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$$

on montre que la solution  $u$  du problème (5.111) – (5.113) satisfait à

$$(5.114) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in \mathcal{U}_{\text{ad}} \\ a(u, v-u) + \int_{\Gamma_e} \mathcal{F} |\sigma_N(u)| (|v_T| - |u_T|) d\Gamma \geq \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \geq (f, v-u) + (F, v-u)_{\Gamma_2} \quad \forall v \in \mathcal{U}_{\text{ad}}. \end{array} \right.$$

La recherche de  $u$  satisfaisant à (5.114) est un problème ouvert.  $\blacksquare$

## 5.5. Cas dynamiques

*Orientation*

Nous reprenons maintenant le Problème 5.1, n° 5.1.2. Nous allons en donner une formulation variationnelle « analogue dynamique » de la formulation du Problème 5.3. Nous résoudrons ensuite le problème ainsi formulé. Nous n'aborderons pas ici les « analogues dynamiques » des autres problèmes envisagés dans les numéros précédents ; ils donnent lieu à des résultats analogues et les problèmes ouverts dans les cas stationnaires donnent encore des problèmes ouverts dans le cas dynamique.

## 5.5.1. Formulation variationnelle

Définissons :

$$(5.115) \quad \mathcal{U}_{\text{ad}}(t) = \{ v \mid v \in (H^1(\Omega))^3, \quad v = U'(t) \text{ sur } \Gamma_U \}.$$

Alors avec les notations du n° 5.1.2 on est conduit au

*Problème 5.5*

Trouver  $u$  telle que

$$(5.116) \quad u'(t) \in \mathcal{U}_{\text{ad}}(t) \quad \forall t,$$

$$(5.117) \quad \begin{aligned} (u''(t), v - u'(t)) + a(u(t), v - u'(t)) + j(v) - j(u'(t)) \geq \\ \geq (f(t), v - u'(t)) + \int_{\Gamma_{\mathcal{F}}} F_N(t) (v_N - u'_N(t)) \, d\Gamma \quad \forall v \in \mathcal{U}_{\text{ad}}(t), \end{aligned}$$

et avec les conditions initiales

$$(5.118) \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \quad \blacksquare$$

*Remarque 5.14*

On déduit de (5.116), (5.118) que  $u(t) = U(t) + (u_0 - U(0))$  sur  $\Gamma_U$  d'où (5.6) si

$$(5.119) \quad u_0 = U(0) \quad \text{sur } \Gamma_U. \quad \blacksquare$$

*Remarque 5.15*

Il s'agit dans le problème précédent, d'une *inéquation d'évolution du deuxième ordre en  $t$*  (les inéquations d'évolution rencontrées aux Chapitres 1 et 2 étaient du *premier ordre en  $t$* ). ■

*Remarque 5.16*

Si  $\mathcal{F} = 0$  (cas *sans frottement*) et si  $\Gamma_{\mathcal{F}} = \Gamma - \Gamma_U = \Gamma_{\mathcal{F}}$ , l'inégalité (5.117) devient une *égalité* et l'on retrouve (2.42). La solution du Problème 5.5 *redonne donc comme cas particulier les résultats* du n° 4. Nous avons séparé les résultats pour la clarté de l'exposé. ■

## Remarque 5.17

Nous avons vu dans les numéros précédents (cas statique) que les cas où

$$\text{Mes } \Gamma_U > 0 \quad \text{et} \quad \Gamma_U = \emptyset$$

se traitent assez différemment, ce dernier cas exigeant pour l'existence d'une solution que les forces de frottement soient suffisantes pour contrebalancer les forces extérieures agissant sur le système et obtenir des positions d'équilibre statique du corps.

Dans le cas dynamique, nous allons voir que les résultats sont obtenus de la même façon dans les deux cas. Néanmoins, comme on a déjà signalé dans le cas « sans frottement » (cf. Remarque 4.4) il peut y avoir dans le cas «  $\Gamma_U = \emptyset$  » un mouvement *global* du corps élastique qui se décompose en un mouvement de solide rigide et un mouvement de déformation.

Un tel mouvement de solide rigide détruira en général les conditions aux limites imposées et par conséquent nous ne considérerons la solution comme valable que si ou bien  $\text{Mes } \Gamma_U > 0$  ou bien, si  $\Gamma_U = \emptyset$ , et si, pour tout  $t > 0$ , on a :

$$(5.120) \quad \left| \begin{array}{l} \int_{\Gamma} g(t) | \rho_T | d\Gamma - | (f(t), \rho) + \int_{\Gamma} F_N(t) \rho_N d\Gamma | \geq 0 \\ \forall \rho \in \mathcal{R}, \quad \rho \neq 0. \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

### 5.5.2. Enoncé des résultats

Comme au n° 4.1 on introduit  $\Phi(t)$  satisfaisant à

$$(5.121) \quad \Phi(t) \in (H^1(\Omega))^3, \quad \Phi(t) = U(t) \quad \text{sur } \Gamma_U.$$

On introduit  $V_0$  comme en 4.2 :

$$(5.122) \quad V_0 = \{ v \mid v \in (H^1(\Omega))^3, \quad v = 0 \text{ sur } \Gamma_U \} \quad (4^0).$$

Remplaçant  $u(t)$  par  $u(t) - \Phi(t)$  en gardant la notation  $u(t)$ , le Problème 5.5 équivaut au suivant : on cherche une fonction  $t \rightarrow u(t)$  de  $[0, T] \rightarrow V_0$  telle que

$$(5.123) \quad \begin{aligned} (u'(t), v - u'(t)) + a(u(t), v - u'(t)) + j(v + \Phi'(t)) - \\ - j(u'(t) + \Phi'(t)) \geq (\Psi(t), v - u'(t)) \quad \forall v \in V_0, \end{aligned}$$

où

$$(5.124) \quad (\Psi(t), v) = (f(t), v) + \int_{\Gamma_F} F_N(t) v_N d\Gamma - (\Phi''(t), v) - a(\Phi(t), v),$$

avec les données initiales

$$(5.125) \quad \left| \begin{array}{l} u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \quad (\text{où, par rapport à (5.118) } u_0 \text{ (resp. } u_1) \text{ vaut} \\ u_0 - \Phi(0) \text{ (resp. } u_1 - \Phi'(0)). \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

$$(4^0) \quad V_0 = V \text{ si } \Gamma_U = \emptyset.$$

On introduit  $H = (L^2(\Omega))^3$  et le dual  $V'_0$  de  $V_0$  avec

$$V_0 \subset H \subset V'_0.$$

On va démontrer le

**Théorème 5.7.** *On fait les hypothèses suivantes :*

$$(5.126) \quad f, f', f'' \in L^2(0, T; H); \quad F_N, F'_N, F''_N \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_{\mathcal{F}})),$$

$$(5.127) \quad \Phi, \Phi', \Phi'' \in L^2(0, T; V) \quad (V = (H^1(\Omega))^3), \\ \Phi^{(3)}, \Phi^{(4)} \in L^2(0, T; H), \quad \Phi(0) \in (H^2(\Omega))^3,$$

$$(5.128) \quad g \text{ ne dépend pas de } t,$$

$$(5.129) \quad u_0 \in (H^2(\Omega))^3,$$

$$(5.130) \quad u_1 \in (H^1(\Omega))^3, \quad u_{1T} + \Phi'_T(0) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\mathcal{F}},$$

$$(5.131) \quad a(\Phi(0), v) = (A\Phi(0), v) - \int_{\Gamma_{\mathcal{F}}} \sigma_{0T} v_T d\Gamma \quad \forall v \in V_0.$$

Dans ces conditions, il existe une fonction  $u$  et une seule solution de (5.123), (5.125) avec

$$(5.132) \quad u, u' \in L^\infty(0, T; V_0),$$

$$(5.133) \quad u'' \in L^\infty(0, T; H).$$

### 5.5.3. Démonstration de l'unicité

L'unicité est facile. Soient en effet  $u$  et  $u_1$  deux solutions éventuelles. Prenant dans (5.123)  $v = u'_1(t)$  (resp.  $v = u'(t)$ ) dans l'inéquation relative à  $u_1$ ) et ajoutant, il vient, en posant  $w = u - u_1$  :

$$- (w'', w') - a(w, w') \geq 0$$

i.e.

$$\frac{d}{dt} [|w'(t)|^2 + a(w(t), w(t))] \leq 0.$$

Donc, comme  $w(0) = 0$ ,  $w'(0) = 0$  et  $a(v, v) \geq 0$  (en particulier), on a :

$$w'(t) = 0 \quad \text{donc} \quad w(t) = 0.$$

### 5.5.4. Démonstration de l'existence

#### *Avertissement*

Afin de voir où s'introduisent des difficultés en l'absence de l'hypothèse (5.125) a priori très restrictive, nous allons *commencer* la démonstration en supposant que  $g$  peut dépendre de  $t$ , avec

$$g, \quad \partial g / \partial t, \quad \partial^2 g / \partial t^2 \in L^\infty(\Gamma_{\mathcal{F}} \times ]0, T[).$$

On régularise la fonctionnelle  $j$ . On définit

$$(5.134) \quad j_\varepsilon(v) = \int_{\Gamma_s} g(x, t) \varphi_\varepsilon(|v_T|^2) d\Gamma$$

où, par exemple,

$$\varphi_\varepsilon(\lambda) = \frac{1}{1 + \varepsilon} |\lambda|^{(1+\varepsilon)}, \quad \varepsilon > 0;$$

$j_\varepsilon$  est une régularisation convexe de  $j$ .

On considère l'équation approchée :

$$(5.135) \quad (u_\varepsilon'', v) + a(u_\varepsilon, v) + (j'_\varepsilon(u_\varepsilon' + \Phi'), v) = (\Psi, v) \quad \forall v \in V_0$$

avec

$$(5.136) \quad u_\varepsilon(0) = u_0, \quad u'_\varepsilon(0) = u_1.$$

On montre d'abord l'existence d'une solution  $u_\varepsilon$  de (5.135), (5.136) puis l'on établit des estimations a priori indépendantes de  $\varepsilon$ . On passe ensuite à la limite en  $\varepsilon$ .

Naturellement comme toujours l'essentiel est dans les estimations a priori; l'existence de  $u_\varepsilon$  se démontre par exemple, en passant à la limite sur la dimension dans l'approximation de Galerkin, comme au n° 4. Établissons donc les estimations a priori.

*Estimations a priori (I)*

On prend dans (5.135)  $v = u'_\varepsilon + \Phi'$ . On obtient ainsi, en notant que

$$(j'_\varepsilon(w), w) \geq 0 \quad \forall w \in V_0 :$$

$$(u'_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t) + \Phi'(t)) + a(u_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t) + \Phi'(t)) \leq (\Psi(t), u'_\varepsilon(t) + \Phi'(t))$$

d'où

$$(5.137) \quad \left| \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|u'_\varepsilon(t)|^2 + a(u_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t))) \leq (\Psi(t), u'_\varepsilon(t) + \Phi'(t)) + (u'_\varepsilon(t), \Phi'(t)) - a(u_\varepsilon(t), \Phi'(t)). \right.$$

Comme, pour  $\lambda > 0$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$a(v, v) + \lambda |v|^2 \geq \alpha \|v\|^2,$$

on déduit de (5.137), après intégration en  $t$  :

$$(5.138) \quad \begin{aligned} & |u'_\varepsilon(t)|^2 + \alpha \|u_\varepsilon(t)\|^2 - \lambda |u_\varepsilon(t)|^2 \leq |u_1|^2 + c \|u_0\|^2 \\ & + 2 \int_0^t (\Psi(\sigma), u'_\varepsilon(\sigma) + \Phi'(\sigma)) d\sigma - 2 \int_0^t (u'_\varepsilon(\sigma), \Phi'(\sigma)) d\sigma \\ & - \int_0^t a(u_\varepsilon(\sigma), \Phi'(\sigma)) d\sigma = \\ & = |u_1|^2 + c \|u_0\|^2 + 2 \int_0^t (\Psi(\sigma), u'_\varepsilon(\sigma) + \Phi'(\sigma)) d\sigma - 2(u'_\varepsilon(t), \Phi'(t)) \\ & + 2(u_1, \Phi'(0)) + 2 \int_0^t (u'_\varepsilon(\sigma), \Phi''(\sigma)) d\sigma \\ & - \int_0^t a(u_\varepsilon(\sigma), \Phi'(\sigma)) d\sigma. \end{aligned}$$

Utilisant

$$|u_\varepsilon(t)|^2 \leq c \int_0^t |u'_\varepsilon(\sigma)|^2 d\sigma + |u_0|^2$$

et notant que les hypothèses faites sur  $\Phi$ ,  $f$ ,  $F_N$  entraînent que

$$(5.139) \quad \Psi, \Psi' \in L^2(0, T; V'_0),$$

on déduit de (5.138)

$$\begin{aligned} |u'_\varepsilon(t)|^2 + \|u_\varepsilon(t)\|^2 &\leq c + c \int_0^t |u'_\varepsilon(\sigma)|^2 d\sigma + c \int_0^t \|u_\varepsilon(\sigma)\|^2 d\sigma \\ &\quad + 2 \int_0^t (\Psi(\sigma), u'_\varepsilon(\sigma)) d\sigma = \\ &= c(1 + \int_0^t (|u'_\varepsilon(\sigma)|^2 + \|u_\varepsilon(\sigma)\|^2) d\sigma) + 2(\Psi(t), u'(t)) \\ &\quad - 2(\Psi(0), u_1) - 2 \int_0^t \|\Psi'(\sigma)\|_* \|u_\varepsilon(\sigma)\| d\sigma \end{aligned}$$

d'où finalement

$$(5.140) \quad |u'_\varepsilon(t)|^2 + \|u_\varepsilon(t)\|^2 \leq c(1 + \int_0^t (|u'_\varepsilon(\sigma)|^2 + \|u_\varepsilon(\sigma)\|^2) d\sigma).$$

Par conséquent, d'après le lemme de Gronwall :

$$(5.141) \quad |u'_\varepsilon(t)| + \|u_\varepsilon(t)\| \leq c. \quad \blacksquare$$

*Estimations a priori (II)*

On dérive (5.135) en  $t$  et l'on fait dans le résultat  $v = u''(t) + \Phi''(t)$ . Posant

$$X(t) = \left( \frac{d}{dt} j'_\varepsilon(u'_\varepsilon(t) + \Phi'(t)), u'_\varepsilon(t) + \Phi'(t) \right),$$

il vient

$$(5.142) \quad (u'''_\varepsilon(t), u''_\varepsilon(t) + \Phi''(t)) + a(u'_\varepsilon(t), u''_\varepsilon(t) + \Phi''(t)) + X(t) = \\ = (\Psi''(t), u''_\varepsilon(t) + \Phi''(t)).$$

Mais

$$(j'_\varepsilon(w), v) = \int_{\Gamma_\varepsilon} g(x, t) \varphi'_\varepsilon(|w_T|^2) w_T v_T d\Gamma = \\ = \int_{\Gamma_\varepsilon} g(x, t) \psi_\varepsilon(w_T) v_T d\Gamma$$

donc

$$\left( \frac{d}{dt} j'_\varepsilon(w(t)), v \right) = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial g}{\partial t} \psi_\varepsilon(w_T(t)) v_T d\Gamma + \\ + \int_{\Gamma_\varepsilon} g(x, t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi_\varepsilon(w_T(t+h)) - \psi_\varepsilon(w_T(t))}{h} v_T d\Gamma.$$

Donc

$$\left( \frac{d}{dt} j'_\varepsilon(w(t)), w'(t) \right) = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial g}{\partial t} \psi_\varepsilon(w_T) w'_T d\Gamma + \\ + \int_{\Gamma_\varepsilon} g \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi_\varepsilon(w_T(t+h)) - \psi_\varepsilon(w_T(t))}{h} \cdot \frac{w_T(t+h) - w_T(t)}{h} d\Gamma.$$



Comme l'opérateur est *monotone*, la dernière intégrale est  $\geq 0$  et donc

$$(5.143) \quad \left( \frac{d}{dt} j'_\varepsilon(w(t)), w'(t) \right) \geq \int_{\Gamma_F} \frac{\partial g}{\partial t} \psi_\varepsilon(w_T) w'_T d\Gamma = \int_{\Gamma_F} \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \psi_\varepsilon(w_T) d\Gamma.$$

Alors avec cette inégalité (5.142) donne

$$(5.144) \quad \left| \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|u'_\varepsilon(t)\|^2 + a(u'_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t))] + \int_{\Gamma_F} \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \psi_\varepsilon(w_T) d\Gamma \right| \leq (\psi'(t), u'_\varepsilon(t) + \Phi''(t)) - (u''_\varepsilon(t), \Phi''(t)) - a(u'_\varepsilon(t), \Phi''(t))$$

où l'on remplace  $w$  par  $u'_\varepsilon + \Phi''$ .

Intégrant de 0 à  $t$  on en déduit :

$$(5.145) \quad \begin{aligned} |u''_\varepsilon(t)|^2 + \|u'_\varepsilon(t)\|^2 &\leq c(\|u_1\|^2 + |u''_\varepsilon(0)|^2) + c \int_0^t |u''_\varepsilon(\sigma)|^2 d\sigma + \\ &+ 2 \int_0^t (\Psi'(\sigma), u''_\varepsilon(\sigma)) d\sigma - 2 \int_0^t (u''_\varepsilon(\sigma), \Phi''(\sigma)) d\sigma - \\ &- 2 \int_0^t \int_{\Gamma_F} \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \psi_\varepsilon(u''_{\varepsilon T} + \Phi''_T) d\Gamma d\sigma. \end{aligned}$$

Mais

$$\int_0^t (\Psi'(\sigma), u''_\varepsilon(\sigma)) d\sigma = (\Psi'(t), u'_\varepsilon(t)) - (\Psi'(0), u_1) - \int_0^t (\Psi'', u'_\varepsilon) d\sigma$$

et les hypothèses sur  $f, F_N, \Phi$  impliquent que

$$(5.146) \quad \Psi'' \in L^2(0, T; V'_0)$$

donc

$$(5.147) \quad \left| \int_0^t (\Psi'(\sigma), u''_\varepsilon(\sigma)) d\sigma \right| \leq c \|\Psi'(t)\|_* \|u'_\varepsilon(t)\| + c + \int_0^t \|\Psi''(\sigma)\|_* \|u'_\varepsilon(\sigma)\| d\sigma.$$

Ensuite

$$\int_0^t (u''_\varepsilon(\sigma), \Phi''(\sigma)) d\sigma = (u''_\varepsilon(t), \Phi''(t)) - (u''_\varepsilon(0), \Phi''(0)) - \int_0^t (u''_\varepsilon, \Phi''') d\sigma$$

d'où l'on déduit, à partir de (5.145) :

$$(5.148) \quad \begin{aligned} |u''_\varepsilon(t)|^2 + \|u'_\varepsilon(t)\|^2 &\leq c(\|u_1\|^2 + |u''_\varepsilon(0)|^2) + c \int_0^t (\|u'_\varepsilon(\sigma)\|^2 + \\ &+ |u''_\varepsilon(\sigma)|^2) d\sigma + 2 \left| \int_0^t \int_{\Gamma_F} \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \psi_\varepsilon(u''_{\varepsilon T} + \Phi''_T) d\Gamma d\sigma \right|. \end{aligned}$$

Il faut maintenant estimer  $u''_\varepsilon(0)$ .

On déduit de (5.135) que

$$(u'_\varepsilon(0), v) = (\Psi(0), v) - a(u_0, v) - (j'(u_1 + \Phi'(0)), v).$$

Mais comme d'après (5.130)  $u_{1T} + \Phi'_T(0) = 0$ , on en déduit

$$(u'_\varepsilon(0), v) = (\Psi(0), v) - a(u_0, v) = (f(0), v) + \int_{\Gamma_\varepsilon} F_N(0) v_N d\Gamma - \\ - (\Phi'(0), v) - a(\Phi_0, v) - a(u_0, v).$$

Mais

$$a(u_0, v) = (Au_0, v) + \int_{\Gamma_\varepsilon} \sigma_{0N} v_N d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} \sigma_{0T} v_T d\Gamma.$$

Or  $\sigma_{0N} = F_N(0)$  et donc, utilisant (5.131) :

$$(u'_\varepsilon(0), v) = (f(0) - \Phi''(0) - Au_0 - A\Phi(0), v) + \\ + \int_{\Gamma_\varepsilon} \sigma_{0T} v_T d\Gamma - \int_{\Gamma_\varepsilon} \sigma_{0T} v_T d\Gamma$$

d'où

$$(5.149) \quad u''_\varepsilon(0) = f(0) - \Phi''(0) - A(u_0 + \Phi(0)).$$

Donc, en particulier, vu les hypothèses faites

$$(5.150) \quad |u''_\varepsilon(0)| \leq c.$$

On reprend maintenant le dernier terme de (5.148), qui vaut

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) \psi_\varepsilon(u''_{\varepsilon T}(t) + \Phi''_T(t)) d\Gamma - \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial g}{\partial t}(x, 0) \psi_\varepsilon(u''_{\varepsilon T}(0) + \\ \Phi''_T(0)) d\Gamma - \int_0^t \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \psi_\varepsilon(u''_{\varepsilon T} + \Phi''_T) d\Gamma d\sigma.$$

Mais pour pouvoir utiliser ces estimations dans (5.148) il faut pouvoir majorer par  $|u'_\varepsilon(t)|$  — or il apparaît  $\|u'_\varepsilon(t)\|$  d'où impossibilité de conclure *sauf si l'on suppose  $\partial g/\partial t = 0$* , ce qui est l'hypothèse (5.128).

Alors (5.148) et (5.150) donnent :

$$(5.151) \quad |u''_\varepsilon(t)|^2 + \|u'_\varepsilon(t)\|^2 \leq c(1 + \int_0^t (\|u'_\varepsilon(\sigma)\|^2 + \|u'_\varepsilon(\sigma)\|^2) d\sigma),$$

d'où, avec le lemme de Gronwall

$$(5.152) \quad |u''_\varepsilon(t)| + \|u'_\varepsilon(t)\| \leq c.$$

*Passage à la limite en  $\varepsilon$*

D'après (5.141) et (5.152) on peut extraire de  $u_\varepsilon$  une suite, encore notée  $u_\varepsilon$ , telle que

$$(5.153) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_\varepsilon \rightarrow u, \quad u'_\varepsilon \rightarrow u' \text{ (resp. } u''_\varepsilon \rightarrow u'') \text{ dans } L^\infty(0, T; V_0) \\ \text{(resp. } L^\infty(0, T; H)) \text{ faible étoile.} \end{array} \right.$$

On déduit de (5.135) que

$$(5.154) \quad \begin{aligned} (u'_\varepsilon, v - u'_\varepsilon) + a(u_\varepsilon, v - u'_\varepsilon) + j_\varepsilon(v + \Phi') - j_\varepsilon(u'_\varepsilon + \Phi') - (\Psi, v - u'_\varepsilon) = \\ = j_\varepsilon(v + \Phi') - j_\varepsilon(u'_\varepsilon + \Phi') - (j'_\varepsilon(u'_\varepsilon + \Phi'), v - u'_\varepsilon) \geq 0. \end{aligned}$$

Prenant dans (5.154)

$$v = v(t), \quad v \in L^2(0, T; V_0),$$

on en déduit que

$$(5.155) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^T [(u'_\varepsilon, v) + a(u_\varepsilon, v) + j_\varepsilon(v + \Phi') - (\Psi, v - u'_\varepsilon)] dt \geq \\ & \int_0^T [(u'_\varepsilon, u'_\varepsilon) + a(u_\varepsilon, u'_\varepsilon) + j_\varepsilon(u'_\varepsilon + \Phi')] dt = \\ & = \frac{1}{2} [ \|u'_\varepsilon(T)\|^2 + a(u_\varepsilon(T), u_\varepsilon(T)) ] - \frac{1}{2} \|u_1\|^2 + a(u_0, u_0) + \\ & \quad + \int_0^T j_\varepsilon(u'_\varepsilon + \Phi') dt. \end{aligned} \right.$$

Mais

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} [ \frac{1}{2} \|u'_\varepsilon(T)\|^2 + a(u_\varepsilon(T), u_\varepsilon(T)) + \int_0^T j_\varepsilon(u'_\varepsilon + \Phi') dt ] \geq \\ \geq \frac{1}{2} \|u'(T)\|^2 + a(u(T), u(T)) + \int_0^T j(u' + \Phi') dt = \\ = \int_0^T [(u'', u') + a(u, u') + j(u' + \Phi')] dt \end{aligned}$$

et donc (5.155) donne

$$(5.156) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^T [(u'', v - u') + a(u, v - u') + j(v + \Phi') - j(u' + \Phi') - \\ & \quad - (\Psi, v - u')] dt \geq 0 \quad \forall v \in L^2(0, T; V_0). \end{aligned} \right.$$

On passe de (5.156) à l'inégalité *ponctuelle* (5.123) <sup>(41)</sup> par le même procédé qu'au Chapitre 1, n° 5.6.3. ■

## 6. VISCO-ÉLASTICITÉ LINÉAIRE. MATÉRIAU A MÉMOIRE COURTE

### 6.1. Loi de comportement et généralités

Les matériaux *visco-élastiques* sont des matériaux « doués de mémoire » en ce sens que l'état de contraintes à l'instant  $t$  dépend de toutes les déformations subies par le matériau aux instants antérieurs.

Ils sont dits « *linéaires* » si de plus la loi de comportement établit une relation linéaire entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations.

Ce sont des matériaux de ce type que nous envisageons aux nos 6 et 7, dans des situations avec ou sans frottement.

<sup>(41)</sup> Au sens précis suivant : sauf peut-être pour  $t$  dans un ensemble de mesure nulle sur  $[0, T]$ , on a (5.123)  $\forall v \in V_0$ .

Une classe particulière importante de « loi de comportement visco-élastique » est relative aux matériaux pour lesquels on a une relation linéaire entre les dérivées par rapport au temps (i.e. les taux de variations par rapport à  $t$ ) des tenseurs des déformations et des contraintes. Ce sont les matériaux de « type taux » (cf. A.M. Freudenthal et H. Geiringer [1]), pour lesquels on a donc

$$(6.1) \quad \left| \begin{aligned} \sigma_{ij}(t) + A_{ijkh}^{(1)} \partial \sigma_{kh}(t) / \partial t + \dots + A_{ijkh}^{(n_1)} \partial^{n_1} \sigma_{kh}(t) / \partial t^{n_1} = \\ = a_{ijkh}^{(0)} \varepsilon_{kh}(t) + a_{ijkh}^{(1)} \partial \varepsilon_{kh}(t) / \partial t + \dots + a_{ijkh}^{(n_2)} \partial^{n_2} \varepsilon_{kh}(t) / \partial t^{n_2} \end{aligned} \right. \quad (4^2).$$

Dans (6.1) les dérivations en  $t$  sont entendues au sens des distributions sur  $R_t$ , les tenseurs  $\sigma$  et  $\varepsilon$  étant *nuls pour*  $t < 0$ . (Par rapport aux numéros antérieurs, on écrit  $\varepsilon_{kh}$  au lieu de  $\varepsilon_{kh}(u)$ .) Dans le cas *unidimensionnel* on peut faire aisément un calcul explicite (par exemple en utilisant les transformations de Laplace). On obtient, *dans le cas où*  $n_2 \geq n_1$  :

$$(6.2) \quad \left| \begin{aligned} \sigma(t) = a^{(0)} \varepsilon(t) + a^{(1)} \partial \varepsilon(t) / \partial t + \dots + a^{(N)} \partial^N \varepsilon(t) / \partial t^N + \\ + \int_0^t b(t-s) \varepsilon(s) ds \end{aligned} \right.$$

où

$$N = n_2 - n_1.$$

les  $a^{(0)}, \dots, a^{(N)}$  sont des constantes,  $b$  est une fonction régulière pour  $t > 0$ , continue pour  $t \geq 0$ .

*Dans le cas où*  $n_2 < n_1$ , on obtient

$$(6.3) \quad \sigma(t) = \int_0^t b(t-s) \varepsilon(s) ds,$$

où  $b$  a les mêmes propriétés que ci-dessus.

La loi (6.3) n'est pas, en général, retenue car elle traduit des comportements peu conformes à l'expérience. Nous allons au n° 6 étudier le cas  $n_1 = 0$ ,  $n_2 = 1$  et au n° 7 le cas  $n_1 = n_2 = 1$ .

*Lorsque*  $n_1 = 0$ ,  $n_2 = 1$ , la loi de comportement est

$$(6.4) \quad \sigma_{ij}(t) = a_{ijkh}^{(0)} \varepsilon_{kh}(t) + a_{ijkh}^{(1)} \partial / \partial t \varepsilon_{kh}(t);$$

on dit alors qu'il s'agit d'un *matériau à mémoire courte*, puisque l'état de contrainte à l'instant  $t$  ne dépend alors que de la déformation à l'instant  $t$  et aux instants *immédiatement précédents*. Les coefficients  $a_{ijkh}^{(0)}$  (resp.  $a_{ijkh}^{(1)}$ ) jouent le rôle de coefficients d'élasticité (resp. de viscosité (<sup>43</sup>)), et il est donc naturel et conforme à l'expérience de supposer que

$$(6.5) \quad \left| \begin{aligned} a_{ijkh}^{(0)} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kh} &\geq \alpha \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}, \\ a_{ijkh}^{(1)} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kh} &\geq \alpha \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}. \end{aligned} \right.$$

(<sup>42</sup>) Cf. aussi W. A. Day [1].

(<sup>43</sup>) Car ils portent sur le tenseur de vitesses de déformation.

(Les coefficients  $a_{ijkh}$  sont les coefficients des  $\varepsilon_{ij}$  construits sur le champ des vecteurs vitesse, donc des coefficients de viscosité. Le scalaire  $a_{ijkh}^1 \varepsilon_{ij}(u') \varepsilon_{kh}(u')$  est alors un terme de dissipation d'énergie nécessairement positif, d'où la deuxième condition (6.5)).

Lorsque  $n_1 = n_2 = 1$ , la loi de comportement est

$$(6.6) \quad \sigma_{ij}(t) = a_{ijkh}^{(0)} v_{kh}(t) + \int_0^t b_{ijkh}(t-s) \varepsilon_{kh}(s) ds.$$

Un matériau de loi de comportement (6.6) (on précisera au n° 7 les hypothèses sur les fonctions  $t \rightarrow b_{ijkh}(t)$ ) est dit à *mémoire longue* puisque l'état de contraintes à l'instant  $t$  dépend de la déformation à l'instant  $t$  et aussi des déformations aux instants antérieurs à  $t$ . ■

## 6.2. Cas dynamique. Formulation du problème

Les équations sont <sup>(44)</sup> :

$$(6.7) \quad \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ijkh}^{(0)} \varepsilon_{kh}(u) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ijkh}^{(1)} \varepsilon_{kh}(u) = f_i \text{ dans } \Omega, \quad t \in ]0, T[.$$

Les conditions aux limites

On se place dans le cas *avec frottement* (de coefficient  $\mathcal{F}$  constant) sur une partie  $\Gamma_{\mathcal{F}}$  de  $\Gamma = \partial\Omega$ , et déplacement imposé sur  $\Gamma_U = \Gamma - \Gamma_{\mathcal{F}}$ .

Les conditions aux limites sont donc analogues à celles du n° 5.1.2 :

$$(6.8) \quad u_i = U_i \quad \text{sur } \Gamma_U \times ]0, T[ ,$$

$$(6.9) \quad \sigma_N = F_N \quad \text{sur } \Gamma_{\mathcal{F}} \times ]0, T[ ,$$

$$(6.10) \quad \begin{cases} |\sigma_T| < g = \mathcal{F} |F_N| \Rightarrow \partial u_T / \partial t = 0 \\ |\sigma_T| = g \Rightarrow \text{il existe } \lambda > 0 \text{ tel que } \partial u_T / \partial t = -\lambda \sigma_T. \end{cases}$$

Les conditions initiales sont, naturellement,

$$(6.11) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \partial u(x, 0) / \partial t = u_1(x), \quad x \in \Omega.$$

Pour la mise sous forme variationnelle, introduisons les notations suivantes :

$$(6.12) \quad \begin{cases} a^0(u, v) = \int_{\Omega} a_{ijkh}^{(0)} \varepsilon_{kh}(u) \varepsilon_{ij}(v) dx, \\ a^1(u, v) = \int_{\Omega} a_{ijkh}^{(1)} \varepsilon_{kh}(u) \varepsilon_{ij}(v) dx, \end{cases}$$

$$(6.13) \quad J(v) = \int_{\Gamma} g |v_T| d\Gamma,$$

<sup>(44)</sup> On a utilisé l'accélération *linéarisée* puisque c'est le tenseur des déformations *linéarisé* qui intervient dans les lois de comportement.

et (comme au n° 5.5.1) :

$$(6.14) \quad \mathcal{U}_{\text{ad}}(t) = \{ v \mid v \in (H^1(\Omega))^3, \quad v = U'(t) \text{ sur } \Gamma_U \}.$$

Alors le problème précédent se formule comme au n° 5.5.1, avec maintenant  $a$  remplacé par  $a^0$  et un terme supplémentaire  $a^1$  (correspondant à la viscosité), soit :

$$(6.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u''(t), v - u'(t)) + a^1(u'(t), v - u'(t)) + a^0(u(t), v - u'(t)) + \\ \quad + j(v) - j(u'(t)) \geq (f(t), v - u'(t)) + \\ \quad + \int_{\Gamma_F} F_N(t) (v_N - u'_N(t)) \, d\Gamma \quad \forall v \in \mathcal{U}_{\text{ad}}(t) \end{array} \right.$$

avec les conditions aux limites (6.11). ■

#### Remarque 6.1

Si  $\mathcal{F} = 0$  (cas sans frottement), (6.15) se réduit si  $U = 0$  à l'équation linéaire ( $\Gamma_F = \Gamma - \Gamma_U$ )

$$(6.16) \quad \begin{array}{l} (u''(t), v) + a^1(u'(t), v) + a^0(u(t), v) = (f(t), v) + \int_{\Gamma_F} F_N v_N \, d\Gamma, \\ v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_U \end{array}$$

(sinon remplacer dans (6.16)  $v$  par  $v - u$ ). ■

#### Remarque 6.2 (Analogie aux Remarques 4.4 et 5.17)

On va traiter le Problème (6.15) de la même manière, que  $\Gamma_U$  soit vide ou de mesure positive. Néanmoins, si  $\Gamma_U = \emptyset$ , il peut y avoir un mouvement *global* du corps visco-élastique qui se décompose en un mouvement de solide rigide et un mouvement de déformation. On se ramènera alors (cf. Remarque 4.4) au cas où,  $\forall t$ ,

$$(6.17) \quad |(f(t), \rho) + \int_{\Gamma} F_N(t) \rho_N \, d\Gamma| \leq \int_{\Gamma} g | \rho_T | \, d\Gamma \quad \forall \rho \in \mathcal{R}. \quad \blacksquare$$

### 6.3. Théorème d'existence et unicité dans le cas dynamique

Comme au n° 4.1 on introduit <sup>(45)</sup>  $\Phi(t)$  satisfaisant à

$$(6.18) \quad \Phi(t) \in (H^1(\Omega))^3, \quad \Phi(t) = U(t) \quad \text{sur } \Gamma_U.$$

On introduit

$$(6.19) \quad V = (H^1(\Omega))^3,$$

$$(6.20) \quad V_0 = \{ v \mid v \in V, \quad v = 0 \text{ sur } \Gamma_U \} \quad (46).$$

<sup>(45)</sup> Remplacer  $\phi$  par 0 dans la suite, lorsque  $\Gamma_U = \emptyset$ .

<sup>(46)</sup>  $V_0 = V$  si  $\Gamma_U = \emptyset$ .

Remplaçant  $u$  par  $u - \Phi$  (et gardant la notation  $u$ ) le problème revient à trouver  $u$  telle que

$$(6.21) \quad u(t) \in V_0,$$

$$(6.22) \quad \left| \begin{aligned} & (u''(t), v - u'(t)) + a^1(u'(t), v - u'(t)) + a^0(u(t), v - u'(t)) + \\ & \quad + j(v + \Phi'(t)) - j(u'(t) + \Phi'(t)) \geq (L(t), v - u'(t)), \quad \forall v \in V_0, \end{aligned} \right.$$

où

$$(6.23) \quad \left| \begin{aligned} (L(t), v) = & (f(t), v) + \int_{\Gamma_{\mathcal{F}}} F_N(t) v_N \, d\Gamma - (\Phi''(t), v) - \\ & - a^1(\Phi'(t), v) - a^0(\Phi(t), v), \end{aligned} \right.$$

avec les données initiales

$$(6.24) \quad \left| \begin{aligned} u(0) = u_0 & \quad (\text{en fait } u_0 - \Phi(0)), \\ u'(0) = u_1 & \quad (\text{en fait } u_1 - \Phi'(0)). \end{aligned} \right.$$

On pose  $H = (L^2(\Omega))^3$  et  $V_0 \subset H \subset V_0'$ . On a alors le

**Théorème 6.1.** *On fait les hypothèses suivantes :*

$$(6.25) \quad f, f', f'' \in L^2(0, T; H), \quad F_N, F'_N, F''_N \in L^2(\Gamma_{\mathcal{F}} \times ]0, T[),$$

$$(6.26) \quad \left| \begin{aligned} \Phi, \Phi', \Phi'' \in L^2(0, T; V), \quad \Phi''', \Phi^{(4)} \in L^2(0, T; H), \\ \Phi(0) \in (H^2(\Omega))^3, \end{aligned} \right.$$

$$(6.27) \quad g \text{ ne dépend pas de } t \quad (47),$$

$$(6.28) \quad u_0 \in (H^2(\Omega))^3,$$

$$(6.29) \quad u_1 \in V_0, \quad u_{1T} + \Phi'_T(0) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\mathcal{F}},$$

$$(6.30) \quad (L(0), v) - a^0(u_0, v) - a^1(u_1, v) = (u_2, v), \quad u_2 \in H.$$

Dans ces conditions, il existe une fonction  $u$  et une seule telle que

$$(6.31) \quad u, u' \in L^\infty(0, T; V_0),$$

$$(6.32) \quad u'' \in L^2(0, T; V_0) \cap L^\infty(0, T; H),$$

et vérifiant (6.22), (6.24).

*Remarque 6.3*

La propriété (6.32) est plus forte que (5.133); c'est dû au terme de viscosité

$$a^1(u', v - u'). \quad \blacksquare$$

(47) Si  $\mathcal{F}$  ne dépend pas de  $t$ , cela revient à dire que  $F_N$  ne dépend pas de  $t$  et la 2<sup>e</sup> partie de l'hypothèse (6.25) est sans objet.

*Démonstration*

L'unicité se vérifie comme au n° 5.5.3.

Pour l'existence on suit la méthode du n° 5.5.4. Donnons seulement les grandes lignes de la démonstration. On introduit  $j_\varepsilon$  comme en (5.134).

L'équation approchée régularisée est alors :

$$(6.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u_\varepsilon'', v) + a^1(u_\varepsilon', v) + a^0(u_\varepsilon, v) + (j_\varepsilon'(u_\varepsilon' + \Phi'), v) = (L(t), v) \\ \forall v \in V_0, \quad u_\varepsilon(0) = u_0, \quad u_\varepsilon'(0) = u_1. \end{array} \right.$$

On obtient alors les premières estimations a priori en prenant  $v = u_\varepsilon' + \Phi'$ .

On note que,  $\forall \lambda > 0$ , il existe  $\alpha_0, \alpha_1 > 0$  avec

$$(6.34) \quad \left\{ \begin{array}{l} a^0(v, v) + \lambda |v|^2 \geq \alpha_0 \|v\|^2, \quad \alpha_0 > 0, \quad \forall v \in V_0 \\ a^1(v, v) + \lambda |v|^2 \geq \alpha_1 \|v\|^2, \quad \alpha_1 > 0, \end{array} \right.$$

et

$$(6.35) \quad \text{on peut prendre } \lambda = 0 \text{ dans (6.34) si } \Gamma_U \text{ est de mesure positive.}$$

On obtient alors une estimation analogue à (5.138), avec au premier membre :

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon'(t)|^2 + \alpha_1 \int_0^t \|u_\varepsilon(s)\|^2 ds + \alpha_0 \|u_\varepsilon(t)\|^2 - \lambda |u_\varepsilon(t)|^2 + \\ + \int_0^t |u_\varepsilon'(s)|^2 ds \end{aligned}$$

d'où l'on déduit (comparer à (5.141)) :

$$(6.36) \quad |u_\varepsilon'(t)| + \|u_\varepsilon(t)\| \leq c,$$

$$(6.37) \quad \int_0^T \|u_\varepsilon'(t)\|^2 dt \leq c.$$

Pour les deuxièmes estimations a priori on opère encore comme au n° 5.5.4.

Il faut une estimation sur  $u_\varepsilon''(0)$ ; faisant  $t = 0$  dans (6.33), il vient, en utilisant (6.29) :

$$\begin{aligned} (u_\varepsilon''(0), v) = (L(0), v) - a^0(u_0, v) - a^1(u_1, v) = (\text{d'après (6.30)}) = \\ = (u_2, v) \end{aligned}$$

donc

$$(6.38) \quad u_\varepsilon''(0) = u_2.$$

On dérive alors (6.33) en  $t$  puis l'on prend  $v = u_\varepsilon''(t) + \Phi''(t)$  et on obtient ainsi (comparer à (5.152))

$$(6.39) \quad |u_\varepsilon''(t)| + \|u_\varepsilon''(t)\| \leq c,$$

$$(6.40) \quad \int_0^T \|u_\varepsilon''(t)\|^2 dt \leq c.$$

On passe alors à la limite en  $\varepsilon$  comme au n° 5.5.4.



*Remarque 6.4*

On peut également introduire *d'autres conditions aux limites*, comme par exemple au n° 5.4.1.

*Remarque 6.5*

On peut affaiblir considérablement les hypothèses dans le Théorème 6.1, en obtenant alors une solution « plus faible ». De façon précise on a le :

**Théorème 6.1bis.** *On fait les hypothèses suivantes :*

$$(6.25bis) \quad f \in L^2(0, T; H), \quad F_N \in L^2(\Gamma_{\neq} \times ]0, T[),$$

$$(6.26bis) \quad \Phi, \Phi' \in L^2(0, T; V), \quad \Phi'' \in L^2(0, T; H),$$

$$(6.28bis) \quad u_0 \in V_0,$$

$$(6.29bis) \quad u_1 \in H.$$

*Dans ces conditions il existe une fonction  $u$  et une seule telle que*

$$(6.31bis) \quad u \in L^\infty(0, T; V_0), \quad u' \in L^2(0, T; V_0) \cap L^\infty(0, T; H)$$

$$(6.32bis) \quad u'' \in L^2(0, T; V_0'),$$

*et vérifiant (6.22), (6.24).*

En effet on part encore de  $u_\varepsilon$  solution de (6.33). On a les estimations (6.36), (6.37). On déduit alors de (6.33) que

$$(u_\varepsilon'', v) = (L(t), v) - a^1(u_\varepsilon', v) - a^0(u_\varepsilon, v) - (j'_\varepsilon(u_\varepsilon' + \Phi'), v)$$

d'où, en particulier :

$$u_\varepsilon'' \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; V_0').$$

On en déduit le Théorème par le même type de technique que précédemment. ■

#### 6.4. Problèmes quasi statiques. Formulation variationnelle

Comme la loi de comportement (6.4) *dépend du temps* par le terme de viscosité, il n'est pas possible de considérer des *problèmes statiques* comme on a fait dans le cas de l'élasticité (sans viscosité).

Néanmoins lorsque les forces ou les déplacements donnés varient peu pour  $t \geq t_0 > 0$  et que l'on s'intéresse à la solution pour des  $t \geq t_0$  il est habituel<sup>(48)</sup> de négliger dans les équations du mouvement les termes d'accélération linéarisés  $\partial^2 u_i / \partial t^2$  : c'est le cas *quasi-statique*. ■

<sup>(48)</sup> Nous verrons dans quelle mesure cela est justifié au n° 6.7 ci-après, au moins dans le cas *sans frottement*.

Les équations d'équilibre à *chaque instant* s'écrivent alors, en tenant compte de la loi de comportement (6.4) :

$$(6.41) \quad -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ijkh}^{(1)} \varepsilon_{kh}(u) - \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ijkh}^{(0)} \varepsilon_{kh}(u) = f_i \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[,$$

les conditions aux limites (6.8), (6.9), (6.10) étant inchangées et *la condition initiale* étant

$$(6.42) \quad u(0) = u_0.$$

On est aussi conduit au problème de trouver  $u(t)$  avec

$$(6.43) \quad \left\{ \begin{array}{l} u'(t) \in \mathcal{U}_{ad}(t), \\ a^1(u'(t), v - u'(t)) + a^0(u(t), v - u'(t)) + j(v) - j(u'(t)) \geq \\ \geq (f(t), v - u'(t)) + \int_{\Gamma_{\mathcal{F}}} F_N(t) (v - u'(t)) d\Gamma \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}(t), \end{array} \right.$$

et la condition initiale (6.42).

Il faut ici *distinguer avec soin* le cas :  $\text{Mes } \Gamma_U > 0$  et le cas :  $\Gamma_U = \emptyset$ .

Nous commençons ici par le cas «  $\text{Mes } \Gamma_U > 0$  ».

### 6.5. Théorème d'existence et d'unicité dans le cas où $\Gamma_U$ est de mesure $> 0$

On introduit encore  $\Phi(t)$  satisfaisant à (6.18) et l'on remplace  $u$  par  $u - \Phi$ . Le problème devient : trouver  $u$  telle que

$$(6.44) \quad u(t) \in V_0,$$

$$(6.45) \quad a^1(u'(t), v - u'(t)) + a^0(u(t), v - u'(t)) + j(v + \Phi'(t)) - \\ - j(u'(t) + \Phi'(t)) \geq (L_1(t), v - u'(t)) \quad \forall v \in V_0,$$

où

$$(6.46) \quad (L_1(t), v) = (f(t), v) + \int_{\Gamma_{\mathcal{F}}} F_N(t) v_N d\Gamma - a^1(\Phi'(t), v) - a^0(\Phi(t), v),$$

et avec la condition initiale

$$(6.47) \quad u(0) = u_0 (= u_0 - \Phi(0)).$$

On va démontrer le

**Théorème 6.2.** *On suppose que*

$$(6.48) \quad f \in L^2(0, T; H), \quad F_N \in L^2(\Gamma_{\mathcal{F}} \times ]0, T[),$$

$$(6.49) \quad \Phi, \Phi' \in L^2(0, T; V)$$

$$(6.50) \quad u_0 \in V_0.$$

Dans ces conditions, il existe une fonction  $u$  et une seule telle que

$$(6.51) \quad u \in L^\infty(0, T; V_0),$$

$$(6.52) \quad u' \in L^2(0, T; V_0),$$

et l'on a (6.45) <sup>(49)</sup>, (6.47).

*Remarque 6.6*

Les hypothèses sont analogues à celles du Théorème 6.1bis. ■

*Démonstration de l'unicité*

Soient  $u$  et  $u_*$  deux solutions éventuelles. Prenant dans (6.45)  $v = u'_*(t)$  (resp.  $v = u'(t)$ ) dans l'inéquation relative à  $u_*$  (resp.  $u$ ) et ajoutant, il vient, si  $w = u - u'$  :

$$-a^1(w'(t), w'(t)) - a^0(w(t), w'(t)) \geq 0$$

ou encore <sup>(50)</sup>

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} a^0(w(t)) + a^1(w'(t)) \leq 0$$

d'où

$$a^0(w(t)) = 0 \quad \text{donc } w(t) = 0 \quad \text{car } a^0 \text{ et } a^1 \text{ vérifient}$$

$$(6.53) \quad a^i(v) \geq \alpha_i \|v\|^2, \quad \alpha_i > 0, \quad \forall v \in V_0 \quad (51). \quad \blacksquare$$

*Démonstration de l'existence*

On part encore d'une équation régularisée.

On cherche donc d'abord,  $j_\varepsilon$  étant défini comme en (5.134),  $u_\varepsilon$  solution de

$$(6.54) \quad \begin{cases} a^1(u'_\varepsilon(t), v) + a^0(u_\varepsilon(t), v) + (j'_\varepsilon(u'_\varepsilon(t)) + \Phi'(t), v) = (L_1(t), v) & \forall v \in V_0, \\ u_\varepsilon(0) = u_0. \end{cases}$$

On résout ce problème par une nouvelle approximation (par exemple), en introduisant  $\eta > 0$  et  $u_{\varepsilon\eta}$  solution de

$$(6.55) \quad \begin{cases} \eta(u''_{\varepsilon\eta}(t), v) + a^1(u'_{\varepsilon\eta}(t), v) + a^0(u_{\varepsilon\eta}(t), v) + (j'_\varepsilon(u'_{\varepsilon\eta}(t)) + \Phi'(t), v) = \\ \hspace{15em} = (L_1(t), v) & \forall v \in V_0, \\ u_{\varepsilon\eta}(0) = u_0, \quad u'_{\varepsilon\eta}(0) = 0 \quad (\text{par exemple}). \end{cases}$$

Faisant tendre  $\eta$  vers 0, on obtient  $u_\varepsilon$  solution de (6.54).

<sup>(49)</sup> De façon précise : sauf peut-être pour  $t$  dans un ensemble de mesure nulle, on a (6.45) pour tout  $v$  dans  $V_0$ .

<sup>(50)</sup> On pose :  $a^i(v, v) = a^i(v)$ .

<sup>(51)</sup> Car  $\text{Mes } \Gamma_U > 0$ .

Prenant dans (6.54)  $v = u'_\varepsilon(t) + \Phi'(t)$ , il vient, comme  $(j'_\varepsilon(\varphi), \varphi) \geq 0$

$$a^1(u'_\varepsilon(t)) + a^0(u_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t)) = -a'_\varepsilon(u'_\varepsilon(t), \Phi'(t)) - \\ - a^0(u_\varepsilon(t), \Phi'(t)) + (L_1(t), u'_\varepsilon(t) + \Phi'(t))$$

d'où

$$\int_0^t a_1(u'_\varepsilon(s)) \, ds + \frac{1}{2} a^0(u_\varepsilon(t)) \leq \frac{1}{2} a^0(u_0) - \int_0^t a^1(u'_\varepsilon, \Phi') \, ds - \\ - \int_0^t a^0(u_\varepsilon, \Phi') \, ds + \int_0^t (L_1, u'_\varepsilon + \Phi') \, ds$$

d'où l'on déduit que

$$\int_0^t \|u'_\varepsilon(s)\|^2 \, ds + \|u_\varepsilon(t)\|^2 \leq c \int_0^t (\|u'_\varepsilon\| + \|u_\varepsilon\|) M(s) \, ds, \\ M \in L^2(0, T),$$

d'où

$$\int_0^t \|u'_\varepsilon(s)\|^2 \, ds + \|u_\varepsilon(t)\|^2 \leq \frac{1}{2} \int_0^t \|u'_\varepsilon\|^2 \, ds + \\ + \frac{1}{2} \int_0^t \|u_\varepsilon(s)\|^2 \, ds + c \int_0^t M(s)^2 \, ds$$

et donc

$$\int_0^t \|u'_\varepsilon(s)\|^2 \, ds + \|u_\varepsilon(t)\|^2 \leq \int_0^t \|u_\varepsilon(s)\|^2 \, ds + c.$$

Donc

$$(6.56) \quad \|u_\varepsilon(t)\| \leq c, \quad \int_0^T \|u'_\varepsilon(t)\|^2 \, dt \leq c.$$

On peut alors extraire de  $u_\varepsilon$  une suite, encore notée  $u_\varepsilon$ , telle que

$$(6.57) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_\varepsilon \rightarrow u \quad \text{dans } L^\infty(0, T; V_0) \text{ faible étoile,} \\ u'_\varepsilon \rightarrow u' \quad \text{dans } L^2(0, T; V_0) \text{ faible.} \end{array} \right.$$

Mais comme (la fonction  $v \rightarrow j_\varepsilon(v)$  étant convexe)

$$(6.58) \quad j_\varepsilon(v + \Phi'(t)) - j_\varepsilon(u'_\varepsilon(t) + \Phi'(t)) - (j'_\varepsilon(u'_\varepsilon(t) + \Phi'(t)), v - u'_\varepsilon(t)) \geq 0$$

on déduit de (6.54) que

$$(6.59) \quad a^1(u'_\varepsilon(t), v - u'_\varepsilon(t)) + a^0(u_\varepsilon(t), v - u'_\varepsilon(t)) + j_\varepsilon(v + \Phi'(t)) - \\ - j_\varepsilon(u'_\varepsilon(t) + \Phi'(t)) \geq (L_1(t), v - u'_\varepsilon(t)).$$

Soit  $v \in L^2(0, T; V_0)$ . Prenant dans (6.59)  $v = v(t)$  et intégrant, on a :

$$(6.60) \quad \int_0^T [a^1(u'_\varepsilon, v - u'_\varepsilon) + a^0(u_\varepsilon, v - u'_\varepsilon) + j_\varepsilon(v + \Phi') - j_\varepsilon(u'_\varepsilon + \Phi') - \\ - (L_1, v - u'_\varepsilon)] \, dt \geq 0,$$

ou encore

$$(6.61) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^T [a^1(u'_\varepsilon, v) + a^0(u_\varepsilon, v) + j_\varepsilon(v + \Phi') - (L_1, v - u'_\varepsilon)] \, dt \geq \\ \geq \int_0^T a^1(u'_\varepsilon) \, dt + \frac{1}{2} a^0(u_\varepsilon(T)) + \int_0^T j_\varepsilon(u'_\varepsilon + \Phi') \, dt - \frac{1}{2} a^0(u_0). \end{array} \right.$$

On en déduit, comme

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} [\int_0^T a^1(u'_\varepsilon) dt + \frac{1}{2} a^0(u_\varepsilon(T)) + \int_0^T j_\varepsilon(u'_\varepsilon + \Phi') dt] &\geq \\ &\geq \int_0^T a^1(u') dt + \frac{1}{2} a^0(u(T)) + \int_0^T j(u' + \Phi') dt, \end{aligned}$$

que

$$(6.62) \quad \left| \int_0^T [a^1(u', v - u') + a^0(u, v - u') + j(v + \Phi') - j(u' + \Phi') - (L_1, v - u')] dt \geq 0 \quad \forall v \in L^2(0, T; V_0). \right.$$

On passe de là à l'inégalité ponctuelle (6.45) par le même procédé qu'au Chapitre 1, n° 5.6.3. ■

### 6.6. Etude du cas où $\Gamma_U = \emptyset$

Lorsque  $\Gamma_U = \emptyset$ , on prend dans ce qui précède  $\Phi(t) = 0$ . Le problème est alors de trouver  $u$  avec

$$(6.63) \quad u(t) \in V (= H^1(\Omega))^3,$$

$$(6.64) \quad \left| \begin{aligned} a^1(u'(t), v - u'(t)) + a^0(u(t), v - u'(t)) + j(v) - j(u'(t)) &\geq \\ &\geq (L_2(t), v - u'(t)) \end{aligned} \right. \quad \forall v \in V$$

où

$$(6.65) \quad (L_2(t), v) = (f(t), v) + \int_\Gamma F_N(t) v_N d\Gamma,$$

et avec la condition initiale (6.47).

Prenant dans (6.64)  $v = u'(t) + \rho$ ,  $\rho \in \mathcal{R}$ , et observant que

$$a^0(\varphi, \rho) = 0, \quad a^1(\varphi, \rho) = 0 \quad \forall \varphi \in V,$$

on a :

$$j(u'(t) + \rho) - j(u'(t)) \geq (L_2(t), \rho)$$

et comme

$$j(u'(t) + \rho) - j(u'(t)) \leq j(\rho)$$

on en déduit que

$$(L_2(t), \rho) \leq j(\rho),$$

ou encore (comme  $j(\rho) = j(-\rho)$ ) :

$$(6.66) \quad |(L_2(t), \rho)| \leq j(\rho) \quad \forall \rho \in \mathcal{R}, \quad \forall t \in [0, T].$$

La condition *nécessaire* (6.66) est, comme on va le voir, *suffisante* pour pouvoir résoudre, dans un certain sens, le problème précédent.

On va passer au quotient par  $\mathcal{R}$ . On introduit comme en (3.47), (3.48) :

$$(6.67) \quad V^* = V/\mathcal{R}, \quad H^* = H/\mathcal{R},$$

$$(6.68) \quad a^i(u^*, v^*) = a^i(u, v), \quad u \in u^*, \quad v \in v^*, \quad i = 0, 1.$$

D'après le Théorème 3.4, on a :

$$(6.69) \quad a^i(v^*) = a^i(v^*, v^*) \geq \alpha \|v^*\|_{V^*}^2, \quad \alpha > 0, \quad i = 0, 1.$$

On définit en outre :

$$(6.70) \quad \mathcal{H}(t; v^*) = \inf_{\rho \in \mathcal{R}} [j(v + \rho) - (L_2(t), v + \rho)].$$

On note que, si (6.66) a lieu, alors

$$(6.71) \quad \mathcal{H}(t; v^*) > -\infty.$$

En effet, prenant  $v = \text{fixé}$  quelconque dans  $v^*$ , on a :

$$j(v + \rho) \geq j(\rho) - j(v),$$

donc

$$\begin{aligned} j(v + \rho) - (L_2(t), v + \rho) &\geq j(\rho) - (L_2(t), \rho) + j(v) - (L_2(t), v) \\ &\geq (\text{d'après (6.66)}) \geq j(v) - (L_2(t), v) \quad \text{d'où (6.71)}. \end{aligned}$$

Cela posé, on va démontrer le

**Théorème 6.3.** *On suppose que l'on a :*

$$(6.72) \quad f \in L^2(0, T; H), \quad F_N \in L^2(\Gamma \times ]0, T[),$$

$$(6.73) \quad u_0 \in V$$

et que l'on a (6.66) p.p. en  $t$ ,  $L_2$  étant défini par (6.65). Il existe alors une fonction  $u^*$  et une seule telle que

$$(6.74) \quad u^* \in L^\infty(0, T; V^*),$$

$$(6.75) \quad u^{**} \in L^2(0, T; V^*),$$

$$(6.76) \quad u^*(0) = u_0^*,$$

et

$$(6.77) \quad \left| \begin{aligned} a^1(u^{**}(t), v^* - u^{**}(t)) + a^0(u^*(t), v^* - u^{**}(t)) + \mathcal{H}(t; v^*) - \\ - \mathcal{H}(t; u^{**}(t)) \geq 0 \quad \forall v^* \in V^*. \end{aligned} \right.$$

*Remarque 6.7*

Dans le cas sans frottement,  $j = 0$ . On doit faire l'hypothèse

$$(6.78) \quad (L_2(t), \rho) = 0 \quad \forall \rho \in R$$

et alors

$$(6.79) \quad \mathcal{H}(t; v^*) = - (L_2(t), v^*),$$

et (6.77) se réduit à l'équation :

$$(6.80) \quad a^1(u^{**}(t), v) + a^0(u^*(t), v) = (L_2(t), v^*) \quad \forall v^* \in V^*. \quad \blacksquare$$

*Démonstration du Théorème 6.3*

*L'unicité* se démontre *exactement* comme pour le Théorème 6.2, puisque grâce au passage au quotient par  $\mathcal{R}$  (et l'inégalité de Korn) on a (6.69).

*Pour l'existence* on commence par appliquer le Théorème 6.2 avec  $a^1(u, v)$  remplacé par  $a^1(u, v) + \varepsilon(u, v)$ ,  $\varepsilon > 0$ , et  $a^0(u, v)$  inchangé <sup>(52)</sup>. Donc il existe  $u_\varepsilon$  (unique) tel que  $u_\varepsilon \in L^\infty(0, T; V)$ ,  $u'_\varepsilon \in L^2(0, T; V)$  et

$$(6.81) \quad \left| \begin{aligned} a^1(u'_\varepsilon, v - u'_\varepsilon) + \varepsilon(u'_\varepsilon, v - u'_\varepsilon) + a^0(u_\varepsilon, v - u'_\varepsilon) + j(v) - j(u'_\varepsilon) &\geq \\ &\geq (L_2, v - u'_\varepsilon) \quad \forall v \in V, \end{aligned} \right.$$

et  $u_\varepsilon(0) = u_0$ .

Faisant  $v = 0$  dans (6.81) on en déduit

$$\begin{aligned} a^1(u'_\varepsilon(t)) + \varepsilon \|u'_\varepsilon(t)\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a^0(u_\varepsilon(t)) &\leq (L_2(t), u'_\varepsilon(t)) - j(u'_\varepsilon(t)) = \\ &= (L_2(t), u'_\varepsilon(t) + \rho) - (L_2(t), \rho) - j(u'_\varepsilon(t)) \\ &\leq (\text{d'après (6.66)}) \leq (L_2(t), u'_\varepsilon(t) + \rho) + j(\rho) - j(u'_\varepsilon(t)) \\ &\leq (L_2(t), u'_\varepsilon(t) + \rho) + j(u'_\varepsilon(t) + \rho) \\ &\leq c(1 + \|L_2(t)\|_* \|u'_\varepsilon(t) + \rho\|) \quad \forall \rho \\ &\leq c(1 + \|L_2(t)\|_*) \inf_{\rho} \|u'_\varepsilon(t) + \rho\| = \\ &= c(1 + \|L_2(t)\|_*) \|u''_\varepsilon(t)\|_V. \end{aligned}$$

d'où d'après (6.69)

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^t \|u''_\varepsilon(s)\|_V^2 ds + \frac{1}{2} \alpha \|u'_\varepsilon(t)\|_V^2 &\leq \frac{1}{2} a^0(u_0) + \\ c \int_0^t (1 + \|L_2(s)\|_*) \|u''_\varepsilon(s)\|_V ds &\leq \frac{1}{2} \alpha \int_0^t \|u''_\varepsilon(s)\|_V^2 ds + c \end{aligned}$$

et par conséquent

$$(6.82) \quad \|u'_\varepsilon(t)\|_V^2 + \int_0^t \|u''_\varepsilon(s)\|_V^2 ds \leq c.$$

On peut donc extraire de  $u'_\varepsilon$  une suite, encore notée  $u'_\varepsilon$ , telle que

$$(6.83) \quad \left| \begin{aligned} u'_\varepsilon &\rightarrow u' && \text{dans } L^\infty(0, T; V') \text{ faible étoile,} \\ u''_\varepsilon &\rightarrow u'' && \text{dans } L^2(0, T; V') \text{ faible.} \end{aligned} \right.$$

On a également

$$(6.84) \quad \varepsilon \int_0^T \|u'_\varepsilon(t)\|^2 dt \leq c.$$

<sup>(52)</sup> Le Théorème 6.2 est valable si  $a^1(v) \geq \alpha \|v\|^2$ ,  $\alpha > 0$  et si  $a^0(v) \geq 0$ ,  $a^0(v) + \lambda \|v\|^2 \geq \alpha \|v\|^2$  si  $\lambda > 0$ .

On écrit (6.81) sous la forme

$$\begin{aligned} \varepsilon(u'_\varepsilon, v - u'_\varepsilon) + a^1(u'_\varepsilon, v^* - u'_\varepsilon) + a^0(u'_\varepsilon, v^* - u'_\varepsilon) + j(v) - (L_2(t), v) \\ \geq [j(u'_\varepsilon(t)) - (L_2(t), u'_\varepsilon(t))] \\ \geq \inf [j(u'_\varepsilon(t) + \rho) - (L_2(t), u'_\varepsilon(t) + \rho)] = \mathcal{H}(t; u'_\varepsilon(t)) \end{aligned}$$

d'où si  $v \in L^2(0, T; V)$  :

$$(6.85) \quad \varepsilon \int_0^T (u'_\varepsilon, v - u'_\varepsilon) dt + \int_0^T [a^1(u'_\varepsilon, v^* - u'_\varepsilon) + a^0(u'_\varepsilon, v^* - u'_\varepsilon) + j(v) - (L_2, v)] dt \geq \int_0^T \mathcal{H}(t; u'_\varepsilon) dt.$$

Mais  $v^* \rightarrow \int_0^T \mathcal{H}(t; v^*) dt$  est semi-continue inférieurement sur  $L^2(0, T; V^*)$  pour la topologie faible donc

$$(6.86) \quad \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \mathcal{H}(t; u'_\varepsilon) dt \geq \int_0^T \mathcal{H}(t; u'') dt.$$

On écrit (6.85) sous la forme

$$\begin{aligned} \int_0^T [v(u'_\varepsilon, v) + a^1(u'_\varepsilon, v^*) + a^0(u'_\varepsilon, v^*) + j(v) - (L_2, v)] dt \geq \\ \geq \int_0^T \mathcal{H}(t; u'_\varepsilon) dt + \varepsilon \int_0^T |u'_\varepsilon|^2 dt + \int_0^T a^1(u'_\varepsilon) dt + \\ + \frac{1}{2} a^0(u'_\varepsilon(t)) - \frac{1}{2} a^0(u_0) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_0^T [a^1(u'', v^*) + a^0(u'', v^*) + j(v) - (L_2, v)] dt \geq \\ \geq \int_0^T \mathcal{H}(t; u'') dt + \int_0^T a^1(u'') dt + \frac{1}{2} a^0(u'(T)) - \frac{1}{2} a^0(u_0) \end{aligned}$$

et par conséquent

$$(6.87) \quad \int_0^T [j(v) - (L_2, v)] dt \leq \int_0^T [-a^1(u'', v^* - u'') - a^0(u'', v^* - u'') + \mathcal{H}(t; u'')] dt.$$

On en déduit, par le même procédé qu'au Chapitre I, n° 5.6.3, que, sauf peut-être pour  $t \in E$ ,  $E$  de mesure nulle sur  $[0, T]$ , on a :

$$(6.88) \quad j(v) - (L_2, v) \geq -a^1(u''(t), v^* - u''(t)) - a^0(u''(t), v^* - u''(t)) + \mathcal{H}(t; u''(t)) \quad \forall v \in V.$$

Si l'on change  $v$  en  $v + \rho$ , le deuxième membre est invariant, donc (6.88) équivaut à

$$(6.89) \quad \inf_{\rho} [j(v + \rho) - (L_2, v + \rho)] \geq -a^1(u''(t), v^* - u''(t)) - a^0(u''(t), v^* - u''(t)) + \mathcal{H}(t; u''(t)).$$

Le premier membre de (6.89) n'est autre que  $\mathcal{H}(t; v)$  d'où (6.77). ■



## 6.7. Justification du cas quasi statique dans les problèmes sans frottement

### 6.7.1. Position du problème

On considère le cas dynamique (étudié aux nos 6.2 et 6.3), avec les hypothèses suivantes :

$$(6.90) \quad U_i, f_i \text{ et } F_N \text{ ne dépendent pas de } t \geq 0 \quad (5^3),$$

Les données initiales sont supposées nulles :

$$(6.91) \quad u_0 = 0, \quad u_1 = 0,$$

donc pour  $t < 0$  le matériau est dans un état non déformé.

« *L'hypothèse quasi statique* » est dans les cas habituels (<sup>54</sup>) que, sous les conditions (6.90), (6.91) les solutions du problème dynamique et du problème quasi statique sont « voisines ».

Nous allons effectivement démontrer que tel est le cas, lorsqu'il n'y a pas de frottement.

*Le problème correspondant dans le cas « avec frottement » est un problème qui est ouvert et qui nous semble intéressant.* ■

Puisqu'il n'y a pas frottement, la solution  $u$  du cas dynamique vérifie :

$$(6.92) \quad \begin{cases} (u''(t), v) + a^1(u'(t), v) + a^0(u(t), v) = (L, v) & \forall v \in V_0, \\ u(t) \in V_0, \end{cases}$$

où

$$(6.93) \quad (L, v) = (f, v) - a^0(\Phi, v). \quad \blacksquare$$

On va un peu étendre cela. Rappelons-nous (cf. n° 5.1.2) que nous avons pris  $\Gamma_U = \Gamma - \Gamma_{\mathcal{F}}$  pour simplifier l'exposé. En fait (avec les notations du n° 2)

$$\Gamma - \Gamma_{\mathcal{F}} = \Gamma_U \cup \Gamma_F$$

et ici, comme  $\Gamma_{\mathcal{F}} = \emptyset$ , nous revenons à

$$(6.94) \quad \Gamma = \Gamma_U \cup \Gamma_F.$$

On se donne alors

$$(6.95) \quad u_i = U_i \quad \text{sur } \Gamma_U, \quad U_i \text{ indépendant de } t,$$

$$(6.96) \quad \sigma_{ij} n_j = F_i \quad \text{sur } \Gamma_F, \quad F_i \text{ indépendant de } t$$

(<sup>53</sup>) Hypothèse que l'on peut étendre. Cf. Remarque 6.8.

(<sup>54</sup>) I. e. sans frottement.

d'où finalement

$$(6.97) \quad \begin{cases} (u'(t), v) + a^1(u'(t), v) + a^0(u(t), v) = (L, v), & v \in V_0, \quad u(t) \in V_0 \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \end{cases}$$

où

$$(6.98) \quad (L, v) = (f, v) + \int_{\Gamma_F} F_i v_i d\Gamma - a^0(\Phi, v).$$

On désigne par  $\tilde{u}(t)$  la solution du problème quasi statique associé, soit

$$(6.99) \quad \begin{cases} a^1(\tilde{u}'(t), v) + a^0(\tilde{u}(t), v) = (L, v), & v \in V_0, \quad \tilde{u}(t) \in V_0 \\ \tilde{u}(0) = 0. \end{cases}$$

Notre objet est maintenant de montrer que  $u$  et  $\tilde{u}$  sont « voisines », dans un certain sens. Nous allons distinguer deux cas selon que  $\text{Mes } \Gamma_U > 0$  ou que  $\Gamma_U = \emptyset$ . ■

### 6.7.2. Le cas « Mes $\Gamma_U > 0$ »

On va comparer  $u$  et  $\tilde{u}$  à la solution  $\bar{u}$  du problème stationnaire suivant :

$$(6.100) \quad a^0(\bar{u}, v) = (L, v) \quad \forall v \in V_0, \quad \bar{u} \in V_0,$$

problème qui admet bien une solution unique lorsque « Mes  $\Gamma_U > 0$  ». On va démontrer les résultats suivants :

**Théorème 6.4.** *On suppose que Mes  $\Gamma_U > 0$ . On se place dans les hypothèses (6.95), (6.96). Alors, il existe  $\gamma > 0$  est une constante  $c$  tels que :*

$$(6.101) \quad \|u(t) - \bar{u}\| \leq c e^{-\gamma t},$$

$$(6.102) \quad |u'(t)| \leq c e^{-\gamma t}, \quad e^{-\gamma t} u' \in L^2(0, \infty; V).$$

**Théorème 6.5.** *Dans les hypothèses du Théorème 6.4, il existe  $\gamma > 0$  et une constante  $c$  tels que*

$$(6.103) \quad \|\tilde{u}(t) - \bar{u}\| \leq c e^{-\gamma t}$$

$$(6.104) \quad e^{\gamma t} \tilde{u}' \in L^2(0, \infty; V).$$

**Corollaire 6.1.** *(Justification du cas quasi statique.) Dans les hypothèses du Théorème 6.4, il existe  $\gamma > 0$  et  $c$  tels que*

$$(6.105) \quad \begin{cases} \|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leq c e^{-\gamma t}, \\ e^{\gamma t} (u' - \tilde{u}') \in L^2(0, \infty; V). \end{cases}$$

*Démonstration du Théorème 6.4*

La fonction  $w(t) = u(t) - \bar{u}$  vérifie

$$(6.106) \quad (w''(t), v) + a^1(w'(t), v) + a^0(w(t), v) = 0,$$

avec

$$(6.107) \quad w(0) = -\bar{u}, \quad w'(0) = 0.$$

Posons

$$(6.108) \quad w(t) = e^{-\lambda t} z(t), \quad \lambda > 0 \text{ à choisir.}$$

Alors (6.106) donne

$$(6.109) \quad (z''(t), v) + a^1(z'(t), v) - 2\lambda(z'(t), v) + a^0(z(t), v) + \\ + \lambda^2(z(t), v) - \lambda a^1(z(t), v) = 0.$$

On choisit  $\lambda$  assez petit pour que

$$(6.110) \quad a^0(v) - \lambda a^1(v) + \lambda \|v\|^2 \geq \beta \|v\|^2, \quad \beta > 0, \quad \forall v \in V_0,$$

$$(6.111) \quad a^1(v) - 2\lambda \|v\|^2 \geq 0, \quad \forall v \in V_0.$$

Prenant  $v = z'(t)$  dans (6.109), on a :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z'(t)\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [a^0(z(t)) + \lambda^2(z(t))^2 - \lambda a^1(z(t))] + \\ + a^1(z'(t)) - 2\lambda \|z'(t)\|^2 = 0$$

d'où

$$\|z'(t)\|^2 + a^0(z(t)) + \lambda^2 \|z(t)\|^2 - \lambda a^1(z(t)) + 2 \int_0^t (a^1(z') - \\ - 2\lambda \|z'\|^2) ds = \|z'(0)\|^2 + a^0(z(0)) + \lambda^2 \|z(0)\|^2 - \lambda a^1(z(0))$$

d'où grâce à (6.110), (6.111) :

$$(6.112) \quad \|z'(t)\|^2 + \beta \|z(t)\|^2 \leq Cte.$$

On en déduit (6.101) et la première inégalité dans (6.102). Mais on peut choisir  $\lambda$  de façon que l'on ait, au lieu de (6.111)

$$(6.113) \quad a^1(v) - 2\lambda \|v\|^2 \geq \beta \|v\|^2$$

( $\beta > 0$ ; le « meilleur »  $\beta$  n'est pas nécessairement le même que dans (6.110)).

On obtient alors

$$\|z'(t)\|^2 + \|z(t)\|^2 + \int_0^t \|z'(s)\|^2 ds \leq C$$

d'où par conséquent

$$(6.114) \quad \int_0^\infty \|z'(s)\|^2 ds \leq C.$$

Mais alors

$$e^{\lambda t} w' = z' - \lambda z$$

donne, pour  $\gamma < 1$  :

$$e^{\gamma t} w' = e^{(\gamma-\lambda)t} z' - \lambda e^{(\gamma-\lambda)t} z \in L^2(0, \infty; V)$$

d'où la deuxième partie de (6.102). ■

*Démonstration du Théorème 6.5*

La fonction  $\tilde{w}(t) = \tilde{u}(t) - \bar{u}$  vérifie :

$$(6.115) \quad a^1(\tilde{w}'(t), v) + a^0(\tilde{w}(t), v) = 0.$$

Le changement (6.108) conduit à

$$(6.116) \quad a^1(z'(t), v) + a^0(z(t), v) - \lambda a^1(z(t), v) = 0.$$

On choisit  $\lambda$  de façon que <sup>(55)</sup>

$$(6.117) \quad a^0(v) - \lambda a^1(v) \geq \beta \|v\|^2.$$

Prenant alors  $v = z'(t)$  dans (6.114) on obtient

$$\|z(t)\|^2 + \int_0^t \|z'(s)\|^2 ds \leq C$$

d'où le résultat comme précédemment. ■

*Remarque 6.8*

On peut montrer des résultats analogues si  $U_i$ ,  $f_i$  et  $F_N$  sont dépendants de  $t$  mais de telle sorte que l'on puisse choisir  $\Phi(t)$  de façon que, pour  $\lambda > 0$  assez petit, on ait,

$$(6.118) \quad \left\{ \begin{array}{l} e^{\lambda t} \|L(t) - L\|_* \leq C, \\ \int_0^\infty \left\| \frac{d}{dt} (e^{\lambda t} L(t)) \right\|_* dt < \infty. \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

### 6.7.3. Le cas $\Gamma_U = \emptyset$

Lorsque  $\Gamma_U = \emptyset$ , le Problème quasi statique (6.99) n'admet de solution que si

$$(6.119) \quad (L, \rho) = 0 \quad \forall \rho \in \mathcal{R}.$$

Dans ces conditions, on peut « passer au quotient par  $\mathcal{R}$  » dans (6.99); le problème quasi statique admet alors une solution  $\tilde{u}^*$  unique telle que

$$(6.120) \quad \tilde{u}^* \in L^\infty(0, T; V^*), \quad \tilde{u}^* \in L^2(0, T; V^*)$$

$$(6.121) \quad a^1(\tilde{u}^{*'}(t), v^*) + a^0(\tilde{u}^*(t), v^*) = (L, v^*) \quad \forall v^* \in V^*.$$

<sup>(55)</sup> Les choix *optimaux* de  $\lambda$  (et donc de  $\gamma$ ) ne sont pas nécessairement les mêmes dans les deux théorèmes.

Par ailleurs, si l'on fait alors  $v = \rho$  dans (6.97) on trouve

$$(u''(t), \rho) = 0$$

ce qui, comme  $u(0) = 0, u'(0) = 0$ , montre que

$$(6.122) \quad (u(t), \rho) = 0 \quad \forall \rho \in \mathcal{R}.$$

On identifie alors  $u$  à  $u^*$ , solution de

$$(6.123) \quad (u^{*''}(t), v^*) + a^1(u^{*'}(t), v^*) + a^0(u^*(t), v^*) = (L, v^*) \quad \forall v^* \in V^*.$$

Mais après ce passage au quotient on a les propriétés (6.69) et par conséquent on est dans une situation analogue à celle du n° 6.7.2 mais dans l'espace quotient  $V^*$ . On introduit  $\bar{u}^*$  solution dans  $V^*$  de

$$(6.124) \quad a^0(\bar{u}^*, v^*) = (L, v^*) \quad \forall v^* \in V^*.$$

Alors, transcrivant les Théorèmes 6.4 et 6.5 on a ( $H^* = H/\mathcal{R}$ ) :

**Théorème 6.6.** *On suppose  $\Gamma_U = \emptyset$ , (6.96) avec  $\Gamma_F = \Gamma$  et (6.119). Alors il existe  $\gamma > 0$  et  $c$  tels que*

$$(6.125) \quad \|u^*(t) - \bar{u}^*\|_{V^*} \leq c e^{-\gamma t},$$

$$(6.126) \quad |u^{*''}(t)| \leq c e^{-\gamma t}, \quad e^{\gamma t} u^{*''} \in L^2(0, \infty; V^*).$$

**Théorème 6.7.** *Dans les hypothèses de Théorème 6.6, il existe  $\gamma > 0$  et  $c$  tels que*

$$(6.127) \quad \|\tilde{u}^*(t) - \bar{u}^*\|_{V^*} \leq c e^{-\gamma t},$$

$$(6.128) \quad e^{\gamma t} \tilde{u}^{*''} \in L^2(0, \infty; V^*).$$

On a un Corollaire correspondant au Corollaire 6.1. ■

## 6.8. Cas sans viscosité comme limite de cas avec viscosité

Nous considérons un matériau dont la loi de comportement est (comparer à (6.4)) :

$$(6.129) \quad \sigma_{ij} = a_{ijkh}^{(0)} \varepsilon_{kh} + \lambda a_{ijkh}^{(1)} \partial \varepsilon_{kh} / \partial t$$

où  $\lambda > 0$  et où l'on va faire tendre  $\lambda$  vers zéro ; autrement dit la « viscosité va tendre vers zéro ».

Notre but est de vérifier que l'on obtient le cas « élastique » étudié au n° 5 comme limite du cas « visqueux » lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ . ■

Avec les notations du Théorème 6.1, on désigne par  $u_\lambda$  la solution de

$$(6.130) \quad u_\lambda(t) \in V_0,$$

$$(6.131) \quad \left| \begin{aligned} (u'_\lambda(t), v - u'_\lambda(t)) + \lambda a^1(u'_\lambda(t), v - u'_\lambda(t)) + a^0(u_\lambda(t), v - u'_\lambda(t)) + \\ + j(v + \Phi'(t)) - j(u'_\lambda(t) + \Phi'(t)) \geq (L(t), v - u'_\lambda(t)) \quad \forall v \in V_0, \end{aligned} \right.$$

avec les données initiales

$$(6.132) \quad u_\lambda(0) = u_0, \quad u'_\lambda(0) = u_1.$$

On va démontrer le

**Théorème 6.8.** *On se place dans les hypothèses du Théorème 6.1. On suppose en outre que*

$$(6.133) \quad \left| \begin{aligned} & \text{il existe } \hat{u}_2, u_3 \in H \text{ tels que} \\ & (L(0), v) - a^0(u_0, v) = (\hat{u}_2, v), \\ & a^1(u_1, v) = (u_3, v) \quad \forall v \in V_0 \quad (5^6). \end{aligned} \right.$$

Alors lorsque  $\lambda \rightarrow 0$  on a :

$$(6.134) \quad \left| \begin{aligned} & u_\lambda \rightarrow u, \quad u'_\lambda \rightarrow u' \quad \text{dans } L^\infty(0, T; V_0) \text{ faible étoile,} \\ & u''_\lambda \rightarrow u'' \quad \text{dans } L^\infty(0, T; H) \text{ faible étoile,} \end{aligned} \right.$$

où  $u$  est la solution du cas « élastique » donnée au Théorème 5.7. En outre

$$(6.135) \quad \lambda^{1/2} u'_\lambda \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; V_0).$$

*Démonstration*

On considère, comme en (6.33), l'équation régularisée approchée :

$$(6.136) \quad \left| \begin{aligned} & (u''_{\varepsilon\lambda}, v) + \lambda a^1(u'_{\varepsilon\lambda}, v) + a^0(u_{\varepsilon\lambda}, v) + (j'_{\varepsilon\lambda}(u'_{\varepsilon\lambda} + \Phi'), v) = (L, v) \\ & u_{\varepsilon\lambda}(0) = u_0, \quad u'_{\varepsilon\lambda}(0) = u_1. \end{aligned} \right.$$

Prenant  $v = u'_{\varepsilon\lambda} + \Phi'$  dans (6.136) on en déduit les estimations analogues à (6.36), (6.37), en prenant soin de la présence du facteur  $\lambda$ , d'où :

$$(6.137) \quad |u'_{\varepsilon\lambda}(t)| + \|u_{\varepsilon\lambda}(t)\| \leq c,$$

$$(6.138) \quad \lambda \int_0^T \|u'_{\varepsilon\lambda}(t)\|^2 dt \leq c.$$

Pour les deuxièmes estimations a priori, on opère comme dans la démonstration du Théorème 6.1. Faisant d'abord  $t = 0$  dans (6.136), on en déduit, en utilisant les hypothèses du Théorème 6.1 et (6.133) :

$$(6.139) \quad u''_{\varepsilon\lambda}(0) = \hat{u}_2 - \lambda u_3 \quad (\text{donc borné dans } H).$$

(5<sup>6</sup>) Cette hypothèse implique (6.30).

On dérive alors (6.136) en  $t$  et on remplace dans l'équation obtenue  $v$  par  $u''_{\varepsilon\lambda}$ ; on en déduit (comparer à (6.39), (6.40)) :

$$(6.140) \quad |u''_{\varepsilon\lambda}(t)| + \|u'_{\varepsilon\lambda}(t)\| \leq c,$$

$$(6.141) \quad \lambda \int_0^T \|u''_{\varepsilon\lambda}(t)\|^2 dt \leq c.$$

On passe alors à la limite en  $\varepsilon$  ce qui montre que  $u_\lambda$ , solution (unique) de (6.130), (6.131), (6.132), satisfait à

$$(6.142) \quad \begin{cases} u_\lambda, u'_\lambda \in \text{borné de } L^\infty(0, T; V_0), \\ u''_\lambda \in \text{borné de } L^\infty(0, T; H) \end{cases} \quad \text{lorsque } \lambda \rightarrow 0$$

et à (6.135).

On extrait alors de  $\lambda$  une suite, encore notée  $\lambda \rightarrow 0$ , telle que l'on ait (6.134), d'où le Théorème, pourvu que l'on vérifie que  $u$  ainsi mis en évidence est la solution « élastique ».

Prenant dans (6.131),  $v = v(t)$ , où  $v(\cdot) \in L^2(0, T; V_0)$ , on en déduit :

$$\begin{aligned} & \int_0^T [(u'_\lambda, v) + a^0(u_\lambda, v) + j(v + \Phi') - (L, v - u'_\lambda)] dt \geq \\ & \geq \int_0^T [(u'_\lambda, u'_\lambda) + \lambda a'(u'_\lambda, u'_\lambda) + a^0(u_\lambda, u'_\lambda) + j(u'_\lambda + \Phi')] dt \\ & \geq \frac{1}{2} |u'_\lambda(T)|^2 + \frac{1}{2} a^0(u_\lambda(T), u_\lambda(T)) + \int_0^T j(u'_\lambda + \Phi') dt \\ & \quad - \frac{1}{2} |u_1|^2 - \frac{1}{2} a^0(u_0, u_0) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} & \int_0^T [(u'', v) + a^0(u, v) + j(v + \Phi') - (L, v - u')] dt \geq \\ & \geq \liminf_\lambda [\frac{1}{2} |u'_\lambda(T)|^2 + \frac{1}{2} a^0(u_\lambda(T), u_\lambda(T)) + \\ & \quad + \int_0^T j(u'_\lambda + \Phi') dt] - \frac{1}{2} |u_1|^2 - \frac{1}{2} a^0(u_0, u_0) \\ & \geq \frac{1}{2} |u'(T)|^2 + \frac{1}{2} a^0(u(T), u(T)) + \int_0^T j(u' + \Phi') dt - \\ & \quad - \frac{1}{2} |u_1|^2 - \frac{1}{2} a^0(u_0, v_0) = \\ & = \int_0^T [(u'', u') + a^0(u, u') + j(u' + \Phi')] dt \end{aligned}$$

et par conséquent

$$(6.143) \quad \int_0^T [(u'', v - u') + a^0(u, v - u') + j(v + \Phi') - j(u' + \Phi') - (L, v - u')] dt \geq 0$$

ce qui correspond à la forme intégrale de l'inéquation (5.123) — forme qui est équivalente à la forme ponctuelle. ■

### 6.9. Interprétation des problèmes visqueux comme systèmes paraboliques <sup>(57)</sup>

Nous considérons la situation du n° 6.3 avec, pour simplifier,  $\Gamma_V = \emptyset$ . Nous allons remplacer (6.22) par un système *parabolique* (équivalent) d'inéquations.

(57) Cette section peut être passée.

Nous introduisons

$$(6.144) \quad \mathcal{V} = V_0 \times V_0 \subset \mathcal{H} = V_0 \times H.$$

Si  $u = \{u_1, u_2\}$ ,  $v = \{v_1, v_2\}$  désignent deux éléments de  $\mathcal{V}$  ou  $\mathcal{H}$ , on pose :

$$(6.145) \quad [u, v] = a^0(u_1, v_1) + (u_2, v_2),$$

$$(6.146) \quad \pi(u, v) = -a^0(u_2, v_1) + a^1(u_2, v_2) + a^0(u_1, v_2);$$

$\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire (6.145); la forme  $\pi(u, v)$  est continue sur  $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$  et l'on a, la forme  $a^0$  étant symétrique :

$$(6.147) \quad \pi(v, v) = a^1(v_2, v_2) \geq \alpha \|v_2\|^2.$$

Si l'on pose :

$$(6.148) \quad u(t) = \{u_1(t), u_2(t)\},$$

on considère « l'inéquation parabolique » :

$$(6.149) \quad \begin{aligned} [u'(t), v - u'(t)] + \pi(u(t), v - u'(t)) + j(v_2 + \Phi'(t)) - \\ - j(u_2(t) + \Phi'(t)) \geq (L(t), v_2 - u_2(t)) \quad \forall v \in \mathcal{V} \end{aligned}$$

qui équivaut à (6.22) (avec  $u(t) = u_1(t)$ ); la vérification de l'équivalence est immédiate : il suffit d'expliciter (6.149) en utilisant les notations (6.145), (6.146); on obtient ainsi deux inéquations dont la première est

$$a^0(u'_1(t), v_1 - u'_1(t)) - a^0(u_2(t), v_1 - u'_1(t)) \geq 0 \quad \forall v_1 \in V_0$$

qui équivaut à

$$u'_1(t) - u_2(t) = 0$$

d'où le résultat suit. ■

#### Remarque 6.9

On voit donc que, sous la forme d'inéquation parabolique (6.149), le problème est du type des inéquations rencontrées au Chapitre 2. ■

#### Remarque 6.10

On peut, à partir de (6.149) — en ajoutant naturellement la condition initiale  $u(0) = \{u_0, u_1\}$  — obtenir de nouveau le Théorème 6.1. ■

## 7. VISCO-ÉLASTICITÉ LINÉAIRE. MATÉRIAU A MÉMOIRE LONGUE

### 7.1. Loi de comportement et généralités

La loi de comportement est maintenant donnée par (6.6), que nous énonçons de nouveau :

$$(7.1) \quad \sigma_{ij}(t) = a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u(t)) + \int_0^t b_{ijkh}(t-s) \varepsilon_{kh}(u(t)) ds.$$



Le premier terme dans (7.1) représente un effet élastique instantané; les coefficients  $a_{ijkh}$  (dits : *coefficients d'élasticité instantanée*), peuvent éventuellement dépendre de  $x$  (<sup>58</sup>) mais sont bornés en  $x$  et satisfont à :

$$(7.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{ijkh} = a_{jikh} = a_{khij} \\ a_{ijkh} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kh} \geq \alpha \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad \alpha > 0. \end{array} \right.$$

Les coefficients  $b_{ijkh}(t)$  rendent compte des *effets de mémoire du matériau*.

Dans les exemples pratiques usuels, ce sont des combinaisons linéaires d'exponentielles à coefficients négatifs : la mémoire décroît exponentiellement avec l'éloignement dans le temps. Cf. Exemples dans P. Germain [2], W. Prager [1] et T. H. Lin [1].

Les coefficients  $b_{ijkh} = b_{ijkh}(x, t)$  dépendent de  $t$ , éventuellement de  $x$ , sont bornés en  $x, t$  et satisfont à

$$(7.3) \quad b_{ijkh} = b_{jikh}$$

et à l'hypothèse de régularité :

$$(7.4) \quad b_{ijkh}, \quad \partial b_{ijkh} / \partial t, \quad \partial^2 b_{ijkh} / \partial t^2 \in L^\infty(Q), \quad (Q = \Omega \times ]0, T[).$$

*Matériau visco-élastique de « type solide »*

Un matériau visco-élastique à mémoire longue, du type (7.1) est dit de *type solide* si

$$(7.5) \quad \int_0^\infty b_{ijkh}(t) dt = b_{ijkh}^\infty \quad \text{fini},$$

$$(7.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{les coefficients } a_{ijkh}^\infty = a_{ijkh} + b_{ijkh}^\infty \text{ satisfont à des hypothèses ana-} \\ \text{logues à (7.2)}. \end{array} \right.$$

Alors les coefficients  $a_{ijkh}^\infty$  s'appellent « *coefficients d'élasticité retardée* ».

On peut montrer que, sous certaines conditions, la solution  $u(t)$  des problèmes envisagés ci-après, converge, lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , vers la solution du problème d'élasticité correspondant aux coefficients  $a_{ijkh}^\infty$ . ■

## 7.2. Problèmes dynamiques avec frottement

Les équations sont :

$$(7.7) \quad \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u) - \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_j} b_{ijkh}(t-s) \varepsilon_{kh}(u(s)) ds = f.$$

Les conditions aux limites et initiales sont identiques à (6.8), (6.11).

*Remarque 7.1*

On peut également introduire d'autres conditions aux limites comme par exemple au n° 5.4.1. ■

(<sup>58</sup>) On peut également résoudre, par le même genre de méthodes que ci-après — sauf au n° 7.5 — le cas où  $a_{ijkh}$  dépend également de  $t$ , de manière assez régulière.

Pour la formulation variationnelle, nous introduisons :

$$(7.8) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} a_{ijkl} \varepsilon_{kh}(u) \varepsilon_{ij}(v) \, dx,$$

$$(7.9) \quad b(t; u, v) = \int_{\Omega} b_{ijkh}(t) \varepsilon_{kh}(u) \varepsilon_{ij}(v) \, dx,$$

$$(7.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} V = (H^1(\Omega))^3, \quad H = (L^2(\Omega))^3, \\ V_0 = \{ v \mid v \in V, \quad v = 0 \text{ sur } \Gamma_U \}. \end{array} \right.$$

La forme  $v \rightarrow b(t; u, v)$  est continue sur  $V_0$ , donc

$$(7.11) \quad b(t; u, v) = (B(t)u, v), \quad B(t)u \in V_0', \quad B(t) \in \mathcal{L}(V_0; V_0').$$

On introduit  $j(v)$  et  $\mathcal{U}_{ad}$  comme en (6.13), (6.14).

Le problème se formule alors de la façon suivante (comparer aux nos 5.5.1 et 6.2) : trouver une fonction  $u(t)$  telle que

$$(7.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u''(t), v - u'(t)) + a(u(t), v - u'(t)) + \int_0^t b(t-s; u(s), v - u'(t)) \, ds + \\ \quad + j(v) - j(u'(t)) \geq (f(t), v - u'(t)) + \int_{\Gamma_F} F_N(v_N - u'_N(t)) \, d\Gamma \\ \forall v \in \mathcal{U}_{ad}(t) \end{array} \right.$$

avec

$$(7.13) \quad u'(t) \in \mathcal{U}_{ad}(t),$$

$$(7.14) \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1.$$

*Remarque 7.2*

Si  $\mathcal{F} = 0$  (cas sans frottement) (7.12) se réduit à l'équation linéaire

(si  $U = 0$ ,  $\Gamma_F = \Gamma - \Gamma_U$ ) :

$$(7.15) \quad (u''(t), v) + a(u(t), v) + \int_0^t b(t-s; u(s), v) \, ds = (f(t), v) + \int_{\Gamma_F} F_N v \, d\Gamma \quad \forall v \in V_0.$$

Si  $U \neq 0$ , remplacer dans (7.15)  $v$  par  $v - u$ . ■

*Remarque 7.3*

On a les propriétés analogues à celles des Remarques 4.4, 5.17, et 6.2 relatives à la distinction entre le cas «  $\Gamma_U$  de mesure positive » et le cas «  $\Gamma_U = \emptyset$  ». ■

**7.3. Théorème d'existence et d'unicité dans le cas dynamique**

On introduit  $\Phi(t)$  comme en (6.18) ( $\Phi = 0$  si  $\Gamma_U = \emptyset$ ) ; remplaçant  $u$  par  $u - \Phi$  (et gardant la notation  $u$ ) le problème revient à trouver  $u$  telle que

$$(7.16) \quad u(t) \in V_0,$$

$$(7.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u''(t), v - u'(t)) + a(u(t), v - u'(t)) + \int_0^t (b(t-s; u(s), v - u'(t)) \, ds \\ \quad + j(v + \Phi'(t)) - j(u'(t) + \Phi'(t)) \geq (L(t), v - u'(t)) \quad \forall v \in V_0 \end{array} \right.$$

où

$$(7.18) \quad \left| \begin{aligned} (L(t), v) &= (f(t), v) + \int_{\Gamma_{\mathcal{F}}} F_N(t) v_N \, d\Gamma - (\Phi''(t), v) - a(\Phi(t), v) - \\ &\quad - \int_0^t (b(t-s; \Phi(s), v) \, ds, \end{aligned} \right.$$

avec

$$(7.19) \quad \left| \begin{aligned} u(0) &= u_0 \quad (\text{en fait } u_0 - \Phi(0)), \\ u'(0) &= u_1 \quad (\text{en fait } u_1 - \Phi'(0)). \end{aligned} \right.$$

On a alors le

**Théorème 7.1.** *On fait les hypothèses suivantes :*

$$(7.20) \quad f, f', f'' \in L^2(0, T; H), \quad F_N, F'_N, F''_N \in L^2(\Gamma_{\mathcal{F}} \times ]0, T[),$$

$$(7.21) \quad \Phi, \Phi', \Phi'' \in L^2(0, T; V), \quad \Phi''', \Phi^{(4)} \in L^2(0, T; H), \\ \Phi(0) \in (H^2(\Omega))^3$$

$$(7.22) \quad g \text{ ne dépend pas de } t,$$

$$(7.23) \quad u_0 \in V_0, \quad (L(0), v) - a(u_0, v) = (u_2, v), \quad u_2 \in H,$$

$$(7.24) \quad u_1 \in V_0, \quad u_{1T} + \Phi'_T(0) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\mathcal{F}}.$$

Dans ces conditions il existe une fonction  $u$  et une seule telle que

$$(7.25) \quad u, u' \in L^\infty(0, T; V_0),$$

$$(7.26) \quad u'' \in L^\infty(0, T; H),$$

et vérifiant (7.17), (7.19).

*Démonstration de l'unicité*

Utilisant la notation (7.11), on écrira

$$\left( \int_0^t B(t-s) u(s) \, ds, v - u'(t) \right) \\ \text{au lieu de} \\ \int_0^t b(t-s; u(s), v - u'(t)) \, ds.$$

Soient  $u$  et  $u_*$  deux solutions éventuelles. Prenant  $v = u'_*(t)$  (resp.  $v = u'(t)$ ) dans l'inéquation (7.17) (resp. dans l'inéquation relative à  $u_*$ ) et additionnant, il vient, en posant  $w = u - u_*$  :

$$- (w''(t), w'(t)) - a(w(t), w'(t)) - \left( \int_0^t B(t-s) w(s) \, ds, w'(t) \right) \geq 0$$

d'où <sup>(59)</sup>

$$\frac{d}{dt} [ |w'(t)|^2 + a(w(t)) ] \leq -2 \left( \int_0^t B(t-s) w(s) \, ds, w'(t) \right)$$

et donc

$$(7.27) \quad |w'(t)|^2 + a(w(t)) \leq -2 \int_0^t ds \left( \int_0^s B(s-s_1) w(s_1) \, ds_1, w'(s) \right).$$

<sup>(59)</sup> On rappelle que  $|f| = (f, f)^{1/2}$ ,  $a(v) = a(v, v)$ .

Mais de façon générale (pour  $t \leq T \leq \infty$ ) :

$$(7.28) \quad \left| \int_0^t ds \left( \int_0^s B(s-s_1) \varphi(s_1) ds_1, \varphi'(s) \right) \right| \leq c \left[ \int_0^t \| \rho(s) \|^2 ds + \right. \\ \left. + \| \varphi(t) \|^2 \int_0^t \| \varphi(s) \|^2 ds \right].$$

En effet

$$\int_0^t ds \left( \int_0^s B(s-s_1) \varphi(s_1) ds_1, \varphi'(s) \right) = \int_0^t ds_1 \int_{s_1}^t (B(s-s_1) \varphi(s_1), \\ \varphi'(s)) ds = \int_0^t ds_1 [(B(t-s_1) \varphi(s_1), \varphi(t)) - (B(0) \varphi(s_1), \varphi(s_1))] - \\ - \int_0^t ds_1 \int_{s_1}^t (B'(s-s_1) \varphi(s_1), \varphi(s)) ds$$

d'où l'on déduit (7.28).

Alors (7.27) et (7.28) donnent :

$$(7.29) \quad |w'(t)|^2 + a(w(t)) \leq c \int_0^t \|w(s)\|^2 ds + c \|w(t)\| \int_0^t \|w(s)\| ds.$$

Mais pour  $\lambda > 0$  il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$(7.30) \quad a(v) + \lambda |v|^2 \geq \alpha \|v\|^2$$

(et on peut prendre  $\lambda = 0$  si  $\Gamma_U$  est de mesure  $> 0$ ), donc (7.29) donne <sup>(60)</sup>

$$(7.31) \quad |w'(t)|^2 + \alpha \|w(t)\|^2 \leq \lambda |w(t)|^2 + c \int_0^t \|w(s)\|^2 ds + \frac{\alpha}{2} \|w(t)\|^2.$$

Mais

$$w(t) = \int_0^t w'(s) ds,$$

donc on déduit de (7.31) que

$$(7.32) \quad |w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2 \leq c \int_0^t (|w'(s)|^2 + \|w(s)\|^2) ds$$

d'où  $w = 0$  <sup>(61)</sup>. ■

#### Démonstration de l'existence

On suit, comme dans la Démonstration du Théorème 6.1, la méthode du n° 5.5.4. L'équation approchée régularisée est

$$(7.33) \quad (u_\varepsilon'', v) + a(u_\varepsilon, v) + \left( \int_0^t B(t-s) u_\varepsilon(s) ds, v \right) + (j_\varepsilon'(u_\varepsilon' + \Phi'), v) = \\ = (L(t)v), \quad \forall v \in V_0,$$

avec

$$u_\varepsilon(0) = u_0, \quad u_\varepsilon'(0) = u_1.$$

On obtient les premières estimations en faisant  $v = u_\varepsilon' + \Phi'$  dans (7.33).

<sup>(60)</sup> Les  $c$  désignent toujours des constantes diverses.

<sup>(61)</sup> On n'a pas utilisé ici toute l'hypothèse (7.4) mais seulement le fait que  $\frac{\partial}{\partial t} b_{ijkl}(x, t)$  est dans  $L^\infty(\Omega \times [0, T])$ .

La seule chose nouvelle à vérifier est que le terme

$$X = \left( \int_0^t B(t-s) u_\varepsilon(s) ds, u'_\varepsilon(t) + \Phi'(t) \right)$$

peut être estimé convenablement. C'est immédiat pour la partie

$$\left( \int_0^t B(t-s) u_\varepsilon(s) ds, \Phi'(t) \right).$$

Reste donc

$$X_1 = \left( \int_0^t B(t-s) u_\varepsilon(s) ds, u'_\varepsilon(t) \right) dt.$$

Mais d'après (7.28)

$$(7.34) \quad \left| \int_0^t X_1(s) ds \right| \leq c \left( \int_0^t \|u_\varepsilon(s)\|^2 ds + \|u_\varepsilon(t)\| \int_0^t \|u_\varepsilon(s)\| ds \right)$$

et on obtient par conséquent (comme au n° 5.5.4) :

$$(7.35) \quad \|u_\varepsilon(t)\| + |u'_\varepsilon(t)| \leq c.$$

Si l'on fait «  $t = 0$  » dans (7.33), grâce à (7.24), on a :

$$(u''_\varepsilon(0), v) + a(u_0, v) = (L(0), v)$$

d'où d'après (7.23)

$$(7.36) \quad u''_\varepsilon(0) = u_2.$$

Dérivant (7.33) en  $t$ , il vient :

$$(7.37) \quad (u'''_\varepsilon, v) + a(u'_\varepsilon, v) + (B(0) u_\varepsilon(t), v) + \left( \int_0^t B'(t-s) u_\varepsilon(s) ds, v \right) + ((j'_\varepsilon(u'_\varepsilon + \Phi'))', v) = (L'(t), v)$$

et on a les mêmes estimations que dans les situations précédentes, pourvu que l'on puisse majorer convenablement

a)  $(B(0) u_\varepsilon(t), u''_\varepsilon(t) + \Phi''(t))$  — ce qui est immédiat ;

b)  $Y = \left( \int_0^t B'(t-s) u_\varepsilon(s) ds, u'_\varepsilon(t) + \Phi''(t) \right)$ ; c'est encore immédiat pour

$$\left( \int_0^t B'(t-s) u_\varepsilon(s) ds, \Phi''(t) \right)$$

et il reste donc seulement à majorer

$$Y_1(t) = \left( \int_0^t B'(t-s) u_\varepsilon(s) ds, u''_\varepsilon(t) \right).$$

Mais

$$\begin{aligned} \int_0^t Y_1(s) ds &= \int_0^t ds \left( \int_0^s B'(s-s_1) u_\varepsilon(s_1) ds, u''_\varepsilon(s) \right) \\ &= \int_0^t ds_1 \int_{s_1}^t (B'(s-s_1) u_\varepsilon(s_1), u''_\varepsilon(s)) ds \\ &= \int_0^t [(B'(t-s_1) u_\varepsilon(s_1), u'_\varepsilon(t)) - (B'(0) u_\varepsilon(s_1), u'_\varepsilon(s_1))] ds \\ &\quad - \int_0^t ds_1 \int_{s_1}^t (B''(s-s_1) u_\varepsilon(s_1), u'_\varepsilon(s)) ds \end{aligned}$$

d'où et on utilise maintenant (7.4) —

$$\left| \int_0^t Y_1(s) ds \right| \leq c \|u'_\varepsilon(t)\| + c + c \int_0^t \|u'_\varepsilon(s)\| ds,$$

termes qui n'entraînent aucune difficulté dans les majorations. On obtient donc

$$(7.38) \quad \|u'_\varepsilon(t)\| + |u'_\varepsilon(t)| \leq C$$

et on achève la démonstration du Théorème comme au Théorème 6.1.

#### 7.4. Le cas quasi statique

Par des considérations analogues à celles du n° 6 précédent, on voit que le problème quasi statique « associé » au problème (7.17), (7.19) est le suivant (on suppose  $U$  indépendant de  $t$  de sorte que l'on peut supposer que  $\Phi$  est indépendant de  $t$ ) : trouver  $u(t)$  telle que

$$(7.16) \quad u(t) \in V_0,$$

$$(7.39) \quad a(u(t), v - u'(t)) + \left( \int_0^t B(t-s) u(s) ds, v - u'(t) \right) + \\ - j(v) - j(u') \geq (L(t), v - u'(t)) \quad \forall v \in V_0,$$

$$(7.40) \quad u(0) = u_0.$$

##### 7.4.1. Conditions nécessaires sur la donnée initiale

Supposons que le problème (7.39), (7.40) admette une solution régulière en  $t$ ; posons :  $u'(0) = u_1$  ( $u_1$  n'est pas donné). Faisant  $t = 0$  dans (7.39), on trouve

$$a(u_0, v - u_1) + j(v) - j(u_1) \geq (L(0), v - u_1)$$

i.e.

$$(7.41) \quad \inf_{v \in V_0} [a(u_0, v) - (L(0), v) + j(v)] = a(u_0, u_1) - (L(0), u_1) + j(u_1) > -\infty.$$

On peut préciser (7.41) en supposant pour simplifier que

$$(7.42) \quad U = 0.$$

Alors, en utilisant la formule de Green,

$$a(u_0, v) - (L(0), v) + j(v) = (Au_0 - f(0), v) + \int_{\Gamma_{\mathcal{F}}} (\sigma_N^0 v_N - F_N(0) v_N) d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_{\mathcal{F}}} (\sigma_T^0 v_T + g |v_T|) d\Gamma$$

et alors  $\inf [a(u_0, v) - (L(0), v) + j(v)] = -\infty$  sauf si

$$(7.43) \quad \begin{cases} Au_0 = f(0), \\ \sigma_N^0 = F_N(0) & \text{sur } \Gamma_{\mathcal{F}}, \\ |\sigma_T^0| \leq g & \text{sur } \Gamma_{\mathcal{F}} \quad (\text{et } u_0 = 0 \text{ sur } \Gamma_U). \end{cases}$$

Revenant à (7.43), on a alors

$$(7.44) \quad \inf_{v \in V_0} [a(u_0, v) - (L(0), v) + j(v)] = 0.$$

Les conditions nécessaires (7.43) sont également *suffisantes* pour l'existence d'une solution « forte » de (7.39), (7.40); cf. H. Brézis [2], Chapitre 2 (où on utilise des méthodes liées aux semi-groupes non linéaires). D'un point de vue mécanique, la condition initiale semble être

$$u_0 = u_0^*$$

où  $u_0^*$  est la solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} Au_0^* = f(0) \quad \text{dans } \Omega \\ \sigma_N(u_0^*) = F_N(0) \quad \text{sur } \Gamma_{\mathcal{F}} \quad (\text{et } u_0^* = 0 \text{ sur } \Gamma_U) \\ |\sigma_T(u_0^*)| < g \Rightarrow u_{0T}^* = 0 \\ |\sigma_T(u_0^*)| = g \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \quad \text{tel que} \quad u_{0T}^* = -\lambda \sigma_T(u_0^*), \end{array} \right.$$

c'est-à-dire que  $u_0^*$  est solution du problème d'élasticité statique correspondant aux forces  $f(0)$ ,  $F_N(0)$  et aux conditions de frottement sur  $\Gamma_{\mathcal{F}}$ .

Cependant pour un peu simplifier nous n'allons ici montrer l'existence que sous l'hypothèse plus restrictive,

$$(7.45) \quad \left\{ \begin{array}{l} Au_0 = f(0) \quad \text{sur } \Omega, \\ \sigma_N^0 = F_N(0) \quad \text{sur } \Gamma_{\mathcal{F}}, \\ \sigma_T^0 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\mathcal{F}} \quad (\text{et } u_0 = 0 \text{ sur } \Gamma_U). \end{array} \right.$$

#### 7.4.2. Etude du cas « Mes $\Gamma_U > 0$ »

**Théorème 7.2.** *On suppose que  $\text{Mes } \Gamma_U > 0$  et que  $u_0$  est donné dans  $(H^2(\Omega))^3$  satisfaisant à (7.45). On suppose que  $U = 0$  donc  $\Phi = 0$  et que (7.20), (7.22) ont lieu.*

*Dans ces conditions il existe une fonction  $u$  et une seule telle que*

$$(7.46) \quad u, u' \in L(0, T; V_0)$$

*et vérifiant (7.39), (7.40).*

*Démonstration de l'unicité*

Soient  $u$  et  $u_*$  deux solutions éventuelles,  $w = u - u_*$ . Prenant  $v = u'_*(t)$  dans (7.39) (resp.  $v = u'(t)$  dans l'inéquation correspondante pour  $u$ ) et ajoutant, il vient après intégration (comparer à (7.29)) :

$$(7.47) \quad a(w(t)) \leq c \int_0^t \|w(s)\|^2 ds + c \|w(t)\| \int_0^t \|w(s)\| ds.$$

Mais comme  $\Gamma_U$  est de mesure positive, on a (7.30) avec  $\lambda = 0$  et donc on déduit de (7.47) que

$$\|w(t)\|^2 \leq c \int_0^t \|w(s)\|^2 ds$$

d'où  $w = 0$ . ■

#### Démonstration de l'existence

On effectue une *double régularisation*. On régularise  $j$  en  $j_\varepsilon$  et on ajoute un terme en  $\eta(u'', v)$ ,  $\eta > 0$ . On « approche » donc (7.39) par l'équation *birégularisée* :

$$(7.48) \quad \eta(u''_{\varepsilon\eta}, v) + a(u_{\varepsilon\eta}, v) + \left( \int_0^t B(t-s) u_{\varepsilon\eta}(s) ds, v \right) + j'_\varepsilon(u'_{\varepsilon\eta}(t), v) = (L(t), v)$$

avec

$$(7.49) \quad u_{\varepsilon\eta}(0) = u_0,$$

$$(7.50) \quad u'_{\varepsilon\eta}(0) = 0 \quad (6^2).$$

On obtient alors les premières estimations a priori en prenant  $v = u'_{\varepsilon\eta}(t)$ , ce qui conduit à

$$(7.51) \quad \|u_{\varepsilon\eta}\| \leq c \quad (\text{les } c \text{ désignent des constantes indépendantes de } \varepsilon \text{ et de } \eta).$$

$$(7.52) \quad \sqrt{\eta} |u'_{\varepsilon\eta}| \leq c.$$

Pour aller plus loin, on dérive (7.48) en  $t$ , puis l'on remplace  $v$  par  $u''_{\varepsilon\eta}(t)$ . Il faut alors une estimation sur  $u''_{\varepsilon\eta}(0)$  *indépendante de*  $\varepsilon$  *et de*  $\eta$ .

Faisant  $t = 0$  dans (7.48) on trouve

$$(7.53) \quad \eta(u''_{\varepsilon\eta}(0), v) + a(u_0, v) + (j'_\varepsilon(0), v) = (L(0), v) = (f(0), v) + \int_{\Gamma_F} F_N(0) v_N d\Gamma.$$

Mais d'après (7.45)  $a(u_0, v) = (f(0), v) + \int_{\Gamma_F} F_N(0) v_N d\Gamma$  et donc (7.53) donne

$$\eta(u''_{\varepsilon\eta}(0), v) = 0$$

donc (6<sup>3</sup>)

$$(7.54) \quad u''_{\varepsilon\eta}(0) = 0.$$

Alors on obtient

$$(7.55) \quad \|u'_{\varepsilon\eta}(t)\| \leq c$$

$$(7.56) \quad \sqrt{\eta} |u''_{\varepsilon\eta}(t)| \leq c$$

et l'on peut passer à la limite en  $\varepsilon$  et  $\eta$  par les procédés habituels. ■

(6<sup>2</sup>) Cela est naturel d'après (7.44) et (7.41),  $u_1 = 0$  réalisant le minimum.

(6<sup>3</sup>) C'est pour arriver à cette estimation *indépendante de*  $\eta$  que nous avons fait l'hypothèse (7.45).



## Remarque 7.4

Dans le cas « sans frottement », on remplace  $\Gamma_{\mathcal{F}}$  par  $\Gamma_F$  (cf. n° 6.7). Le problème est alors de trouver  $u$  avec (7.16) et

$$(7.57) \quad a(u(t), v) + \left( \int_0^t B(t-s) u(s) ds, v \right) = (f(t), v) + \int_{\Gamma_F} F_i(t) v_i d\Gamma.$$

Alors  $u_0$  est imposé : prenant  $t = 0$  dans (7.57) on trouve

$$(7.58) \quad a(u_0, v) = (f(0), v) + \int_{\Gamma_F} F_i(0) v_i d\Gamma$$

ce qui est l'analogie de (7.45) dans ce cas. ■

 7.4.3. Etude du cas «  $\Gamma_v = \emptyset$  »

Si  $\Gamma_v = \emptyset$  le problème est de trouver  $u$  avec

$$(7.59) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(t) \in V \\ a(u(t), v - u'(t)) + \left( \int_0^t B(t-s) u(s) ds, v - u'(t) \right) + j(v) - j(u'(t)) \geq \\ \geq (L(t), v - u'(t)) \quad \forall v \in V \\ u(0) = u_0. \end{array} \right.$$

On obtient des conditions nécessaires exactement comme au n° 6.6 : prenant dans (7.59)  $v = u'(t) + \rho$ ,  $\rho \in \mathcal{R}$ , il vient, comme

$$\left( \int_0^t B(t-s) u(s) ds, \rho \right) = \int_0^t b(t-s; u(s), \rho) ds = 0,$$

$$d'où \quad \begin{aligned} j(u'(t) + \rho) - j(u'(t)) &\geq (L(t), \rho) \\ j(\rho) &\geq (L(t), \rho) \end{aligned}$$

ou encore

$$(7.60) \quad |(L(t), \rho)| \leq j(\rho) \quad \forall \rho \in \mathcal{R}.$$

La condition nécessaire (7.60) est, comme on va voir, suffisante pour avoir une solution dans un sens convenable. On passe au quotient par  $\mathcal{R}$  (cf. (6.67)); on pose

$$(7.61) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(u^*, v^*) = a(u, v), \\ b(t; u^*, v^*) = b(t; u, v), \quad u \in u^*, \quad v \in v^* \end{array} \right.$$

et l'on définit (comparer à (6.70))

$$(7.62) \quad \mathcal{H}(t; v^*) = \inf [j(v + \rho) - (L(t), v + \rho)];$$

grâce à (7.60) on a (cf. (6.71))  $\mathcal{H}(t; v^*) > -\infty$ .

Le problème que l'on considère est alors de trouver  $u'(t)$  telle que

$$(7.63) \quad u'(t) \in V^*,$$

$$(7.64) \quad a(u'(t), v^* - u'(t)) + \int_0^t b(t-s; u'(s), v^* - u'(t)) ds +$$

$$(7.65) \quad u'(0) = u_0' \quad + \mathcal{H}(t; v^*) - \mathcal{H}(t; u'(t)) \geq 0 \quad \forall v^* \in V^*,$$

On a alors le

**Théorème 7.3.** *On suppose que (7.60) a lieu, ainsi que (7.20) et (7.22). On suppose que*

$$(7.66) \quad a(u_0', v^*) + \mathcal{H}(0; v^*) = 0.$$

Alors il existe une fonction  $u'$  et une seule telle que

$$(7.67) \quad u', u'' \in L^\infty(0, T; V^*)$$

et vérifiant (7.63), (7.64), (7.65).

La démonstration utilise les mêmes méthodes qu'au Théorème 7.2 et qu'au Théorème 6.3. ■

#### Remarque 7.5

Dans le cas sans frottement (7.60) donne

$$(7.68) \quad (L(t), \rho) = 0 \quad \forall \rho \in \mathcal{R}$$

et alors  $\mathcal{H}(t; v^*) = (L(t), v^*)$  de sorte que (7.64) se réduit à

$$(7.69) \quad a(u'(t), v^*) + \int_0^t b(t-s; u'(s), v^*) ds = (L(t), v^*) \quad \forall v^* \in V^*.$$

### 7.5. Usage de la transformation de Laplace dans les cas sans frottement

Introduisons l'opérateur  $A \in \mathcal{L}(V_0; V_0')$  par

$$(7.70) \quad a(u, v) = (Au, v), \quad u, v \in V_0.$$

Alors le problème dynamique s'énonce (cf. Remarque 7.2)

$$(7.71) \quad u' + Au + B * u = L$$

où <sup>(64)</sup>

$$(7.72) \quad B * u(t) = \int_0^t B(t-s) u(s) ds;$$

dans (7.71) on dérive sur  $]0, \infty[$  en  $t$ ; il est préférable pour la suite de prolonger  $u$  par 0 pour  $t < 0$  - soit encore  $u$  ce prolongement; alors les dérivations ayant lieu

<sup>(64)</sup> Convolution en  $t$  à valeurs vectorielles.

cette fois sur  $]-\infty, +\infty[$ , on a :

$$(7.73) \quad \begin{cases} u'' + Au + B * u = L + u_0 \delta' + u_1 \delta, & \text{équation dans } \mathcal{D}'(V'_0), \\ u \text{ nulle pour } t < 0. \quad \blacksquare \end{cases}$$

Le problème quasi statique s'énonce

$$(7.74) \quad Au + B * u = L. \quad \blacksquare$$

On suppose (pour simplifier)  $L$  indépendant de  $t$ .

La solution  $u$  du problème (7.73) (resp. (7.74)) peut s'obtenir par transformation de Laplace en  $t$ . (Il s'agit là d'un cas particulier de Lions [3].)

On introduit :

$$(7.75) \quad \hat{u}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} u(t) dt, \quad p = \xi + i\eta, \quad \xi > 0,$$

(transformée de Laplace (en  $t$ ) de  $u$ ).

On suppose que

$$(7.76) \quad b_{ijkh} \in L^1(0, \infty; L^\infty(\Omega))$$

ce qui entraîne que

$$(7.77) \quad B \in L^1(0, \infty; \mathcal{L}(V_0; V'_0));$$

on introduit alors <sup>(6.5)</sup>

$$(7.78) \quad \hat{B}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} B(t) dt \quad (\in \mathcal{L}(V_0; V'_0)), \quad \xi \geq \xi_*.$$

Par transformation de Laplace (7.73) (resp. (7.74)) équivaut à

$$(7.79) \quad (p^2 + A + \hat{B}(p)) \hat{u}(p) = \frac{1}{p} L + pu_0 + u_1$$

(resp.

$$(7.80) \quad (A + \hat{B}(p)) \hat{u}(p) = \frac{1}{p} L).$$

On montre (cf. Lions, loc. cit.) que le problème (7.79) admet une solution unique pour  $\xi$  assez grand, soit  $\xi \geq \xi_0$ , donc

$$(7.81) \quad \hat{u}(p) = (p^2 + A + \hat{B}(p))^{-1} \left( \frac{1}{p} L + pu_0 + u_1 \right)$$

et que la fonction  $p \rightarrow (p^2 + A + \hat{B}(p))^{-1} \left( \frac{1}{p} L + pu_0 + u_1 \right)$  admet une transformée de Laplace inverse qui est la solution  $u$  du problème.  $\blacksquare$

<sup>(6.5)</sup> On suppose que  $e^{-st} B \in L^1(0, \infty; \mathcal{L}(V_0; V'_0))$  pour  $\xi \geq \xi_*$ . On peut d'ailleurs éliminer cette hypothèse. Cf. Lions [3].

Pour le cas *quasi statique* on vérifie un résultat analogue : pour  $\xi \geq \xi_1$ , on peut inverser  $A + \hat{B}(p)$  et

$$(7.82) \quad \hat{u}(p) = (A + \hat{B}(p))^{-1} \frac{1}{p} L ;$$

la fonction  $p \rightarrow (A + \hat{B}(p))^{-1} \frac{1}{p} L$  admet une transformée de Laplace inverse qui est la solution  $u$  du problème. ■

*Remarque 7.6*

La méthode de la transformation de Laplace que l'on vient d'exposer brièvement est également valable dans le cadre du n° 6 (mémoire courte) dans les cas sans frottement. ■

**7.6. Cas élastique comme limite de cas avec mémoire**

Nous considérons (comparer au n° 6.8) la loi

$$(7.83) \quad \sigma_{ij}(t) = a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u(t)) + \lambda \int_0^t b_{ijkh}(t-s) \varepsilon_{kh}(u(s)) ds ,$$

$\lambda > 0$  destiné à tendre vers zéro.

Désignons par  $u_\lambda$  la solution du problème correspondant à celui résolu au Théorème 7.1, à savoir :

$$(7.84) \quad u_\lambda(t) \in V_0 ,$$

$$(7.85) \quad \left| \begin{array}{l} (u'_\lambda(t), v - u'_\lambda(t)) + a(u_\lambda(t), v - u'_\lambda(t)) + \lambda \int_0^t b(t-s; u_\lambda(s), \\ v - u'_\lambda(t)) ds + j(v + \Phi'(t)) - j(u'_\lambda(t) + \Phi'(t)) \geq (L(t), v - u'_\lambda(t)) \\ \forall v \in V_0 , \end{array} \right.$$

$$(7.86) \quad u_\lambda(0) = u_0 , \quad u'_\lambda(0) = u_1 .$$

On a le

**Théorème 7.3.** *On se place dans les conditions du Théorème 7.1. Alors, lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ , on a :*

$$(7.87) \quad u_\lambda \rightarrow u , \quad u'_\lambda \rightarrow u' \quad \text{dans } L^\infty(0, T; V_0) \text{ faible étoile ,}$$

$$(7.88) \quad u''_\lambda \rightarrow u'' \quad \text{dans } L^\infty(0, T; H) \text{ faible étoile}$$

où  $u$  est la solution du cas « élastique » donnée au Théorème 5.7.

Pour la démonstration, on considère (comparer à (7.33)) la solution  $u_{\varepsilon\lambda}$  du problème régularisé :

$$(7.89) \quad \begin{aligned} (u''_{\varepsilon\lambda}, v) + a(u_{\varepsilon\lambda}, v) + \lambda \int_0^t B(t-s) u_{\varepsilon\lambda}(s) ds, v) + \\ + (J'_\varepsilon(u'_{\varepsilon\lambda} + \Phi'), v) = (L(t), v) \quad \forall v \in V_0 \end{aligned}$$

avec  $u_{\varepsilon\lambda}(0) = u_0 , \quad u'_{\varepsilon\lambda}(0) = u_1 .$

On obtient alors, comme dans la démonstration du Théorème 7.1, les estimations indépendantes de  $\varepsilon$  et de  $\lambda$  :

$$\|u_{\varepsilon\lambda}(t)\| + \|u'_{\varepsilon\lambda}(t)\| + |u'_{\varepsilon\lambda}(t)| \leq c$$

d'où l'on déduit le Théorème. ■

*Remarque 7.7*

Plus généralement, la solution  $u = u_{(b)}$  donnée au Théorème 7.1 « dépend continûment de  $b$  ». ■

## 8. COMMENTAIRES

Nous avons rappelé dans les nos 2, 3, 4 l'essentiel de la théorie classique de l'élasticité linéaire, qui nous est utile pour notre but essentiel qui fait l'objet des nos 5, 6, 7. On trouve en particulier au n° 3 une démonstration de l'inégalité de Korn qui joue un rôle fondamental aussi bien dans la théorie classique que dans les situations « avec frottement » ou « unilatérales ». Une démonstration de cette inégalité nécessitant moins d'hypothèses sur la frontière de  $\Omega$  est due à J. Gobert [1]. Notre démonstration repose sur un théorème général (Théorème 3.2) assez simple et pouvant d'ailleurs être généralisé : si  $v \in H^{-m}(\Omega)$ ,  $D^p v \in H^{-m}(\Omega) \forall |p| = k$  alors  $v \in H^{-m+k}(\Omega)$ . Les problèmes d'élasticité avec conditions de frottement à la frontière ont été introduits par les Auteurs dans Duvaut-Lions [6]. Le premier problème unilatéral en élasticité est le problème de Signorini. Il a été étudié par G. Fichera [1] puis Lions-Stampacchia [1].

L'analogue du problème de Signorini en visco-élasticité linéaire avec mémoire longue a été étudié dans G. Duvaut [4]. Pour des résultats sur les problèmes classiques de visco-élasticité linéaire on pourra se reporter à L. Brun [1], C.M. Dafermos [1], J. N. Distefano [1] et G. Duvaut [3] et la bibliographie de ces travaux.

Nous n'avons donné au n° 3.5 que des notions introductives sur la théorie de la dualité. Pour la théorie générale nous référons à Moreau [1], Rockafellar [1], Temam [2]. Des exemples de problèmes en dualité sont étudiés dans M. J. Sewell [1] et K. Wasmizu [1].

# CHAPITRE 4

## PHÉNOMÈNES UNILATÉRAUX DANS LA THÉORIE DES PLAQUES PLANES

### 1. INTRODUCTION

Nous allons étudier dans ce chapitre des phénomènes *unilatéraux* et de *frottement* relatifs à des plaques planes élastiques.

La théorie des plaques est *bidimensionnelle* ; c'est donc une *théorie approchée*, la plaque étant un corps tridimensionnel dont une dimension (l'épaisseur) est petite par rapport aux deux autres.

Nous reprenons brièvement l'exposé de cette théorie (sans évidemment entreprendre une étude exhaustive, qui n'est pas notre objet) de manière à introduire sans ambiguïté les problèmes unilatéraux.

Dans l'approximation, nous nous bornons aux termes du premier ordre, donc à la « *théorie linéaire* » (bien que, comme on l'a déjà souligné à plusieurs reprises, les problèmes unilatéraux seront *non linéaires* ; mais les *opérateurs* différentiels considérés sont linéaires). *La théorie non linéaire* (ou plutôt, *les théories non linéaires*, car on trouve dans la littérature plusieurs types de schémas non linéaires) — par exemple relative aux équations de Von Karman — conduit à des conditions unilatérales *du même type* que dans le cas linéaire ; pour ne pas alourdir outre mesure l'exposé, nous n'avons pas étudié cette théorie ici, renvoyant à un article séparé des auteurs.

### 2. THÉORIE GÉNÉRALE DES PLAQUES

#### 2.1. Définitions et notations

Dans son état non déformé la plaque plane considérée comme milieu bidimensionnel occupe une région  $\Omega$  où

$\Omega =$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ , de frontière  $\Gamma$  régulière .

Soit :

$n$  (resp.  $\tau$ ) la normale extérieure unitaire à  $\Gamma$  (resp. la tangente unitaire déduite de  $n$  par rotation  $+\pi/2$ ).

Le plan  $\mathbb{R}^2$  est rapporté aux axes orthonormés  $Ox_1, Ox_2$ . L'axe  $Ox_3$  complète le trièdre orthonormé  $Ox_1x_2x_3$ .

En fait, la plaque est un corps tridimensionnel occupant un volume  $\mathcal{V}$  de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$(2.1) \quad \mathcal{V} = \{ x \mid x = \{ x_1, x_2, x_3 \} \in \mathbb{R}^3, \quad x_1, x_2 \in \Omega \quad \text{et} \\ -\frac{1}{2} h(x_1, x_2) < x_3 < \frac{1}{2} h(x_1, x_2) \}$$

où la fonction  $\{ x_1, x_2 \} \rightarrow h(x_1, x_2)$  désigne l'épaisseur de la plaque,  $h(x_1, x_2)$  étant « petit ».

Soit

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \{ u_i(x_1, x_2, x_3, t) \mid i = 1, 2, 3 \}$$

le vecteur déplacement de la plaque à l'instant  $t$ . On va dans la suite déterminer les équations (et inéquations) caractérisant les déplacements des points de  $\Omega$ , i.e. caractérisant  $u(x_1, x_2, 0, t)$ . ■

#### Convention de notations

Les indices latins  $i, j, \dots$  varient de 1 à 3.

Les indices grecs  $\alpha, \beta, \dots$  varient de 1 à 2.

Ainsi le vecteur déplacement a des composantes  $u_i$ , les points de  $\Omega$  ont des coordonnées  $x_\alpha$ .

## 2.2. Analyse des forces

En fait, plus précisément, on a une densité volumique  $\tilde{f} = \{ \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3 \}$  de forces sur  $\mathcal{V}$ , dont on ne prend pas en compte la répartition exacte mais seulement les éléments de réduction par unité de surface de  $\Omega$ ,

$$f_i(x_1, x_2) = \int_{-h/2}^{+h/2} f_i(x_1, x_2, x_3) dx_3, \\ m_i(x_1, x_2) = \int_{-h/2}^{+h/2} \varepsilon_{i3k} x_3 f_k(x_1, x_2, x_3) dx_3.$$

Donc sur un élément d'aire  $dx_1 dx_2$  de  $\Omega$  s'exercent une force élémentaire et un moment élémentaire donnés respectivement par

$$(2.2) \quad \left| \begin{array}{l} f_i(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \\ m_i(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \end{array} \right.$$

Notons que  $m_3 = 0$ .

Soit alors  $\Omega_1$  une partie de  $\Omega$  limitée par un contour  $\Gamma_1$  et soit  $\mathcal{V}_1$  le volume correspondant à  $\Omega_1$ , donc

$$(2.3) \quad \mathcal{V}_1 = \{ x \mid x = \{ x_1, x_2, x_3 \}, \quad \{ x_1, x_2 \} \in \Omega_1, \quad -h/2 < x_3 < h/2 \}.$$

La partie  $\mathcal{V} - \mathcal{V}_1$  exerce sur  $\mathcal{V}_1$  un système de forces qui, à l'équilibre, forment avec la densité  $f$  de forces sur  $\Gamma_1$  un torseur équivalent à zéro. Etudions donc les forces exercées par  $\mathcal{V} - \mathcal{V}_1$  sur  $\mathcal{V}_1$ .

Ces actions s'exercent par l'intermédiaire de l'interface

$$S_1 = \Gamma_1 \times ]-h/2, +h/2[.$$

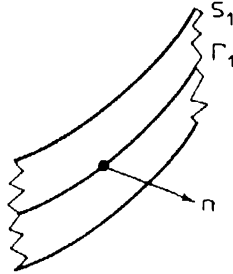


Figure 16.

Soit  $\sigma_{ij}$  le tenseur des contraintes dans  $\mathcal{V}$ . Alors la partie  $\mathcal{V} - \mathcal{V}_1$  exerce sur  $\mathcal{V}_1$  une densité de forces  $(\sigma_{ij} n_j)$  sur  $S_1$ . Donc par unité de longueur de  $\Gamma_1$  les éléments de réduction de ces forces sont donnés par

$$(2.4) \quad R_i = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{ij} n_j dx_3, \quad M_i = \int_{-h/2}^{+h/2} \varepsilon_{i3k} x_3 \sigma_{kj} n_j dx_3,$$

$(R_i) = \text{résultante}, \quad (M_i) = \text{moment résultant}.$

Cela permet d'introduire en tout point de  $\Gamma_1$ , et donc en tout point de  $\Omega$ , un tenseur  $(\Sigma_{ij})$  des forces de contraintes et un tenseur  $(M_{ij})$  des couples de contrainte définis par

$$(2.5) \quad \begin{cases} \Sigma_{ij}(x_1, x_2) = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) dx_3, & h = h(x_1, x_2) \\ M_{ij}(x_1, x_2) = \int_{-h/2}^{+h/2} \varepsilon_{i3k} x_3 \sigma_{kj} dx_3. \end{cases}$$

Les actions exercées par  $\mathcal{V} - \mathcal{V}_1$  sur  $\mathcal{V}_1$  se réduisent alors à une densité de forces  $(R_i)$  et de moments  $(M_i)$  sur  $\Gamma_1$  donnés par

$$(2.6) \quad \begin{cases} R_i = \Sigma_{ij} n_j = \Sigma_{ia} n_a & (\text{car } n_3 = 0) \\ M_i = M_{ij} n_j = M_{ia} n_a. \end{cases}$$

Les composantes à prendre en considération des forces de contraintes et du tenseur des couples de contraintes sont donc  $\Sigma_{ia}, M_{ia}$ .

On vérifie que

$$(2.7) \quad \Sigma_{\alpha\beta} = \Sigma_{\beta\alpha}, \quad M_{3\alpha} = 0, \quad M_{\beta\beta} = 0.$$



Ecrivons maintenant que la portion  $\Omega_1$  de la plaque  $\Omega$  est en équilibre sous l'action des forces  $f$  (sur  $\Omega_1$ ) et des forces exercées par  $\mathcal{V} - \mathcal{V}_1$ . Ecrivant que la résultante et le moment résultant en 0 sont nuls, il vient

$$(2.8) \quad \int_{\Omega_1} f_i dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma_1} \Sigma_{i\alpha} n_\alpha d\Gamma_1 = 0$$

et

$$(2.9) \quad \int_{\Omega_1} \varepsilon_{ijk} x_j f_k dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma_1} \varepsilon_{ijk} x_j \Sigma_{k\alpha} n_\alpha d\Gamma_1 + \\ + \int_{\Omega_1} m_i dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma_1} M_{i\alpha} n_\alpha d\Gamma_1 = 0.$$

Supposant, ce qui est loisible,  $\Gamma_1$  régulière, (2.8) et (2.9) équivalent respectivement à

$$(2.10) \quad \int_{\Omega_1} (f_i + \Sigma_{i\alpha,\alpha}) dx_1 dx_2 = 0,$$

$$(2.11) \quad \int_{\Omega_1} [\varepsilon_{ijk} x_j f_k + (\varepsilon_{ijk} x_j \Sigma_{k\alpha})_{,\alpha}] dx_1 dx_2 + \\ + \int_{\Omega_1} (m_i + M_{i\alpha,\alpha}) dx_1 dx_2 = 0.$$

La région  $\Omega_1$  étant arbitraire, (2.10) équivaut à

$$(2.12) \quad f_i + \Sigma_{i\alpha,\alpha} = 0.$$

Tenant compte de (2.12), (2.11) se réduit à

$$\int_{\Omega_1} (\varepsilon_{i\alpha k} \Sigma_{k\alpha} + M_{i\alpha,\alpha} + m_i) dx_1 dx_2 = 0,$$

d'où

$$(2.13) \quad \varepsilon_{i\alpha k} \Sigma_{k\alpha} + M_{i\alpha,\alpha} + m_i = 0.$$

Pour  $i = 3$  les deux termes de (2.13) sont nuls et pour  $i = 1, 2$  on obtient :

$$(2.14) \quad \begin{cases} \Sigma_{32} + M_{1\alpha,\alpha} + m_1 = 0, \\ \Sigma_{31} - M_{2\alpha,\alpha} - m_2 = 0. \end{cases}$$

Eliminant  $\Sigma_{31}$  et  $\Sigma_{32}$  entre (2.12) et (2.14) il vient

$$(2.15) \quad \Sigma_{\alpha\beta,\beta} + f_\alpha = 0,$$

$$(2.16) \quad M_{2\alpha,\alpha 1} - M_{1\alpha,\alpha 2} - m_{1,2} - m_{2,1} + f_3 = 0,$$

où n'interviennent que  $\Sigma_{\alpha\beta}$ ,  $M_{\alpha\beta}$ . C'est ce groupe d'équations que nous retiendrons pour la suite. ■

#### Remarque 2.1

Nous n'avons jusqu'ici fait aucune simplification due au fait que l'épaisseur  $h$  de la plaque est « petite ». ■



Grâce à ces hypothèses nous allons trouver la forme du tenseur des déformations et des contraintes dans  $\mathcal{V}$ .

Aux points des forces supérieure et inférieure ( $x_3 = \pm h/2$ ) de  $\mathcal{V}$ , aucun effort extérieur ne s'exerce et par conséquent

$$(2.23) \quad \sigma_{13}(x_1, x_2, \pm h/2) = \sigma_{23}(x_1, x_2, \pm h/2) = \sigma_{33}(x_1, x_2, \pm h/2) = 0.$$

Par application de la loi de Hooke (2.17), on en déduit pour  $x_3 = \pm h/2$ ,

$$(2.24) \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk} = 0.$$

En tenant compte de (2.21), (2.22) il en résulte

$$(2.25) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0) + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}(x_1, x_2, 0) = O(h), \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0) + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}(x_1, x_2, 0) = O(h). \end{cases}$$

Posant alors

$$(2.26) \quad u_3(x_1, x_2, 0) = \zeta(x_1, x_2), \quad (2)$$

on en déduit, en utilisant (2.21),

$$(2.27) \quad \begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \partial \zeta / \partial x_1 + O(h^2), \\ u_2(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \partial \zeta / \partial x_2 + O(h^2). \end{cases}$$

Par ailleurs la troisième relation (2.24) nous montre que

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \left( x_1, x_2, \pm \frac{h}{2} \right) = -\frac{\nu}{1-\nu} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \left( x_1, x_2, \pm \frac{h}{2} \right) + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \left( x_1, x_2, \pm \frac{h}{2} \right) \right],$$

ce qui implique, compte tenu de (2.27), que le premier membre est d'ordre  $h$  et donc que

$$(2.28) \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0) = 0.$$

En utilisant (2.22) dérivé en  $x_3$ , il vient :

$$(2.29) \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\nu x_3}{1-\nu} \left[ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} \right] + O(h^2),$$

(2)  $\zeta$  est la déflexion verticale.

d'où l'on déduit,

$$(2.30) \quad \varepsilon_{kk}(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left[ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} \right] + O(h^2).$$

A partir de ces relations on peut calculer le tenseur des déformations en  $x=(x_1, x_2, x_3)$ ,

$$(2.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = -x_3 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} + O(h^2), \quad \varepsilon_{22} = -x_3 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} + O(h^2), \\ \varepsilon_{33} = \frac{\nu x_3}{1-\nu} \Delta \zeta + O(h^2), \\ \varepsilon_{12} = -x_3 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2} + O(h^2), \quad \varepsilon_{23} = O(h^2), \quad \varepsilon_{13} = O(h^2), \end{array} \right.$$

puis le tenseur des contraintes  $(\sigma_{ij})$ ,

$$(2.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = -x_3 \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} \right) + O(h^2), \\ \sigma_{22} = -x_3 \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} \right) + O(h^2), \\ \sigma_{12} = -\frac{E}{1+\nu} x_3 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2} + O(h^2), \\ \sigma_{13} = O(h^2), \quad \sigma_{23} = O(h^2), \quad \sigma_{33} = O(h^2). \end{array} \right.$$

Deux méthodes se présentent alors pour effectuer la mise en équations.

### 2.3.2. Mise en équations. Première méthode

A partir des relations (2.32) on calcule les  $\Sigma_{i\alpha}$  et les  $M_{\alpha\beta}$  introduits au n° 2.2. On obtient immédiatement

$$(2.33) \quad \Sigma_{i\alpha} = O(h^3), \quad (i = 1, 2, 3, \alpha = 1, 2)$$

$$(2.34) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{11} = -M_{22} = \frac{E}{1+\nu} \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2} + O(h^4), \\ M_{12} = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{h^3}{12} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} \right) + O(h^4), \\ M_{21} = -\frac{E}{1-\nu^2} \frac{h^3}{12} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} \right) + O(h^4). \end{array} \right.$$

On voit alors qu'il n'est pas possible dans les équations (2.14) de négliger  $\Sigma_{13}$  et  $\Sigma_{23}$  devant les termes de moment car tous ces termes sont du même ordre  $h^3$ . On doit donc éliminer  $\Sigma_{13}$  et  $\Sigma_{23}$  grâce à la troisième équation (2.15), ce qui redonne (2.16), c'est-à-dire ici,

$$(2.35) \quad \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Delta \Delta \zeta = f_3, \quad \left( \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right).$$

On pose fréquemment

$$(2.36) \quad D = Eh^3/12(1 - \nu^2) ;$$

le coefficient  $D$  est connu sous le nom de *module de rigidité à la flexion*. ■

*Formule de Green* (ou *principe des travaux virtuels*)

La déflexion verticale  $\zeta(x_1, x_2)$ , qui est l'inconnue de ce problème, satisfait dans  $\Omega$  à l'équation biharmonique (2.35). Il est évidemment nécessaire, pour résoudre cette dernière, de posséder des conditions à la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$ . Ces conditions aux limites porteront soit sur le déplacement  $\zeta$  lui-même, soit sur des données d'efforts. Nous avons les deux composantes dans le plan  $x_1x_2$  de la densité linéique de moments appliqués sur  $\Gamma$  (la composante sur  $Ox_3$  de cette densité de moments est identiquement nulle). On a, dans les notations introduites par (2.6),

$$(2.37) \quad \begin{cases} M_1 = M_{1\alpha} n_\alpha = D \left\{ (1 - \nu) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2} n_1 + \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} \right) n_2 \right\}, \\ M_2 = M_{2\alpha} n_\alpha = D \left\{ - \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} \right) n_1 - (1 - \nu) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2} n_2 \right\}. \end{cases}$$

On peut naturellement former les composantes normale et tangentielle de cette densité de vecteurs moments, soit

$$(2.38) \quad M_n = M_1 n_1 + M_2 n_2, \quad M_\tau = -M_1 n_2 + M_2 n_1.$$

Ces notations étant introduites, nous allons écrire une *formule de Green*.

Soit une fonction  $v(x_1, x_2)$  définie dans  $\Omega$  et suffisamment régulière. Multiplions (2.16) par  $v$  et intégrons sur  $\Omega$ ; il vient

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{3\gamma\delta} M_{\gamma\alpha} v_{,\alpha\delta} dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} f_3 v dx_1 dx_2 ;$$

intégrant deux fois par parties, il vient, en posant  $dx = dx_1 dx_2$

$$(2.39) \quad \int_{\Omega} \varepsilon_{3\gamma\delta} M_{\gamma\alpha} v_{,\alpha\delta} dx - \int_{\Gamma} \varepsilon_{3\gamma\delta} M_{\gamma\alpha} v_{,\delta} n_\delta d\Gamma + \int_{\Gamma} \varepsilon_{3\gamma\delta} M_{\gamma\alpha} n_\delta v d\Gamma = \int_{\Omega} f_3 v dx.$$

Nous allons transformer successivement chacune des intégrales sur  $\Gamma$ . En utilisant (2.13) et (2.6) nous avons

$$\int_{\Gamma} v \varepsilon_{3\gamma\delta} M_{\gamma\alpha} n_\delta d\Gamma = - \int_{\Gamma} \varepsilon_{3\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\alpha\beta} \Sigma_{3\alpha} v n_\beta d\Gamma = - \int_{\Gamma} v \Sigma_{3\alpha} n_\alpha d\Gamma,$$

puis

$$(2.40) \quad \int_{\Gamma} v \varepsilon_{3\gamma\delta} M_{\gamma\alpha} n_\delta d\Gamma = - \int_{\Gamma} v R_3 d\Gamma.$$

En décomposant le vecteur  $\{M_{\gamma\alpha} n_\alpha\}$  en composantes normale et tangentielle, il vient :

$$(2.41) \quad \int_{\Gamma} \varepsilon_{3\gamma\delta} M_{\gamma\alpha} n_\alpha v_{,\delta} d\Gamma = \int_{\Gamma} \varepsilon_{3\gamma\delta} (M_n n_\gamma + M_\tau \tau_\gamma) v_{,\delta} d\Gamma.$$

En remarquant que

$$(2.42) \quad \tau_\delta = \varepsilon_{\delta 3\gamma} n_\gamma, \quad n_\delta = -\varepsilon_{\delta 3\gamma} \tau_\gamma$$

on obtient

$$(2.43) \quad \int_\Gamma \varepsilon_{3\gamma\delta} M_n n_\gamma v_{,\delta} d\Gamma = \int_\Gamma M_n v_{,\delta} \tau_\delta d\Gamma = - \int_\Gamma v (\partial M_n / \partial \tau) d\Gamma,$$

car  $\Gamma$  est une courbe fermée. L'autre terme se transforme aisément en

$$(2.44) \quad \int_\Gamma \varepsilon_{3\gamma\delta} M_\tau \tau_\gamma v_{,\delta} d\Gamma = - \int_\Gamma M_\tau v_{,\delta} n_\delta d\Gamma = - \int_\Gamma M_\tau (\partial v / \partial n) d\Gamma.$$

En regroupant les différents termes on obtient,

$$(2.45) \quad \int_\Omega \varepsilon_{3\gamma\delta} M_{\gamma\alpha} v_{,\alpha\delta} dx = \int_\Omega f_3 v dx - \int_\Gamma M_\tau (\partial v / \partial n) d\Gamma + \\ + \int_\Gamma (R_3 - \partial M_n / \partial \tau) v d\Gamma.$$

Explicitons encore la forme bilinéaire du premier membre,

$$(2.46) \quad a(\zeta, v) = \int_\Omega \varepsilon_{3\gamma\delta} M_{\gamma\alpha} v_{,\alpha\delta} dx = \int_\Omega (M_{1\alpha} v_{,\alpha 2} - M_{2\alpha} v_{,\alpha 1}) dx.$$

En utilisant les expressions de  $M_{\gamma\alpha}$  données par (2.34), il vient

$$(2.47) \quad \left| \begin{aligned} a(\zeta, v) = D \int_\Omega \left[ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + v \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) + \right. \\ \left. + 2(1-v) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2} \right] dx. \end{aligned} \right.$$

On voit que la forme bilinéaire  $a(\zeta, v)$  est *symétrique*.

Posons de plus

$$(2.48) \quad (\varphi, \psi) = \int_\Omega \varphi \psi dx, \quad (\varphi, \psi)_\Gamma = \int_\Gamma \varphi \psi d\Gamma.$$

La formule de Green s'écrit alors

$$(2.49) \quad a(\zeta, v) = (f_3, v) + (R_3 - \partial M_n / \partial \tau, v)_\Gamma - (M_\tau, \partial v / \partial n)_\Gamma.$$

où les expressions de  $M_\tau$  et  $M_n$  sont données à partir de  $\zeta$  par (2.37), (2.38) et (2.34).

Cette formule laisse prévoir que *certain*s problèmes « bien posés », unilatéraux ou non, font intervenir des relations sur  $\Gamma$  entre  $M_\tau$ ,  $R_3 - \partial M / \partial \tau$ ,  $\zeta$  et  $\partial \zeta / \partial n$ . On posera dans la suite

$$F_3 = R_3 - \partial M_n / \partial \tau.$$

### 2.3.3. Mise en équations. Deuxième méthode (due à Landau et Lifschitz [1])

Nous pouvons calculer, de façon approchée, l'énergie de déformation du corps tridimensionnel  $\mathcal{V}$  en utilisant les expressions (2.31) et (2.32) pour les tenseurs des déformations et des contraintes.

Or nous avons vu au Chapitre 3, n° 3.2, que la solution d'un problème d'élasticité linéaire s'obtient en minimisant l'énergie potentielle des champs de déplacements cinématiquement admissibles. Cette énergie potentielle étant une fonctionnelle convexe, il suffit de la rendre stationnaire. Nous venons de voir que nous connaissons, en fonction de  $\zeta(x_1, x_2)$ , l'énergie de déformation  $E(\zeta)$  du corps  $\mathcal{V}$ , soit

$$(2.50) \quad E(\zeta) = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{+h/2} dx_3 \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dx_1 dx_2,$$

c'est-à-dire, tous calculs faits,

$$(2.51) \quad E(\zeta) = \frac{h^3 E}{24(1-\nu^2)} \int_{\Omega} \left\{ (\Delta\zeta)^2 + 2(1-\nu) \left[ \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2} \right] \right\} dx.$$

Comme  $E(\zeta)$  est le seul terme non linéaire de l'énergie potentielle des champs cinématiquement admissibles, nous formons sa différentielle,

$$(2.52) \quad (E'(\zeta), v) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{E(\zeta + \lambda v) - E(\zeta)}{\lambda}, \quad (v = v(x_1, x_2)).$$

On obtient facilement

$$(2.53) \quad (E'(\zeta), v) = a(\zeta, v)$$

où  $a(\zeta, v)$  est défini comme en (2.47). On voit d'ailleurs que  $E(\xi) = \frac{1}{2} a(\xi, \xi)$ . Par intégrations par parties  $a(\xi, v)$  s'écrit

$$(2.54) \quad \begin{aligned} a(\zeta, v) = & D \int_{\Omega} \Delta^2 \zeta v dx - \\ & - D \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ n_1 n_2 \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (n_1^2 - n_2^2) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \right\} v d\Gamma + D \int_{\Gamma} \left\{ \Delta \zeta + (1-\nu) \times \right. \\ & \left. \times \left( 2 n_1 n_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2} - n_2^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} - n_1^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} \right) \right\} \frac{\partial v}{\partial n} d\Gamma. \end{aligned}$$

Pour que l'énergie potentielle soit stationnaire il faut et il suffit que le travail des forces extérieures dans le déplacement  $v$  soit donné par  $a(\zeta, v)$ . Ceci implique que ce travail soit de la forme

$$(2.55) \quad \int_{\Omega} f_3 v dx + \int_{\Gamma} F_3 v d\Gamma - \int_{\Gamma} \tilde{M}(\partial v / \partial n) d\Gamma$$

avec les relations

$$(2.56) \quad D \Delta^2 \zeta = f_3 .$$

$$(2.57) \quad -D \left\{ \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} + (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ n_1 n_2 \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} \right) + (n_1^2 - n_2^2) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \right\} = \tilde{F}_3 ,$$

$$(2.58) \quad D \left\{ \Delta \zeta + (1 - \nu) \left( 2 n_1 n_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2} - n_2^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} - n_1^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} \right) \right\} = -\tilde{M} .$$

Ceci redonne les relations obtenues par la première méthode si l'on vérifie que

$$(2.59) \quad \begin{cases} \tilde{F}_3 = F_3 (= R_3 - \partial M_n / \partial \tau) , \\ \tilde{M} = M_\tau , \end{cases}$$

ce qui se fait facilement en utilisant (2.14) et (2.34).

### 2.3.4. Récapitulation

Dans la théorie linéarisée développée précédemment, valable lorsque les déplacements des points de la plaque sont petits, l'équation qui gouverne la déformation est (2.56), à laquelle on associe des conditions aux limites. Si ces dernières portent sur le déplacement elles s'expriment directement en fonction de  $\zeta$ ; si elles portent sur des efforts elles s'expriment grâce à (2.57) s'il s'agit de forces et grâce à (2.58) s'il s'agit d'un moment d'axe porté par la tangente à  $\Gamma$ .

L'énergie de déformation est donnée par la forme  $\frac{1}{2} a(\zeta, \zeta)$  calculée à partir de la forme bilinéaire  $a(\zeta, v)$  définie en (2.46) et explicitée en (2.47). De plus on a la formule de Green, ou principe des travaux virtuels, (2.49). ■

#### Cas dynamique

Le déplacement est alors fonction de  $x$  et  $t$  soit  $\zeta = \zeta(x, t)$ . Dans (2.56) on doit ajouter aux forces  $f_3$  les forces d'inertie  $-\rho h \partial^2 \zeta / \partial t^2$  et on obtient

$$(2.60) \quad \rho h \partial^2 \zeta / \partial t^2 + D \Delta^2 \zeta = f_3 , \quad (\rho = \text{densité surfacique dans l'état non déformé}) .$$

On doit évidemment prescrire les conditions initiales

$$(2.61) \quad \begin{cases} \zeta(x, 0) = \zeta_0(x) \\ \partial \zeta(x, 0) / \partial t = \zeta_1(x) , \end{cases}$$

à quoi on ajoute des conditions aux limites (portant sur des équations ou *des inéquations*) analogues à celles du cas stationnaire. ■



### 3. PROBLÈMES ENVISAGÉS

Les problèmes envisagés peuvent être statiques ou dynamiques. A chaque problème statique on peut associer un problème dynamique en ajoutant aux forces surfaciques appliquées les forces d'inertie et en prescrivant des conditions initiales. Nous n'énoncerons donc explicitement ici que les *problèmes statiques*. Ils se divisent en deux groupes : les problèmes classiques dont la formulation variationnelle conduit à des équations et les problèmes « unilatéraux » dont la formulation variationnelle conduit à des inéquations.

#### 3.1. Problèmes classiques

En chaque point de  $\Gamma$  on se donne  $F_3$  ou  $\zeta$  et  $M_\tau$  ou  $\partial\zeta/\partial n$  ce qui correspond physiquement à

\*) une densité de forces  $F_3$  sur  $\Gamma$  ou le déplacement  $\zeta$  des points de  $\Gamma$ ,

\*\*) le couple  $M_\tau$  dont le moment est porté par la tangente  $\tau$  à  $\Gamma$  ou  $\partial\zeta/\partial n$  c'est-à-dire la pente de la plaque comptée sur la normale aux points de  $\Gamma$ .

*Exemples*

1) *Plaque encastrée.* On imposera

$$(3.1) \quad \zeta = \partial\zeta/\partial n = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

2) *Plaque avec bord libre sur une partie  $\Gamma_1$  de  $\Gamma$  et bord fixé sur  $\Gamma_2$  avec rotation libre autour de la tangente à  $\Gamma_2$ .* On a alors

$$(3.2) \quad F_3 = M_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1,$$

$$(3.3) \quad \zeta = M_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2.$$

#### 3.2. Problèmes unilatéraux

1) *Déplacement unilatéral des points de  $\Omega$*

Par exemple

$$(3.4) \quad \left. \begin{array}{l} \zeta(x) \geq 0 \quad \text{sur } \Omega \\ \zeta(x) > 0 \Rightarrow f_3 = 0 \\ \zeta(x) = 0 \Rightarrow f_3 \geq 0 \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Omega,$$

les conditions au bord  $\Gamma$  étant de type classique.

2) *Déplacement unilatéral des points de  $\Gamma$*

$$(3.5) \quad \left. \begin{array}{l} \zeta(x) \geq 0 \\ \zeta(x) > 0 \Rightarrow F_3 = 0 \\ \zeta(x) = 0 \Rightarrow F_3 \geq 0 \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma,$$

les conditions sur  $M_\tau$  ou  $\partial\zeta/\partial n$  sur  $\Gamma$  sont de type classique et  $f_3$  est donné.

3) *Rotation unilatérale des points de  $\Gamma$* 

$$(3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial\zeta/\partial n \geq 0 \quad \text{sur } \Gamma \text{ avec} \\ \partial\zeta/\partial n > 0 \Rightarrow M_\tau = 0, \\ \partial\zeta/\partial n = 0 \Rightarrow M_\tau \leq 0, \end{array} \right.$$

les conditions sur  $F_3$  ou  $\zeta$  sur  $\Gamma$  étant de type classique et  $f_3$  étant donné.

4) *Déplacements avec frottement des points de  $\Omega$* 

$$(3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} |f_3| < \mathcal{F} \text{ (constante ou fonction positive donnée)} \Rightarrow \zeta = 0, \\ |f_3| = \mathcal{F} \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \zeta = -\lambda f_3, \end{array} \right.$$

les conditions sur  $\Gamma$  étant de type classique.

5) *Déplacements avec frottement des points de  $\Gamma$* 

$$(3.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} |F_3| < \mathcal{F} \Rightarrow \zeta = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ |F_3| = \mathcal{F} \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \zeta = -\lambda F_3, \end{array} \right.$$

les conditions sur la rotation des points de  $\Gamma$  étant de type classique.

6) *Rotation avec frottement des points de  $\Gamma$* 

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} |M_\tau| < \mathcal{M} \text{ (constante positive donnée)} \Rightarrow \partial\zeta/\partial n = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ |M_\tau| = \mathcal{M} \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ avec } \partial\zeta/\partial n = \lambda M_\tau \text{ sur } \Gamma; \end{array} \right.$$

les conditions sur  $F_3$  ou  $\zeta$  sur  $\Gamma$  sont de type classique.

7) On peut également avoir des conditions de l'un des types précédents sur une partie de  $\Gamma$  et des conditions d'autres types sur d'autres parties de  $\Gamma$  (les parties considérées  $\Gamma_i$  de  $\Gamma$  vérifiant  $\cup \Gamma_i = \Gamma$ ). ■

*Remarque 3.1*

Les problèmes 1) et 4) ne sont pas étudiés explicitement dans ce qui suit mais relèvent de méthodes identiques et ne donnent lieu à aucune difficulté particulière; nous avons préféré traiter dans la suite les problèmes présentant des difficultés spécifiques. ■

**4. PROBLÈMES UNILATÉRAUX STATIONNAIRES****4.1. Notations**

Mettant le problème sous forme non dimensionnelle on peut effectuer un changement d'échelle sur les  $x_i$  ramenant au cas  $D = 1$ .

Alors, pour  $u, v \in H^2(\Omega)$ , on pose

$$(4.1) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} dx + \nu \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) dx + 2(1 - \nu) \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} dx.$$

La formule de Green est

$$(4.2) \quad a(u, v) = (\Delta^2 u, v) + (F_3, v)_{\Gamma} - (M_{\nu}, \partial v / \partial n)_{\Gamma}.$$

On pose

$$(4.3) \quad \begin{cases} j_0(v) = \int_{\Gamma} (g_2 v^+ - g_1 v^-) d\Gamma, \\ g_1 < 0 < g_2 \quad (3), \end{cases}$$

$$(4.4) \quad \begin{cases} j_1(v) = \int_{\Gamma} [k_2(\partial v / \partial n)^+ - k_1(\partial v / \partial n)^-] d\Gamma, \\ k_1 < 0 < k_2 \quad (4). \end{cases}$$

## 4.2. Les problèmes (stationnaires)

### Problème 4.1

On cherche  $u \in H^2(\Omega)$  avec

$$(4.5) \quad a(u, v - u) + j_0(v) - j_0(u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in H^2(\Omega),$$

(on a posé  $f_3 = f$ ).

### Problème 4.1bis

On cherche  $u \in H^2(\Omega)$  avec  $\partial u / \partial n = 0$  sur  $\Gamma$ , et

$$(4.5bis) \quad a(u, v - u) + j_0(v) - j_0(u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in H^2(\Omega) \text{ avec } \partial v / \partial n = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

### Problème 4.2

On cherche  $u \in H^2(\Omega)$  avec

$$(4.6) \quad a(u, v - u) + j_1(v) - j_1(u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in H^2(\Omega).$$

### Problème 4.2bis

On cherche  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , avec

$$(4.6bis) \quad a(u, v - u) + j_1(v) - j_1(u) \geq (f, v - u), \quad \forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

(<sup>3</sup>) On prend pour  $g_i$  des constantes. On pourrait aussi prendre des fonctions mesurables et bornées sur  $\Gamma$ .

(<sup>4</sup>) Remarque analogue à (3).

On va *interpréter* maintenant ces problèmes et vérifier qu'ils contiennent (éventuellement après des passages à la limite) les problèmes du n° 3 <sup>(5)</sup>. ■

Prenant dans toutes les inéquations ci-dessus  $v = u \pm \varphi$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , on en déduit que, dans tous les cas

$$(4.7) \quad \Delta^2 u = f.$$

Donc avec la formule de Green (4.2) on en déduit que

$$(4.8) \quad a(u, v - u) - (F_3, v - u)_\Gamma + (M_\tau, \partial(v - u)/\partial n)_\Gamma = (f, v - u)$$

d'où : pour les problèmes 4.1 et 4.1bis :

$$(4.9) \quad \left| \begin{array}{l} (F_3, v - u)_\Gamma + j_0(v) - j_0(u) - (M_\tau, \partial(v - u)/\partial n)_\Gamma \geq 0 \\ \forall v \in H^2(\Omega) \quad (\text{resp. } \forall v \text{ avec } \partial v/\partial n = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ dans le Problème 4.1bis}) ; \end{array} \right.$$

pour les problèmes (4.2 et 4.2bis)

$$(4.10) \quad \left| \begin{array}{l} -(M_\tau, \partial(v - u)/\partial n)_\Gamma + j_1(v) - j_1(u) + (F_3, v - u)_\Gamma \geq 0 \\ \forall v \in H^2(\Omega) \quad (\text{resp. } \forall v \text{ avec } v = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ dans le Problème 4.2bis}). \end{array} \right.$$

*Conditions aux limites dans le Problème 4.1*

Alors (4.9) implique (et équivaut à)

$$(4.11) \quad \left| \begin{array}{l} M_\tau = 0 \quad \text{et} \\ \int_\Gamma [F_3(v^+ - v^-) + g_2 v^+ - g_1 v^-] d\Gamma - (F_3, u)_\Gamma - j_0(u) \geq 0. \end{array} \right.$$

Prenant  $\varphi \geq 0$  sur  $\Gamma$  et  $v = \pm \lambda\varphi$ ,  $\lambda > 0$ , on en déduit que

$$F_3 + g_2 \geq 0, \quad F_3 + g_1 \leq 0, \quad (F_3, u)_\Gamma + j_0(u) = 0$$

d'où

$$(4.12) \quad \left| \begin{array}{l} -g_2 \leq F_3 \leq g_1 \\ F_3 u + g_2 u^+ - g_1 u^- = 0 \quad \text{i.e.} \quad (F_3 + g_2) u^+ + (-F_3 - g_1) u^- = 0, \end{array} \right.$$

ou encore

$$(4.13) \quad \left| \begin{array}{l} -g_2 < F_3 < -g_1 \Rightarrow u = 0, \\ F_3 = -g_1 \Rightarrow u \leq 0, \\ F_3 = -g_2 \Rightarrow u \geq 0. \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

*Cas particulier :*

$$g_2 = -g_1 = \mathcal{F} ; \quad \text{c'est le problème 5) du n° 3.} \quad \blacksquare$$

<sup>(5)</sup> On traitera de façon analogue les problèmes avec déplacement unilatéral ou frottement des points de  $\Omega$ .

*Cas limite*

On prend  $g_2 = 0$  et l'on fait tendre  $g_1$  vers  $-\infty$ . A la limite (qui existe)  $u$  satisfait à

$$(4.14) \quad \begin{cases} 0 < F_3 \Rightarrow u = 0 \\ F_3 = 0 \Rightarrow u \geq 0. \end{cases}$$

C'est le Problème 2) du n° 3.2.

La formulation variationnelle *directe* de ce problème est la suivante :

*Problème 4.3*

On introduit

$$(4.15) \quad K_1 = \{ v \mid v \in H^2(\Omega), v \geq 0 \text{ sur } \Gamma \},$$

convexe fermé de  $H^2(\Omega)$ ; on cherche  $u$  solution de

$$(4.16) \quad \begin{cases} u \in K_1, \\ a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K_1. \quad \blacksquare \end{cases}$$

*Conditions aux limites dans le Problème 4.1bis*

Les conditions aux limites unilatérales (4.12) (ou (4.13)) sont inchangées, la condition (4.11) étant remplacée par

$$(4.17) \quad \partial u / \partial n = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \quad \blacksquare$$

*Conditions aux limites dans le Problème 4.2*

La condition (4.10) implique (et équivaut à)

$$(4.18) \quad F_3 = 0$$

et

$$\int_{\Gamma} [-M_{\tau}((\partial v / \partial n)^+ - (\partial v / \partial n)^-) + k_2(\partial v / \partial n)^+ - k_1(\partial v / \partial n)^-] d\Gamma + (M_{\tau}, \partial u / \partial n)_{\Gamma} - j_1(u) \geq 0,$$

d'où

$$-M_{\tau} + k_2 \geq 0, \quad -M_{\tau} + k_1 \leq 0, \quad (M_{\tau}, \partial u / \partial n) - j_1(u) = 0$$

d'où

$$(4.19) \quad \begin{cases} k_1 \leq M_{\tau} \leq k_2, \\ (k_2 - M_{\tau})(\partial u / \partial n)^+ + (M_{\tau} - k_1)(\partial u / \partial n)^- = 0, \end{cases}$$

ou encore

$$(4.20) \quad \begin{cases} k_1 < M_{\tau} < k_2 \Rightarrow \partial u / \partial n = 0, \\ M_{\tau} = k_2 \Rightarrow \partial u / \partial n \geq 0, \\ M_{\tau} = k_1 \Rightarrow \partial u / \partial n \leq 0. \end{cases}$$

*Cas particulier*

$$k_2 = -k_1 = \mathcal{M}.$$

On trouve le Problème 6) du n° 3.2.  $\blacksquare$

*Cas limite*

On prend  $k_2 = 0$  et l'on fait  $k_1 \rightarrow -\infty$ . On trouve

$$\begin{cases} M_\tau > 0 \Rightarrow \partial u / \partial n = 0, \\ M_\tau = 0 \Rightarrow \partial u / \partial n \geq 0, \end{cases}$$

c'est le problème 3) du n° 3.2.

La formulation variationnelle directe de ce problème est la suivante :

*Problème 4.4*

On introduit

$$(4.21) \quad K_2 = \{ v \mid v \in H^2(\Omega), \quad \partial v / \partial n \geq 0 \text{ sur } \Gamma \},$$

convexe fermé de  $H^2(\Omega)$ ; on cherche  $u$  solution de

$$(4.22) \quad \begin{cases} u \in K_2, \\ a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K_2. \quad \blacksquare \end{cases}$$

*Conditions aux limites dans le Problème 4.2bis*

Les conditions aux limites unilatérales (4.19) sont inchangées, la condition (4.18) étant remplacée par

$$(4.23) \quad u = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \quad \blacksquare$$

*Remarque 4.1*

Si  $j_0(v) = 0$ ,  $g_1 = g_2 = 0$ , le Problème 4.1 équivaut à

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H^2(\Omega)$$

i.e. (4.7) avec les conditions aux limites de type classique

$$(4.24) \quad \partial u / \partial n = 0, \quad F_3 = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Le Problème 4.1bis équivaut aux conditions aux limites

$$(4.25) \quad \partial u / \partial n = 0, \quad F_3 = 0.$$

Si  $j_1(v) = 0$ , i.e.  $k_1 = k_2 = 0$ , le Problème 4.2 équivaut à (4.7) avec les conditions aux limites (4.24) et le Problème 4.2bis équivaut à (4.7) avec les conditions

$$(4.26) \quad u = 0, \quad M_\tau = 0. \quad \blacksquare$$

Le problème avec les conditions (plaque encastré)

$$(4.27) \quad u = 0, \quad \partial u / \partial n = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

est immédiat ; il équivaut à la minimisation sur  $H_0^2(\Omega)$  de

$$\frac{1}{2} a(v, v) - (f, v)$$

problème qui admet une solution unique, car

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H^2}^2, \quad \alpha > 0, \quad \forall v \in H_0^2(\Omega). \quad \blacksquare$$

### 4.3. Résolution du problème 4.1

#### Conditions nécessaires pour l'existence d'une solution

Pour simplifier l'écriture posons

$$(4.28) \quad \psi(\lambda) = g_2 \lambda^+ - g_1 \lambda^-,$$

de sorte que

$$j_0(v) = \int_{\Gamma} \psi(v) \, d\Gamma.$$

Le problème équivaut à la minimisation sur  $H^2(\Omega)$  de la fonctionnelle

$$(4.29) \quad \frac{1}{2} a(v, v) + j_0(v) - (f, v) = H(v).$$

Désignons par  $\mathcal{P}$  l'espace des polynômes de degré  $\leq 1$  ; on a :

$$\mathcal{P} \subset H^2(\Omega) \quad (\text{car } \Omega \text{ est borné}) \quad \text{et} \quad a(u, p) = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}.$$

On doit avoir, pour l'existence d'une solution :

$$(4.30) \quad \forall p \in \mathcal{P}, \quad H(\lambda p) \text{ est bornée inférieurement lorsque } \lambda \rightarrow \pm \infty.$$

Or

$$H(\lambda p) = j_0(\lambda p) - \lambda(f, p) = \lambda \left[ \int_{\Gamma} p \frac{\psi(\lambda p)}{\lambda p} \, d\Gamma - (f, p) \right].$$

Mais lorsque  $\lambda \rightarrow +\infty$ ,

$$\int_{\Gamma} p \frac{\psi(\lambda p)}{\lambda p} \, d\Gamma \rightarrow \int_{\Gamma} (g_2 p^+ - g_1 p^-) \, d\Gamma$$

et lorsque  $\lambda \rightarrow -\infty$ ,

$$\int_{\Gamma} p \frac{\psi(\lambda p)}{\lambda p} \, d\Gamma \rightarrow \int_{\Gamma} (g_1 p^+ - g_2 p^-) \, d\Gamma$$

de sorte que la condition (4.30) implique ( $\lambda \rightarrow +\infty$ )

$$\int_{\Gamma} (g_2 p^+ - g_1 p^-) \, d\Gamma - (f, p) \geq 0$$

i.e.

$$(4.31) \quad (f, p) \leq j_0(p) \quad \forall p \in \mathcal{P},$$

et  $(\lambda \rightarrow -\infty)$

$$\int_{\Gamma} (g_1 p^+ - g_2 p^-) d\Gamma - (f, p) \leq 0$$

i.e.

$$-j_0(-p) - (f, p) \leq 0 \quad \forall p \in \mathcal{P},$$

et changeant  $p$  en  $-p$  cela équivaut à (4.31). On a donc démontré le

**Théorème 4.1.** *Pour que le Problème 4.1 admette une solution, il est nécessaire que  $f$  satisfasse à (4.31).*

*Cas particulier*

Supposons  $j_0 = 0$  (ce qui correspond — cf. Remarque 4.1 — à un problème de type classique). Alors (4.31) équivaut à

$$(f, p) = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P},$$

i.e. à

$$(4.32) \quad (f, 1) = 0, \quad (f, x_\alpha) = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad \blacksquare$$

*Cas limite*

Pour  $g_2 = 0, g_1 = -\infty$ , (4.31) donne

$$(4.33) \quad (f, p) \leq 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}, \quad p \geq 0 \text{ sur } \Gamma.$$

La condition nécessaire (4.33) s'établit d'ailleurs directement à partir de l'énoncé (4.16); on note que (4.16) équivaut à

$$(4.34) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in K_1, \\ a(u, v) \geq (f, v) \quad \forall v \in K_1, \\ a(u, u) = (f, u). \end{array} \right.$$

Prenant  $v = p \in K_1$  on trouve la condition nécessaire (4.33).

#### 4.4. Résolution du problème 4.1. Conditions suffisantes

On va montrer le

**Théorème 4.2.** *On suppose  $f$  donné dans  $L^2(\Omega)$  (ce qui peut être étendu). On suppose  $g_1 < 0 < g_2, g_1, g_2$  finis, et on suppose que <sup>(6)</sup>*

$$(4.35) \quad (f, p) < j_0(p) \quad \forall p \in \mathcal{P}, \quad p \neq 0.$$

Alors le Problème 4.1 admet au moins une solution.

<sup>(6)</sup> Analogue « fort » de (4.31).



*Remarque 4.2*

Dans le cas «  $j_0 = 0$  » les conditions (4.32) sont suffisantes ; c'est la classique alternative de Fredholm. Il y a alors *une infinité* de solutions : si  $u$  est une solution, alors toutes les solutions sont données par

$$u + p, \quad p \in \mathcal{P}.$$

*Remarque 4.3*

Pour  $g_2 = 0, g_1 = -\infty$ , on a un résultat analogue :

**Théorème 4.2 bis.** *On suppose  $f$  donné dans  $L^2(\Omega)$  (ce qui peut être étendu). On suppose que*

$$(4.36) \quad (f, p) < 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}, \quad p \geq 0 \text{ sur } \Gamma, \quad p \neq 0.$$

Alors le Problème 4.3 admet au moins une solution. ■

*Démonstration du Théorème 4.2*

Il résulte de (4.35) et du fait que  $\mathcal{P}$  est de dimension finie qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$(4.37) \quad (f, p) \leq j_0(p) - \varepsilon |p|$$

où  $|p| =$  norme de  $p$  dans  $L^2(\Omega)$  (on pourrait évidemment, quitte à changer le  $\varepsilon$ , prendre dans (4.37) n'importe quelle autre norme au lieu de  $|p|$ ). Décomposons  $v \in H^2(\Omega)$  par

$$(4.38) \quad \begin{cases} v = \tilde{v} + p, & p \in \mathcal{P}, \\ (\tilde{v}, q) = 0 & \forall q \in \mathcal{P}. \end{cases}$$

Alors écrivant  $a(v)$  au lieu de  $a(v, v)$ , la fonctionnelle (4.29) vaut :

$$(4.39) \quad H(v) = H(\tilde{v} + p) = \frac{1}{2} a(v) + j_0(\tilde{v} + p) - (f, \tilde{v} + p).$$

Mais

$$j_0(\tilde{v} + p) \geq j_0(p) - c_1 \|\tilde{v}\|, \quad \text{où } \|\cdot\| = \text{norme dans } H^2(\Omega), \\ |(f, \tilde{v})| \leq c_2 \|\tilde{v}\|.$$

Admettons un instant le

**Lemme 4.1.** *Il existe  $\alpha > 0$  telle que*

$$(4.40) \quad a(\tilde{v}) \geq \alpha \|\tilde{v}\|^2, \quad \tilde{v} \in H^2(\Omega), \quad (\tilde{v}, q) = 0 \quad \forall q \in \mathcal{P}.$$

On a donc

$$H(v) \geq \alpha \|\tilde{v}\|^2 - c_3 \|\tilde{v}\| + j_0(p) - (f, p)$$

et donc d'après (4.37) :

$$(4.41) \quad II(v) \geq \alpha \|\tilde{v}\|^2 - c_3 \|\tilde{v}\| + \varepsilon |p|.$$

Mais alors  $II(v) \rightarrow +\infty$  si  $\|v\| \rightarrow +\infty$ , d'après le

**Lemme 4.2.** *Sur  $H^2(\Omega)$ , les normes  $\|v\|$  et  $(a(\tilde{v}))^{1/2} + |p|$  sont équivalentes.*

Le théorème est donc démontré, sous réserve de la vérification des lemmes. Naturellement le Lemme 4.1 résulte du Lemme 4.2. Reste donc à montrer le Lemme 4.2. Le principe de la démonstration est le même qu'au Lemme 7.1, Chapitre 1. Posons

$$(4.42) \quad \| \| v \| \| = (a(\tilde{v}))^{1/2} + |p|.$$

La fonction  $v \rightarrow \| \| v \| \|$  est une norme. En effet le seul point non trivial est de voir que si  $\| \| v \| \| = 0$ , alors  $v = 0$ . Or on a  $a(\tilde{v}) = 0$ ,  $|p| = 0$ , donc  $p = 0$  et  $\tilde{v} \in \mathcal{P}$  ce qui entraîne  $\tilde{v} = 0$  (car  $(\tilde{v}, q) = 0 \quad \forall q \in \mathcal{P}$ ). D'après le théorème du graphe fermé (comme au Chapitre 1, Lemme 7.1), il suffit donc de vérifier que  $H^2(\Omega)$  est *complet* pour la norme (4.42). Soit donc  $v_n = \tilde{v}_n + p_n$  une suite de Cauchy pour cette norme. Alors  $\partial^2 v_n / \partial x_\alpha \partial x_\beta$  converge dans  $L^2(\Omega)$  et  $p_n$  converge dans  $\mathcal{P}$ . D'après Deny-Lions [1], on peut alors trouver une suite  $q_n \in \mathcal{P}$  telle que

$$\tilde{v}_n + q_n \rightarrow w \quad \text{dans } H^2(\Omega).$$

Mais alors

$$(v_n + q_n, q) \rightarrow (w, q) \quad \forall q \in \mathcal{P}$$

i.e.

$$(q_n, q) \rightarrow (w, q) \quad \forall q \in \mathcal{P}.$$

Donc  $q_n \rightarrow q_0$  dans  $\mathcal{P}$  et donc  $v_n = (v_n + q_n) - q_n \rightarrow w - q_0$  dans  $H^2(\Omega)$ , donc  $v_n = \tilde{v}_n + p_n$  converge dans  $H^2(\Omega)$ .

*Démonstration du Théorème 4.2bis*

Le Théorème 4.2bis est une conséquence du Théorème 5.1 de Lions-Stampacchia [1] (prendre, dans les notations de ce théorème,  $V = H^2(\Omega)$ ,  $p_0(v) = |v|$ ,  $p_1(v) = (a(v))^{1/2}$ ; alors  $Y = \mathcal{P}$  et l'hypothèse (5.3) du Théorème 5.1 de Lions-Stampacchia équivaut au Lemme 4.1).

#### 4.5. La question de l'unicité dans les problèmes 4.1 et 4.3

La question de l'unicité n'est pas résolue dans le Problème 4.1; il est immédiat que si  $u_1$  et  $u_2$  sont deux solutions éventuelles, alors  $u_1 - u_2 \in \mathcal{P}$  mais nous n'avons pu élucider la question de savoir si l'on peut, ou non, avoir plusieurs solutions  $u$  et  $u + p$ ,  $p \in \mathcal{P}$ .

Voici un résultat *partiel* relatif au cas du Problème 4.3.

**Théorème 4.3.** *On se place dans les hypothèses du Théorème 4.2bis et on suppose en outre que  $\Gamma$  n'a aucune partie rectiligne. Alors le Problème 4.3 admet une solution unique.*

*Démonstration*

Soient  $u$  et  $u + p$  deux solutions éventuelles. Les conditions unilatérales sur  $\Gamma$  sont

$$\begin{aligned} u &\geq 0, & F_3 &\geq 0, & uF_3 &= 0, \\ u + p &\geq 0, & F_3 &\geq 0, & (u + p)F_3 &= 0. \end{aligned}$$

Mais il est impossible d'avoir  $F_3 = 0$  p.p. En effet la formule de Green montre alors que

$$\int_{\Omega} \Delta^2 u \, dx = (f, 1) = - \int_{\Gamma} F_3 \, d\Gamma = 0,$$

ce qui est impossible d'après (4.36) pour  $p = 1$ . Donc  $F_3 > 0$  sur un ensemble  $E$  de  $\Gamma$  de mesure  $> 0$  et sur  $E$ , on a  $u = 0$  et  $u + p = 0$  donc  $p = 0$  sur  $E$ , ce qui est impossible d'après l'hypothèse faite sur  $\Gamma$  sauf si  $p \equiv 0$ .

**4.6. Résolution du problème 4.1bis**

On a les résultats suivants :

**Théorème 4.4.** *Pour que le Problème 4.1bis admette une solution, il est nécessaire que*

$$(4.43) \quad g_1 \text{ Mes } \Gamma \leq (f, 1) \leq g_2 \text{ Mes } \Gamma.$$

*Démonstration*

On doit minimiser  $H(v)$  sur l'espace  $V$  des  $v \in H^2(\Omega)$  avec  $\partial v / \partial n = 0$  sur  $\Gamma$ . Donc en particulier  $H(\mu)$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ , est borné inférieurement si le problème admet une solution d'où (de manière analogue au Théorème 4.1)

$$(f, \mu) \leq j_0(\mu) \quad \forall \mu \in \mathbb{R},$$

ce qui équivaut, en prenant  $\mu = 1$  et  $\mu = -1$ , à (4.43). ■

On démontre ensuite, de manière analogue au Théorème 4.2, le

**Théorème 4.5.** *On suppose que*

$$(4.44) \quad g_1 \text{ Mes } \Gamma < (f, 1) < g_2 \text{ Mes } \Gamma.$$

Alors le Problème 4.1bis admet au moins une solution.

On peut cette fois résoudre le problème de l'unicité.

**Théorème 4.6.** *Sous les hypothèses du Théorème 4.5, le Problème 4.1bis admet une solution unique.*

*Démonstration*

Soient  $u_1$  et  $u_2$  deux solutions éventuelles. Alors

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$$

donc  $u_1 - u_2 = p, p \in \mathcal{P}$ . Mais on doit avoir  $\partial u_1 / \partial n = \partial u_2 / \partial n = 0$  donc  $\partial p / \partial n = 0$  sur  $\Gamma$  ce qui équivaut à  $p = \text{Cte} = c \in \mathbb{R}$ . Donc deux solutions éventuelles sont de la forme  $u$  et  $u + c$ , des conditions aux limites unilatérales étant :

$$\begin{aligned} -g_2 < F_3 < -g_1 &\Rightarrow u = 0 \quad \text{et} \quad u + c = 0, \\ F_3 = -g_1 &\Rightarrow u \leq 0 \quad \text{et} \quad u + c \leq 0, \\ F_3 = -g_2 &\Rightarrow u \geq 0 \quad \text{et} \quad u + c \geq 0. \end{aligned}$$

Il est impossible d'avoir  $F_3 = -g_1$  (ou  $F_3 = -g_2$ ) p.p. sur  $\Gamma$  car alors d'après la formule de Green

$$(f, 1) = - \int_{\Gamma} F_3 \, d\Gamma = \int_{\Gamma} g_1 \, d\Gamma,$$

ce qui est impossible d'après (4.44). Si  $-g_2 < F_3 < -g_1$  sur un ensemble  $E$  de mesure positive alors  $u = u + c = 0$  sur  $E$  donc  $c = 0$ . Le seul cas restant est donc  $F_3 = -g_1$  sur  $\Gamma_1, F_3 = -g_2$  sur  $\Gamma_2, \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ , à des ensembles de mesure nulle près. On termine comme au Théorème 7.5, Chapitre 1.

#### 4.7. Résolution du problème 4.2

Le Problème 4.2 équivaut à la minimisation sur  $H^2(\Omega)$  de la fonctionnelle

$$(4.45) \quad J(v) = \frac{1}{2} a(v) + j_1(v) - (f, v).$$

On a le

**Théorème 4.7.** *Pour que le Problème 4.2 admette une solution il est nécessaire que*

$$(4.46) \quad (f, p) \leq j_1(p), \quad \forall p \in \mathcal{P}.$$

*Remarque 4.4*

Comme  $j_1(c) = 0, c = \text{Cte}$ , (4.46) implique que

$$(4.47) \quad (f, 1) = 0.$$

*Démonstration du Théorème 4.7*

La fonction  $\lambda \rightarrow J(\lambda v)$  doit être, pour qu'il existe une solution, bornée inférieurement, ce qui conduit à (4.46), comme au Théorème 4.1.

On démontre ensuite, de façon analogue à celle du Théorème 4.2, le

**Théorème 4.8.** *Si l'on suppose que*

$$(4.48) \quad (f, p) < j_1(p) \quad \forall p \in \mathcal{P}, \quad p \neq 0,$$

*alors le Problème 4.2 admet une solution.*

Il est facile de voir que si  $u$  est solution alors  $u + c$  est solution ; il n'y a donc pas unicité de la solution. Nous n'avons pas complètement résolu la question d'expliquer toutes les solutions.

*Remarque 4.5*

Le Problème 4.2bis admet une solution unique. En effet la forme  $a(u, v)$  est coercive sur  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  : il existe une constante  $\alpha_1 > 0$  telle que

$$a(v) \geq \alpha_1 \|v\|_{H^2(\Omega)}^2 \quad \forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Plus généralement, on a le même résultat si l'on impose à  $u$  d'être nul sur une partie  $\Gamma_0$  de  $\Gamma$  non rectiligne. Cette observation s'étend aux autres types de problèmes étudiés dans ce chapitre. ■

*Remarque 4.6*

Pour que le Problème 4.4 admette une solution, il est nécessaire que

$$(4.49) \quad (f, p) \leq 0 \quad \forall p \in \mathcal{P} \cap K_2 \quad (K_2 \text{ défini en (4.21)}).$$

En fait

$$(4.50) \quad \text{si } \Gamma \text{ est une courbe régulière, } \mathcal{P} \cap K_2 = \mathbb{R}.$$

En effet si  $p = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \in \mathcal{P}$  alors  $\partial p / \partial n = a_1 n_1 + a_2 n_2$  et donc  $p \in \mathcal{P} \cap K_2$  si  $a_1 n_1 + a_2 n_2 \geq 0$  sur  $\Gamma$ . Mais prenant sur  $\Gamma$  des points à normales opposées on en déduit que  $a_1 n_1 + a_2 n_2 = 0$  et  $a_1 = a_2 = 0$ . On a donc (4.50) et alors (4.49) équivaut à

$$(4.51) \quad (f, 1) = 0.$$

Nous ignorons si cette condition est suffisante.

Nous allons donner une condition suffisante, très certainement beaucoup trop restrictive, pour que le Problème 4.4 admette une solution.

On fait les hypothèses suivantes :

$$(4.52) \quad (f, x_\alpha) = 0, \quad \alpha = 1, 2 \quad \text{et (4.51)};$$

$$(4.53) \quad \Omega \text{ est un ouvert borné convexe de frontière } \Gamma \text{ régulière}.$$

Alors le Problème 4.4 admet une solution.

Le problème équivaut en effet à la minimisation de la fonctionnelle

$$\frac{1}{2} a(v) - (f, v)$$

sur  $K_2$ .

Mais d'après (4.52) et l'alternative de Fredholm, il existe  $F \in H^2(\Omega)$  tel que

$$(4.54) \quad (f, v) = a(F, v) \quad \forall v \in H^2(\Omega);$$

( $F$  est défini à l'addition d'un élément  $p$  de  $\mathcal{P}$  près ; on choisit  $F$ ). Alors le problème équivaut à la minimisation de

$$(4.55) \quad a(v - F) = \mathfrak{J}(v)$$

sur  $H^2(\Omega)$ .

On passe au quotient par  $\mathcal{P}$  ; on introduit

$$(4.56) \quad \mathcal{H} = H^2(\Omega)/\mathcal{P}$$

et soit  $\varphi \rightarrow \varphi^*$  l'application canonique de  $H^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}$ . On définit sur  $\mathcal{H}$

$$a(\varphi^*, \psi^*) = a(\varphi, \psi), \quad \varphi \in \varphi^*, \quad \psi \in \psi^*,$$

et la fonctionnelle

$$(4.57) \quad \mathfrak{J}(v^*) = a(v^* - F^*).$$

Désignons par  $K_2^*$  l'image de  $K_2$  par  $\varphi \rightarrow \varphi^*$ . Le problème équivaut alors à la *minimisation de  $\mathfrak{J}(v^*)$  sur  $K_2^*$*  ; mais  $(a(v^*, v^*))^{1/2}$  est équivalent à la norme quotient sur  $\mathcal{H}$ , de sorte que l'on aura existence d'une solution si l'on montre que

$$(4.58) \quad K_2^* \text{ est fermé dans } \mathcal{H}.$$

Soit  $v_j^*$  une suite de  $K_2^*$  avec  $v_j^* \rightarrow v^*$  dans  $\mathcal{H}$ . Il existe  $v_j \in v_j^*$  tel que  $\partial v_j / \partial n \geq 0$  sur  $\Gamma$  et on peut trouver une suite  $p_j \in \mathcal{P}$  telle que

$$(4.59) \quad v_j + p_j \rightarrow w \quad \text{dans } H^2(\Omega).$$

Il résulte de (4.59) que

$$(4.60) \quad \partial v_j / \partial n + \partial p_j / \partial n \rightarrow \partial w / \partial n \quad \text{dans } L^2(\Gamma) \quad (\text{et même dans } H^{1/2}(\Gamma)).$$

Posant  $\partial v_j / \partial n + \partial p_j / \partial n = a_j$  on a :

$$(4.61) \quad \partial p_j / \partial n = a_j - \partial v_j / \partial n \leq a_j \quad \text{sur } \Gamma.$$

Mais comme  $\Omega$  est convexe de frontière régulière, il existe une application  $x \rightarrow \psi(x)$  qui est un difféomorphisme de  $\Gamma \rightarrow \Gamma$  et tel que, la normale en  $y \in \Gamma$  étant désignée par  $n_y$ , on ait :

$$(4.62) \quad n_{\psi(x)} = -n_x.$$

Posons

$$p_j(x) = c_{0j} + c_{1j}x_1 + c_{2j}x_2,$$

on a :

$$\partial p_j(\psi(x)) / \partial n = -\partial p_j(x) / \partial n,$$

de sorte que (4.61) donne :

$$\partial p_j(x) / \partial n \geq -a_j(\psi^{-1}(x)) = b_j(x)$$

et par conséquent

$$(4.63) \quad a_j(x) \leq \partial p_j(x)/\partial n \leq b_j(x),$$

$a_j$  et  $b_j$  demeurant dans des bornés de  $L^2(\Gamma)$ .

On en déduit d'après

$$|\partial p_j(x)/\partial n| \leq |a_j(x)| + |b_j(x)|$$

que

$$(4.64) \quad \partial p_j/\partial n \text{ demeure dans un borné de } L^2(\Gamma).$$

Mais alors  $|c_{1j}| + |c_{2j}| \leq \text{Cte}$  et donc on peut extraire une suite encore notée  $c_{1j}, c_{2j}$  telle que

$$(4.65) \quad q_j = c_{1j} x_1 + c_{2j} x_2 \rightarrow q = c_1 x_1 + c_2 x_2.$$

Mais alors (4.59), qui s'écrit  $v_j + c_{0j} + q_j \rightarrow w$  dans  $H^2(\Omega)$ , entraîne avec (4.65) que

$$(4.66) \quad v_j + c_{0j} \rightarrow \psi = w - q \quad \text{dans } H^2(\Omega)$$

et donc

$$\frac{\partial}{\partial n} (v_j + c_{0j}) = \frac{\partial v_j}{\partial n} \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial n} \quad \text{dans } L^2(\Gamma)$$

ce qui montre que  $\partial \psi/\partial n \geq 0$ . Donc  $\psi \in v^*$  et  $\partial \psi/\partial n \geq 0$  ce qui montre que  $v^* \in K_2^*$ .

Cela montre l'existence d'une solution.

La solution  $u^*$  est unique dans  $\mathcal{H}$ . L'ensemble des solutions est donc donné par les  $u \in u^*$  tels que  $\partial u/\partial n \geq 0$  sur  $\Gamma$ .

*Remarque 4.7*

On peut naturellement introduire des formulations duales des problèmes précédents selon les principes du Chapitre 3, n° 3.5. ■

## 5. PROBLÈMES UNILATÉRAUX D'ÉVOLUTION

### 5.1. Position des problèmes

Les notations sont celles du n° 4. On posera en outre

$$(5.1) \quad H = L^2(\Omega).$$

On désigne comme d'ordinaire par  $u(t)$  la fonction  $x \rightarrow (u(x, t))$  et on pose

$$u'(t) = \partial u(., t)/\partial t, \quad u''(t) = \partial^2 u(., t)/\partial t^2, \dots$$

*Problème 5.1*

On cherche une fonction  $t \rightarrow (u(t))$  de  $[0, T] \rightarrow H^2(\Omega)$  telle que

$$u'(t) \in H^2(\Omega), \quad u''(t) \in H$$

et telle que

$$(5.2) \quad \begin{aligned} (u''(t), v - u'(t)) + a(u(t), v - u'(t)) + j_0(v) - \\ - j_0(u'(t)) \geq (f(t), v - u'(t)) \quad \forall v \in H^2(\Omega), \end{aligned}$$

avec les conditions initiales

$$(5.3) \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1.$$

Ce problème est « l'analogie d'évolution » du Problème 4.1. Il s'interprète de la façon suivante : tout d'abord si  $u$  satisfait à (5.2) alors

$$(5.4) \quad \partial^2 u / \partial t^2 + \Delta^2 u = f \quad \text{dans} \quad Q = \Omega \times ]0, T[.$$

Les conditions aux limites sur  $\Sigma = \Gamma \times ]0, T[$  s'obtiennent comme au n° 4. Ce sont :

$$(5.5) \quad M_\tau = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma$$

et les conditions unilatérales :

$$(5.6) \quad \left| \begin{array}{l} -g_2 < F_3 < -g_1 \Rightarrow \partial u / \partial t = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma, \\ F_3 = -g_1 \Rightarrow \partial u / \partial t \leq 0, \\ F_3 = -g_2 \Rightarrow \partial u / \partial t \geq 0. \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

#### Problème 5.1bis

On introduit l'espace

$$(5.7) \quad V = \{ v \mid v \in H^2(\Omega), \partial v / \partial n = 0 \text{ sur } \Gamma \}.$$

On cherche une fonction  $t \rightarrow u(t)$  de  $[0, T] \rightarrow V$  telle que  $u'(t) \in V$ ,  $u''(t) \in H$  et telle que l'on ait (5.2)  $\forall v \in V$ , avec les conditions initiales (5.3).

Les conditions aux limites sont alors

$$(5.8) \quad \partial u / \partial n = 0 \quad (\text{qui « remplace » (5.5)})$$

et les conditions unilatérales (5.6) inchangées.

#### Problème 5.2

On cherche une fonction satisfaisant aux conditions du Problème 5.1 mais avec  $j_0$  remplacé par  $j_1$ , i.e.

$$(5.9) \quad \begin{aligned} (u''(t), v - u'(t)) + a(u(t), v - u'(t)) + j_1(v) - j_1(u'(t)) \geq \\ \geq (f(t), v - u'(t)), \quad \forall v \in H^2(\Omega), \end{aligned}$$

avec les conditions initiales (5.3).



Ce problème est « l'analogue d'évolution » du Problème 5.1. Il s'interprète de la façon suivante :  $u$  satisfait à (5.4) avec les conditions initiales (5.3) et les conditions aux limites

$$(5.10) \quad F_3 = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

et

$$(5.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_1 < M_\tau < k_2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ M_\tau = k_2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0, \\ M_\tau = k_1 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial t} \leq 0. \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

### Problème 5.2bis

On remplace dans le Problème 5.2  $H^2(\Omega)$  par  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  ; on cherche donc une fonction  $u$  à valeurs dans  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  et vérifiant (5.9) avec

$$v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

et les conditions initiales (5.3).

Le problème s'interprète ainsi :  $u$  satisfait à (5.4), (5.3) et les conditions aux limites

$$(5.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (\text{qui « remplace » (5.10) et les conditions (5.11)} \\ \text{étant inchangées.} \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

### Cas limites

Si l'on fait (formellement)  $g_2 = 0, g_1 = -\infty$  dans le Problème 5.1, on est conduit au problème suivant, « analogue d'évolution » du Problème 4.3 :

### Problème 5.3

Le convexe  $K_1$  étant défini par (4.15), on cherche une fonction  $t \rightarrow u(t)$ , telle que :

$$(5.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} u'(t) \in K_1, \\ (u''(t), v - u'(t)) + a(u(t), v - u'(t)) \geq (f(t), v - u'(t)) \quad \forall v \in K_1, \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales (5.13).  $\blacksquare$

Le problème s'interprète ainsi :  $u$  est solution de (5.4) avec (5.3) et les conditions suivantes sur  $\Sigma$  :

$$(5.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_\tau = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0, \quad F_3 \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} F_3 = 0. \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

De la même façon si l'on fait (formellement)  $k_2 = 0$ ,  $k_1 = -\infty$  dans le Problème 5.2 on est conduit au

*Problème 5.4*

Le convexe  $K_2$  étant défini par (4.21), on cherche une fonction  $t \rightarrow u(t)$  vérifiant l'analogue de (5.13) avec  $K_1$  remplacé par  $K_2$ .

Les autres conditions étant inchangées, les conditions aux limites (5.14) sont remplacées ici par

$$(5.15) \quad \begin{cases} F_3 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \geq 0, \end{cases} \quad M_\tau \geq 0, \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \right) M_\tau = 0. \quad \blacksquare$$

*Remarque 5.1*

On pourra énoncer et résoudre de façon analogue les problèmes dynamiques avec déplacement unilatéral des points de  $\Omega$  (cf. n° 3.2, 1) ou frottement des points de  $\Omega$  (cf. n° 3.2, 4).  $\blacksquare$

## 5.2. Résolution des problèmes unilatéraux d'évolution

Les méthodes sont *identiques* à celles du Chapitre 3, n° 5.5. Nous énonçons seulement quelques résultats, sans les démonstrations.

**Théorème 5.1.** *On suppose que*

$$(5.16) \quad f, f' \in L^2(0, T; H) = L^2(Q),$$

$$(5.17) \quad u_0 \in H^4(\Omega), \quad M_\tau(u_0) = 0, \quad F_3(u_0) = 0 \quad \text{sur } \Gamma,$$

$$(5.18) \quad u_1 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Alors le Problème 5.1 admet une solution unique vérifiant

$$(5.19) \quad u, \dot{u}' \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)),$$

$$(5.20) \quad u'' \in L^\infty(0, T; H).$$

Pour le principe de la démonstration, on régularise  $j_0(v)$  en  $j_{0\varepsilon}(v)$ , par exemple par

$$(5.21) \quad j_{0\varepsilon}(v) = \int_\Gamma \left[ g_2 \frac{(v^+)^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon} - g_1 \frac{(v^-)^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon} \right] d\Gamma, \quad \varepsilon > 0,$$

et l'on considère l'équation régularisée

$$(5.22) \quad (u_\varepsilon'', v) + a(u_\varepsilon, v) + (j'_{0\varepsilon}(u_\varepsilon'), v) = (f, v), \quad \forall v \in H^2(\Omega),$$

avec

$$(5.23) \quad u_\varepsilon(0) = u_0, \quad u_\varepsilon'(0) = u_1.$$

Grâce aux hypothèses faites sur  $u_0, u_1$ , on déduit de (5.22)

$$(5.24) \quad u_\varepsilon''(0) = f(0) - \Delta^2 u_0,$$

ce qui permet, avec (5.16), de dériver (5.22) une fois en  $t$  et d'obtenir les estimations a priori correspondant à (5.19), (5.20). ■

*Remarque 5.2*

On peut affaiblir les hypothèses sur  $f, u_0, u_1$  en introduisant des solutions faibles d'inéquations; cf. H. Brézis et J. L. Lions [1] et Brézis [2]. ■

On peut prendre  $g_2 = 0$  et poser :  $g_1 = -g, g > 0$  et appeler  $u_g$  la solution correspondante du Problème 5.1. On a alors le résultat suivant :

**Théorème 5.2.** *On suppose que (5.16), (5.17), (5.18) ont lieu. Alors le Problème 5.3 admet une solution  $u$  unique vérifiant (5.19), (5.20) et l'on a, lorsque  $g \rightarrow +\infty$  :*

$$(5.25) \quad u_g \rightarrow u, \quad u'_g \rightarrow u' \quad \text{dans } L^\infty(0, T; H^2(\Omega)) \text{ faible étoile,}$$

$$(5.26) \quad u''_g \rightarrow u'' \quad \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible étoile.}$$

Pour la démonstration on observe que l'on déduit de (5.22) des estimations a priori indépendantes de  $\varepsilon$  et de  $g$  sur  $u_\varepsilon, u'_\varepsilon$  dans  $L^\infty(0, T; H^2(\Omega))$  et sur  $u''_\varepsilon$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ .

*Remarque 5.3*

On peut résoudre directement le Problème 5.3 par pénalisation, en approchant (5.13) par

$$(5.27) \quad \begin{cases} (u''_\eta, v) + a(u_\eta, v) + \eta^{-1} \int_\Gamma (- (u'_\eta)^-) v \, d\Gamma = (f, v) & \forall v \in H^2(\Omega), \\ u_\eta(0) = u_0, & u'_\eta(0) = u_1. \end{cases}$$

L'hypothèse «  $u_1 = 0$  sur  $\Gamma$  » peut être remplacée par «  $u_1 \geq 0$  sur  $\Gamma$  ». ■

*Remarque 5.4*

On a un résultat en tous points analogue à celui du Théorème 5.1 relativement au Problème 5.1bis.

Relativement au Problème 5.2, on a le

**Théorème 5.3.** *On suppose que (5.16), (5.17) ont lieu et que*

$$(5.28) \quad u_1 \in H^2(\Omega), \quad \partial u_1 / \partial n = 0.$$

Alors le Problème 5.2 admet une solution unique vérifiant (5.19), (5.20).

Pour le principe de la démonstration, on régularise  $j_1(v)$  en  $j_{1,\varepsilon}(v)$  par exemple par

$$(5.29) \quad j_{1,\varepsilon}(v) = \int_\Gamma \left\{ \frac{k_2}{1+\varepsilon} \left( \left( \frac{\partial v}{\partial n} \right)^+ \right)^{1+\varepsilon} - \frac{k_1}{1+\varepsilon} \left( \left( \frac{\partial v}{\partial n} \right)^- \right)^{1+\varepsilon} \right\} d\Gamma,$$

$\varepsilon > 0$ . ■

Prenons

$$k_2 = 0, \quad k_1 = -k, \quad k > 0$$

et soit  $u_k$  la solution correspondante du Problème 5.2. Alors :

**Théorème 5.4.** *On suppose que (5.16), (5.17), (5.28) ont lieu. Alors le problème 5.4 admet une solution unique  $u$  vérifiant (5.19), (5.20) et l'on a lorsque  $k \rightarrow +\infty$  :*

$$(5.30) \quad u_k \rightarrow u, \quad u'_k \rightarrow u' \quad \text{dans } L^\infty(0, T; H^2(\Omega)) \text{ faible étoile,}$$

$$(5.31) \quad u''_k \rightarrow u'' \quad \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible étoile. } \blacksquare$$

## 6. COMMENTAIRES

La théorie linéarisée des plaques — qui a été retenue ici — est celle dite de Kirchhoff. Il existe d'autres théories linéarisées dites de Reissner et de Hencky, dont on trouvera les formulations dans la thèse de Sander [1]. On pourra aussi consulter A. E. H. Love [1], S. Timoshenko et S. Woinowsky-Krieger [1], G. Kirchhoff [1], E. Reissner [1] et [2], H. Hencky [1], [2], A. E. Green [1]. Les théories non linéaires n'ont pas été abordées ici. On trouvera dans un travail séparé des Auteurs, l'analyse des problèmes unilatéraux pour la théorie non linéaire qui conduit aux équations de Von Karman.

Les problèmes de plaques « plastiques » conduisent aussi à des inéquations ; on trouvera des résultats sur cette question dans N. Coutris [1].

Du point de vue mathématique, on a vu que si les problèmes dynamiques sont résolus de manière satisfaisante, il n'en va pas de même pour les problèmes statiques. On a mentionné dans le texte plusieurs questions ouvertes relatives à l'unicité, ou non, des solutions. De même les *problèmes de régularité* des solutions semblent largement ouverts ; signalons toutefois que pour les Problèmes 4.3 et 4.4, on peut montrer que *pour  $f \in L^2(\Omega)$  on a  $u \in H^4(\Omega)$  (par la méthode des « translations parallèles à la frontière »)*.

# CHAPITRE 5

## INTRODUCTION A LA PLASTICITÉ

### 1. INTRODUCTION

Le terme « matériau plastique » recouvre des comportements divers, tels que « élastique-visco-plastique », « rigide-visco-plastique », « élastique-parfaitement-plastique », « rigide parfaitement plastique », « plastique avec écrouissage », etc.

Dans toutes ces situations il existe un seuil séparant deux types de comportement. Ce seuil peut être fixe ou dépendre de l'histoire des déformations ; dans ce dernier cas le matériau est dit à « écrouissage » et ce type de comportement ne sera pas étudié dans cet ouvrage. Le seuil étant donc fixe nous énoncerons la loi de comportement élasto-visco-plastique et nous obtiendrons par passage à la limite les matériaux rigides visco-plastique, élastique parfaitement plastique et enfin rigide parfaitement plastique. Enfin dans les deux derniers numéros nous étudions deux lois de comportements valables dans des situations particulières de problèmes statiques ou quasi statiques : il s'agit de la loi de Hencky et des matériaux dits à blocage (locking material). Dans ce dernier cas le seuil porte sur les déformations.

### 2. LES CAS ÉLASTIQUES PARFAITEMENT PLASTIQUES [LOI DE PRANDTL-REUSS] ET ÉLASTO-VISCO-PLASTIQUE

#### 2.1. Loi de comportement de Prandtl-Reuss

Avec les notations introduites au chapitre 1 nous rappelons les relations découlant des lois de conservation

$$(2.1) \quad \partial \rho / \partial t + \text{Div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{conservation de la masse})$$

( $\rho$  et  $\mathbf{v}$  sont respectivement la densité et le vecteur vitesse) ;

$$(2.2) \quad \sigma_{ij,j} + f_i = \rho(dv_i/dt)$$

(conservation de la quantité de mouvement)

(les indices  $i$  et  $j$  prennent les valeurs 1 à 3),

$$(2.3) \quad \rho(de/dt) = \sigma_{ij} v_{i,j}(v) \quad (\text{conservation de l'énergie})$$

(les flux et les apports de chaleur sont supposés négligeables).

Comme nous l'avons fait au chapitre 3 nous linéarisons ces équations, ce qui conduit à considérer la densité constante égale à  $\rho_0$  dans les équations (2.2) et (2.3); l'équation (2.1) fournit alors les petites variations de  $\rho$  autour de  $\rho_0$  en fonction de  $\text{Div } v$ , lequel est déterminé par la seule équation (2.2) qui prend alors la forme

$$(2.4) \quad \rho_0(\partial^2 u_i / \partial t^2) = \sigma_{ij,j} + f_i.$$

Le vecteur  $\{u_i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$  est le vecteur déplacement et  $\{f_i\}$  désigne une densité volumique de forces données (indépendant de  $x$  et  $t$ ). L'équation (2.3) donne à chaque instant l'énergie interne du matériau. Nous ferons dans la suite  $\rho_0 = 1$ , fixant ainsi l'unité de masse spécifique. ■

### 2.1.1. Expérience préliminaire (Tresca [1], St Venant [1], [2], Levy [1], [2])

Considérons une tige métallique (acier doux par exemple) soumise à une force de traction  $\sigma$  et qui subit de ce fait un allongement relatif  $\varepsilon$ .

Dans un système de deux axes orthogonaux, portons  $\varepsilon$  en abscisse et  $\sigma$  en ordonnée et traçons le graphe de la relation  $(\varepsilon, \sigma)$  (Fig. n° 1). Lorsque  $\varepsilon$  augmente à partir de zéro,  $\sigma$  augmente et le point  $(\varepsilon, \sigma)$  décrit un segment de droite d'origine  $O$ . Si on continue à augmenter  $\varepsilon$ , la courbe décrite par le point  $(\varepsilon, \sigma)$  s'incurve à partir du point  $S$  pour devenir progressivement voisine d'une parallèle à  $O\varepsilon$ . Le graphe de la relation  $(\varepsilon, \sigma)$ , lorsque  $\varepsilon$  augmente de 0 à  $+\infty$  est donc constitué d'un segment de droite  $OS$  et d'un arc de courbe  $Sz$ .

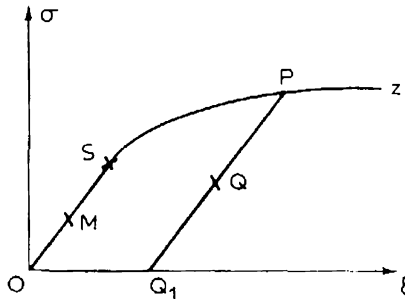


Figure 1.

Supposons maintenant qu'à partir d'un point  $M$  du segment  $OS$  ouvert, on fasse subir à  $\varepsilon$  des petites variations de signe quelconque ( $0 < \varepsilon < \varepsilon_S$ ): on constate que le point figuratif se déplace au voisinage du point  $M$  en restant sur le segment  $OS$ . Ce dernier représente donc une région où le comportement du matériau est linéaire et réversible, c'est-à-dire *élastique*.

Plaçons-nous maintenant en un point  $P$  de l'arc  $Sz$  et faisons décroître  $\varepsilon$ . On constate que le point représentatif  $(\varepsilon, \sigma)$  décrit un segment d'origine  $P$ , sensiblement parallèle à  $OS$ , soit  $PQ$ . Au point  $P$  le comportement du matériau n'est donc plus réversible; l'arc  $Sz$  représente une région *plastique*.

Si nous prolongeons le segment  $PQ$  jusqu'en  $Q_1$  sur l'axe  $O\varepsilon$ , nous retrouvons un segment ouvert  $PQ_1$  sur lequel le comportement du matériau est réversible. De plus  $PQ_1 > OS$  chaque fois que l'arc  $Sz$  n'est pas une demi-droite parallèle à  $O\varepsilon$  : c'est le phénomène d'*écrouissage*, très intéressant dans la pratique puisqu'il permet d'obtenir à partir de  $Q_1$  une zone à comportement linéaire réversible de plus grande amplitude que celle obtenue à partir de l'état naturel représenté par l'origine.

Si au contraire  $Sz$  est une demi-droite parallèle à  $O\varepsilon$  (ou en est assez voisine pour être considérée comme telle) nous dirons que le matériau considéré est *parfaitement plastique*. Nous retiendrons cette hypothèse dans la suite de ce numéro. Dans ce cas la contrainte  $\sigma$  ne dépasse jamais un certain seuil  $g$  indépendant de l'état de déformation. ■

Formulons la loi de comportement d'une telle tige métallique parfaitement plastique (Fig. n° 2). Puisque tout point  $Q$  de la région comprise entre l'axe  $O\varepsilon$  et le graphe  $OSz$  peut être atteint par le point  $(\varepsilon, \sigma)$ , il est impossible de donner à cette tige une loi de comportement sous la forme  $\varepsilon =$  fonction de  $\sigma$  ou  $\sigma =$  fonction de  $\varepsilon$ . Par contre si, à partir d'un état  $(\varepsilon, \sigma)$ ,  $\sigma \leq g$ , on donne à  $\varepsilon$  un accroissement de « petit », alors  $\sigma$  prend un accroissement  $d\sigma$  tel que

$$(2.5) \quad d\varepsilon = A d\sigma + \tilde{\lambda}$$

où

$$\left| \begin{array}{ll} \tilde{\lambda} = 0 & \text{si } \sigma < g \quad \text{ou si } \sigma = g, \quad d\sigma < 0, \\ \tilde{\lambda} \geq 0 & \text{si } \sigma = g \quad \text{et } d\sigma = 0. \end{array} \right.$$

( $1/A$  est la pente du segment  $OS$ ).

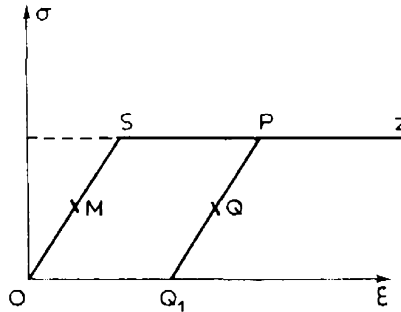


Figure 2.

Si l'accroissement  $d\varepsilon$  s'effectue pendant le temps  $dt$ , la loi de comportement (2.5) s'écrit,

$$(2.6) \quad \dot{\varepsilon} = A \dot{\sigma} + \lambda \quad (\dot{x} = \partial x / \partial t) \quad (1)$$

(1) Cette notation, classique en mécanique, est retenue ici lors des mises en équations. Elle sera abandonnée lors des développements mathématiques.

où

$$(2.7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \lambda = 0 & \text{si } \sigma < g \quad \text{ou si } \sigma = g, \quad \dot{\sigma} < 0 \\ \lambda \geq 0 & \text{si } \sigma = g \quad \text{et } \dot{\sigma} = 0. \end{array} \right.$$

La relation (2.7) peut s'écrire de façon équivalente

$$(2.8) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \lambda(\tau - \sigma) \leq 0 & \forall \tau \leq g \\ \lambda \dot{\sigma} = 0. & \blacksquare \end{array} \right.$$

### Remarque 2.1

Si on fait tendre vers zéro le coefficient  $A$ , c'est-à-dire si la pente  $1/A$  de  $OS$  tend vers l'infini la loi de comportement (2.6), (2.7) devient

$$\dot{\varepsilon} = \lambda$$

où  $\lambda$  satisfait à (2.7). C'est la loi de comportement d'un matériau *rigide parfaitement plastique* : le matériau ne subit aucune déformation si  $\sigma < g$  et il se déforme suivant la loi indiquée si  $\sigma = g$ . ■

### 2.1.2. Généralisation

On peut généraliser la loi de comportement ainsi obtenue aux corps *tridimensionnels* parfaitement plastiques.

Supposons que la zone élastique soit définie par

$$(2.9) \quad \mathcal{F}(\sigma_{ij}) < 0$$

et la zone plastique par

$$(2.10) \quad \mathcal{F}(\sigma_{ij}) = 0.$$

Les scalaires  $\sigma_{ij}$  sont les composantes du tenseur des contraintes et satisfont  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . La fonction  $\mathcal{F}$  est *convexe continue* par rapport aux  $\sigma_{ij}$ , de sorte que le domaine de  $\mathbb{R}^6$  où  $\mathcal{F}(\sigma_{ij}) \leq 0$  est *convexe fermé*. En général  $\mathcal{F}(\sigma_{ij})$  ne porte en fait que sur le déviateur  $\{\sigma_{ij}^D\}$  du tenseur  $\{\sigma_{ij}\}$ . ■

On peut citer *deux exemples classiques* de fonctions  $\mathcal{F}$  :

i) *Modèle de Von Mises*

$$(2.11) \quad \mathcal{F}(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D - k^2,$$

où  $k$  est une constante donnée.

ii) *Modèle de Tresca*

$$(2.12) \quad \mathcal{F}(\sigma_{ij}) = \text{Sup}_{I, J: I \neq J} |\sigma_I - \sigma_J| - g$$



où les  $\sigma_1$  sont les valeurs propres du tenseur des contraintes  $\{\sigma_{ij}\}$  et où  $g$  est une constante positive. Démontrons que la fonction  $\mathcal{F}(\sigma_{ij})$  définie par (2.12) est convexe. Pour tout vecteur  $n = (n_1, n_2, n_3)$  unitaire introduisons le vecteur contrainte  $\Sigma$  par ses composantes

$$\Sigma_i = \sigma_{ij} n_j,$$

et décomposons  $\Sigma$  en un vecteur porté par  $n$ , soit  $\Sigma_N$  et un vecteur perpendiculaire  $\Sigma_T$ . On vérifie facilement — en passant en axes principaux pour  $\{\sigma_{ij}\}$  — que  $\mathcal{F}(\sigma_{ij}) \leq 0$ , où  $\mathcal{F}$  est donné par (2.12), équivaut à

$$|\Sigma_T| \leq g, \quad \forall n \quad \text{avec} \quad |n| = 1.$$

Pour tout  $n$  l'application  $\{\sigma_{ij}\} \rightarrow \Sigma_T$  est linéaire, donc si  $\{\sigma_{ij}^{(1)}\}$  et  $\{\sigma_{ij}^{(2)}\}$  sont deux tenseurs des contraintes auxquels correspondent  $\Sigma_T^{(1)}$  et  $\Sigma_T^{(2)}$  et si  $\alpha \in ]0, 1[$ , alors

$$|\alpha \Sigma_T^{(1)} + (1 - \alpha) \Sigma_T^{(2)}| \leq \alpha |\Sigma_T^{(1)}| + (1 - \alpha) |\Sigma_T^{(2)}| \leq g$$

si  $|\Sigma_T^{(1)}| \leq g$  et  $|\Sigma_T^{(2)}| \leq g$ , ce qui implique que  $\mathcal{F}$  donné par (2.12) est convexe. ■

On remarque que dans les deux exemples donnés précédemment la fonction  $\mathcal{F}$  est indépendante de la déformation, ce qui caractérise les matériaux *parfaitement* plastiques. ■

L'analogue de (2.6) dans la situation présente est

$$(2.13) \quad \dot{\epsilon}_{ij}(u) = A_{ijkh} \dot{\sigma}_{kh} + \lambda_{ij}.$$

Les coefficients  $A_{ijkh}$  sont des coefficients d'élasticité; ils satisfont aux propriétés habituelles

$$(2.14) \quad \left| \begin{array}{l} A_{ijkh} = A_{ijhk} = A_{khij} \\ A_{ijkh} \sigma_{ij} \sigma_{kh} \geq \alpha \sigma_{ij} \sigma_{ij}, \quad \alpha = \text{Cte} > 0. \end{array} \right.$$

La quantité  $A_{ijkh} \dot{\sigma}_{kh}$  est la partie *élastique* du tenseur des vitesses de déformation  $\dot{\epsilon}_{ij}(u)$ , tandis que  $\lambda_{ij}$  est par définition la *vitesse de déformation plastique*.

Dans l'expérience préliminaire cette partie  $\lambda$  satisfait à (2.7) ou (2.8) qui se généralisent ici en

$$(2.15) \quad \lambda_{ij}(\tau_{ij} - \sigma_{ij}) \leq 0 \quad \forall \tau \quad \text{avec} \quad \mathcal{F}(\tau_{ij}) \leq 0$$

$$(2.16) \quad \lambda_{ij} \dot{\sigma}_{ij} = 0.$$

(La propriété (2.15) traduit aussi le principe du travail plastique maximal énoncé par Hill [3].)

Si de plus les fonctions  $t \rightarrow \sigma_{ij}(t)$  sont dérivables en  $t$  — ce que l'on supposera — on peut déduire (2.16) de (2.15).

En effet : soit  $\Delta t > 0$  ; prenons dans (2.15)

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij}(t + \Delta t) \quad (\text{resp. } \tau_{ij} = \sigma_{ij}(t - \Delta t)),$$

divisons par  $\Delta t$  et faisons tendre  $\Delta t$  vers zéro ; il vient

$$\lambda_{ij} \dot{\sigma}_{ij}(t) \leq 0 \quad (\text{resp. } \lambda_{ij} \dot{\sigma}_{ij}(t) \geq 0)$$

d'où (2.16).

En résumé : la loi de comportement des matériaux élastiques parfaitement plastiques se traduit par

$$(2.17) \quad \mathcal{F}(\sigma_{ij}) \leq 0$$

et (2.13), (2.15). ■

### Remarque 2.2

Comme à la remarque 2.1 dans le cas unidimensionnel on peut faire  $A_{ijkh} = 0$ , et la loi de comportement correspondante est celle des matériaux rigides parfaitement plastiques. ■

## 2.2. Loi de comportement élasto-visco-plastique

Dans la loi de comportement de Prandtl-Reuss (ou élastique parfaitement plastique) la vitesse de déformation plastique peut, à *contrainte constante*, être très grande en module ; autrement dit le matériau ne présente aucun effet de viscosité : il s'agit d'une situation idéalisée et on peut légitimement penser que *les déformations plastiques, souvent de grande amplitude, présentent dans la pratique un effet de viscosité plus ou moins important*. C'est pourquoi nous allons écrire ici un modèle de loi de comportement élasto-visco-plastique, où le matériau sera élastique en deçà du seuil de plasticité et de type visco-plastique au-delà. Cette loi assez riche nous permet d'obtenir ou de retrouver par passage à la limite les cas particuliers :

- i) Rigide visco-plastique ( $A_{ijkh} = 0$ ). Ce cas sera étudié complètement et par des méthodes différentes au Chapitre 6.
- ii) Élastique parfaitement plastique (viscosité tend vers zéro) (loi de Prandtl-Reuss donnée à la section précédente).
- iii) Rigide parfaitement plastique ( $A_{ijkh} = 0$  et viscosité tend vers zéro). Ce cas sera étudié au n° 5.2. ■

Nous introduisons le convexe fermé de  $\mathbb{R}^6$ ,

$$(2.18) \quad \tilde{K} = \{ \sigma \mid \sigma = \{ \sigma_{ij} \} \in \mathbb{R}^6, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad \mathcal{F}(\sigma_{ij}) \leq 0 \}$$

où  $\mathcal{F}$  est une fonction convexe continue des 6 variables scalaires  $\sigma_{ij}$ , comme au n° 2.1.2 précédent, et l'application  $\sigma \rightarrow P_{\tilde{K}}(\sigma) =$  projection orthogonale, dans la structure euclidienne usuelle, de  $\sigma \in \mathbb{R}^6$  sur le convexe  $\tilde{K}$ .

La loi de comportement annoncée s'écrit alors

$$(2.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{ij}(\dot{u}) = A_{ijkh} \dot{\sigma}_{kh} + \lambda_{ij}, \\ \{ \lambda_{ij} \} = 0 \quad \text{si } \mathcal{F}(\sigma) < 0 \\ \lambda_{ij} = \frac{1}{2\mu} [\sigma_{ij} - (P_{\tilde{\kappa}} \sigma)_{ij}] \quad \text{si } \mathcal{F}(\sigma) \geq 0, \end{array} \right.$$

où  $\mu$  est un scalaire positif, qu'on peut considérer comme un coefficient de *viscosité* car si  $\{ \sigma_{ij} \}$  est constant, ( $\dot{\sigma}_{ij} = 0$ ) la loi (2.19) s'écrit

$$\sigma_{ij} = (P_{\tilde{\kappa}} \sigma)_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(\dot{u})$$

relation dans laquelle  $\mu$  et  $\varepsilon_{ij}(\dot{u})$  (tenseur des vitesses de déformation) jouent le même rôle que dans la loi de comportement du fluide de Navier-Stokes

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(\dot{u})$$

le terme  $-p \delta_{ij} = (P_{\tilde{\kappa}} \sigma)_{ij}$  si  $\tilde{K} = \{ \sigma \mid \{ \sigma_{ij} \} = \text{tenseur sphérique} \}$ .

Dans le cas particulier du critère de Von Mises, c'est-à-dire  $\mathcal{F}$  donné par (2.11), la loi (2.19) prend la forme

$$(2.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{ij}(\dot{u}) = A_{ijkh} \dot{\sigma}_{kh} + \lambda_{ij} \\ \lambda_{ij} = 0 \quad \text{si } \mathcal{F}(\sigma) < 0 \\ \lambda_{ij} = \frac{1}{2\mu} \frac{\sigma_{II}^{1/2} - k}{\sigma_{II}^{1/2}} \sigma_{ij}^D \end{array} \right.$$

où  $\{ \sigma_{ij}^D \}$  représente le déviateur du tenseur des contraintes et

$$\sigma_{II} = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D. \quad \blacksquare$$

Introduisons l'application de  $\mathbb{R}^6$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$\mathfrak{J}_\mu(\tau) = \frac{1}{4\mu} [\tau_{ij} - (P_{\tilde{\kappa}} \tau)_{ij}] [\tau_{ij} - (P_{\tilde{\kappa}} \tau)_{ij}].$$

La loi (2.19) peut alors s'écrire de manière *équivalente*

$$(2.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{ij}(\dot{u}) = A_{ijkh} \dot{\sigma}_{kh} + \lambda_{ij} \\ \text{où } \lambda_{ij} \text{ est caractérisé par } ^{(2)} \\ \mathfrak{J}_\mu(\tau) - \mathfrak{J}_\mu(\sigma) \geq \lambda_{ij}(\tau_{ij} - \sigma_{ij}), \quad \forall \tau \in \mathbb{R}^6. \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

<sup>(2)</sup> On peut dire aussi  $\{ \lambda_{ij} \} \in \partial \mathfrak{J}_\mu(\sigma)$ , où  $\partial \mathfrak{J}_\mu(\sigma)$  représente le sous-gradient de  $\mathfrak{J}_\mu$  en  $\sigma$  (en fait la dérivée lorsque  $\mu > 0$ )

$$(2.21bis) \quad \varepsilon_{ij}(\dot{u}) = A_{ijkh} \dot{\sigma}_{kh} + (\mathfrak{J}'_\mu(\sigma))_{ij}.$$

*Cas où la viscosité tend vers zéro*

Si  $\mu$  tend vers zéro la fonction  $\mathfrak{J}_\mu(\tau)$  tend vers la fonction indicatrice du convexe  $\tilde{K}$  de  $\mathbb{R}^6$ , i.e. vers la fonction convexe « propre » nulle sur  $\tilde{K}$  et égale à  $+\infty$  hors de  $\tilde{K}$  ( $\tilde{K} \neq \emptyset$ ). La relation (2.21) prend la forme limite

$$(2.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{ij}(\dot{u}) = A_{ijkh} \dot{\sigma}_{kh} + \lambda_{ij} \\ \text{où } \{ \lambda_{ij} \} \text{ est caractérisé par} \\ \lambda_{ij}(\tau_{ij} - \sigma_{ij}) \leq 0 \quad \forall \tau \in \tilde{K}, \quad \sigma \in \tilde{K}, \end{array} \right.$$

ce qui n'est autre que la *loi de Prandtl-Reuss*, énoncée au numéro précédent.

*Cas « rigide » comme limite de cas « élastiques »*

Si les  $A_{ijkh}$  sont tous nuls (2.19) est la loi de comportement des matériaux rigido-visco-plastiques et (2.22) celle des matériaux rigido-parfaitement plastiques. ■

De plus signalons que si  $\tilde{K} = \mathbb{R}^6$  la loi de comportement élasto-visco-plastique donne simplement

$$\varepsilon_{ij}(\dot{u}) = A_{ijkh} \dot{\sigma}_{kh}$$

ce qui, si on suppose qu'il a existé un instant  $t_0$  où le matériau était dans un état sans contraintes <sup>(3)</sup> et que les déplacements sont mesurés à partir de cet état, donne par intégration de  $t_0$  à  $t$  :

$$\varepsilon_{ij}(u) = A_{ijkh} \sigma_{kh}$$

c'est-à-dire la loi de comportement élastique. ■

*Orientation*

Dans le présent chapitre nous étudierons les *déformations* d'un matériau qui, dans son état non déformé occupe un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ , les déplacements des points de  $\Omega$  étant petits. Si  $u(x, t)$  représente le vecteur déplacement à l'instant  $t$  du point qui occupait la position  $x$  de  $\Omega$  dans l'état non déformé la quantité  $\dot{u}(x, t) = \partial u(x, t)/\partial t$  représente la vitesse à l'instant  $t$  au point de coordonnée  $x + u(x, t)$ , ou encore la vitesse à l'instant  $t$  de la particule matérielle qui se trouvait en  $x$  dans l'état non déformé. En fait, comme  $u(x, t)$  est petit, on considère que  $\dot{u}(x, t) = \partial u(x, t)/\partial t$  représente la vitesse au point  $x$ . Pour la même raison  $\partial^2 u(x, t)/\partial t^2$  représente en toute rigueur l'accélération à l'instant  $t$  au point  $x + u(x, t)$ ; comme  $u(x, t)$  est petit,  $\partial^2 u(x, t)/\partial t^2$  est considérée comme étant l'accélération au point  $x$ . Ces approximations correspondent à une linéarisation qui revient à confondre  $x$ , position initiale d'une particule matérielle, avec la position de cette particule dans l'état déformé. ■

<sup>(3)</sup> Ce qui constitue une hypothèse implicite dans toutes les lois de comportement énoncées dans cet ouvrage et qui font intervenir le tenseur des contraintes.

Au Chapitre 6 nous étudions des problèmes qui, par les conditions aux limites et la nature de la loi de comportement sont des *problèmes d'écoulement*, c'est-à-dire des problèmes où *les déplacements des points du matériau sont grands*. L'ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  représente alors le domaine dans lequel nous étudions l'écoulement et  $\dot{u}(x, t)$  est la vitesse à l'instant  $t$  de la particule matérielle qui se trouve au point  $x$  de  $\Omega$  à cet instant (le point «  $\cdot$  » ne désigne plus une dérivation particelle par rapport à  $t$ , mais  $\dot{u}(x, t)$  désigne d'une manière globale la vitesse en  $x$  à l'instant  $t$ ). De façon à éviter toute confusion, et pour nous conformer aux notations habituelles, nous n'écrivons pas  $\varepsilon_{ij}(\dot{u})$  mais  $D_{ij}(v)$  où  $v = v(x, t)$  représente la vitesse de la particule se trouvant en  $x$  à l'instant  $t$ . La description précédente est connue sous le nom de *description eulérienne* de l'écoulement.

Ajoutons encore que la loi de comportement utilisée sera

$$(2.23) \quad \begin{cases} D_{ij}(v) = 0 & \text{si} & \sigma_{II}^{1/2} < g \\ D_{ij}(v) = \frac{1}{2\mu} \frac{\sigma_{II}^{1/2} - g}{\sigma_{II}^{1/2}} \sigma_{ij}^D & \text{si} & \sigma_{II}^{1/2} \geq g \end{cases}$$

( $g$  est une constante positive donnée).

Il en résulte que

$$D_{kk}(v) = \text{Div } v = 0$$

c'est-à-dire que le matériau qui satisfait à une telle loi de comportement est *incompressible*. ■

### 2.3. Problèmes abordés

Nous nous proposons d'étudier, dans les situations *dynamique* et *quasi-statique*, les champs de déplacements  $\{u_i\}$  et de contraintes  $\{\sigma_{ij}\}$  à l'intérieur d'un matériau qui dans un état non déformé occupe une région  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ . On pose, comme cela a été fait dans les chapitres précédents :

$$\begin{aligned} \partial\Omega &= \Gamma, & n &= \text{normale extérieure unitaire à } \Gamma, \\ \Gamma &= \Gamma_U \cup \Gamma_F, & \Gamma_U \cap \Gamma_F &= \emptyset. \end{aligned}$$

Le matériau obéit à la loi de comportement (2.21). On formule alors les deux problèmes suivants :

#### Problème 2.1 (Cas dynamique)

Trouver  $\{u_i\}$  et  $\{\sigma_{ij}\}$  dans  $\Omega \times [0, T]$  qui satisfont à (2.21), aux équations du mouvement linéarisées

$$(2.24) \quad \partial^2 u_i / \partial t^2 = \sigma_{ij,j} + f_i,$$

aux conditions aux limites

$$(2.25) \quad u_i = U_i \quad \text{sur} \quad \Gamma_U,$$

$$(2.26) \quad \sigma_{ij} n_j = F_i \quad \text{sur} \quad \Gamma_F,$$

et aux conditions initiales

$$(2.27) \quad u(0) = u_0, \quad \partial u(0)/\partial t = u_1$$

$$(2.28) \quad \sigma(0) = \sigma_0.$$

Les fonctions  $f_i(x, t)$ ,  $F_i(x, t)$ ,  $U_i(x, t)$ ,  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$ ,  $\sigma_0(x)$  sont données pour  $t \geq 0$ . ■

### Problème 2.2 (cas quasi-statique)

Il s'agit d'un problème dans lequel les données varient suffisamment lentement par rapport à  $t$  pour que l'on puisse décider de négliger les termes d'accélération dans les équations du mouvement :

Trouver  $\{u_i\}$  et  $\{\sigma_{ij}\}$  dans  $\Omega \times [0, T]$  qui satisfont à (2.21), aux équations d'équilibre

$$(2.29) \quad \sigma_{ij,j} + f_i = 0,$$

aux conditions aux limites (2.25) et (2.26) et aux données initiales

$$(2.30) \quad u(0) = u_0$$

$$(2.31) \quad \sigma(0) = \sigma_0.$$

Les fonctions  $f_i(x, t)$ ,  $F_i(x, t)$ ,  $U_i(x, t)$ ,  $u_0(x)$ ,  $\sigma_0(x)$  sont données pour  $t \geq 0$ . ■

Nous allons dans le n° 3 suivant étudier les problèmes 2.1 et 2.2 puis dans les nos 4 et 5 étudier les passages à la limite lorsque  $\mu \rightarrow 0$  ou lorsque, dans un sens convenable,  $A_{ijkh} \rightarrow 0$ .

## 3. ÉTUDE DES PROBLÈMES ÉLASTO-VISCO-PLASTIQUES, DYNAMIQUES ET QUASI STATIQUES

### 3.1. Formulation variationnelle des problèmes

On étudie d'abord la situation du Problème 2.1. On pose

$$(3.1) \quad \partial u / \partial t = v;$$

une fois  $v$  connu,  $u$  sera donc défini par

$$(3.2) \quad u(t) = \int_0^t v(s) ds + u_0.$$

Avec ces notations et en utilisant (2.21bis), les équations du problème sont :

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{ijkh} \sigma'_{kh} + (\mathfrak{J}'_{\mu}(\sigma))_{ij} - \varepsilon_{ij}(v) = 0, \\ v'_i - \sigma_{ij,j} = f_i, \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[ , \quad (4)$$

avec les conditions aux limites

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} v_i = U'_i & \text{sur } \Gamma_U \times ]0, T[ , \\ \sigma_{ij} n_j = F_i & \text{sur } \Gamma_F \times ]0, T[ \end{array} \right.$$

et les conditions initiales

$$(3.5) \quad v(0) = u_1, \quad \sigma(0) = \sigma_0.$$

Il s'agit d'un système *non linéaire* d'équations aux dérivées partielles. Les conditions aux limites sont *non homogènes* dans (3.4) et l'on va commencer par se ramener, par translation, au cas homogène.

On introduit donc des fonctions  $\sigma^0 = \{ \sigma^0_{ij} \}$  et  $v^0 = \{ v^0_i \}$  (5) telles que

$$(3.6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sigma^0_{ij} n_j = F_i & \text{sur } \Gamma_F \times ]0, T[ , \\ \sigma^0(0) = \sigma_0 \end{array} \right.$$

et

$$(3.7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} v^0_i = U'_i & \text{sur } \Gamma_U \times ]0, T[ , \\ v^0(0) = u_1. \end{array} \right.$$

Introduisant alors les nouvelles fonctions inconnues

$$(3.8) \quad v^1 = v - v^0, \quad \sigma^1 = \sigma - \sigma^0$$

les équations (3.3) deviennent :

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{ijkh} \sigma^1_{kh} + (\mathfrak{J}'_{\mu}(\sigma^1 + \sigma^0))_{ij} - \varepsilon_{ij}(v^1) = g_{ij}, \\ v^1_i - \sigma^1_{ij,j} = h_i, \end{array} \right.$$

où

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{ij} = \varepsilon_{ij}(v^0) - A_{ijkh} \sigma^0_{kh} \\ h_i = f_i - (v^0_i)' + \sigma^0_{ij,j}. \end{array} \right.$$

Les conditions aux limites et initiales deviennent *nulles* (on a fait ce qu'il fallait pour ça !).

*Nous supprimons l'indice « 1 » pour simplifier l'écriture.*

(4)  $T$  fini fixé quelconque.

(5) Les *hypothèses de régularité* nécessaires sont faites plus loin.

La formulation est donc maintenant :

$$(3.11) \quad \begin{cases} A_{ijkh} \sigma'_{kh} + (\mathfrak{D}'_{\mu}(\sigma + \sigma^0))_{ij} - \varepsilon_{ij}(v) = g_{ij}, \\ v'_i - \sigma_{ij,j} = f_i, \end{cases}$$

avec les conditions aux limites

$$(3.12) \quad \begin{cases} \sigma_{ij} n_j = 0 & \text{sur } \Gamma_F \times ]0, T[, \\ v_i = 0 & \text{sur } \Gamma_U \times ]0, T[, \end{cases}$$

et les conditions initiales

$$(3.13) \quad \sigma(0) = 0, \quad v(0) = 0. \blacksquare$$

Nous introduisons maintenant (comme en (3.69), Chap. 3) :

$$(3.14) \quad \mathcal{A}(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} A_{ijkh} \sigma_{kh} \tau_{ij} dx$$

et les espaces

$$(3.15) \quad \begin{cases} \mathcal{H} = \{ \tau = \{ \tau_{ij} \} \mid \tau_{ij} = \tau_{ji}, \tau_{ij} \in L^2(\Omega) \}, \\ H = \{ v = \{ v_i \} \mid v_i \in L^2(\Omega) \} \end{cases}$$

munis des produits scalaires <sup>(6)</sup>

$$\begin{aligned} (\sigma, \tau) &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx, \\ (v, w) &= \int_{\Omega} v_i w_i dx. \end{aligned}$$

On introduit ensuite :

$$(3.16) \quad \begin{cases} \mathcal{V} = \{ \tau \mid \tau \in \mathcal{H}, \tau_{i,j,j} \in L^2(\Omega), \tau_{ij} n_j = 0 \text{ sur } \Gamma_F \}, \\ V = \{ v \mid v \in H, v_{i,j,j} \in L^2(\Omega), v_i = 0 \text{ sur } \Gamma_U \}. \end{cases}$$

On note que

$$(3.17) \quad (\varepsilon_{ij}(v), \tau_{ij}) + (v_i, \tau_{i,j,j}) = 0 \quad \forall v \in V, \tau \in \mathcal{V}.$$

Alors si  $\sigma, v$  est solution régulière de (3.11) (3.12) on a :

$$(3.18) \quad \begin{cases} \mathcal{A}(\sigma', \tau) + (\mathfrak{D}'_{\mu}(\sigma + \sigma^0), \tau) + \int_{\Omega} v_i \tau_{i,j,j} dx = (g, T) \quad \forall \tau \in \mathcal{V}, \\ (v', w) + \int_{\Omega} \sigma_{ij} w_{i,j} dx = (h, w) \quad \forall w \in V. \end{cases}$$

<sup>(6)</sup> Notés de la même façon, par abus d'écriture n'entraînant pas de confusion possible.



Réciproquement si  $\sigma$  est solution « régulière » de (3.18) on en déduit (3.11) et également que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} v_i \tau_{ij} n_j d\Gamma &= 0, & \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j w_i d\Gamma &= 0 \\ \text{i.e.} & & & \\ \int_{\Gamma_U} v_i \tau_{ij} n_j d\Gamma &= 0, & \int_{\Gamma_F} (\sigma_{ij} n_j) w_i d\Gamma &= 0 \end{aligned}$$

d'où (3.12).

On considère donc maintenant le problème sous la forme (3.18) (3.13).

Le problème quasi-statique s'énonce, avec les mêmes notations :

$$(3.19) \quad \begin{cases} \mathcal{A}(\sigma', \tau) + (\mathfrak{J}'_{\mu}(\sigma + \sigma^0), \tau) + \int_{\Omega} v_i \tau_{ij,j} dx = (g, \tau) & \forall \tau \in \mathcal{V}, \\ \int_{\Omega} \sigma_{ij} w_{i,j} dx = (h, w) & \forall w \in V, \end{cases}$$

avec

$$(3.20) \quad \sigma(0) = 0. \blacksquare$$

### 3.2. Énoncé des résultats

Les hypothèses seront les suivantes :

$$(3.21) \quad g, g' \in L^2(0, T; \mathcal{H}),$$

$$(3.22) \quad h, h' \in L^2(0, T; H) \quad (?)$$

et

$$(3.23) \quad \sigma^0 \text{ est indépendante de } t.$$

Remarque 3.1

L'hypothèse (3.23) semble indispensable pour l'obtention de solutions fortes, comme nous allons obtenir ci-après. Il est probable (mais non établi) que cette condition peut être évitée en introduisant des solutions faibles, la difficulté essentielle étant alors l'unicité (éventuelle) de la solution. ■

On va démontrer dans les numéros suivants le :

**Théorème 3.1.** On suppose que (3.21), (3.22), (3.23) ont lieu. Il existe alors un couple de fonctions  $\sigma$  et  $v$  et un seul tel que

$$(3.24) \quad \sigma, \sigma' \in L^{\infty}(0, T; \mathcal{H}),$$

$$(3.25) \quad v, v' \in L^{\infty}(0, T; H),$$

$$(3.26) \quad \sigma_{ij,j} \in L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$(3.27) \quad v_{i,j} \in L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega))$$

et vérifiant (3.18), (3.13).

(?) Il n'est pas difficile d'expliciter des conditions suffisantes sur les données  $U_0, u_1, \sigma_0$  pour que ces hypothèses soient satisfaites.

*Remarque 3.2*

D'après (3.26) et (3.27) on peut définir  $\sigma_{ij} n_j$  et  $v_i$  sur  $\Gamma$ . Les calculs d'intégration par parties effectués après (3.18) sont justifiés. On a donc l'existence de solutions fortes du problème <sup>(8)</sup>.

Passons maintenant au cas *quasi statique*. Nous distinguons deux cas selon que  $\Gamma_U$  est de mesure positive ou vide.

**Théorème 3.2.** *On se place dans les hypothèses du théorème 3.1 et on suppose que  $\Gamma_U$  de mesure positive et que  $h(0) = 0$ .*

*Il existe alors un couple de fonctions  $\sigma, v$  et un seul tel que*

$$(3.28) \quad \sigma \in L^\infty(0, T; \mathcal{V}),$$

$$(3.29) \quad \sigma' \in L^\infty(0, T; \mathcal{H}),$$

$$(3.30) \quad v \in L^\infty(0, T; V),$$

et vérifiant (3.19), (3.20). ■

Lorsque  $\Gamma_U = \emptyset$  (et seulement dans ce cas) on peut prendre dans la deuxième équation (3.19)  $w = \rho \in \mathcal{R}$ , d'où la condition *nécessaire*

$$\text{(puisque } \int_{\Omega} \sigma_{ij} \rho_{i,j} dx = 0 \text{):}$$

$$(h, \rho) = 0 \quad \forall \rho \in \mathcal{R};$$

mais lorsque  $\Gamma_U = \emptyset$ ,  $v^0 = 0$  et d'après (3.10) on a donc la condition

$$(f, \rho) + (\sigma_{ij}^0, \rho_{ij}) = 0$$

ou encore d'après (3.6)

$$(3.31) \quad (f, \rho) + \int_{\Gamma} F_N \rho_N d\Gamma = 0 \quad \forall \rho \in \mathcal{R} \text{ } ^{(9)}.$$

On a alors le

**Théorème 3.3.** *On se place dans les hypothèses du théorème 3.1 avec  $\Gamma_U = \emptyset$  et on suppose que l'on a (3.31) et  $h(0) = 0$ .*

*Il existe alors une fonction  $\sigma$  et une seule, et une fonction  $v$  définie à l'addition d'un élément de  $\mathcal{R}$  près, tels que l'on ait (3.28) (3.29) et  $\varepsilon_{ij}(v) \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  et (3.19) (3.20). ■*

<sup>(8)</sup> On peut aussi énoncer :

$$\sigma \in L^\infty(0, T; \mathcal{V}), \quad v \in L^\infty(0, T; V).$$

<sup>(9)</sup> Donc l'ensemble des forces  $f_i$ ,  $F_i$  doit constituer un torseur équivalent à 0.

### 3.3. Démonstration de l'Unicité dans les Théorèmes

*Unicité dans le Théorème 3.1*

Soient  $\sigma$ ,  $v$  et  $\sigma_*$ ,  $v_*$  deux couples de solutions éventuelles. Posant

$$\hat{\sigma} = \sigma - \sigma_*, \quad \hat{v} = v - v_*,$$

on déduit de (3.18) et des équations analogues pour  $\sigma_*$ ,  $v_*$ , que

$$(3.32) \quad \mathcal{A}(\hat{\sigma}', \tau) + (\hat{v}', w) + (\mathfrak{J}'_{\mu}(\sigma + \sigma_0) - \mathfrak{J}'_{\mu}(\sigma_* + \sigma_0), \tau) + \int_{\Omega} \hat{v}_i \tau_{ij,j} dx + \int_{\Omega} \hat{\sigma}_{ij} w_{i,j} dx = 0.$$

Prenant dans (3.32),  $\tau = \hat{\sigma}$  et  $w = \hat{v}$ , il vient, en utilisant (3.17) et le fait que

$$\sigma \rightarrow \mathfrak{J}'_{\mu}(\sigma + \sigma_0) \quad \text{est monotone} :$$

$$(3.33) \quad \mathcal{A}(\hat{\sigma}', \hat{\sigma}) + (\hat{v}', \hat{v}) \leq 0$$

ce qui, joint au fait que  $\hat{\sigma}(0) = 0$ ,  $\hat{v}(0) = 0$  entraîne que  $\hat{\sigma} = 0$ ,  $\hat{v} = 0$ . ■

*Unicité dans le Théorème 3.2 et unicité modulo  $\mathcal{R}$  dans le Théorème 3.3*

Avec les mêmes notations que précédemment, on arrive à

$$(3.34) \quad \mathcal{A}(\hat{\sigma}', \hat{\sigma}) \leq 0$$

d'où l'on déduit que  $\hat{\sigma} = 0$ .

On utilise alors la première équation (3.19) sous la forme

$$\varepsilon_{ij}(v) = g_{ij} - A_{ijkh} \sigma'_{kh} - (\mathfrak{J}'_{\mu}(\sigma + \sigma^0))_{ij}$$

d'où, comme  $\sigma = \sigma_*$  :

$$(3.35) \quad \varepsilon_{ij}(v) = \varepsilon_{ij}(v_*)$$

d'où le résultat suit : si  $\Gamma_U$  est de mesure positive (3.35) entraîne que  $v = v_*$ , et si  $\Gamma_U = \emptyset$  on a l'égalité à un élément de  $\mathcal{R}$  près (dépendant de  $t$ ). ■

### 3.4. Démonstration de l'existence dans le cas dynamique

On va « régulariser » les équations (3.18) en les variables spatiales.

On introduit dans ce but

$$(3.36) \quad [\sigma, \tau] = \int_{\Omega} \sigma_{i,j,j} \tau_{i,j,j} dx,$$

$$(3.37) \quad ((v, w)) = \int_{\Omega} v_{i,j} w_{i,j} dx$$

et,  $\eta$  étant un paramètre  $> 0$  (destiné à tendre vers 0), on considère le problème régularisé

$$(3.38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}(\sigma', \tau) + (\mathfrak{J}'_{\mu}(\sigma + \sigma^0), \tau) + \overbrace{\eta[\sigma, \tau]} + \int_{\Omega} v_i \tau_{ij,j} dx = (g, \tau), \\ (v', w) + \underbrace{\eta((v, w))} + \int_{\Omega} \sigma_{ij} w_{i,j} dx = (h, w) \end{array} \right.$$

avec

$$(3.39) \quad \sigma(0) = 0, \quad v(0) = 0.$$

Pour chaque  $\eta > 0$  ce problème admet une solution unique <sup>(10)</sup>.

On va obtenir des estimations a priori sur ces solution  $\{\sigma, v\}$  (ou plus correctement, pour marquer la dépendance en  $\eta$ ,  $\{\sigma_{\eta}, v_{\eta}\}$ ) puis faire  $\eta \rightarrow 0$ .

*Estimations a priori (I)*

Remplaçons dans (3.38)  $\tau$  par  $\sigma + \sigma^0$  et  $w$  par  $v$ . Il vient, (comme

$(\mathfrak{J}'_{\mu}(\sigma + \sigma^0), \sigma + \sigma^0) \geq 0$ , et comme  $\int_{\Omega} v_i \sigma_{ij,j} dx + \int_{\Omega} \sigma_{ij} v_{i,j} dx = 0$ ) :

$$(3.40) \quad \mathcal{A}(\sigma', \sigma + \sigma^0) + \eta[\sigma, \sigma + \sigma^0] + (v', v) + \eta((v, v)) \leq (g, \sigma + \sigma^0) + (h, v).$$

On en déduit <sup>(11)</sup> que, lorsque  $\eta \rightarrow 0$  :

- (3.41)  $\sigma = \sigma_{\eta}$  demeure dans un borné de  $L^{\infty}(0, T; \mathcal{H})$ ,

- (3.42)  $v = v_{\eta}$  demeure dans un borné de  $L^{\infty}(0, T; H)$ ,

$$(3.43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta^{1/2} \sigma_{\eta} \text{ (resp. } \eta^{1/2} v_{\eta}) \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; \mathcal{V}) \\ \text{(resp. de } L^2(0, T; V)). \end{array} \right.$$

Par ailleurs faisant  $t = 0$  dans (3.38) on en déduit, en tenant compte de (3.39)

$$(3.44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}(\sigma'(0), \tau) = (g(0) - \mathfrak{J}'_{\mu}(\sigma^0), \tau) \\ (v'(0), w) = (h(0), w) \end{array} \right.$$

de sorte que lorsque  $\eta \rightarrow 0$  :

- (3.45)  $\sigma'(0)$  (resp.  $v'(0)$ ) demeure dans un borné de  $\mathcal{H}$  (resp.  $H$ ). ■

*Estimations a priori (II)*

On dérive (3.38) en  $t$  <sup>(12)</sup>; il vient :

$$(3.46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}(\sigma'', \tau) + ((\mathfrak{J}'_{\mu}(\sigma + \sigma^0))', \tau) + \eta[\sigma', \tau] + \int_{\Omega} v'_i \tau_{ij,j} dx = (g', \tau), \\ (v'', w) + \eta((v', w)) + \int_{\Omega} \sigma'_{ij} w_{i,j} dx = (h', w). \end{array} \right.$$

<sup>(10)</sup> Cela résulte de la théorie générale des problèmes paraboliques monotones (cf. Lions [1]). On peut d'ailleurs retrouver cela à partir des estimations a priori qui suivent.

<sup>(11)</sup> Noter que dans cette première estimation l'hypothèse (3.23) n'intervient pas.

<sup>(12)</sup> Cela est justifié si l'on approche (par exemple) (3.38) par la méthode de Galerkin.

Prenant dans (3.46)  $\tau = \sigma'$  et  $w = v'$ , on obtient, en ajoutant :

$$(3.47) \quad \left| \begin{aligned} \mathcal{A}(\sigma'', \sigma') + \eta[\sigma', \sigma'] + (v'', v') + \eta((v', v')) + \\ + ((\mathfrak{J}'_{\mu}(\sigma + \sigma^0))', \sigma') = (g', \sigma') + (h', v'). \end{aligned} \right.$$

Mais

$$(3.48) \quad \left| \begin{aligned} ((\mathfrak{J}'_{\mu}(\sigma + \sigma^0))', \sigma') = \\ = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta t)^2} (\mathfrak{J}'_{\mu}(\sigma(t + \Delta t) + \sigma^0) - \mathfrak{J}'_{\mu}(\sigma(t) + \sigma^0), \sigma(t + \Delta t) - \sigma(t)) \\ \geq 0 \quad (\text{grâce à la monotonie de } \sigma \rightarrow \mathfrak{J}'_{\mu}(\sigma + \sigma^0)) \quad (1^3). \end{aligned} \right.$$

Par conséquent, on déduit de (3.47) que

$$(3.49) \quad \mathcal{A}(\sigma'', \sigma') + \eta[\sigma', \sigma'] + (v'', v') + \eta((v', v')) \leq (g', \sigma') + (h', v')$$

d'où il résulte, en tenant compte de (3.45), que, lorsque  $\eta \rightarrow 0$ ,

$$(3.50) \quad \sigma' = \sigma'_\eta \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; \mathcal{H}),$$

$$(3.51) \quad v' = v'_\eta \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; H),$$

$$(3.52) \quad \left| \begin{aligned} \eta^{1/2} \sigma'_\eta \text{ (resp. } \eta^{1/2} v'_\eta) \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; \mathcal{V}) \\ \text{(resp. de } L^2(0, T; V)). \quad \blacksquare \end{aligned} \right.$$

*Passage à la limite en  $\eta$*

Il résulte des estimations précédentes que

$$(3.53) \quad \mathfrak{J}'_{\mu}(\sigma_\eta + \sigma^0) \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; \mathcal{H}).$$

On peut donc extraire une suite, encore notée  $\sigma_\eta, v_\eta$ , telle que lorsque  $\eta \rightarrow 0$ , on ait :

$$(3.54) \quad \sigma_\eta, \sigma'_\eta \rightarrow \sigma, \sigma' \quad \text{dans } L^\infty(0, T; \mathcal{H}) \text{ faible étoile,}$$

$$(3.55) \quad v_\eta, v'_\eta \rightarrow v, v' \quad \text{dans } L^\infty(0, T; H) \text{ faible étoile,}$$

$$(3.56) \quad \mathfrak{J}'_{\mu}(\sigma_\eta + \sigma^0) \rightarrow \chi \quad \text{dans } L^\infty(0, T; \mathcal{H}) \text{ faible étoile}$$

et grâce à (3.43) on peut passer alors à la limite dans (3.38).

On a ainsi mis en évidence  $\sigma, v$  vérifiant

$$(3.57) \quad \left| \begin{aligned} \mathcal{A}(\sigma', \tau) + (\chi, \tau) + \int_{\Omega} v_i \tau_{ij,j} dx = (g, \tau), \\ (v', w) + \int_{\Omega} \sigma_{ij} w_{i,j} dx = (h, w). \end{aligned} \right.$$

(1<sup>3</sup>) On a utilisé ici le fait que  $\sigma^0$  ne dépend pas de  $t$ .

Mais par un raisonnement de type « monotonie » (comme on en a déjà effectué plusieurs fois — cf. aussi le Chapitre 2 de Lions [1]), on vérifie que

$$(3.58) \quad \chi = \gamma'_\mu(\sigma + \sigma^0).$$

On a donc montré l'existence de  $\sigma, v$  satisfaisant à (3.18), (3.13) et (3.24), (3.25).

Mais l'on déduit de (3.18) que, au sens des distributions dans le cylindre  $\Omega \times ]0, T[$ , on a (3.11) d'où résulte que l'on a (3.26), (3.27), puisque

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(v) &= A_{ijkh} \sigma'_{kh} + (\gamma'_\mu(\sigma + \sigma^0))_{ij} - g_{ij}, \\ \sigma_{ij,j} &= v'_i - f_i. \end{aligned}$$

(On en déduit ensuite (3.12) comme déjà vu.) ■

### 3.5. Démonstration de l'existence dans le cas quasi statique

On va obtenir la solution des problèmes quasi-statiques comme *limite* des solutions des problèmes suivants : pour  $\xi > 0$  (destiné à tendre vers 0) on désigne par  $\{\sigma_\xi, v_\xi\} = \{\sigma, v\}$  la solution de

$$(3.59) \quad \begin{cases} \mathcal{A}(\sigma', \tau) + (\gamma'_\mu(\sigma + \sigma^0), \tau) + \int_\Omega v_i \tau_{ij,j} dx = (g, \tau), & \forall \tau \in \mathcal{V}, \\ \xi(v', w) + \int_\Omega \sigma_{ij} w_{i,j} dx = (h, w) & \forall w \in V, \end{cases}$$

avec

$$(3.60) \quad \sigma(0) = 0, \quad v(0) = 0.$$

D'après le Théorème 3.1 on connaît l'existence et l'unicité d'un couple  $\{\sigma_\xi, v_\xi\}$  solution de ce problème.

Examinons maintenant *comment les estimations a priori* du n° 3.4 *dépendent de*  $\xi$ . L'analogue de (3.41), (3.42) est :

$$(3.61) \quad \sigma_\xi \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; \mathcal{H}) \text{ lorsque } \xi \rightarrow 0,$$

$$(3.62) \quad \xi^{1/2} v_\xi \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; H).$$

Faisant  $t = 0$  dans (3.59) on en déduit que

$$(3.63) \quad \mathcal{A}(\sigma'(0), \tau) = (g(0), \tau) - (\gamma'_\mu(\sigma^0), \tau)$$

$$(3.64) \quad \xi v'(0) = h(0)$$

et donc, comme on suppose dans les Théorèmes 3.2 et 3.3 que  $h(0) = 0$  :

$$(3.65) \quad v'_\xi(0) = v'(0) = 0.$$

L'analogue de (3.50), (3.51) est maintenant :

$$(3.66) \quad \sigma'_\xi \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; \mathcal{H}),$$

$$(3.67) \quad \xi^{1/2} v'_\xi \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; H). \quad \blacksquare$$

Par ailleurs on déduit de la première équation (3.59) que

$$(3.68) \quad \varepsilon_{ij}(v_\xi) = A_{ijkh} \sigma'_{kh} + \mathfrak{F}'_\mu(\sigma + \sigma^0) - g \quad (\text{où } \sigma = \sigma_\xi)$$

ce qui, avec (3.61) et (3.66) implique que

$$(3.69) \quad \varepsilon_{ij}(v_\xi) \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

L'utilisation de (3.69) diffère selon que  $\Gamma_U$  est de mesure positive ou  $\Gamma_U = \emptyset$ .

Si  $\Gamma_U$  est de mesure positive, il résulte de (3.69) et du Théorème 3.3, Chapitre 3 (conséquence de l'inégalité de Korn), que

$$(3.70) \quad v_\xi \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; V).$$

Si  $\Gamma_U = \emptyset$ , il faut introduire (comme nous l'avons fait au Chapitre 3) l'espace quotient

$$(3.71) \quad V^* = V/\mathcal{H}$$

et alors

$$(3.72) \quad v_\xi^* \in \text{borné de } L^\infty(0, T; V^*). \quad \blacksquare$$

Par conséquent on peut extraire une suite, encore notée  $\sigma_\xi, v_\xi$ , telle que, lorsque  $\xi \rightarrow 0$  :

$$(3.73) \quad \sigma_\xi, \sigma'_\xi \rightarrow \sigma, \sigma' \quad \text{dans } L^\infty(0, T; \mathcal{H}) \text{ faible étoile,}$$

$$(3.74) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{(i) } v_\xi \rightarrow V & \text{dans } L^\infty(0, T; V) \text{ faible étoile si } \Gamma_U \neq \emptyset, \\ \text{(ii) } v_\xi^* \rightarrow V^* & \text{dans } L^\infty(0, T; V^*) \text{ faible étoile si } \Gamma_U = \emptyset, \end{array} \right.$$

et on peut, par un raisonnement de monotonie, passer à la limite dans le terme  $\mathfrak{F}'_\mu(\sigma_\xi + \sigma^0)$ . On en déduit donc que  $\sigma$  et  $v$  satisfont aux conditions des Théorèmes 3.2 et 3.3 <sup>(14)</sup>, sous réserve de vérifier que  $\sigma$  satisfait à (3.26). Mais cela est conséquence de la deuxième équation (3.19) qui s'écrit

$$- \sigma_{ij,j} = h_i. \quad \blacksquare$$

### Remarque 3.3

On a également obtenu le fait que le problème quasi-statique est limite, lorsque  $\xi \rightarrow 0$ , de la solution du problème (3.59), (3.60).  $\blacksquare$

<sup>(14)</sup> On peut passer à la limite, dans le cas  $\Gamma_U = \emptyset$ , dans la deuxième équation (3.59) grâce au fait que  $\langle h, \rho \rangle = 0$  par hypothèse.

## 4. ÉTUDE DES PROBLÈMES ÉLASTIQUES-PARFAITEMENT PLASTIQUES

### 4.1. Position des problèmes

On va maintenant faire tendre le coefficient de viscosité  $\mu$  vers 0 dans les résultats précédents.

Introduisons sur  $\mathcal{H}$  la fonctionnelle

$$(4.1) \quad \mathfrak{J}(\tau) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\tau_{ij} - (P_{\tilde{K}} \tau)_{ij}) (\tau_{ij} - (P_{\tilde{K}} \tau)_{ij}) dx.$$

Alors la première équation (3.18) peut s'écrire sous la forme de l'inéquation

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}(\sigma', \tau - \sigma) + \mu^{-1} \mathfrak{J}(\tau + \sigma^0) - \mu^{-1} \mathfrak{J}(\sigma + \sigma^0) + \\ \quad + \int_{\Omega} v_i (\tau_{ij,j} - \sigma_{ij,j}) dx \geq (g, \tau - \sigma) \quad \forall \tau \in \mathcal{V}, \end{array} \right.$$

toutes choses égales par ailleurs.

Le terme  $\mu^{-1} \mathfrak{J}(\sigma + \sigma^0)$  représente lorsque  $\mu \rightarrow 0$  un *terme de pénalisation* attaché au convexe  $K$  de  $\mathcal{H}$  défini par

$$(4.3) \quad K = \{ \tau \mid \tau \in \mathcal{H}, \tau(x) \in \tilde{K} \text{ p.p. dans } \Omega \}.$$

Raisonnons formellement, ce qui suit étant justifié aux numéros suivants. La solution  $\{ \sigma_{\mu}, v_{\mu} \}$  sera montrée être *convergente* lorsque  $\mu \rightarrow 0$ , la limite vérifiant

$$(4.4) \quad \sigma(t) + \sigma^0 \in K,$$

$$(4.5) \quad \mathcal{A}(\sigma', \tau - \sigma) + \int_{\Omega} v_i (\tau_{ij,j} - \sigma_{ij,j}) dx \geq (g, \tau - \sigma) \quad \forall \tau \in (K - \sigma^0) \cap \mathcal{V},$$

$$(4.6) \quad (v', w) + \int_{\Omega} \sigma_{ij} w_{i,j} dx = (h, w) \quad \forall w \in V,$$

$$(4.7) \quad \sigma(0) = 0, \quad v(0) = 0.$$

On prend maintenant (4.4) ... (4.7) comme *définition du problème élastique-parfaitement plastique dynamique*. ■

*Remarque 4.1*

On aboutit naturellement *au même énoncé* en portant des considérations du n° 2.1.2. ■

*Remarque 4.2*

On peut *éliminer*  $v$  dans le système précédent <sup>(15)</sup>. En effet (4.6) équivaut à

$$(4.8) \quad v'_i - \sigma_{ij,j} = h_i.$$

Si l'on introduit

$$(4.9) \quad S(t) = \int_0^t \sigma(t_1) dt_1$$

<sup>(15)</sup> On peut aussi faire un calcul d'élimination au n° 3, mais il est alors sans utilité particulière.



alors (4.8) donne

$$(4.10) \quad v_i(t) = S_{ij,j} + \int_0^t h_i(t_1) dt_1$$

et (4.5) devient, en utilisant la notation (3.36) :

$$(4.11) \quad \mathcal{A}(S'', \tau - S') + [S + \int_0^t h(t_1) dt_1, \tau - S'] \geq (g, \tau - S').$$

Si l'on pose

$$(4.12) \quad G(t) = g(t) - \int_0^t h(t_1) dt_1$$

le problème devient :

on cherche  $S$  telle que

$$(4.13) \quad S'(t) \in (K - \sigma^0) \cap \mathcal{V},$$

$$(4.14) \quad \mathcal{A}(S'', \tau - S') + [S, \tau - S'] \geq (G, \tau - S') \quad \forall \tau \in (K - \sigma^0) \cap \mathcal{V},$$

$$(4.15) \quad S(0) = 0, \quad S'(0) = 0.$$

Une fois  $S$  déterminé par (4.13), (4.14), (4.15) (cf. Théorème 4.1 ci-après)  $v_i$  est défini par (4.10) et  $\sigma = S'$ . ■

Le problème quasi statique s'obtient en supprimant dans (4.6) le terme en  $v'$ . Le problème est donc de trouver  $\sigma$  et  $v$  tels que l'on ait (4.4), (4.5) et

$$(4.16) \quad \int_{\Omega} \sigma_{ij} w_{i,j} dx = (h, w) \quad \forall w \in V,$$

et

$$(4.17) \quad \sigma(0) = 0.$$

On peut encore éliminer  $v$ . En effet (4.16) équivaut à

$$(4.18) \quad -\sigma_{ij,j} = h_i.$$

On introduit alors

$$(4.19) \quad L(t) = \{ \tau \mid \tau \in \mathcal{H}, \quad -\tau_{ij,j} = h_i, \quad \tau_{ij} n_j = 0 \text{ sur } \Gamma_F \}.$$

Si l'on prend dans (4.5)  $\tau \in L(t) \cap (K - \sigma^0)$ , le terme  $\int_{\Omega} v_i(\tau_{ij,j} - \sigma_{ij,j}) dx$  est nul et l'on obtient le problème de déterminer  $\sigma$  solution de

$$(4.20) \quad \sigma(t) \in (K - \sigma^0) \cap L(t),$$

$$(4.21) \quad \mathcal{A}(\sigma', \tau - \sigma) \geq (g, \tau - \sigma) \quad \forall \tau \in (K - \sigma^0) \cap L(t),$$

$$(4.22) \quad \sigma(0) = 0.$$

Une fois  $\sigma$  déterminé, l'obtention de  $v$  conduit à des difficultés, sur lesquelles nous reviendrons à la Remarque 4.4.

4.2. Énoncé des résultats

**Théorème 4.1.** *On se place dans les hypothèses du Théorème 3.1, avec en outre*

$$(4.23) \quad \sigma^0 \in K.$$

*Il existe alors une fonction  $S$  et une seule telle que*

$$(4.24) \quad S, S', S'' \in L^\infty(0, T; \mathcal{H}),$$

$$(4.25) \quad S, S' \in L^\infty(0, T; \mathcal{V}),$$

*et vérifiant (4.13), (4.14), (4.15). On a :  $\sigma = S'$  et  $v$  est donné par (4.10).*

Cela résout le problème élastique-parfaitement plastique *dynamique*.

En outre le problème élastique-parfaitement plastique est *limité des cas avec viscosité* lorsque  $\mu \rightarrow 0$ . Désignons par  $\sigma_\mu, v_\mu$  la solution obtenue au Théorème 3.1 pour  $\mu > 0$ . On a :

**Théorème 4.2.** *On se place dans les hypothèses du Théorème 4.1. Soit  $\sigma, v$  la solution définie par le Théorème 4.1. Alors, lorsque  $\mu \rightarrow 0$  :*

$$(4.26) \quad \sigma_\mu, \sigma'_\mu \rightarrow \sigma, \sigma' \quad \text{dans } L^\infty(0, T; \mathcal{H}) \text{ faible étoile,}$$

$$(4.27) \quad v_\mu, v'_\mu \rightarrow v, v' \quad \text{dans } L^\infty(0, T; H) \text{ faible étoile,}$$

$$(4.28) \quad \sigma_{\mu ij,j} \rightarrow \sigma_{ij,j} \quad \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible étoile.} \quad \blacksquare$$

Relativement au cas quasi statique, on a

**Théorème 4.3.** *On se place dans les hypothèses du Théorème 4.1 avec en outre*

$$(4.29) \quad \sigma^0 = 0$$

*et, comme aux Théorèmes 3.2, 3.3,  $h(0) = 0$ .*

*Il existe une fonction  $\sigma$  et une seule telle que*

$$(4.30) \quad \left| \begin{array}{l} \sigma, \sigma' \in L^\infty(0, T; \mathcal{H}), \\ \sigma \in L^\infty(0, T; \mathcal{V}), \end{array} \right.$$

*et vérifiant (4.20) (p.p. en  $t$ ) et (4.21), (4.22).*

On a en outre

**Théorème 4.4.** *On se place dans les hypothèses du Théorème 4.3. Alors si  $\sigma_\mu, v_\mu$  désigne la solution obtenue au Théorème 3.2 (resp.  $\sigma_\mu, v_\mu$  obtenue au Théorème 3.3) on a*

$$(4.31) \quad \left| \begin{array}{l} \sigma_\mu, \sigma'_\mu \rightarrow \sigma, \sigma' \quad \text{dans } L^\infty(0, T; \mathcal{H}) \text{ faible étoile,} \\ \sigma_{\mu ij,j} \rightarrow \sigma_{ij,j} \quad \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible étoile.} \end{array} \right.$$

## Remarque 4.3

Nous n'avons pas obtenu de renseignements sur les  $\varepsilon_{ij}(v_\mu)$ . ■

## 4.3. Démonstration des résultats d'unicité

Soient  $S$  et  $S_*$  deux solutions éventuelles de (4.13), (4.14), (4.15). Prenons  $\tau = S'_*$  (resp.  $\tau = S'$ ) dans l'inéquation (4.14) (resp. l'inéquation analogue relative à  $S_*$ ) et ajoutons; si  $\hat{S} = S - S_*$  on obtient

$$\mathcal{A}(\hat{S}'', \hat{S}') + [\hat{S}, \hat{S}'] \leq 0$$

d'où  $\hat{S} = 0$ . ■

De même si  $\sigma, \sigma_*$  sont deux solutions éventuelles de (4.20), (4.21), (4.22) on obtient si  $\hat{\sigma} = \sigma - \sigma_*$ :

$$\mathcal{A}(\hat{\sigma}', \hat{\sigma}) \leq 0$$

d'où :  $\hat{\sigma} = 0$ . ■

## 4.4. Démonstration des Théorèmes 4.1 et 4.2

On considère  $\sigma_\mu, v_\mu$  solution donnée au Théorème 3.1, donc

$$(4.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}(\sigma'_\mu, \tau) + (\gamma'_\mu(\sigma_\mu + \sigma^0), \tau) + \int_\Omega v_{\mu i} \tau_{ij,j} dx = (g, \tau), \quad \tau \in \mathcal{V}, \\ (v'_\mu, w) + \int_\Omega \sigma_{\mu ij} w_{i,j} dx = (h, w) \quad \forall w \in V \end{array} \right.$$

et l'on vérifie dans les estimations a priori du n° 3 la dépendance en  $\mu$ .

Remplaçant dans (4.32)  $\tau$  par  $\sigma_\mu$  et  $w$  par  $v_\mu$  on obtient :

$$(4.33) \quad \sigma_\mu \text{ demeure (lorsque } \mu \rightarrow 0) \text{ dans un borné de } L^\infty(0, T; \mathcal{H}),$$

$$(4.34) \quad v_\mu \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; H).$$

Faisant  $t = 0$  dans (4.32) on en déduit, comme  $\gamma'_\mu(\sigma^0) = 0$ , que

$$(4.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}(\sigma'_\mu(0), \tau) = (g(0), \tau), \\ v'_\mu(0) = h(0). \end{array} \right.$$

Dérivant (4.32) en  $t$  et remplaçant dans le résultat  $\tau$  par  $\sigma'_\mu$  et  $w$  par  $v'_\mu$ , on obtient, en utilisant (4.35) :

$$(4.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma'_\mu \text{ (resp. } v'_\mu) \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; \mathcal{H}) \\ \text{(resp. de } L^\infty(0, T; H)). \end{array} \right.$$

Par ailleurs prenant  $\tau = \sigma_\mu + \sigma^0$ ,  $w = v_\mu$  dans (4.32) et additionnant, il vient

$$\int_0^T (\gamma'_\mu(\sigma_\mu + \sigma^0), \sigma_\mu + \sigma^0) dt \leq \text{Cte} = C$$

ou encore, avec la notation (4.1)

$$(4.37) \quad \int_0^T (\mathfrak{J}(\sigma_\mu + \sigma^0)) dt \leq C\mu.$$

On peut alors extraire une suite, encore notée  $\sigma_\mu, v_\mu$ , telle que l'on ait (4.26), (4.27). La deuxième équation (4.32) montre alors que

$$\sigma_{\mu ij,j} = v'_{\mu i} - h_i$$

d'où (4.28).

On déduit de (4.37) que

$$\mathfrak{J}(\sigma + \sigma^0) = 0$$

d'où (4.4).

Comme on a vu en (4.2) on peut écrire la première équation (4.32) sous la forme

$$(4.38) \quad \mathcal{A}(\sigma'_\mu, \tau - \sigma_\mu) + \int_\Omega v_{\mu i}(\tau_{ij,j} - \sigma_{\mu ij,j}) dx + \mu^{-1} \mathfrak{J}(\tau + \sigma^0) - \mu^{-1} \mathfrak{J}(\sigma_\mu + \sigma^0) \geq (g, \tau - \sigma_\mu).$$

Si l'on prend dans (4.38)  $\tau \in K - \sigma^0$  on a :  $\mathfrak{J}(\tau + \sigma^0) = 0$  et comme  $\mathfrak{J}(\sigma_\mu + \sigma^0) \geq 0$  on en déduit :

$$(4.39) \quad \mathcal{A}(\sigma'_\mu, \tau - \sigma_\mu) + \int_\Omega v_{\mu i}(\tau_{ij,j} - \sigma_{\mu ij,j}) dx \geq (g, \tau - \sigma_\mu), \quad \tau \in K - \sigma^0.$$

On introduit, par analogie avec (4.9)

$$(4.40) \quad S_\mu(t) = \int_0^t \sigma_\mu(t_1) dt,$$

qui satisfait alors — en éliminant  $v_\mu$  comme ci-dessus — à

$$(4.41) \quad \mathcal{A}(S''_\mu, \tau - S_\mu) + [S_\mu, \tau - S'_\mu] \geq (G, \tau - S_\mu) \quad \forall \tau \in (K - \sigma^0) \cap \mathcal{V}.$$

Il reste à voir que  $\mathcal{S}$  donné par (4.9) satisfait à (4.14); il reste donc à passer à la limite dans (4.41) ce que l'on fait par les procédés habituels; on prend dans (4.41)  $\tau = \tau(t)$  où

$$(4.42) \quad \tau, \tau' \in L^2(0, T; \mathcal{V}), \quad \tau(t) \in K - \sigma^0 \quad \text{p.p.},$$

et l'on intègre en  $t$ ; il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathcal{A}(S''_\mu, \tau) dt + \int_0^T [S_\mu, \tau] dt - \int_0^T (G, \tau - S'_\mu) dt &\geq \\ &\geq \int_0^T (\mathcal{A}(S''_\mu, S'_\mu) + [S_\mu, S'_\mu]) dt = \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{A}(S'_\mu(T), S'_\mu(T)) + \frac{1}{2} [S_\mu(T), S_\mu(T)] \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathcal{A}(S'', \tau) dt + \int_0^T \{ [S, \tau] - (G, \tau - S') \} dt &\geq \\ &\geq \liminf_{\mu \rightarrow 0} \{ \frac{1}{2} \mathcal{A}(S'_\mu(T), S'_\mu(T)) + \frac{1}{2} [S_\mu(T), S_\mu(T)] \} \\ &\geq \frac{1}{2} \mathcal{A}(S'(T), S'(T)) + \frac{1}{2} [S(T), S(T)] = \\ &= \int_0^T \{ \mathcal{A}(S'', S') + [S, S'] \} dt \end{aligned}$$

et par conséquent

$$(4.43) \quad \int_0^T \{ \mathcal{A}(S'', \tau - S') + [S, \tau - S'] - (G, \tau - S') \} dt \geq 0$$

pour tout  $\tau$  satisfaisant à (4.42).

On passe de là à (4.14) par le raisonnement habituel (on prend dans (4.43)  $\tau(t) = S'(t)$  sauf dans un voisinage  $\mathcal{O}_j$  d'un point  $t$  où l'on prend  $\tau(t) = \tau$  fixé dans  $K - \sigma^0$ ; divisant le résultat par  $\text{Mes}(\mathcal{O}_j)$  et faisant tendre  $\text{Mes}(\mathcal{O}_j)$  vers 0, on en déduit (4.14)). ■

#### 4.5. Démonstration des Théorèmes 4.3 et 4.4

On désigne par  $\{ \sigma, v \} = \{ \sigma_{\mu\xi}, v_{\mu\xi} \}$  la solution de

$$(4.44) \quad \begin{cases} \mathcal{A}(\sigma', \tau) + (\mathfrak{J}'_\mu(\sigma), \tau) + \int_\Omega v_i \tau_{ij,j} dx = (g, \tau), \\ \xi(v', w) + \int_\Omega \sigma_{ij} w_{i,j} dx = (h, w) \quad (\xi > 0), \end{cases}$$

$$(4.45) \quad \sigma(0) = 0, \quad v(0) = 0.$$

Faisant  $\tau = \sigma$ ,  $w = v$  dans (4.44) on en déduit

$$(4.46) \quad \sigma_{\mu\xi} \in \text{borné de } L^\infty(0, T; \mathcal{H}) \text{ lorsque } \mu, \xi \rightarrow 0,$$

$$(4.47) \quad \xi^{1/2} v_{\mu\xi} \in \text{borné de } L^\infty(0, T; H),$$

et également que

$$\int_0^T (\mathfrak{J}'_\mu(\sigma_{\mu\xi}), \sigma_{\mu\xi}) dt \leq \text{Cte} = C$$

donc que

$$(4.48) \quad \int_0^T \mathfrak{J}(\sigma_{\mu\xi}) dt \leq C\mu.$$

Par ailleurs, faisant  $t = 0$  dans (4.44) :

$$(4.49) \quad \begin{cases} \sigma_{\mu\xi}(0) \text{ demeure dans un borné de } \mathcal{H}, \\ v_{\mu\xi}(0) = 0. \end{cases}$$

On en déduit que, après avoir dérivé (4.44) en  $t$  :

$$(4.50) \quad \begin{cases} \sigma'_{\mu\xi} \text{ (resp. } \xi^{1/2} v'_{\mu\xi}) \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; \mathcal{H}) \\ \text{(resp. de } L^\infty(0, T; H)). \end{cases}$$

On peut passer à la limite en  $\xi$ , comme on a déjà vu aux Théorèmes 3.2 et 3.3; on obtient donc la solution  $\{\sigma_\mu, v_\mu\}$  ou  $\{\sigma_\mu, v_\mu^*\}$  donnée aux Théorèmes 3.2, 3.3 avec les estimations

$$(4.51) \quad \sigma_\mu, \sigma'_\mu \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; \mathcal{H}^0),$$

$$(4.52) \quad \int_0^T \tilde{\gamma}(\sigma_\mu) dt \leq C\mu,$$

$$(4.53) \quad \sigma_{\mu ij,j} \in \text{borné de } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Mais la deuxième équation (3.19) donne

$$(4.54) \quad -\sigma_{\mu ij,j} = h_i,$$

et la première équation (3.19) implique ( $\sigma^0 = 0$ )

$$(4.55) \quad \mathcal{A}(\sigma'_\mu, \tau - \sigma_\mu) + \mu^{-1} \tilde{\gamma}(\tau) - \mu^{-1} \tilde{\gamma}(\sigma_\mu) + \int_\Omega v_i(\tau_{ij,j} - \sigma_{\mu ij,j}) dx \geq (g, \tau - \sigma_\mu).$$

On prend alors  $\tau$  dans  $L(t)$  (cf. (4.19)) d'où

$$(4.56) \quad \mathcal{A}(\sigma'_\mu, \tau - \sigma_\mu) + \mu^{-1} \tilde{\gamma}(\tau) - \mu^{-1} \tilde{\gamma}(\sigma_\mu) \geq (g, \tau - \sigma_\mu).$$

Si en outre  $\tau \in K$  alors  $\tilde{\gamma}(\tau) = 0$  et comme  $\tilde{\gamma}(\sigma_\mu) \geq 0$  on en déduit que

$$(4.57) \quad \mathcal{A}(\sigma'_\mu, \tau - \sigma_\mu) \geq (g, \tau - \sigma_\mu), \quad \tau \in K \cap L(t).$$

On déduit de (4.51), (4.52), (4.53) que l'on peut extraire une sous-suite, encore notée  $\sigma_\mu$ , telle que l'on ait (4.31). Grâce à (4.52) on vérifie que  $\sigma \in K$  donc  $\sigma \in K \cap L(t)$  et on déduit de (4.57) par les procédés habituels que l'on a (4.21). ■

#### Remarque 4.4. Détermination du champ des vitesses

Le champ de contraintes solution  $\sigma(x, t)$  étant connu, le champ des vitesses de déplacement  $\partial u(x, t)/\partial t$  satisfait à

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(\partial u/\partial t) = A_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} + \lambda_{ij} \\ \lambda_{ij}(\varphi_{ij} - \sigma_{ij}) \leq 0 \quad \forall \varphi \in K. \end{cases}$$

Le problème de déterminer  $\partial u(x, t)/\partial t$  à partir de ces relations est, dans le cas général, ouvert à notre connaissance.

On rencontre une situation analogue dans le problème de la torsion élasto-plastique d'un arbre cylindrique et le problème est alors résolu de manière presque explicite. Cf. n° 6.6, Remarque 6.3. ■

#### Remarque 4.5

Dans les cas quasi statiques avec la loi de comportement de Prandtl-Reuss on peut obtenir une formulation variationnelle portant directement sur  $\partial \{\sigma_{ij}\}/\partial t$  (cf. W. I. Koiter [1], H. D. Bui et K. Dangvan [1], C. T. Herakovitch et P. G. Hodge [1]). Cette propriété peut être utilisée en analyse numérique, mais il semble difficile d'en déduire une existence globale sur  $[0, T]$ . ■

## 5. ÉTUDE DES PROBLÈMES RIGIDE-VISCO-PLASTIQUES ET RIGIDES-PARFAITEMENT PLASTIQUES

### 5.1. Problèmes rigides-visco-plastiques

On va faire « tendre les coefficients  $A_{ijkh}$  vers zéro » au sens suivant <sup>(16)</sup> :

$$(5.1) \quad \text{on remplace } A_{ijkh} \text{ par } \theta A_{ijkh}, \quad \theta > 0, \quad \theta \rightarrow 0.$$

On considère donc la solution  $\{\sigma_\theta, v_\theta\} = \{\sigma, v\}$  de

$$(5.2) \quad \begin{cases} \theta \mathcal{A}(\sigma', \tau) + (\mathfrak{J}'_\mu(\sigma + \sigma^0), \tau) + \int_\Omega v_i \tau_{i,j} dx = (g, \tau), \\ (v', w) + \int_\Omega \sigma_{ij} w_{i,j} dx = (h, w), \end{cases}$$

avec

$$(5.3) \quad \sigma(0) = 0, \quad v(0) = 0.$$

Si l'on passe à la limite en  $\theta$  *formellement*, admettant que dans une topologie convenable,  $\sigma_\theta \rightarrow \sigma$ ,  $v_\theta \rightarrow v$  (cela sera précisé plus loin) on obtient :

$$(5.4) \quad \begin{cases} (\mathfrak{J}'_\mu(\sigma + \sigma^0), \tau) + \int_\Omega v_i \tau_{i,j} dx = (g, \tau), \\ (v', w) + \int_\Omega \sigma_{ij} w_{i,j} dx = (h, w), \end{cases}$$

avec

$$(5.5) \quad v(0) = 0.$$

*Mais on élimine alors  $\sigma$  <sup>(17)</sup>. La première équation (5.4) équivaut à*

$$(5.6) \quad \mathfrak{J}'_\mu(\sigma + \sigma^0) = g + \varepsilon(v) \quad (\text{ou } g + D(v)),$$

ou encore

$$(5.6\text{bis}) \quad g + \varepsilon(v) \in \partial \mathfrak{J}'_\mu(\sigma + \sigma^0).$$

On introduit alors la fonctionnelle duale  $\mathfrak{J}_\mu^*$  de  $\mathfrak{J}_\mu$ , définie sur  $\mathcal{H}$  par

$$(5.7) \quad \mathfrak{J}_\mu^*(\sigma) = \sup_{\tau} [(\sigma, \tau) - \mathfrak{J}_\mu(\tau)].$$

<sup>(16)</sup> On pourrait considérer un cadre beaucoup plus général, même avec des coefficients  $A_{ijkh}$  dépendant de  $x$  mais tendant vers 0 dans  $L^\infty(\Omega)$  fort. On se place dans le cadre (5.1) pour simplifier l'exposé.

<sup>(17)</sup> Il y a une *dualité* entre le cas rigide — visco-plastique (où l'on élimine  $\sigma$ ) et le cas élastique — parfaitement plastique (où l'on élimine  $v$ ). On précisera d'ailleurs cela dans la suite.

On peut d'ailleurs préciser, car  $\tilde{J}_\mu(\sigma) = \mu^{-1} \tilde{J}(\sigma)$ . Alors on vérifie sans peine que

$$(5.8) \quad \left| \begin{array}{l} \tilde{J}_\mu^*(\sigma) = \mu^{-1} \tilde{J}^*(\mu\sigma), \\ \tilde{J}^* = \text{fonctionnelle duale de } \tilde{J}. \end{array} \right.$$

Alors (5.6bis) équivaut (cf. Moreau [1]) à

$$(5.9) \quad \sigma + \sigma^0 \in \partial \tilde{J}_\mu^*(\varepsilon(v) + g)$$

c'est-à-dire

$$(5.10) \quad \tilde{J}_\mu^*(\varepsilon(w) + g) - \tilde{J}_\mu^*(\varepsilon(v) + g) - (\sigma + \sigma^0, \varepsilon(w) - \varepsilon(v)) \geq 0.$$

La deuxième équation (5.4) s'écrit

$$(v', w - v) + (\sigma, \varepsilon(w) - \varepsilon(v)) - (h, w - v) = 0$$

et utilisant (5.10) on en déduit que

$$(5.11) \quad \left| \begin{array}{l} (v', w - v) + \tilde{J}_\mu^*(\varepsilon(w) + g) - \tilde{J}_\mu^*(\varepsilon(v) + g) \geq \\ \geq (-\sigma_{ij,j}^0 + h_i, w_i - v_i), \end{array} \right. \quad v, w \in V. \quad \blacksquare$$

On montre alors le résultat suivant, toujours par le même type de méthodes :

**Théorème 5.1.** *On se place dans les hypothèses du Théorème 3.1 avec (4.23) et*

$$(5.12) \quad g(0) = 0.$$

Soit  $\{\sigma_\theta, v_\theta\}$  la solution du problème (5.2), (5.3). On a :

$$(5.13) \quad \left| \begin{array}{l} v_\theta, v'_\theta \rightarrow v, v' \text{ dans } L^\infty(0, T; H) \text{ faible étoile,} \\ v_\theta \rightarrow v \text{ dans } L^\infty(0, T; V) \text{ faible étoile,} \end{array} \right.$$

où  $v$  est la solution de (5.11) avec  $v(0) = 0$ .

La démonstration repose, comme toujours, sur les estimations a priori. On déduit de (5.2) que

$$(5.14) \quad v_\theta \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; H),$$

$$(5.15) \quad \theta^{1/2} \sigma_\theta \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; \mathcal{H}).$$

Faisant  $t = 0$  dans (5.2), on en déduit, grâce à (5.12), que

$$(5.16) \quad \sigma'_\theta(0) = 0,$$

et par ailleurs

$$(5.17) \quad v'_\theta(0) = h(0).$$



Dérivant alors les équations (5.2) en  $t$  on obtient :

$$(5.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} v'_\theta \text{ (resp. } \theta^{1/2} \sigma'_\theta) \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; H) \\ \text{(resp. de } L^\infty(0, T; \mathcal{H}) \text{).} \end{array} \right.$$

La deuxième équation (5.2) donne alors

$$(5.19) \quad \sigma_{\theta ij,j} \in \text{borné de } L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$$

et par ailleurs

$$(5.20) \quad \int_0^T (\beta'_\mu(\sigma_\theta + \sigma^0), \sigma_\theta + \sigma^0) dt \leq C$$

de sorte que la première équation (5.2) donne :

$$(5.21) \quad v_{\theta ij,j} \in \text{borné de } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) .$$

On en déduit le résultat. ■

*Remarque 5.1*

Une fois  $v$  connu, la détermination de  $\sigma_{ij}$  se heurte à des difficultés analogues à celles rencontrées à la Remarque 4.4 dans un cas « dual ». ■

*Remarque 5.2*

Le problème « quasi statique » associé est en fait un simple problème elliptique, obtenu en supprimant le terme en  $v'$  dans (5.11). ■

*Remarque 5.3*

Le problème examiné ici sera repris, en le précisant, et dans un cadre non linéaire, au Chapitre 6. ■

## 5.2. Problèmes rigides-parfaitement plastiques

*Orientation*

Le cas rigide-parfaitement plastique correspond à

$$A_{ijkh} = 0, \quad \mu = 0 .$$

On peut obtenir ce problème *par passage à la limite* en  $A_{ijkh}$  et en  $\mu$ , ce que l'on peut faire de deux façons différentes selon que l'on passe d'abord à la limite en  $A$  (resp.  $\mu$ ) puis  $\mu$  (resp.  $A$ ) <sup>(18)</sup>. ■

Voyons d'abord le problème obtenu en faisant tendre la viscosité  $\mu$  vers 0 à partir du problème « rigide-visco-plastique ».

<sup>(18)</sup> Le problème de l'équivalence des deux passages à la limite n'étant pas entièrement résolu.

Désignons par  $v_\mu$  la solution du Problème (5.11) avec  $v_\mu(0) = 0$ . Nous n'avons ici qu'un résultat *formel*.

On observe d'abord, à partir des estimations a priori (5.14) et (5.18) que

$$(5.22) \quad v_\mu, v'_\mu \text{ demeurent dans un borné de } L^\infty(0, T; H).$$

Par ailleurs on peut vérifier que

$$(5.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\mu \rightarrow 0} \mu^{-1} \mathcal{J}^*(\mu\sigma) = j^*(\sigma), \\ j \text{ fonctionnelle continue sur } \mathcal{H}, \text{ convexe, non différentiable, } \geq 0. \end{array} \right.$$

Alors d'après (5.22) on peut extraire une suite, encore notée  $v_\mu$ , telle que

$$(5.24) \quad v_\mu, v'_\mu \rightarrow v, v' \quad \text{dans } L^\infty(0, T; H) \text{ faible étoile.}$$

Utilisant (5.8), (5.23) et passant à la limite *formellement* dans (5.11) on obtient

$$(5.25) \quad (v', w - v) + j^*(\varepsilon(w) + g) - j^*(\varepsilon(v) + g) \geq (h_i - \sigma_{ij,j}^0, w_i - v_i) \quad \forall w \in V,$$

avec

$$(5.26) \quad v(0) = 0. \quad \blacksquare$$

Si l'on passe à la limite *d'abord* en  $\mu$  on obtient d'après le n° 4 une solution  $S_\theta$  de

$$(5.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta \mathcal{A}(S''_\theta, \tau - S'_\theta) + [S_\theta, \tau - S'_\theta] \geq (G, \tau - S'_\theta) \quad \forall \tau \\ \text{avec} \quad \tau \in (K - \sigma^0) \cap \mathcal{V}, \end{array} \right.$$

$$(5.28) \quad S'_\theta(t) \in (K - \sigma^0) \cap \mathcal{V},$$

$$(5.29) \quad S_\theta(0) = 0, \quad S'_\theta(0) = 0.$$

On fait maintenant  $\theta \rightarrow 0$ . On vérifie que, si  $G(0) = 0$  (i.e.  $g(0) = 0$ ) :

$$(5.30) \quad S_\theta, S'_\theta \text{ demeurent dans un borné de } L^\infty(0, T; \mathcal{V})$$

$$(5.31) \quad \theta^{1/2} S''_\theta \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; \mathcal{H}).$$

Cela est suffisant pour passer à la limite.

Le problème rigide-parfaitement-plastique consiste à trouver une fonction  $S$  telle que

$$(5.32) \quad S'(t) \in (K - \sigma^0) \cap \mathcal{V},$$

$$(5.33) \quad [S, \tau - S'] \geq (G, \tau - S') \quad \forall \tau \in (K - \sigma^0) \cap \mathcal{V},$$

$$(5.34) \quad S(0) = 0.$$

On a alors le :

**Théorème 5.2.** *Sous les hypothèses du Théorème 4.1 et si  $g(0) = 0$ , le problème (5.32), (5.33), (5.34) admet une solution unique vérifiant*

$$(5.35) \quad S, S' \in L^\infty(0, T; \mathcal{V}).$$

En outre  $S_0$  désignant la solution de (5.27), (5.28), (5.29) on a

$$(5.36) \quad S_0, S'_0 \rightarrow S, S' \text{ dans } L^\infty(0, T; \mathcal{V}) \text{ faible étoile.}$$

On a ensuite

$$(5.37) \quad \sigma = S'.$$

*Remarque 5.4*

Les énoncés « en  $S$  » et « en  $v$  » sont en dualité. ■

*Remarque 5.5*

On peut donner *une autre forme duale* du problème « en  $S$  », suivant une idée de Brézis [2]. Introduisons la fonctionnelle  $\psi$  indicatrice de  $K - \sigma^0$ , donc

$$(5.38) \quad \psi(\sigma) = 0 \quad \text{si } \sigma \in K - \sigma^0, \quad + \infty \text{ sinon.}$$

Par ailleurs,  $\tau \rightarrow (G, \tau)$  étant continue sur  $\mathcal{H}$  donc sur  $\mathcal{V}$ , on a :

$$(5.39) \quad (G, \tau) = [\tilde{G}, \tau].$$

Alors (5.33) équivaut à

$$(5.40) \quad [S - \tilde{G}, \tau - S'] + \psi(\tau) - \psi(S') \geq 0 \quad \forall \tau$$

i.e. à

$$(5.41) \quad -(S - \tilde{G}) \in \partial\psi(S').$$

Introduisons la fonction duale (ou conjuguée) de  $\psi$  sur  $\mathcal{V}$  par

$$(5.42) \quad \psi^*(\sigma) = \sup_{\tau \in \mathcal{V}} \{ [\sigma, \tau] - \psi(\tau) \}$$

et posons

$$(5.43) \quad R = -S + \tilde{G}.$$

Alors (5.41) équivaut à  $R \in \partial\psi(S')$  qui équivaut à

$$S' \in \partial\psi^*(R)$$

i.e.

$$-[S', \tau - R] + \psi^*(\tau) - \psi^*(R) \geq 0$$

donc

$$[R', \tau - R] - [\tilde{G}', \tau - R] + \psi^*(\tau) - \psi^*(R) \geq 0$$

et finalement :

$$(5.44) \quad [R', \tau - R] + \psi^*(\tau) - \psi^*(R) \geq (G', \tau - R)$$

avec

$$(5.45) \quad R(0) = \tilde{G}(0) = 0 .$$

Le problème (5.44), (5.45) admet une solution unique telle que

$$(5.46) \quad R, R' \in L^\infty(0, T; \mathcal{V}) . \quad \blacksquare$$

## 6. LOI DE HENCKY

### 6.1. Loi de comportement

Il s'agit de la relation contraintes-déformations suivante

$$(6.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{ij}(u) = A_{ijkh} \sigma_{kh} + \lambda_{ij} \\ \text{avec } \mathcal{F}(\sigma) \leq 0 \\ \text{et } \lambda_{ij}(\varphi_{ij} - \sigma_{ij}) \leq 0 \quad \forall \varphi, \quad \mathcal{F}(\varphi) \leq 0 . \end{array} \right.$$

Cette loi a été introduite par Hencky [1], dans le but essentiel de résoudre des problèmes *statiques ou quasi statiques* sans prendre en considération l'histoire des déformations antérieures. ■

Pratiquement elle peut conduire à des solutions qui coïncident avec celles obtenues par la loi de Prandtl-Reuss. C'est le cas en particulier dans le problème de la torsion élasto-plastique d'un arbre cylindrique (cf. H. Brézis [2] et H. Lanchon [1], [2], [4]).

### 6.2. Problèmes envisagés

Nous cherchons un champ de déplacements  $\{u_i(x)\}$  et de contraintes  $\{\sigma_{ij}(x)\}$  dans  $\Omega$  tels que

$$(6.2) \quad \sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad \text{dans } \Omega ,$$

$$(6.3) \quad \sigma_{ij} n_j = F_i \quad \text{sur } \Gamma_F ,$$

$$(6.4) \quad u_i = U_i \quad \text{sur } \Gamma_U .$$

Les notations et la géométrie sont les mêmes qu'aux numéraux précédents de ce chapitre et les données  $f_i, F_i, U_i$  sont des fonctions de  $x$  seul.

### 6.3. Formulation variationnelle sur les contraintes

Nous introduisons, comme au n° 2, l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , le convexe fermé  $K \subset \mathcal{H}$  et l'ensemble des déplacements admissibles,

$$(6.5) \quad \mathcal{U}_{ad} = \{ v \mid v = \{ v_i \}, \quad v_i \in H^1(\Omega), \quad v_i = U_i \text{ sur } \Gamma_U \} ,$$

ce qui suppose implicitement, pour que  $\mathcal{U}_{ad}$  soit non vide, que

$$(6.6) \quad U_i \text{ est restriction à } \Gamma_U \text{ d'un élément de } H^{1/2}(\Gamma).$$

Nous supposons de plus

$$(6.7) \quad f_i \in L^2(\Omega), \quad F_i \in L^2(\Gamma_F)$$

et nous définissons

$$(6.8) \quad M = \{ \varphi \mid \varphi \in \mathcal{H}, \quad \varphi_{ij,j} + f_i = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \varphi_{ij} n_j = F_i \text{ sur } \Gamma_F \}$$

et posons comme dans les numéros précédents

$$(6.9) \quad \mathcal{A}(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} A_{ijkh} \varphi_{kh} \psi_{ij} \, dx,$$

qui représente une norme équivalente à la norme classique sur  $\mathcal{H}$ .

Alors si  $\{ u_i, \sigma_{ij} \}$  est solution du problème (6.1) ... (6.4) le champ de contraintes  $\{ \sigma_{ij} \}$  minimise sur  $K \cap M$  (supposé non vide) la fonctionnelle

$$\frac{1}{2} \mathcal{A}(\varphi, \varphi) - \int_{\Gamma_U} U_i \varphi_{ij} n_j \, d\Gamma.$$

*Démonstration*

La loi de comportement ponctuelle (4.1) équivaut à

$$(6.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{ij}(u) = A_{ijkh} \sigma_{kh} + \lambda_{ij} \\ \sigma \in K \\ \int_{\Omega} \lambda_{ij} (\varphi_{ij} - \sigma_{ij}) \, dx \leq 0 \quad \forall \varphi \in K, \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(u) (\varphi_{ij} - \sigma_{ij}) \, dx \leq \int_{\Omega} A_{ijkh} \sigma_{kh} (\varphi_{ij} - \sigma_{ij}) \, dx \quad \forall \varphi \in K,$$

puis par intégration par parties,

$$(6.11) \quad \mathcal{A}(\sigma, \varphi - \sigma) \geq \int_{\Gamma_U} U_i (\varphi_{ij} - \sigma_{ij}) n_j \, d\Gamma, \quad \forall \varphi \in K \cap M,$$

ce qui équivaut à dire que  $\{ \sigma_{ij} \}$  minimise la fonctionnelle

$$(6.12) \quad I(\varphi) = \frac{1}{2} \mathcal{A}(\varphi, \varphi) - \int_{\Gamma_U} U_i \varphi_{ij} n_j \, d\Gamma$$

sur  $K \cap M$ .

On en déduit immédiatement le

**Théorème 6.1.** *Sous l'hypothèse  $K \cap M \neq \emptyset$  il existe un unique  $\sigma$  qui minimise  $I(\varphi)$  sur  $K \cap M$ . ■*

#### 6.4. Recherche du champ de déplacements

Il subsiste alors le problème

« Existe-t-il  $u$  correspondant à  $\sigma$  ? »

Cette question va être abordée par une méthode de dualité.

*Rappels sur la dualité* (Moreau [1], Rockafellar [1], R. Témam [1], [2]).

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach réflexifs ou non et  $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ .

Les fonctions  $F$  et  $G$  définies respectivement sur  $X$  et  $Y$ , à valeurs dans  $] -\infty, +\infty ]$  sont convexes semi-continues inférieurement et propres (c'est-à-dire non identiques à  $+\infty$ ).

Soient  $F^*$  et  $G^*$  les fonctions convexes conjuguées de  $F$  et  $G$  et définies sur  $X^*$  et  $Y^*$  respectivement par

$$F^*(x^*) = \sup_{x \in X} \{ \langle x, x^* \rangle - F(x) \}$$

où  $\langle x, x^* \rangle$  représente la dualité entre  $X$  et  $X^*$  ( $F^{**} \equiv F$ ).

De plus soit  $L^*$  l'application conjuguée de  $L$ ; on a

$$L^* \in \mathcal{L}(Y^*; X^*).$$

Sous les *hypothèses*

$$\exists x_0 \in X \text{ tel que}$$

- 1)  $F(x_0) < \infty$
- 2)  $G$  est finie et continue en  $Lx_0$

on a :

il existe  $y_0^*$  tel que

$$(6.13) \quad \inf_{y^* \in Y^*} [F^*(L^* y^*) + G^*(-y^*)] = F^*(L^* y_0^*) + G^*(-y_0^*)$$

et

$$(6.14) \quad \inf_{y^* \in Y^*} [F^*(L^* y^*) + G^*(-y^*)] + \inf [F(x) + G(Lx)] = 0.$$

Si de plus il existe  $x_0$  solution de  $\inf [F(x) + G(Lx)]$  alors

$$(6.15) \quad F(x_0) + F^*(L^* y_0^*) = \langle L^* y_0^*, x_0 \rangle$$

et

$$(6.16) \quad G(Lx_0) + G^*(y_0^*) = \langle y_0^*, Lx_0 \rangle. \quad \blacksquare$$

*Application*

$$\left\{ \begin{array}{l} X = Y = (L^2(\Omega))^6 = \mathcal{H} \\ L = \text{identité} . \end{array} \right.$$

On définit alors

$$(6.17) \quad F(e) = - \operatorname{Inf}_{\tau \in K} \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{A}(\tau, \tau) - (e, \tau) \right\} = \operatorname{Sup}_{\tau \in K} \left\{ (e, \tau) - \frac{1}{2} \mathcal{A}(\tau, \tau) \right\}.$$

Pour  $e$  donné dans  $X$  soit  $\tau_e$  la solution de

$$(6.18) \quad \mathcal{A}(\tau_e, \tau - \tau_e) - (e, \tau - \tau_e) \geq 0 \quad \forall \tau \in K; \quad \tau_e \in K.$$

On vérifie aussitôt que

$$(6.19) \quad \text{l'application } e \rightarrow \tau_e \text{ est lipschitzienne de } X \text{ dans } X, \text{ et que}$$

$$(6.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(e) = -\frac{1}{2} \mathcal{A}(\tau_e, \tau_e) + (e, \tau_e) \quad \text{est continue sur } X, \\ F \text{ est convexe (car enveloppe supérieure de fonctions linéaires)}. \end{array} \right.$$

Posons

$$(6.21) \quad G(e) = \begin{cases} -(v, f) - \int_{\Gamma_F} F_i v_i d\Gamma & \text{si } e = \varepsilon_{ij}(v), \quad v \in \mathcal{U}_{ad}, \\ + \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'ensemble des  $e = \{ \varepsilon_{ij}(v) \}$ ,  $v \in \mathcal{U}_{ad}$  est un convexe fermé de  $X$  si  $\Gamma_U$  est de mesure positive.

En effet si  $\varepsilon_{ij}(v_n)$  est convergent dans  $L^2(\Omega)$  alors, prenant  $v_0$  dans  $\mathcal{U}_{ad}$ ,  $\varepsilon_{ij}(v_n - v_0)$  converge dans  $L^2(\Omega)$ ,  $v_n - v_0 = 0$  sur  $\Gamma_U$  et donc  $v_n - v_0$  converge dans  $(H^1(\Omega))^3$ , donc  $v_n \rightarrow v$  dans  $(H^1(\Omega))^3$  et  $\varepsilon_{ij}(v_n) \rightarrow \varepsilon_{ij}(v)$ .

Il en résulte que  $G$  est une fonction convexe propre sur  $\mathcal{X}$  et d'après (6.20) on est dans les conditions d'application de la dualité.

On considère alors le problème

$$(6.22) \quad \operatorname{Inf}_{e \in \mathcal{X}} [F(e) + G(e)]$$

c'est-à-dire

$$(6.22bis) \quad \operatorname{Inf}_{v \in \mathcal{U}_{ad}} \left[ \operatorname{Sup}_{\tau \in K} \left[ (e(v), \tau) - \frac{1}{2} \mathcal{A}(\tau, \tau) \right] - (v, f) - \int_{\Gamma_F} v_i F_i d\Gamma \right].$$

On ignore si ce problème admet en général une solution, mais on va vérifier directement, sans référence à une théorie générale, le

**Théorème 6.2.** *Le problème dual de (6.22bis) est le problème initial sur les contraintes.*

*Démonstration*

Il suffit de montrer, d'après (6.14), que

i)  $F^*(\tau) = \frac{1}{2} \mathcal{A}(\tau, \tau) + \psi_K(\tau)$ ,  $\psi_K$  fonction indicatrice de  $K$ , ce qui est évident puisque  $F$  est définie comme fonction conjuguée de

$$\frac{1}{2} \mathcal{A}(\tau, \tau) + \psi_K(\tau).$$

ii)  $G^*(\tau) = \int_{\Gamma_U} U_i \tau_{ij} n_j d\Gamma + \psi_M(-\tau)$   
 (car alors le problème dual de (6.22bis) est

$$\inf_{\tau \in \mathcal{K}} [F^*(\tau) + G^*(-\tau)] = \inf_{\tau \in K \cap M} \left[ \frac{1}{2} \mathcal{A}(\tau, \tau) - \int_{\Gamma_U} U_i \tau_{ij} n_j d\Gamma \right].$$

Calculons  $G^*(\tau)$ :

$$\begin{aligned} G^*(\tau) &= \sup_{v \in \mathcal{Q}_{ad}} [(\tau, \varepsilon(v)) + (f, v) + \int_{\Gamma_F} v_i F_i d\Gamma] = \\ &= \sup_{v \in \mathcal{Q}_{ad}} \left[ \int_{\Omega} (\tau_{ij} \varepsilon_{ij}(v) + f_i v_i) dx + \int_{\Gamma_F} v_i F_i d\Gamma \right]. \end{aligned}$$

Alors le Sup vaut  $+\infty$  sauf peut-être si

$$(6.23) \quad -\tau_{ij,j} + f_i = 0$$

et alors

$$G^*(\tau) = \sup_{v \in \mathcal{Q}_{ad}} \left[ \int_{\Gamma_F} (\tau_{ij} n_j + F_i) v_i d\Gamma + \int_{\Gamma_U} \tau_{ij} n_j U_i d\Gamma \right] = +\infty$$

sauf si

$$(6.24) \quad -\tau_{ij} n_j = F_i \quad \text{sur} \quad \Gamma_F$$

et alors on voit que

$$G^*(\tau) = \int_{\Gamma_U} \tau_{ij} n_j U_i d\Gamma + \psi_M(-\tau). \quad \blacksquare$$

**Théorème 6.3.** *Si le problème (4.22bis) admet une solution  $u$  et si  $\sigma$  est la solution du problème initial (Théorème 6.1) alors  $u$  et  $\sigma$  sont liés par (6.1) ... (6.4).*

*Démonstration*

On a en effet

$$\begin{aligned} u &= U \quad \text{sur} \quad \Gamma_U \\ \sigma &\in K \cap M, \end{aligned}$$

donc (6.2), (6.3), (6.4) sont satisfaites. Par (6.15) on a

$$F(\varepsilon(u)) + F^*(\sigma) = (\sigma, \varepsilon(u)).$$

Mais  $F^*(\sigma) = \frac{1}{2} \mathcal{A}(\sigma, \sigma)$  d'après la démonstration du Théorème 6.2 (i). Donc

$$\frac{1}{2} \mathcal{A}(\sigma, \sigma) - (\sigma, \varepsilon(u)) = -F(\varepsilon(u)) = \inf_{\tau \in K} \left[ \frac{1}{2} \mathcal{A}(\tau, \tau) - (\varepsilon(u), \tau) \right]$$

donc

$$\frac{1}{2} \mathcal{A}(\sigma, \sigma) - (\sigma, \varepsilon(u)) \leq \frac{1}{2} \mathcal{A}(\tau, \tau) - (\varepsilon(u), \tau) \quad \forall \tau \in K,$$



ce qui équivaut à

$$\mathcal{A}(\sigma, \tau - \sigma) - (\varepsilon(u), \tau - \sigma) \geq 0 \quad \forall \tau \in K$$

d'où (6.1).

### 6.5. Matériau isotrope avec critère de Von Mises

On a  $\mathcal{F}$  donnée par (2.11) et les coefficients  $A_{ijkl}$  correspondent à la loi élastique donnée en (2.4) au Chapitre 3. On calcule  $\mathcal{A}(\sigma, \tau)$ ; on trouve

$$\mathcal{A}(\sigma, \tau) = \frac{1}{9 K_0} \int_{\Omega} \sigma_{hk} \delta_{ij} \tau_{ij} dx + \frac{1}{2 \mu} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^D \tau_{ij} dx$$

(on désigne par  $K_0$  le module de compressibilité volumique afin de ne pas le confondre avec le convexe  $K$ ).

Mais

$$\sigma_{ij}^D \tau_{ij} = \sigma_{ij}^D \tau_{ij}^D, \quad \delta_{ij} \tau_{ij} = \tau_{jj},$$

d'où

$$\mathcal{A}(\sigma, \tau) = \frac{1}{9 K_0} \int_{\Omega} \sigma_{kk} \tau_{jj} dx + \frac{1}{2 \mu} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^D \tau_{ij}^D dx.$$

Alors

$$\begin{aligned} \sup_{\tau \in K} [(\varepsilon(v), \tau) - \frac{1}{2} \mathcal{A}(\tau, \tau)] &= \\ &= \sup_{\tau \in K} \left[ \int_{\Omega} \tau_{ij}^D \varepsilon_{ij}^D(v) + \frac{1}{3} \tau_{kk} \varepsilon_{kk}(v) - \frac{1}{18 K_0} (\tau_{kk})^2 - \frac{1}{4 \mu} \tau_{ij}^D \tau_{ij}^D \right]. \end{aligned}$$

On obtient facilement

$$\sup_{\tau \in K} [(\varepsilon(v), \tau) - \frac{1}{2} \mathcal{A}(\tau, \tau)] = \int_{\Omega} [\frac{1}{2} K_0 (\text{Div } v)^2 + \Phi(\varepsilon^D(v))] dx$$

où  $\Phi$  est donné par

$$\Phi(\varepsilon^D) = \begin{cases} \mu \varepsilon_{ij}^D \varepsilon_{ij}^D & \text{si } \varepsilon_{ij}^D \varepsilon_{ij}^D \leq k^2/2 \mu^2 \\ k((2 \varepsilon_{ij}^D \varepsilon_{ij}^D)^{1/2} - k/2 \mu) & \text{si } \varepsilon_{ij}^D \varepsilon_{ij}^D > k^2/2 \mu^2. \end{cases}$$

Le problème (4.22bis) est donc

$$(6.25) \quad \inf_{v \in \mathcal{V}} \left\{ \int_{\Omega} [\frac{1}{2} K_0 (\text{Div } v)^2 + \Phi(\varepsilon^D(v))] dx - (f, v) - \int_{\Gamma_F} F_i v_i d\Gamma \right\}.$$

La fonctionnelle à minimiser n'est pas nécessairement infinie à l'infini sur  $(H^1(\Omega))^3$ ; par contre elle l'est sur  $(W^{1,1}(\Omega))^3$  <sup>(1°)</sup>, <sup>(2°)</sup> au moins dans les cas importants suivants :

i)  $f_i = F_i = 0$  (situation réalisée dans le problème de la torsion élastoplastique d'un arbre cylindrique. Cf. n° 6.6 suivant).

ii)  $F_i = 0$  et  $f_i = \partial q / \partial x_i$ ,  $q \in H_0^1(\Omega)$ , car alors  $(f, v) = - (q, \text{Div } v)$ , et

$$\frac{1}{2} K_0 \int_{\Omega} (\text{Div } v)^2 dx - c | \text{Div } v |_{L^2(\Omega)} \rightarrow + \infty \text{ si } | \text{Div } v |_{L^2(\Omega)} \rightarrow + \infty.$$

iii) Il existe  $\sigma_1 \in K \cap M$  tel que

$$C_1 = \text{Sup}_{x \in \Omega} \frac{1}{2} \sigma_{1ij}^D \sigma_{1ij}^D < k^2.$$

En effet il vient alors

$$(f, v) + \int_{\Gamma_F} F_i v_i d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{1ij} \varepsilon_{ij}(v) dx - \int_{\Gamma_U} U_i \sigma_{1ij} n_j d\Gamma$$

et

$$\int_{\Omega} \sigma_{1ij} \varepsilon_{ij}(v) dx = \frac{1}{3} \int_{\Omega} \sigma_{1jj} \text{Div } v dx + \int_{\Omega} \sigma_{1ij}^D \varepsilon_{ij}^D(v) dx$$

où le dernier terme satisfait

$$| \int_{\Omega} \sigma_{1ij}^D \varepsilon_{ij}^D(v) dx | \leq (2 C_0)^{1/2} \int_{\Omega} (\varepsilon_{ij}^D \varepsilon_{ij}^D)^{1/2} dx. \blacksquare$$

On peut alors définir une solution « très faible » de (6. 25) dans l'espace  $((L^\infty(\Omega)))^6$ . Pour cela on considère la fonctionnelle apparaissant dans (6. 25) non pas sur  $(H^1(\Omega))^3$  mais sur  $(W^{1,1}(\Omega))^3$ ; le problème dual est encore le problème sur les contraintes

$$(6. 26) \quad \text{Inf} \left[ \frac{1}{2} \mathcal{A}(\tau, \tau) - \int_{\Gamma_U} U_i \tau_{ij} n_j d\Gamma \right], \quad \tau \in K \cap M,$$

en notant que  $K \subset (L^\infty(\Omega))^6$ .

Alors grâce au fait que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} K_0 (\text{Div } v)^2 + \Phi(c^D(v)) \right] dx - (f, v) - \\ - \int_{\Gamma_F} F_i v_i d\Gamma \rightarrow + \infty \text{ si } \| v \|_{W^{1,1}(\Omega)} \rightarrow + \infty \end{aligned}$$

(l'analogue sur  $(H^1(\Omega))^3$  étant inexact), il résulte de R. Temam [2] que le problème dual de (6. 26) admet une solution dans  $((L^\infty(\Omega)))^6$ . De plus, d'après (6. 16), la loi de comportement de Hencky est satisfaite au sens de la dualité entre  $(L^\infty(\Omega))'$  et  $L^\infty(\Omega)$ . ■

## 6.6. Torsion d'un arbre cylindrique (Fig. 6.1) (cf. Annin [1]. Lauchon [1]-[4], Ting [1] [2])

L'ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  est ici un cylindre *sans trous* limité par deux sections droites  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  de cotes respectives  $x_3 = 0$  et  $x_3 = h$  ( $h$  : longueur positive donnée) et la

<sup>(1°)</sup>  $W^{1,1}(\Omega) = \{ \varphi \mid \varphi, \partial\varphi/\partial x_1, \dots, \partial\varphi/\partial x_n \in L^1(\Omega) \}$ .

<sup>(2°)</sup> Noter l'analogie avec la théorie des surfaces minima non paramétriques où l'on a la fonctionnelle  $\int_{\Omega} (1 + |\text{grad } v|^2)^{1/2} dx$ , qui est infinie à l'infini sur  $W^{1,1}(\Omega)$ .

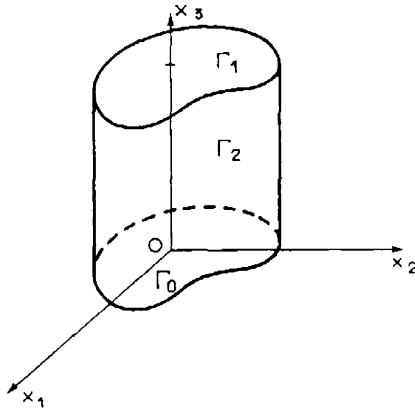


Figure 6.

surface latérale  $\Gamma_2$ . On désigne toujours par  $n$  la normale extérieure unitaire à  $\partial\Omega$ . On impose alors des conditions aux limites du type envisagé au n° 6.2 avec plus précisément

$$(6.27) \quad \begin{cases} f_i = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma_{ij} n_j = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$(6.28) \quad \sigma_3 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \text{ et } \Gamma_1,$$

$$(6.29) \quad u_i = \alpha v_{i3j} x_j x_3 \quad \text{sur } \Gamma_0 \text{ et } \Gamma_1$$

(autrement dit

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ u_1 = -\alpha h x_2, \quad u_2 = \alpha h x_1 & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases}$$

Le scalaire constant  $\alpha$  est l'angle de torsion unitaire.

De plus le matériau est supposé isotrope, de sorte que les coefficients d'élasticité  $A_{ijkh}$  sont ceux utilisés au n° 6.5 précédent et le critère de plasticité est celui de Von Mises (2.11).

Dans ces conditions

$$(6.30) \quad M = \{ \tau \mid \tau \in H, \quad \begin{aligned} \tau_{ij,j} &= 0 & \text{dans } \Omega \\ \tau_{ij} n_j &= 0 & \text{sur } \Gamma_2 \\ \tau_3 &= 0 & \text{sur } \Gamma_0 \text{ et } \Gamma_1 \end{aligned} \}.$$

D'après le n° 6.3 le champ de contraintes solution minimise la fonctionnelle

$$(6.31) \quad \frac{1}{2} \mathcal{A}(\tau, \tau) - \alpha h \int_{\Gamma_1} (x_1 \tau_{23} - x_2 \tau_{13}) d\Gamma.$$

sur  $M \cap K$ . ■

Soit alors  $\{\sigma_{ij}\}$  le champ de contraintes solution. Il a été démontré par H. Lanchon [4] que

$$(6.32) \quad \begin{cases} \sigma_{ij} = 0 & \text{sauf } \sigma_{13} \text{ et } \sigma_{23}, \\ \sigma_{13} = \sigma_{13}(x_1, x_2), & \sigma_{23} = \sigma_{23}(x_1, x_2). \end{cases}$$

Dans ces conditions les équations d'équilibre  $\sigma_{ij,j} = 0$  se réduisent à

$$(6.33) \quad \sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} = 0,$$

c'est-à-dire qu'il existe <sup>(21)</sup>  $\theta = \theta(x_1, x_2)$ , tel que

$$(6.34) \quad \sigma_{13} = \partial\theta/\partial x_2, \quad \sigma_{23} = -\partial\theta/\partial x_1.$$

Les équations  $\sigma_{ij,n_j} = 0$  sur  $\Gamma_2$  s'écrivent alors simplement

$$d\theta/ds = 0$$

où  $s$  est une abscisse curviligne sur  $\Gamma_0$  c'est-à-dire  $\theta = \text{Cte}$  sur la frontière de  $\Gamma_0$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Comme (6.34) définit  $\theta$  à une constante près on peut prendre  $\theta \in H_0^1(\Gamma_0)$ , puisque nous devons avoir  $\sigma_{i3} \in L^2(\Omega)$ .

La condition  $\{\sigma_{ij}\} \in K$  s'écrit alors par rapport à  $\theta$

$$(6.35) \quad \theta \in K_1 = \{v \mid v \in H_0^1(\Gamma_0), \quad |\text{grad } v| \leq g \text{ p.p. sur } \Gamma_0\}.$$

Le champ  $\theta$  lié à  $\{\sigma_{ij}\}$  par (6.30) minimise sur  $K_1$  la fonctionnelle analogue de (6.31)

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} |\text{grad } v|^2 dx_1 dx_2 + \mu\alpha \int_{\Gamma_0} (x_1 \partial v/\partial x_1 + x_2 \partial v/\partial x_2) dx_1 dx_2, \\ (\mu : \text{module de cisaillement})$$

c'est-à-dire, après transformation de la deuxième intégrale

$$(6.36) \quad \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} |\text{grad } v|^2 dx_1 dx_2 - 2\mu\alpha \int_{\Gamma_0} v dx_1 dx_2.$$

Si l'on pose

$$(6.37) \quad a(\theta, v) = \int_{\Gamma_0} \text{grad } \theta \text{ grad } v dx_1 dx_2$$

$$(6.38) \quad f = 2\mu\alpha, \quad (f, v) = \int_{\Gamma_0} f v dx_1 dx_2,$$

on a alors :

*le champ  $\theta$  lié au champ de contraintes solution  $\{\sigma_{ij}\}$  par (6.34) minimise sur  $K_1$  la fonctionnelle*

$$(6.39) \quad \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v);$$

<sup>(21)</sup> Dans le cas multiplement connexe, il faut un peu modifier le raisonnement ; cf. H. Lanchon [2].

ou encore :

le champ  $\theta$  est caractérisé par

$$(6.40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta \in K_1 \\ \alpha(\theta, v - \theta) \geq (f, v - \theta) \quad \forall v \in K_1. \end{array} \right.$$

Chacun de ces énoncés implique naturellement l'existence d'un unique champ de contraintes solution du problème de torsion élastoplastique d'un arbre cylindrique avec la loi de comportement de type Hencky. ■

*Remarque 6.1*

On peut supposer que l'angle de torsion  $\alpha$  est une fonction connue de  $t$  soit  $\alpha(t)$ . On obtient alors par la méthode décrite ici, pour chaque valeur de  $t$  une solution  $\theta_{\alpha(t)}$ . ■

Supposons alors que,  $\alpha(t)$  étant donné continûment dérivable, avec  $\alpha(0) = 0$ , on étudie le même problème de torsion en prenant comme loi de comportement *la loi de Prandtl Reuss*. On trouve alors que  $\tilde{\theta}(t)$ , toujours lié au champ de contraintes solution par (6.34) satisfait à

$$(6.41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\theta}(t) \in K_1 \\ \alpha(\tilde{\theta}'(t), v - \tilde{\theta}(t)) \geq 2 \mu \alpha'(t) \int_{r_0} (v - \tilde{\theta}(t)) dx_1 dx_2 \quad \forall v \in K_1. \\ \theta(0) = 0. \end{array} \right.$$

De plus il a été établi par H. Brézis que si  $\alpha(t)$  est une fonction non décroissante de  $t$  alors

$$(6.42) \quad \tilde{\theta}(t) = \theta_{\alpha(t)}. \quad \blacksquare$$

*Remarque 6.2*

L'extension au problème général du n° 6.2 de la propriété (6.42) est un problème ouvert. ■

*Remarque 6.3*

Connaissant le champ de contraintes solution

$$(6.43) \quad \sigma_{13} = \partial\theta/\partial x_2, \quad \sigma_{23} = -\partial\theta/\partial x_1$$

il est légitime de chercher le champ de déplacements associés soit  $u = (u_1, u_2, u_3)$  sous la forme

$$(6.44) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 = \alpha x_3 x_2 \\ u_2 = \alpha x_3 x_1 \\ u_3 = \alpha \psi(x_1, x_2). \end{array} \right.$$

Ainsi le tenseur des déformations est

$$(6.45) \quad \begin{cases} \varepsilon_{11}(u) = \varepsilon_{22}(u) = \varepsilon_{33}(u) = 0 \\ \varepsilon_{12}(u) = 0, & \varepsilon_{13}(u) = \alpha[-x_2 + \partial\psi/\partial x_1] \\ \varepsilon_{23}(u) = \alpha[x_1 + \partial\psi/\partial x_2]. \end{cases}$$

Le matériau étant isotrope et  $\mu$  désignant une des constantes de Lamé nous avons

$$(6.46) \quad \begin{cases} \varepsilon_{13}(u) = \frac{1}{2\mu} \sigma_{13} + \lambda_{13} \\ \varepsilon_{23}(u) = \frac{1}{2\mu} \sigma_{23} + \lambda_{23} \end{cases}$$

où

$$(6.47) \quad \lambda_{13}(\tau_{13} - \sigma_{13}) + \lambda_{23}(\tau_{23} - \sigma_{23}) \leq 0 \quad \forall \tau_{13}, \tau_{23},$$

avec  $\tau_{13}^2 + \tau_{23}^2 \leq g^2$ .

Nous allons indiquer deux méthodes possibles pour déterminer  $u$ , la première conduisant *actuellement* à une impasse.

1) Le convexe  $K_1$  étant défini par (6.35) et  $\chi_{K_1}$  étant sa fonction indicatrice, la loi de comportement ci-dessus s'écrit aussi

$$(6.48) \quad (G + \chi_{K_1})(\sigma) + (G + \chi_{K_1})^*(\varepsilon(u)) = (\sigma, \varepsilon)$$

où l'on a posé

$$(6.49) \quad G(\sigma) = \frac{1}{4\mu} \int_{I_0} (\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) dx_1 dx_2.$$

Il en résulte alors que le champ de déplacement  $u$  solution minimise la fonctionnelle

$$(6.50) \quad (G + \chi_{K_1})^*(\varepsilon(\tilde{u}))$$

parmi les champs de déplacement  $\tilde{u}$  de la forme (6.44).

On peut calculer la fonctionnelle (6.50) explicitement; on trouve

$$(G + \chi_{K_1})^*(\varepsilon(\tilde{u})) = \int_{\Omega} \Phi(\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}) dx_1 dx_2$$

avec

$$(6.51) \quad \Phi(\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}) = \begin{cases} \mu |\varepsilon|^2 & \text{si } |\varepsilon| \leq g/2\mu \\ g|\varepsilon| - g^2/4\mu & \text{si } |\varepsilon| \geq g/2\mu \end{cases}$$

où l'on a posé

$$|\varepsilon| = (\varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2)^{1/2}.$$

et

$$\begin{cases} \varepsilon_{13} = \alpha[-x_2 + \partial\psi/\partial x_1] \\ \varepsilon_{23} = \alpha[x_1 + \partial\psi/\partial x_2]. \end{cases}$$

Cette méthode qui exprime que  $u$  est solution d'un problème variationnel ne conduit pas à une solution car la fonctionnelle à minimiser n'est pas coercive par exemple sur l'ensemble des fonctions  $\psi(x_1, x_2)$  qui appartiennent à  $H^1(\Gamma_0)$ . ■

2) Reprenons donc la loi de comportement (6.47) que nous réécrivons (H. Brézis [3])

$$(6.52) \quad \left\{ \begin{array}{l} -x_2 + \partial\psi/\partial x_1 = \frac{1}{\mu\alpha} \partial\theta/\partial x_2 + \lambda \partial\theta/\partial x_2 \\ +x_1 + \partial\psi/\partial x_2 = -\frac{1}{\mu\alpha} \partial\theta/\partial x_1 - \lambda \partial\theta/\partial x_1 \\ \text{avec} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \lambda = 0 & \text{si } |\text{grad } \theta| < g \\ \lambda \geq 0 & \text{si } |\text{grad } \theta| = g. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

L'existence d'une fonction  $\psi(x_1, x_2)$  implique  $\partial^2\psi/\partial x_1 \partial x_2 = \partial^2\psi/\partial x_2 \partial x_1$ , d'où

$$-2 = \frac{1}{\mu\alpha} \Delta\theta + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \lambda \frac{\partial\theta}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \lambda \frac{\partial\theta}{\partial x_1} \right)$$

ou encore

$$(6.53) \quad \frac{\partial\lambda}{\partial x_1} \frac{\partial\theta}{\partial x_1} + \frac{\partial\lambda}{\partial x_2} \frac{\partial\theta}{\partial x_2} + \lambda \Delta\theta = -2 - \frac{1}{\mu\alpha} \Delta\theta.$$

Dans le domaine élastique ( $|\text{grad } \theta| < g$ ) on a  $\lambda = 0$  (ce qui est bien solution de (6.53) car le second membre est alors nul). Dans le domaine plastique ( $|\text{grad } \theta| = g$ ) ou  $\theta(x_1, x_2) = g \text{ dist}(\{x_1, x_2\}, \partial\Gamma_0)$  et par conséquent l'équation (6.53) devient une équation différentielle sur les normales au points de  $\partial\Gamma_0$ , soit

$$(6.54) \quad -g \partial\lambda/\partial n + \lambda \Delta\theta = -2 - \Delta\theta/\mu\alpha.$$

On peut alors calculer explicitement  $\lambda(x_1, x_2)$  en tenant compte de  $\lambda = 0$  sur le domaine élastique. La condition  $\lambda(x_1, x_2) \geq 0$  sur le domaine plastique résulte de ce que  $\Delta\theta + 2/\mu\alpha \geq 0$  sur le domaine plastique. On trouve donc dans le cas particulier de la torsion le champ de déplacement associé au champ de contraintes solution. ■

## 7. MATÉRIAU A BLOCAGE (Locking material)

### 7.1. Loi de comportement

Le type de « matériau à blocage » a été introduit par W. Prager [3], qui en a formulé une loi de comportement graphique. Intuitivement ce matériau a un comportement élastique linéaire tant que les déformations n'atteignent pas un certain seuil. Lorsque ce dernier est atteint les contraintes peuvent augmenter sans engendrer de plus grandes déformations. ■

De façon précise, nous formulerons cette loi de la façon suivante : soit  $f(\varepsilon_{ij})$  une fonction continue convexe du tenseur des déformations  $\varepsilon$ , telle que  $f(0) < 0$ . Le domaine des déformations possibles est défini par

$$(7.1) \quad f(\varepsilon) \leq 0$$

et la loi de comportement s'écrit,

$$(7.2) \quad \begin{cases} \sigma_{ij} = a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u) + \mu_{ij} \\ \mu_{ij}(e_{ij} - \varepsilon_{ij}(u)) \leq 0 \end{cases} \quad \forall e = \{e_{ij}\}, \quad f(e) \leq 0.$$

Cette loi ne s'applique dans la pratique qu'à certaines situations *statiques* ou *quasi statiques*.

Les coefficients d'élasticité  $a_{ijkh}$  satisfont comme d'ordinaire à

$$(7.3) \quad \begin{cases} a_{ijkh} = a_{ijkh} = a_{khij} \\ a_{ijkh} e_{ij} e_{kh} \geq \alpha e_{ij} e_{ij}, \end{cases} \quad \alpha \text{ constante} > 0. \quad \blacksquare$$

*Exemple de loi de seuil*

On désigne par  $e_I$ ,  $I = 1, 2, 3$  les valeurs propres du tenseur  $\{e_{ij}\}$  et,  $a$  étant une constante positive donnée, on définit

$$f(e) = - \left( \inf_{I=1,2,3} e_I + a \right),$$

c'est-à-dire que  $f(e) \leq 0$  si et seulement si  $e_I \leq -a \quad \forall I = 1, 2, 3$ .

On va vérifier que

$$(7.4) \quad \text{l'ensemble des } e \in \mathbb{R}^6 \text{ tels que } f(e) \leq 0 \text{ est convexe.}$$

En effet, soit  $n$  un vecteur unitaire et soit  $E$  le vecteur de composantes  $E_i = e_{ij} n_j$ ; posons  $E(n) = e_{ij} n_i n_j$ . Il est facile de vérifier, dans les axes principaux de  $\{e_{ij}\}$  par exemple, que  $f(e) \leq 0$  équivaut à

$$\inf_{|n|=1} E(n) \geq -a.$$

La linéarité de  $E(n)$  par rapport à  $\{e_{ij}\}$  donne alors la propriété.  $\blacksquare$

Comme dans le cas de la plasticité parfaite cette loi de comportement peut être écrite sous forme intégrale. Introduisons l'espace de Hilbert  $H$

$$H = \{e \mid e = \{e_{ij}\}, \quad e_{ij} \in L^2(\Omega), \quad e_{ij} = e_{ji}\},$$

muni du produit scalaire

$$(7.5) \quad (\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi_{ij} \psi_{ij} dx,$$

où  $\Omega$  désigne l'ouvert de  $\mathbb{R}^3$ , borné, de frontière  $\Gamma$  régulière, occupé par le matériau considéré.



On désigne par  $k$  le convexe de  $H$  défini par

$$(7.6) \quad k = \{ e \mid e \in H, \quad f(e) \leq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega \}.$$

La condition (7.2) est équivalente à

$$(7.7) \quad \begin{cases} \sigma_{ij} = a_{ijkh} e_{kh}(u) + \mu_{ij} \\ \int_{\Omega} \mu_{ij} (e_{ij} - \varepsilon_{ij}(u)) \, dx \leq 0 \end{cases} \quad \forall e \in k$$

avec

$$(7.8) \quad \varepsilon(u) \in k, \quad \mu_{ij} \in L^2(\Omega).$$

(En effet (7.2) entraîne (7.7) et on montre que (7.7) et (7.8) entraînent (7.2) p.p. dans  $\Omega$  par un raisonnement comme au n° 2.1.2.) ■

## 7.2. Problème envisagé

Suivant W. Prager, loc. cit., nous étudierons, avec la loi de comportement introduite, le problème *stationnaire* de la déformation d'un corps soumis à une densité volumique de forces  $f(x)$  de composantes  $f_i(x)$ , une densité surfacique de forces  $F(x)$  de composantes  $F_i(x)$  sur  $\Gamma_F$  et à des déplacements imposés  $U(x)$  de composantes  $U_i(x)$  sur  $\Gamma_U$ . Les régions  $\Gamma_U$  et  $\Gamma_F$  constituent une partition de  $\Gamma$ .

Les champs de déplacement  $u = \{ u_i \}$  et de contraintes  $\sigma = \{ \sigma_{ij} \}$  solution, doivent satisfaire aux équations

$$(7.9) \quad \begin{cases} \sigma_{ij,j} + f_i = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma_{ij} n_j = F_i & \text{sur } \Gamma_F \\ u_i = U_i & \text{sur } \Gamma_U, \end{cases}$$

et à la loi de comportement (7.7), (7.8). ■

## 7.3. Double formulation variationnelle du problème

La loi de comportement (7.7) peut aussi s'écrire

$$(7.10) \quad \int_{\Omega} \mu_{ij} \varepsilon_{ij}(u) \, dx = \text{Sup}_{e \in k} \int_{\Omega} \mu_{ij} e_{ij} \, dx = \psi_k^*(\mu)$$

où  $\psi_k$  est la fonction indicatrice du convexe  $k \subset H$ , et  $\psi_k^*$  la fonction conjuguée de  $\psi_k$  (cf. n° 6.3 pour la définition).

Il en résulte le

**Théorème 7.1.** *La loi de comportement (7.7), (7.8) est équivalente à*

$$(7.11) \quad (g + \psi_k)(\varepsilon(u)) + (g + \psi_k)^*(\sigma) = (e, \sigma)$$

où

$$(7.12) \quad g(e) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_{ijkh} e_{ij} e_{kh} \, dx,$$

et  $\psi_k$  désigne la fonction indicatrice du convexe  $k$  de  $H$  et  $\psi_k^*$  sa fonction conjuguée.

*Démonstration*

i) (7.7), (7.8)  $\Rightarrow$  (7.11). Calculons le premier membre de (7.11), pour  $u \in k$ ,

$$\begin{aligned}
 g(\varepsilon) + \sup_{e \in k} \int_{\Omega} (e_{ij} \sigma_{ij} - \frac{1}{2} a_{ijkh} e_{ij} e_{kh}) dx \\
 &= \sup_{e \in k} \int_{\Omega} (e_{ij} \sigma_{ij} - \frac{1}{2} a_{ijkh} e_{ij} e_{kh} + \frac{1}{2} a_{ijkh} \varepsilon_{ij} e_{kh}) dx \\
 &= \sup_{e \in k} \int_{\Omega} [e_{ij} \sigma_{ij} - \frac{1}{2} a_{ijkh} (e_{ij} - \varepsilon_{ij}) (e_{kh} - \varepsilon_{kh}) + a_{ijkh} \varepsilon_{ij} (e_{kh} - \varepsilon_{kh})] dx \\
 &\leq \sup_{e \in k} \int_{\Omega} [e_{ij} (\sigma_{ij} - a_{ijkh} \varepsilon_{kh}) + a_{ijkh} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kh}] dx \\
 &= \sup_{e \in k} \int_{\Omega} (e_{ij} \mu_{ij} + a_{ijkh} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kh}) dx = \int_{\Omega} (\varepsilon_{ij} \mu_{ij} + a_{ijkh} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kh}) dx \\
 &= (\sigma, \varepsilon).
 \end{aligned}$$

Donc

$$(7.13) \quad (g + \psi_k)(\varepsilon) + (g + \psi_k)^*(\sigma) \leq (\sigma, \varepsilon),$$

et comme, par définition de la fonction duale

$$(7.14) \quad (g + \psi_k)(\varepsilon) + (g + \psi_k)^*(\sigma) \geq (\sigma, \varepsilon)$$

alors (7.11) en découle.

ii) (7.11)  $\Rightarrow$  (7.7), (7.8).

L'égalité (7.11) implique  $u \in k$  et elle s'écrit alors

$$g(\varepsilon) + \sup_{e \in k} \int_{\Omega} (e_{ij} \sigma_{ij} - \frac{1}{2} a_{ijkh} e_{ij} e_{kh}) dx = (\varepsilon, \sigma),$$

c'est-à-dire après regroupement,

$$(7.15) \quad (\varepsilon, \sigma) = \sup_{e \in k} \int_{\Omega} [e_{ij} \sigma_{ij} - \frac{1}{2} a_{ijkh} (\varepsilon_{ij} - e_{ij}) (\varepsilon_{kh} - e_{kh}) - a_{ijkh} \varepsilon_{kh} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij})] dx.$$

Introduisons  $\mu$  par (5.7); (5.14) s'écrit alors

$$(7.16) \quad \sup_{e \in k} \int_{\Omega} [e_{ij} \mu_{ij} - \frac{1}{2} a_{ijkh} (e_{ij} - \varepsilon_{ij}) (e_{kh} - \varepsilon_{kh})] dx = \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} \mu_{ij} dx.$$

Soit  $e$  un élément quelconque de  $k$ ; on a d'après (5.16)

$$(7.17) \quad \int_{\Omega} [(e_{ij} - \varepsilon_{ij}) \mu_{ij} - \frac{1}{2} a_{ijkh} (e_{ij} - \varepsilon_{ij}) (e_{kh} - \varepsilon_{kh})] dx \leq 0.$$

Appliquons alors (5.17) pour l'élément  $e^{(\alpha)}$  de  $k$  défini par

$$(7.18) \quad e^{(\alpha)} = \alpha e + (1 - \alpha) \varepsilon, \quad \alpha \in ]0, 1[.$$

Il vient, après division par  $\alpha$ ,

$$(7.19) \quad \int_{\Omega} (e_{ij} - \varepsilon_{ij}) \mu_{ij} \, dx - \frac{1}{2} \alpha \int_{\Omega} g(e - \varepsilon) \, dx \leq 0$$

d'où, à la limite quand  $\alpha$  tend vers zéro, l'inégalité (5.7). ■

*Conséquences : Les formulations variationnelles*

Si  $e$  et  $\tau$  sont deux éléments quelconques de  $H$  on a

$$(g + \psi_k)(e) + (g + \psi_k)^*(\tau) \geq (e, \tau)$$

et par conséquent la solution  $(u_i, \sigma_{ij})$ , éventuelle, du problème posé minimise la fonctionnelle

$$(7.20) \quad (g + \psi_k)(e) + (g + \psi_k)^*(\tau) - (e, \tau)$$

parmi les champs de contraintes  $\tau$  *statiquement admissibles*, c'est-à-dire tels que

$$(7.21) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \tau \in H, & \\ \tau_{ij,j} + f_i = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \tau_{ij} n_j = F_i & \text{sur } \Gamma_F, \end{array} \right.$$

et les champs de déformations  $e$  *cinématiquement admissibles* c'est-à-dire tels que

$$(7.22) \quad \left\{ \begin{array}{ll} e = \varepsilon(v) & \\ v = \{ v_i \}, & v_i \in H^1(\Omega) \\ v_i = U_i & \text{sur } \Gamma_U^{(22)}. \end{array} \right.$$

Mais nous avons alors

$$(7.23) \quad (e, \tau) = \int_{\Omega} f_i v_i \, dx + \int_{\Gamma_F} F_i v_i \, d\Gamma + \int_{\Gamma_U} u_i \tau_{ij} n_j \, d\Gamma,$$

et au lieu de minimiser la fonctionnelle donnée par (7.20) il est équivalent de minimiser séparément les fonctionnelles

$$I_1(v) = (g + \psi_k)(\varepsilon(v)) - \int_{\Omega} f_i v_i \, d\Gamma - \int_{\Gamma_F} F_i v_i \, d\Gamma$$

sur l'ensemble des champs cinématiquement admissibles, et

$$I_2(\tau) = (g + \psi_k)^*(\tau) - \int_{\Gamma_U} u_i \tau_{ij} n_j \, d\Gamma$$

sur l'ensemble des champs statiquement admissibles.

<sup>(22)</sup> On suppose, comme on l'a déjà fait plusieurs fois que  $f_i \in L^2(\Omega)$ ,  $F_i \in H^{-1/2}(\Gamma_F)$ ,  $u_i \in H^{1/2}(\Gamma)$  (c'est-à-dire est restriction à  $\Gamma_U$  d'un élément de  $H^{1/2}(\Gamma)$ ).

#### 7.4. Existence et unicité d'un champ de déplacements solution

La fonctionnelle  $I_1(v)$  définie en (7.24) est strictement convexe, semi-continue inférieurement sur l'ensemble des champs cinématiquement admissible si  $\text{Mes } \Gamma_U > 0$  ce que nous supposons. De plus elle tend vers  $+\infty$  si la norme de  $v$  dans  $(H^1(\Omega))^3$  tend vers  $+\infty$ .

(Dans le cas où  $\Gamma_U = \emptyset$ , il est nécessaire que l'ensemble des forces  $f$  et  $F$  constitue un torseur équivalent à zéro. La fonctionnelle  $I_1(v)$  est alors définie sur l'espace quotient  $(H^1(\Omega))^3/\mathcal{R}$ , où  $\mathcal{R}$  est l'ensemble des déplacements rigides de  $\mathbb{R}^3$ . Sur cet espace quotient, la fonctionnelle  $I_1(v)$  possède les propriétés énoncées ci-dessus. On a déjà vu des considérations de ce genre au Chapitre 3, n° 3.)

Il en résulte

**Théorème 7.2.** *Il existe un unique champ de déplacements  $u$  cinématiquement admissible qui minimise la fonctionnelle  $I_1(v)$  si  $\Gamma_U$  est de mesure positive.*

*Si  $\Gamma_U$  est vide et si l'ensemble des forces appliquées constitue un torseur équivalent à zéro, il existe un élément  $u$  de  $(H^1(\Omega))^3$  qui minimise  $I_1(v)$  parmi les champs cinématiquement admissibles. Cet élément est unique à un champ de déplacements rigides près.*

#### 7.5. Champ de contraintes associé

Utilisant les résultats sur la dualité qui ont été rappelés au n° 6 on peut énoncer,

**Théorème 7.3.** *S'il existe un champ de contraintes  $\sigma$  qui minimise la fonctionnelle  $I_2(\tau)$  parmi les champs statiquement admissibles définis par (7.21) alors  $\sigma$  et  $\varepsilon(u)$  sont liés par la loi de comportement (7.11). ■*

*Remarque 7.1*

Le problème de l'existence du champ de contraintes  $\sigma$  est ouvert à notre connaissance. La situation est ici voisine de celle rencontrée au n° 6 à condition de permuter les rôles des contraintes et des déformations. ■

## 8. COMMENTAIRES

Pour les travaux classiques sur la plasticité on pourra se reporter à W. I. Koiter [1], J. Mandel [1], [2], W. Prager [1], [2], W. Prager et P. G. Hodge [1] et la bibliographie de ces travaux.

Ici nous avons adopté une présentation où les diverses lois de comportement de la plasticité — sauf la plasticité avec écrouissage qui n'est pas abordée — apparaissent comme des cas particuliers ou des cas limites de la loi élasto-visco-plastique.

Les problèmes abordés dans ce chapitre sont des problèmes de petites déformations, la variable spatiale  $x$  étant une variable de Lagrange. Il n'en sera pas de même au Chapitre 6 où l'on étudiera un problème d'écoulement, la variable spatiale  $x$  étant alors une variable d'Euler. (Pour une présentation de ces deux types de variables on pourra se reporter à P. Germain [1] Chapitre 3.)

Aux n<sup>os</sup> 3 et 4 l'ensemble des résultats est obtenu sous l'hypothèse que le convexe  $K$  est indépendant du temps. Cette condition est réalisée dans des cas particuliers importants tels celui de la torsion d'un arbre cylindrique (H. Lanchon [1] – [4], W. Ting [1], [2], B. D. Annin [1]). Néanmoins le cas d'un convexe qui dépend du temps se présente fréquemment et constitue à notre connaissance un problème ouvert. Ce chapitre contient d'autres problèmes ouverts importants, tel au n<sup>o</sup> 6 celui de la recherche du champ de déplacements solution ou au n<sup>o</sup> 7 celui de la recherche du champ de contraintes solution. ■

Nous n'avons pas abordé ici les problèmes de plasticité avec grandes déformations ; pour la mise en équations correspondante on pourra se reporter à M. M. Balaban, A. E. Green, P. M. Naghdi [1].

# CHAPITRE 6

## FLUIDE RIGIDE VISCO-PLASTIQUE DE BINGHAM

Ce chapitre suppose connu le Chapitre 1, n<sup>os</sup> 1 à 3.

### 1. INTRODUCTION ET PROBLÈMES ENVISAGÉS

Un fluide rigide visco-plastique est un milieu continu qui obéit aux lois générales de conservation énoncées au Chapitre 1, section 1, et à des lois de comportement particulières.

Nous allons préciser ici l'ensemble des équations correspondantes, ainsi que les types de problèmes que nous nous proposons d'étudier.

#### 1.1. Lois de comportement d'un fluide rigide visco-plastique, incompressible

L'hypothèse d'*incompressibilité*, très réaliste physiquement, se traduit par

$$(1.1) \quad \text{Div } v = 0$$

où  $v$  est le champ des vecteurs vitesse. Il en résulte, par utilisation de l'équation de conservation de la masse (Chap. 1, 1.3) que

$$(1.2) \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i = 0.$$

Par conséquent, la masse spécifique d'une particule fluide reste constante au cours de l'écoulement ; elle est donc de plus indépendante des variables d'espace si elle l'est à un instant particulier, ce que nous supposons. Dans ces conditions, nous avons,

$$(1.3) \quad \rho = \text{Cte} = \rho_0.$$

Il est même loisible de poser  $\rho_0 = 1$ , ce qui sera fait dans la suite, et revient simplement à choisir l'unité de masse spécifique.

Cette fixité de  $\rho$  détermine une fonction inconnue du problème. De plus, elle découple les équations de conservation de la quantité de mouvement de l'équation de l'énergie, à condition toutefois que les lois de comportement qui expriment le tenseur des contraintes *ne fassent pas intervenir la température* ; nous supposons

ici qu'il en est ainsi. Les phénomènes de thermique (champ de températures, flux de chaleur) n'interviendront pas dans ce Chapitre où nous étudierons seulement les propriétés de l'écoulement (champs de vitesses et de contraintes).

1.2. Fonction de dissipation

Dans l'équation (1.27) du Chapitre 1, le terme  $\sigma_{ij} D_{ij}$  <sup>(1)</sup> est parfois appelé *fonction de dissipation*  $\mathcal{D}$ . La donnée de cette fonction, inspirée de résultats expérimentaux par exemple, permet d'exprimer les lois de comportement du matériau considéré. Nous procéderons ainsi en imposant que  $\mathcal{D}$  ne dépende que du tenseur des taux de déformation (P. Germain [2], W. Prager [1]), soit

$$(1.4) \quad \sigma_{ij} D_{ij} = \mathcal{D}_1(\mathbb{D}) + \mathcal{D}_2(\mathbb{D})$$

où  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont des fonctions positivement homogènes d'ordre 1 et 2 respectivement, par rapport aux composantes du tenseur  $\mathbb{D}$ . Il en résulte que

$$(1.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}_1 = \frac{\partial \mathcal{D}_1}{\partial D_{kl}} D_{kl} \\ \mathcal{D}_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{D}_2}{\partial D_{kl}} D_{kl} . \end{array} \right.$$

L'égalité (1.4) devant avoir lieu quelles que soient les composantes  $D_{ij}$  soumises à la contrainte

$$(1.6) \quad D_{kk} = 0 \quad (\text{autre forme de 1.1}),$$

les composantes  $\sigma_{ij}$  du tenseur des contraintes sont données par

$$(1.7) \quad \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \partial \mathcal{D}_1 / \partial D_{ij} + \frac{1}{2} \partial \mathcal{D}_2 / \partial D_{ij} ,$$

où  $p$  est un scalaire indépendant des  $D_{ij}$ . Si, de plus, le fluide est supposé isotrope, les scalaires  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  ne sont fonctions que des invariants du tenseur  $D$ . ■

On appellera *fluide de Bingham* le matériau pour lequel les fonctions  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont données (W. Prager [1]) par

$$(1.8) \quad \mathcal{D}_1 = 2 g(D_{II})^{1/2} , \quad \mathcal{D}_2 = 4 \mu D_{II} ,$$

où  $D_{II}$  est l'invariant du tenseur  $\mathbb{D}$  donné par

$$(1.9) \quad D_{II} = \frac{1}{2} D_{ij} D_{ij} .$$

Les scalaires positifs  $g$  et  $\mu$  sont respectivement le *seuil de plasticité* et la *viscosité* du fluide de Bingham.

(1)  $D_{ij}$  est défini au Chapitre 1 par (1.23).

La loi de comportement (1.7) s'écrit alors

$$(1.10) \quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + gD_{ij}/(D_{11})^{1/2} + 2\mu D_{ij},$$

expression qui n'a de sens que si  $D_{11} \neq 0$ .

Si  $D_{11} \neq 0$  le tenseur des contraintes est indéterminé. Dans (1.10), le scalaire  $-p$  représente la partie sphérique <sup>(2)</sup> du tenseur des contraintes; on peut convenir que  $p$  est la *pression*. ■

Afin d'inverser les relations (1.10), posons

$$(1.11) \quad \sigma_{11} = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D$$

où les  $\sigma_{ij}^D$  représentent les composantes du déviateur des contraintes. Nous avons alors, avec (1.10),

$$(1.12) \quad \sigma_{11} = (g + 2\mu D_{11}^{1/2})^2,$$

ce qui implique  $\sigma_{11}^{1/2} \geq g$ , auquel cas (1.10) s'inverse en

$$(1.13) \quad D_{ij} = \frac{1}{2\mu} (1 - g/\sigma_{11}^{1/2}) \sigma_{ij}^D.$$

Revenant au cas  $D_{11} = 0$ , il convient d'ajouter que le tenseur des contraintes est alors indéterminé mais cependant tel que  $\sigma_{11}^{1/2} \leq g$ , puisque, dans le cas contraire, (1.13) fournit le tenseur  $\mathbb{D}$  avec  $D_{11} > 0$ .

*En résumé, les lois de comportement du fluide de Bingham s'énoncent*

$$(1.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11}^{1/2} < g \Leftrightarrow D_{ij} = 0 \\ \sigma_{11}^{1/2} \geq g \Leftrightarrow D_{ij} = \frac{1}{2\mu} (1 - g/\sigma_{11}^{1/2}) \sigma_{ij}^D. \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

#### Remarque 1.1

Si  $g = 0$  dans l'équation (1.10) on retrouve la loi de comportement d'un fluide visqueux incompressible classique (fluide newtonien). On peut donc considérer que le fluide de Bingham est, pour  $g$  petit, un modèle voisin du fluide visqueux classique <sup>(3)</sup>. Il présente la particularité supplémentaire, mise en évidence par (1.14), de se déplacer comme un milieu rigide si une certaine fonction des contraintes ... ici  $\sigma_{11}^{1/2}$  — n'atteint pas le seuil  $g$ . ■

Ce type de comportement s'observe dans le cas de certaines huiles ou de certaines boues, utilisées dans la technique des forages pétroliers, ainsi que dans le béton.

<sup>(2)</sup> Etant donné un tenseur du deuxième ordre de composantes  $T_{ij}$ , rappelons encore une fois la décomposition en partie sphérique et déviateur par

$$T_{ij} = s\delta_{ij} + T_{ij}^D, \quad \text{où} \quad s = \frac{1}{3} T_{kk}, \quad \text{et} \quad T_{kk}^D = 0.$$

<sup>(3)</sup> Ceci sera précisé au n° 5.



Si  $g$  est strictement positif, on observe des zones rigides au sein de l'écoulement.

Si  $g$  croît, ces zones rigides augmentent et sont alors susceptibles de bloquer complètement l'écoulement pour  $g$  assez grand. ■

*Remarque 1.2*

Si nous faisons  $\mu = 0$  dans (1.10) les relations (1.14) ne sont plus valables; plus précisément la première des relations (1.14) subsiste, alors que la seconde, qui est l'inverse de

$$\sigma_{ij}^D = g D_{ij} / D_{II}^{1/2}$$

exprime que  $\frac{1}{2} \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D = g^2$  et qu'alors le tenseur  $D_{ij}$  est colinéaire au tenseur  $\sigma_{ij}^D$ ; les relations (1.14) doivent donc être remplacées par

$$(1.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{II} < g \Leftrightarrow D_{ij} = 0 \\ \sigma_{II} = g \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \quad \text{tel que } D_{ij} = \lambda \sigma_{ij}^D. \end{array} \right.$$

Les matériaux qui obéissent à ce type de loi de comportement sont connus sous le nom de « *rigides-parfaitement plastiques* », ou encore « *à potentiel plastique de Von Mises* ». On voit que le point représentatif dans  $\mathbb{R}^6$  du déviateur du tenseur des contraintes reste à l'intérieur ou sur la frontière de la sphère d'équation

$$(1.16) \quad \sigma_{II} \leq g^2.$$

Si ce point est à l'intérieur, le matériau est dans un état rigide, s'il est sur la frontière, le matériau peut subir une déformation plastique. ■

**1.3. Problèmes envisagés et récapitulation des équations**

Nous envisagerons trois types de problèmes : écoulement à l'intérieur d'un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$ , écoulement à l'extérieur d'un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  avec vitesse uniforme donnée à l'infini, écoulement laminaire à l'intérieur d'une conduite cylindrique infiniment longue.

1) *Problème intérieur*

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  de frontière  $I'$ . Nous cherchons le champ des vitesses  $v(x, t)$  et le champ des pressions  $p(x, t)$  dans un écoulement de fluide de Bingham à l'intérieur de  $\Omega$ .

Les équations et conditions aux limites sont les suivantes :

$$(1.17) \quad \gamma_i = \sigma_{i,j,j} + f_i \quad \text{dans } \Omega, \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{équations du mouvement})$$

où

$$(1.18) \quad \gamma_i = \partial v_i / \partial t + v_{i,j} v_j,$$

$$(1.19) \quad v_{i,j} = 0 \quad (\text{incompressibilité}).$$

Les scalaires  $f_i$  sont les composantes d'une densité volumique  $f(x, t)$  de forces données.

Les composantes  $\sigma_{ij}$  du tenseur des contraintes sont reliées aux  $D_{ij}$  par les lois de comportement des fluides de Bingham explicitées à la Section 1.2.

Les conditions aux limites sont, comme pour les fluides visqueux classiques, celles de l'adhérence à la paroi, soit

$$(1.20) \quad v_i = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Ce problème peut se traiter dans les cas stationnaire et instationnaire : dans le premier cas, les fonctions inconnues  $v_i$  et  $p$  sont indépendantes du temps, dans le second, on a les conditions initiales

$$(1.21) \quad v_i |_{t=0} = v_{0i},$$

où les  $v_{0i}$  sont des fonctions des  $x_i$  données satisfaisant à (1.19) et (1.20).

### 2) Problème extérieur

C'est le problème de l'écoulement, autour d'un corps rigide fixe, d'un fluide de Bingham dont la vitesse à l'infini est constante donnée.

Le corps rigide occupe un domaine  $\tilde{\Omega}$  borné de  $\mathbb{R}^3$  de frontière régulière. Le champ des vitesses et la pression satisfont dans  $\mathbb{R}^3 - \tilde{\Omega} = \Omega$  aux équations (1.17), (1.18), (1.19), (1.20) auxquelles nous adjoignons la condition à l'infini

$$(1.22) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x, t) = (U_1, 0, 0),$$

où  $U_1$  est une constante positive donnée, et une condition initiale du type (1.21).

### 3) Écoulement dans une conduite

Ce problème a déjà été abordé par Mosolov et Miasnikov [1] par une méthode un peu différente de celle donnée ici.

Il s'agit de l'écoulement stationnaire et laminaire (\*) d'un fluide de Bingham dans une conduite cylindrique sous l'effet d'une chute de pression. ■

Les génératrices de la conduite sont parallèles à  $Ox_3$  dans le système d'axes ortho-normés  $Ox_1, x_2, x_3$  (cf. Fig. n° 1).

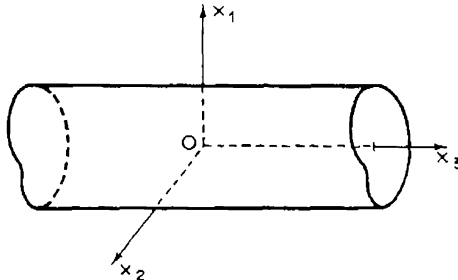


Figure 1.

(\*) Ce qui signifie ici que les vitesses sont parallèles aux génératrices du cylindre.

Soit  $\Omega$  le domaine de  $\mathbb{R}^2$  représenté par une section droite de ce cylindre. L'écoulement est étudié entre les sections

$$(1.23) \quad x_3 = 0 \quad \text{et} \quad x_3 = L \quad (L : \text{longueur donnée})$$

sur lesquelles nous imposons les valeurs de la pression, soit

$$(1.24) \quad p(x_3) |_{x_3=0} = 0, \quad p(x_3) |_{x_3=L} = -cL.$$

Le scalaire positif  $c$  est la chute linéique de pression. ■

Si nous cherchons les champs des vitesses et des pressions satisfaisant à (1.17), (1.18), (1.19) aux lois de comportement des fluides de Bingham, à la condition d'adhérence

$$(1.25) \quad v = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0, L],$$

et aux conditions (1.24), nous obtenons un problème considéré généralement comme mal posé <sup>(5)</sup>.

Nous restreignons la classe des solutions admissibles en imposant à l'écoulement d'être *laminaire*.

Cette propriété est bien satisfaite expérimentalement à condition que la chute de pression «  $c$  » ne soit pas trop grande, c'est-à-dire, par voie de conséquence, que le *nombre de Reynolds* <sup>(6)</sup> de l'écoulement ne soit pas trop grand.

Dans ces conditions, le champ des vitesses est  $(0, 0, v)$  et l'équation (1.19) impose que  $v$  ne dépende que de  $x_1$  et  $x_2$ . Le tenseur des taux de déformation  $\mathbb{D}$  s'écrit alors,

$$(1.26) \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \partial v / \partial x_1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \partial v / \partial x_2 \\ \frac{1}{2} \partial v / \partial x_1 & \frac{1}{2} \partial v / \partial x_2 & 0 \end{pmatrix};$$

le déviateur des contraintes ne dépend que de  $x_1$  et  $x_2$  et est de la forme

$$(1.27) \quad \sigma + p\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13}^D \\ 0 & 0 & \sigma_{23}^D \\ \sigma_{13}^D & \sigma_{23}^D & 0 \end{pmatrix}.$$

<sup>(5)</sup> La raison à cela — mais ce n'est pas une démonstration — est que le problème *restreint* que nous allons envisager est *bien posé*.

<sup>(6)</sup> On appelle nombre de Reynolds d'un écoulement de fluide visqueux le scalaire

$$\mathcal{R} = Ul\rho/\mu,$$

où

$U$  : est une vitesse caractéristique de l'écoulement,

$l$  : une longueur caractéristique de l'écoulement,

$\rho$  : la masse spécifique du fluide,

$\mu$  : la viscosité du fluide.

Les équations du mouvement (1.17) donnent alors,

$$(1.28) \quad \begin{cases} \partial p / \partial x_1 = 0 \\ \partial p / \partial x_2 = 0 \\ \partial p / \partial x_3 = \sigma_{31,1}^D + \sigma_{32,2}^D \quad (f = 0). \end{cases}$$

Dans la troisième équation (1.28), le premier membre ne dépend que de  $x_3$  et le second membre que de  $x_1$  et  $x_2$ . Ces premiers membres sont donc tous deux égaux à l'opposée de la chute linéique de pression  $c$ , d'où

$$(1.29) \quad p = -cx_3.$$

En résumé, nous sommes conduits à trouver une fonction scalaire  $v(x_1, x_2)$  dans  $\Omega$ , satisfaisant à

$$(1.30) \quad \sigma_{31,1}^D + \sigma_{32,2}^D + c = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

avec

$$(1.31) \quad \begin{cases} \sigma_{3i}^D = gD_{3i}/D_{ii}^{1/2} + 2\mu D_{3i}, & i = 1, 2 \\ \text{si } D_{ii} \neq 0, & (D_{ii} = (D_{31})^2 + (D_{32})^2), \end{cases}$$

et à la condition à la frontière

$$(1.32) \quad v = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (= \partial\Omega). \quad \blacksquare$$

### Remarque 1.3

Nous avons posé  $f = 0$  dans (1.28) et ceci nous a donné des simplifications intéressantes.

La solution, si elle existe, permet aussi de résoudre un problème un peu plus général, qui inclut en particulier le cas des forces volumiques de pesanteur. Soit

$$(1.33) \quad f = -\text{grad } \Phi$$

avec

$$(1.34) \quad \Phi = \varphi(x_3) + \psi(x_1, x_2).$$

Si nous posons

$$(1.35) \quad \tilde{p} = p + \Phi,$$

cette quantité doit satisfaire aux équations (1.28) où  $p$  a été remplacée par  $\tilde{p}$ , ce qui impose

$$\tilde{p} = p + \Phi = C_1 x_3 + C_2$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes. Deux cas doivent être distingués :

i)  $\psi \equiv 0$  : les conditions (1.24) peuvent être satisfaites en prenant

$$p(x_3) = -cx_3 + x_3 L^{-1} [\varphi(L) - \varphi(0)] - [\varphi(x_3) - \varphi(0)].$$

ii)  $\psi \equiv 0$  : les conditions (1.24) ne peuvent plus être satisfaites par un écoulement laminaire. Ce ne sont d'ailleurs plus les conditions « naturelles » : on doit alors imposer simplement

$$(1.36) \quad p(x_1^0, x_2^0, 0) = 0, \quad p(x_1^L, x_2^L, L) = -cL$$

où

$$(x_1^0, x_2^0) \in \Omega, \quad (x_1^L, x_2^L) \in \Omega,$$

et on obtient la solution en  $p$  en prenant

$$(1.37) \quad p(x_1, x_2, x_3) = C_1 x_3 + C_2 - \varphi(x_3) - \psi(x_1, x_2)$$

où les constantes  $C_1$  et  $C_2$  sont données par

$$(1.38) \quad \begin{cases} C_1 = -c + \frac{\varphi(L) - \varphi(0)}{L} + \frac{\psi(x_1^L, x_2^L) - \psi(x_1^0, x_2^0)}{L} \\ C_2 = \varphi(0) + \psi(x_1^0, x_2^0). \end{cases}$$

## 2. ÉCOULEMENT A L'INTÉRIEUR D'UN RÉSERVOIR. FORMULATION SOUS FORME D'INÉQUATION VARIATIONNELLE

On va maintenant obtenir, de *façon formelle*, une *inéquation variationnelle* « équivalente » au Problème 1 présenté au n°s 1.2 précédent. Cette inéquation variationnelle — prise comme formulation précise du problème — sera ensuite étudiée aux n°s 3 à 6.

### 2.1. Premières notations

On désignera par  $u = u(x, t)$  (ou  $u(x)$  dans le cas stationnaire) le champ de vecteurs solution du Problème 1.

Pour un champ de vecteur  $v$  quelconque, on pose

$$(2.1) \quad D_{\Pi}(v) = \frac{1}{2} D_{ij}(v) D_{ij}(v),$$

$$(2.2) \quad j(v) = 2 \int_{\Omega} (D_{\Pi}(v))^{1/2} dx.$$

Si  $w$  est un deuxième champ de vecteurs, on pose

$$(2.3) \quad a(v, w) = 2 \int_{\Omega} D_{ij}(v) D_{ij}(w) dx.$$

L'accélération  $\gamma = \gamma(v)$  associée au champ de vitesse  $v$  est le champ de vecteur de composantes  $\gamma_i = \gamma_i(v)$  :

$$(2.4) \quad \gamma_i(v) = dv_i/dt = \partial v_i/\partial t + v_j v_{i,j}. \quad \blacksquare$$

## 2.2. Inéquation variationnelle

Nous allons vérifier le

**Théorème 2.1.** *Si  $u = u(x, t)$  est une solution (régulière) du Problème 1 alors*

$$(2.5) \quad \text{Div } u = 0 \quad \forall t \in ]0, T[ ,$$

$$(2.6) \quad u = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times ]0, T[ ,$$

$$(2.7) \quad a(u(t), v - u(t)) + gj(v) - gj(u(t)) \geq \int_{\Omega} (f - \gamma) (v - u(t)) \, dx$$

$\forall v$ , vecteur test tel que

$$(2.8) \quad \text{Div } v = 0, \quad v = 0 \quad \text{sur } \Gamma ,$$

à quoi on ajoute évidemment la condition initiale (cf. (1.21)) :

$$(2.9) \quad u(0) = u^0 .$$

*Remarque 2.1*

Naturellement, pour le cas stationnaire, il suffira de faire

$$\ll \partial u_i / \partial t = 0 \gg \quad \text{dans (2.7)} . \quad \blacksquare$$

*Démonstration du Théorème 2.1*

La seule chose à montrer est l'inéquation (2.7).

Soient  $\sigma_{ij}(u)$  les composantes du tenseur des contraintes associé au champ de vitesses  $u$  par les lois de comportement (1.11). Si alors  $v$  est un champ de vitesses « test » vérifiant (2.8), on a :

$$(2.10) \quad \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) D_{ij}(v - u) \, dx = \int_{\Omega} (f - \gamma) (v - u(t)) \, dx$$

(où  $u = u(t)$  dans le premier membre de (2.10)). Explicitant le premier membre de (2.10), on obtient pour sa valeur en utilisant (1.10)

$$(2.11) \quad g \int_{\Omega} D_{\Pi}(u)^{-1/2} D_{ij}(u) (D_{ij}(v - u)) \, dx + \mu a(u, v - u) .$$

Dans le premier terme de (2.11), on utilise l'inégalité

$$(2.12) \quad D_{ij}(u) D_{ij}(v) \leq 2 D_{\Pi}(u)^{1/2} D_{\Pi}(v)^{1/2}$$

de sorte que le premier terme de (2.11) est majoré par

$$2g \int_{\Omega} (D_{\Pi}(v)^{1/2} - D_{\Pi}(u)^{1/2}) \, dx = gj(v) - gj(u)$$

et (2.10) implique alors (2.7).  $\blacksquare$

Vérifions maintenant, *de manière entièrement formelle*, que si  $u$  est solution de (2.5), (2.6), (2.7), (2.9) alors  $u$  est solution du Problème 1.

*Remarque 2.2*

Cette vérification ne saurait être autre que formelle, la formulation en termes « usuels » du Problème 1 n'étant pas complètement précise. ■

Si la (ou une) fonction  $u = u(t)$  solution de (2.7) est telle que la fonctionnelle  $v \rightarrow j(v)$  est dérivable en  $u$ , i.e. si

$$(2.13) \quad D_{II}(u) \neq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega ,$$

alors (2.7) « équivaut » à

$$(2.14) \quad a(u(t), v) + g(j'(u(t)), v) = (f - \gamma, v) \quad (7)$$

où

$$(2.15) \quad (j'(u), v) = \frac{d}{d\lambda} j(u + \lambda v) |_{\lambda=0} = \int_{\Omega} D_{II}(u)^{-1/2} D_{ij}(u) D_{ij}(v) dx .$$

En effet, on remplace dans (2.7)  $v$  par

$$u(t) + \lambda v, \quad \lambda > 0$$

d'où

$$\mu a(u(t), v) + g\lambda^{-1}[j(u(t) + \lambda v) - j(u(t))] \geq (f - \gamma, v)$$

et faisant tendre  $\lambda$  vers 0 :

$$\mu a(u(t), v) + g(j'(u), v) \geq (f - \gamma, v)$$

d'où, changeant  $v$  en  $-v$  (2.14) suit.

Mais (2.14) équivaut à

$$(2.16) \quad \left| \begin{aligned} & - \int_{\Omega} 2 \mu \frac{\partial}{\partial x_j} D_{ij}(u) v_i dx + \int_{\Omega} g \left( \frac{\partial}{\partial x_j} (D_{II}(u)^{-1/2} D_{ij}(u)) \right) v_i dx = \\ & = \int_{\Omega} (f_i - \gamma_i) v_i dx \end{aligned} \right.$$

$\forall v = \{ v_i \}$  avec  $\text{Div } v = 0$ .

Or si  $F = \{ F_i \}$  est un vecteur orthogonal aux vecteurs de divergence nulle :

$$\int_{\Omega} F_i v_i dx = 0$$

alors il existe  $p$  (défini à une constante additive près) tel que

$$(2.17) \quad F = \text{grad } p \quad (F_i = \partial p / \partial x_i) .$$

(7) Où  $(f, \varphi) = \int_{\Omega} f_i \varphi_i dx$ .

Par conséquent (2.16) équivaut à :

$$(2.18) \quad -2 \mu (D_{ij}(u))_{,j} - g (D_{11}(u))^{-1/2} D_{ij}(u))_{,j} = f_i - \gamma_i - p_{,i}.$$

On retrouve (1.16) avec (1.11). ■

Grâce à cette remarque, il est maintenant raisonnable <sup>(8)</sup> de prendre comme **définition du problème I** <sup>(9)</sup> le **problème de la résolution de l'inéquation variationnelle** (2.7) (avec les conditions (2.5), (2.6), (2.9)). ■

### Remarque 2.3

Comme on a déjà observé plusieurs fois à propos de problèmes d'inéquations variationnelles la formulation (2.7) prend « automatiquement » en compte les « surfaces libres », ici la « surface » de *séparation entre la région où l'écoulement est régi par (2.18) et celle où le fluide se déplace comme un milieu rigide*. ■

### Problème ouvert

Aucun résultat ne semble connu sur la nature de cette surface libre.

## 3. RÉOLUTION DE L'INÉQUATION VARIATIONNELLE CARACTÉRISTIQUE DE L'ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE DE BINGHAM A L'INTÉRIEUR D'UN RÉSERVOIR

### 3.1. Outils d'analyse fonctionnelle

Soit  $\Omega$  le réservoir ;  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  <sup>(10)</sup>, que nous supposons de frontière  $\Gamma$  « assez régulière ».

On a défini au Chapitre 1, n° 3, l'espace  $H^s(\Omega)$  pour  $s$  entier  $\geq 0$  et l'espace  $H^s(\mathbb{R}^n)$  pour  $s$  réel quelconque.

Pour  $s$  réel  $\geq 0$  quelconque, on peut définir

$$(3.1) \quad H^s(\Omega) = \text{espace des restrictions à } \Omega \text{ des éléments de } H^s(\mathbb{R}^n).$$

Plus précisément, soit l'application

$$f \rightarrow \pi f = \text{restriction de } f \text{ à } \Omega$$

de  $H^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\Omega)$  (par exemple) ; on définit alors  $H^s(\Omega)$  comme l'image de  $H^s(\mathbb{R}^n)$  par l'application  $\pi$  et l'on munit  $H^s(\Omega)$  de la *norme hilbertienne* :

$$\| \varphi \|_{H^s(\Omega)} = \inf_{f \in H^s(\mathbb{R}^n), \pi f = \varphi} \| f \|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

<sup>(8)</sup> Et cela sera justifié entièrement, en particulier en dimension d'espace 2, par le Théorème 3.1 *d'existence et d'unicité* (cf. n° 3 ci-après).

<sup>(9)</sup> Et insistons sur le fait qu'il n'y a pas d'autre formulation précise du problème (à notre connaissance), une fois explicités les espaces fonctionnels où l'on cherche la solution ; cf. aussi Remarque 2.3 ci-après.

<sup>(10)</sup> Évidemment  $n = 2$  ou  $3$  dans les applications.



Cette définition *coïncide* (à une équivalence de norme près) avec la définition usuelle lorsque  $s$  est entier <sup>(11)</sup>. On désignera par  $(\varphi, \psi)_{H^s(\Omega)}$  le produit scalaire dans  $H^s(\Omega)$ .

On introduit ensuite :

$$(3.2) \quad \mathcal{V} = \{ \varphi \mid \varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^n, \text{Div } \varphi = 0 \},$$

$$(3.3) \quad V_s = \text{adhérence de } \mathcal{V} \text{ dans } (H^s(\Omega))^n ;$$

$V_s$  est un espace de Hilbert pour la norme

$$(3.4) \quad \| v \|_s = ((v, v))_s^{1/2}$$

si

$$(3.5) \quad ((v, w))_s = (v_i, w_i)_{H^s(\Omega)} .$$

On pose :

$$(3.6) \quad V_1 = V, \quad \| v \|_1 = \| v \| ,$$

$$(3.7) \quad V_0 = H, \quad \| v \|_0 = | v |, \quad ((v, w))_0 = (v, w) .$$

**Lemme 3.1.** *Si  $s = n/2$  on a*

$$(3.8) \quad v_{i,j} \in L^n(\Omega) \quad \forall v \in V_s .$$

*Démonstration*

Si  $v \in V_s$  alors  $v_{i,j} \in H^{s-1}(\Omega)$ . De façon générale (J. Peetre [1]) si  $\varphi \in H^r(\Omega)$  alors  $\varphi \in L^p(\Omega)$ ,  $1/p = 1/2 - r/n$  (si  $1/2 - r/n > 0$ ); d'où (3.8) suit. ■

Pour  $u, v, w$  champ de vecteurs sur  $\Omega$  on pose (chaque fois que cela a un sens) :

$$(3.9) \quad b(u, v, w) = \int_{\Omega} u_i v_{j,i} w_j \, dx .$$

En écrivant, pour un peu simplifier l'écriture,

$$\| \varphi \|_{(L^p(\Omega))^n} = \| \varphi \|_{L^p(\Omega)}$$

l'inégalité de Holder appliquée à (3.9) donne

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} | b(u, v, w) | \leq c_1 \| u \|_{L^p(\Omega)} \| w \|_{L^p(\Omega)} \sum_{i,j} \| D_i v_j \|_{L^q(\Omega)} , \\ \frac{2}{p} + \frac{1}{n} = 1 . \end{array} \right.$$

Utilisant le Lemme 3.1, on en déduit :

$$(3.11) \quad | b(u, v, w) | \leq c_2 \| u \|_{L^p(\Omega)} \| w \|_{L^p(\Omega)} \| v \|_s, \quad s = n/2 . \quad \blacksquare$$

<sup>(11)</sup> Cf. par exemple Lions-Magenes [1], Volume I, Chapitre 1.

Nous admettons par ailleurs l'inégalité de convexité suivante <sup>(12)</sup>

$$(3.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|v\|_{L^p(\Omega)} \leq c_3 \|v\|_{H^{1/2}(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ \frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}. \end{array} \right.$$

*Remarque 3.1*

Une démonstration élémentaire de (3.12) est facile lorsque  $n = 2$ , auquel cas  $p = 4$ . Il suffit de montrer (3.12) avec  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$  et en prolongeant  $v$  par 0 hors de  $\Omega$ , il suffit de montrer (3.12) pour  $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ . Or

$$v^2(x) = 2 \int_{-\infty}^{x_1} v(\partial v / \partial x_1) dx_1 \leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |v| |\partial v / \partial x_1| dx_1 = 2 v_1(x_2)$$

et par échange des indices 1 et 2,  $v^2(x) \leq 2 v_2(x_1)$  d'où

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} v^4(x) dx &\leq 4 \int_{-\infty}^{+\infty} v_1(x_2) dx_2 \int_{-\infty}^{+\infty} v_2(x_1) dx_1 \leq \\ &\leq 4 \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\partial v / \partial x_1\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\partial v / \partial x_2\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \end{aligned}$$

d'où en particulier (3.12) (lorsque  $n = 2$ ). ■

De (3.11), (3.12), on déduit :

$$(3.13) \quad |b(u, v, w)| \leq c_4 \|u\|^{1/2} \|u\|^{1/2} \|w\|^{1/2} \|w\|^{1/2} \|v\|_s, \quad s = n/2.$$

On fixera désormais :

$$(3.14) \quad s = n/2.$$

On note que

$$(3.15) \quad V_s = V \quad \text{si} \quad n = 2$$

et que, dans tous les cas (avec la possibilité que  $V_s = V$ ) :

$$(3.16) \quad V_s \subset V \subset H \subset V' \subset V'_s$$

où  $V'$  (resp.  $V'_s$ ) désigne le dual de  $V$  (resp.  $V_s$ ) lorsque  $H$  est identifié à son dual.

On désignera par  $w_j$  les fonctions propres de l'isomorphisme  $\Lambda_s$  canonique de  $V_s \rightarrow V'_s$ , i.e.

$$(3.17) \quad ((w_j, v))_s = \lambda_j(w_j, v) \quad (1^3) \quad \forall v \in V_s, \quad |w_j| = 1. \quad \blacksquare$$

<sup>(12)</sup> Conséquence de la théorie de l'interpolation qui montre (cf. Lions-Magenes [1], Chap. 1) que

$$\|v\|_{H^{1/2}(\Omega)} \leq c \|v\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \|v\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}$$

est du résultat de J. Peetre [1] (déjà utilisé au Lemme 3.1) qui montre que

$$H^{1/2}(\Omega) \subset L^p(\Omega), \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}.$$

<sup>(13)</sup> Pas de sommation en  $j$  au deuxième membre de (3.17) !

On vérifie facilement que, pour  $u, v, w \in \mathcal{V}$ , on a :

$$(3.18) \quad b(u, v, w) + b(u, w, v) = 0$$

d'où des relations analogues par prolongement par continuité en appliquant (3.11).

### 3.2. Formulation fonctionnelle des inéquations variationnelles

Si l'on remplace dans (2.7)  $\gamma = \gamma(u)$  par sa valeur tirée de (2.4), on obtient, en utilisant la notation (3.9) (et  $u' = \partial u / \partial t$ ) :

$$(3.19) \quad \left| \begin{array}{l} (u'(t), v - u(t)) + \mu a(u(t), v - u(t)) + b(u(t), u(t), v - u(t)) + \\ + g_j(v) - g_j(u(t)) \geq (f(t), v - u(t)). \end{array} \right.$$

Mais — on continue ici les transformations *formelles* du problème, pour arriver à la formulation définitive — d'après (3.18) :

$$(3.20) \quad \left| \begin{array}{l} b(u(t), u(t), u(t)) = 0 \quad \text{et} \quad b(u(t), u(t), v) = -b(u(t), v, u(t)), \\ (u'(t), v - u(t)) + \mu a(u(t), v - u(t)) - b(u(t), v, u(t)) + \\ + g_j(v) - g_j(u(t)) \geq (f(t), v - u(t)). \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

On distingue maintenant *deux cas* selon la dimension  $n$ .

*Premier cas : dimension  $n = 2$*

On montrera ci-après le

**Théorème 3.1.** *On suppose que  $n = 2$ , et que  $f$  et  $u^0$  sont donnés avec*

$$(3.21) \quad f \in L^2(0, T; V'),$$

$$(3.22) \quad u^0 \in H.$$

*Il existe alors une fonction  $u$  et une seule telle que*

$$(3.23) \quad u \in L^2(0, T; V),$$

$$(3.24) \quad \partial u / \partial t \in L^2(0, T; V'),$$

*$u$  vérifie (3.19) (ou (3.20))  $\forall v \in V$ , et*

$$(3.25) \quad u(0) = u^0.$$

*Deuxième cas : dimension  $n \geq 3$*

Lorsque la dimension est  $\geq 3$ , il faut (du moins avec les méthodes dont nous disposons) introduire des solutions « *plus faibles* » de (3.20).

Pour simplifier l'exposé on va, dans ce cas, faire l'hypothèse :

$$(3.26) \quad u^0 = 0.$$

On introduit l'ensemble

$$(3.27) \quad W = \{ v \mid v \in L^2(0, T; V_s), \quad v' \in L^2(0, T; H), \quad v(0) = 0 \}.$$

On peut prendre  $v = u(t)$  (p.p.) dans (3.20); on vérifie alors que, si  $u$  est solution de (3.20), on a :

$$(3.28) \quad \left| \int_0^T \{ (v', v - u) + \mu a(u, v - u) - b(u, v, u) + gj(v) - gj(u) - (f, v - u) \} dt \geq 0 \quad \forall v \in W. \right.$$

En effet, tenant compte de (3.20) (avec  $v = v(t)$ ), on a :

$$\begin{aligned} (v', v - u) + \mu a(u, v - u) - b(u, v, u) + gj(v) - gj(u) - (f, v - u) = \\ = (v' - u', v - u) \end{aligned}$$

de sorte que l'intégrale du premier membre de (3.28) vaut

$$\frac{1}{2} |v(T) - u(T)|^2$$

d'où (3.28).

On prend alors comme **définition du problème l'inéquation** (3.28). On montrera ci-après le

**Théorème 3.2.** *Pour  $n$  quelconque, soit  $f$  donné avec (3.21). Il existe une fonction  $u$  telle que*

$$(3.29) \quad \left| \begin{array}{l} u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \quad \partial u / \partial t \in L^2(0, T; V'_s), \\ u(0) = 0, \end{array} \right.$$

et  $u$  vérifie (3.28). ■

*Remarque 3.2*

La question de l'unicité éventuelle de la solution dans le Théorème 3.2 est ouverte si  $n \geq 3$ . ■

*Remarque 3.3*

Si  $n = 2$ , on montrera l'unicité de la solution avec (3.29) et que  $u$  est alors solution au sens du Théorème 3.1 (avec  $u^0 = 0$ ). ■

*Remarque 3.4*

On peut aussi traiter le cas «  $u^0 \neq 0$  » dans le cadre du Théorème 3.2 mais au prix de difficultés techniques supplémentaires que nous avons voulu éviter. ■

*Remarque 3.5*

Le cas «  $g = 0$  » correspond aux formulations, classiques depuis les travaux de Leray [1], [2], [3], des solutions faibles (ou turbulentes) des équations de Navier-Stokes, au moins si  $n = 2$ . ■

*Remarque 3.6*

Si  $n = 2$ , il résulte de (3.23) et (3.24) que, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle,  $t \rightarrow u(t)$  est continue de  $[0, T] \rightarrow H$ . ■

On va maintenant démontrer les Théorèmes précédents, en commençant par le Théorème 3.2.

**3.3. Démonstration du Théorème 3.2**

*Schéma de la démonstration*

On *approche*  $j$  par une fonctionnelle *différentiable* ; on choisira <sup>(14)</sup>

$$(3.30) \quad j_\varepsilon(v) = \frac{2}{1 + \varepsilon} \int_{\Omega} (D_{11}(v))^{(1+\varepsilon)/2} dx, \quad \varepsilon > 0.$$

On a alors

$$(3.31) \quad (j'_\varepsilon(u), v) = \int_{\Omega} D_{11}(u)^{(\varepsilon-1)/2} D_{ij}(u) D_{ij}(v) dx.$$

L'idée naturelle est alors « d'approcher » l'inéquation par l'équation

$$(3.32) \quad (u'_\varepsilon, v) + \mu(u_\varepsilon, v) + b(u_\varepsilon, u_\varepsilon, v) + g(j'_\varepsilon(u_\varepsilon), v) = (f, v),$$

avec

$$(3.33) \quad u_\varepsilon(0) = 0 \quad (15).$$

Il y a toutefois une difficulté technique dans la résolution de (3.32), (3.33), si  $n > 2$  et qui conduit à l'introduction d'une *deuxième régularisation* par addition d'un « terme de viscosité »

$$\eta((u, v))_s \quad (s = n/2), \quad \eta > 0.$$

On introduit donc l'équation *bi-régularisée* :

$$(3.34) \quad (u'_{\varepsilon\eta}, v) + \mu(u_{\varepsilon\eta}, v) + b(u_{\varepsilon\eta}, u_{\varepsilon\eta}, v) + \eta((u_{\varepsilon\eta}, v))_s + g(j'_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}), v) = (f, v),$$

$$(3.35) \quad u_{\varepsilon\eta}(0) = 0.$$

<sup>(14)</sup> La démonstration ci-après est valable avec d'autres régularisations pour  $j$ , ce qui peut être important dans des problèmes numériques.

<sup>(15)</sup> Dans le cas  $n = 2$  (Théorème 3.1) on suivra cette méthode, avec  $u_\varepsilon(0) = u^0 (\neq 0)$ .

le plan étant alors le suivant :

- i) résolution de (3.34), (3.35) et obtention d'estimations a priori ;
- ii) passage à la limite en  $\varepsilon$  et  $\eta$ . ■

*Etape i)*

On utilise une « base »  $w_1, \dots, w_m, \dots$ , de l'espace  $V_s$ , et plus précisément la base « spéciale » des fonctions propres (3.17). On définit  $u_m (= u_{i;\eta m})$  solution de

$$(3.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u'_m(t), w_j) + \mu a(u_m(t), w_j) + b(u_m(t), u_m(t), w_j) + \eta((u_m(t), w_j))_s + \\ \quad + g(j'_\varepsilon(u_m(t)), w_j) = (f(t), w_j), \quad 1 \leq j \leq m, \end{array} \right.$$

$$(3.37) \quad u_m(0) = 0$$

ce qui définit  $u_m$  dans un intervalle  $[0, t_m]$ ; mais les estimations a priori qui suivent montrent que  $t_m = T$ .

Utilisant le fait que  $b(u_m(t), u_m(t), u_m(t)) = 0$  on déduit de (3.36) <sup>(16)</sup>

$$(3.38) \quad \left| \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + \mu a(u_m(t)) + \eta \|u_m(t)\|_s^2 + g(j'_\varepsilon(u_m(t)), u_m(t)) = \right. \\ \left. = (f(t), u_m(t)). \right.$$

Mais il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$(3.39) \quad a(v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in V \quad (17)$$

et

$$(3.40) \quad (j'_\varepsilon(v), v) \geq 0.$$

On déduit donc de (3.38) que :

$$\begin{aligned} |u_m(t)|^2 + 2\alpha\mu \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^2 d\sigma + 2\eta \int_0^t \|u_m(\sigma)\|_s^2 d\sigma &\leq & (18) \\ &\leq 2 \int_0^t \|f(\sigma)\|_* \|u_m(\sigma)\| d\sigma \leq \\ &\leq \alpha\mu \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^2 d\sigma + \frac{1}{\alpha\mu} \int_0^t \|f(\sigma)\|_*^2 d\sigma, \end{aligned}$$

<sup>(16)</sup> On pose :  $a(v, v) = a(v)$ .

<sup>(17)</sup> Car  $v \in V \Rightarrow v_i \in H_0^1(\Omega)$ .

<sup>(18)</sup> On pose :  $\|f\|_* =$  norme dans  $V'$  duale de  $\| \quad \| = \sup\{|(f, v)| / \|v\|\}, \quad v \in V$ .

et donc

$$(3.41) \quad |u_m(t)|^2 + \alpha\mu \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^2 d\sigma + 2\eta \int_0^t \|u_m(\sigma)\|_s^2 d\sigma \leq \frac{1}{\alpha\mu} \int_0^t \|f(\sigma)\|_*^2 d\sigma.$$

On en déduit :

$$(3.42) \quad \left| \begin{array}{l} u_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \\ \text{borné indépendant de } m, \varepsilon, \eta, \end{array} \right.$$

$$(3.43) \quad \left| \begin{array}{l} \eta^{1/2} u_m \text{ demeure dans un borné (indépendant de } m, \varepsilon, \eta) \text{ de} \\ L^2(0, T; V_s). \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

On va maintenant montrer que

$$(3.44) \quad \left| \begin{array}{l} u'_m \text{ demeure dans un borné (indépendant de } m, \varepsilon, \eta) \text{ de} \\ L^2(0, T; V'_s). \end{array} \right.$$

On note tout d'abord que, pour  $v \in V_s$ ,

$$b(u_m(t), u_m(t), v) = -b(u_m(t), v, u_m(t))$$

vérifie, d'après (3.13) :

$$|b(u_m(t), u_m(t), v)| \leq c_s \|u_m(t)\| \|u_m(t)\| \|v\|_s$$

et puisque  $|u_m(t)| \leq C$  d'après (3.42) on a (les  $c$  désignant des constantes diverses indépendantes de  $m, \varepsilon, \eta$ ) :

$$(3.45) \quad |b(u_m(t), u_m(t), v)| \leq c \|u_m(t)\| \|v\|_s$$

d'où (en utilisant (3.42)) :

$$(3.46) \quad \left| \begin{array}{l} b(u_m(t), u_m(t), v) = (h_m(t), v), \quad v \in V_s, \\ h_m \text{ demeurant dans un borné de } L^2(0, T; V'_s). \end{array} \right.$$

Notons que la forme  $v \rightarrow a(u, v)$  est continue sur  $V$  donc

$$(3.47) \quad a(u, v) = (Au, v), \quad A \in \mathcal{L}(V; V')$$

de sorte que (3.36) s'écrit sous la forme (équivalentc)

$$(3.48) \quad (u'_m + \mu Au_m + h_m + \eta A_s u_m + gj'(u_m) - f, w_j) = 0, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Si  $P_m$  désigne l'opérateur de projection orthogonale de  $H \rightarrow [w_1, \dots, w_m]$ , donc

$$(3.49) \quad P_m h = (h, w_j) w_j \quad (j \text{ variant de } 1 \text{ à } m)$$

on déduit de (3.48) (puisque  $P_m u'_m = u'_m$ ) :

$$(3.50) \quad u'_m = P_m(f - \mu A u_m - h_m - \eta A_s u_m - g j'_\varepsilon(u_m)).$$

Mais d'après (3.42) et (3.47),  $A u_m$  demeure dans un borné de

$$L^2(0, T; V') \subset L^2(0, T; V'_s); \quad \text{d'après (3.43),} \quad \|\eta A_s u_m\|_{L^2(0, T; V')} = 0(\eta^{1/2});$$

enfin d'après (3.31),

$$\|j'_\varepsilon(u)\|_* \leq c(\int_{\Omega} D_{11}(u)^\varepsilon dx)^{1/2}$$

donc, *en particulier*,  $j'_\varepsilon(u_m)$  demeure dans un borné de  $L^2(0, T; V')$ . Donc (3.50) implique

$$(3.51) \quad \left\{ \begin{array}{l} u'_m = P_m k_m, \\ k_m \in \text{borné de } L^2(0, T; V'_s). \end{array} \right.$$

On aura donc (3.44) si l'on vérifie que

$$(3.52) \quad \|P_m \varphi\|_{V'_s} \leq c \|\varphi\|_{V'_s}.$$

Or  $\lambda_j^{1/2} w_j$  forme un système orthogonal complet de  $V'_s$  (pour la norme

$$\|\varphi\|_{V'_s} = \|A_s^{-1} \varphi\|_{V_s})$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{V'_s}^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi, w_j \lambda_j^{1/2}), \\ \|P_m \varphi\|_{V'_s}^2 &= \sum_{j=1}^m (\varphi, w_j \lambda_j^{1/2}) \end{aligned}$$

d'où (3.52), avec  $c = 1$ . ■

*Passage à la limite en  $m$*

On va utiliser à la fois un raisonnement de *compacité* et de *monotonie* (19). D'après (3.42), (3.44) on peut extraire de  $u_m$  une sous-suite  $u_\mu$  telle que

$$(3.53) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_\mu \rightarrow u_\varepsilon \text{ dans } L^\infty(0, T; H) \text{ faible étoile et } L^2(0, T; V) \text{ faible,} \\ u'_\mu \rightarrow u'_{\varepsilon n} \text{ dans } L^2(0, T; V'_s) \text{ faible,} \end{array} \right.$$

(19) Cf. d'autres exemples dans Lions [1], Chapitre 2.



$u_\mu \rightarrow u_{\varepsilon\eta}$  dans  $L^2(0, T; H)$  fort et par une nouvelle extraction éventuelle

$$(3.54) \quad \left| \begin{array}{l} u_{i\mu} \text{ (}i\text{-ième composante de } u_\mu) \rightarrow u_{i\varepsilon\eta} \text{ (}i\text{-ième composante de } u_{\varepsilon\eta}) \\ \text{p.p. dans } \Omega \times ]0, T[ ; \end{array} \right.$$

par ailleurs  $j'_\varepsilon(u_m)$  (resp.  $u_{i\mu} u_{j\mu}$ ) demeure dans un borné de  $L^2(0, T; V')$  (resp. de  $L^2(0, T; L^{p/2}(\Omega))$ ), d'après (3.12) et (3.42); on peut donc également supposer que

$$(3.55) \quad j'_\varepsilon(u_\mu) \rightarrow \chi \text{ dans } L^2(0, T; V') \text{ faible ,}$$

$$(3.56) \quad u_{i\mu} u_{j\mu} \rightarrow \theta_{ij} \text{ dans } L^2(0, T; L^{p/2}(\Omega)) \text{ faible .}$$

Mais d'après (3.54),  $u_{i\mu} u_{j\mu} \rightarrow u_{i\varepsilon\eta} u_{j\varepsilon\eta}$  par exemple au sens des distributions dans  $\mathcal{Q}$ , d'où, par comparaison avec (3.56) :

$$(3.57) \quad \theta_{ij} = u_{i\varepsilon\eta} u_{j\varepsilon\eta} .$$

On en déduit que

$$(3.58) \quad \left| \begin{array}{l} b(u_\mu, u_\mu, w_j) = -b(u_\mu, w_j, u_\mu) \rightarrow -b(u_{\varepsilon\eta}, w_j, u_{\varepsilon\eta}) \\ \text{(dans } L^2(0, T) \text{ faible, } \forall w_j) . \end{array} \right.$$

On déduit alors de (3.36) (pour  $m = \mu$ ) que

$$(3.59) \quad \left| \begin{array}{l} (u'_{\varepsilon\eta}, w_j) + \mu a(u_{\varepsilon\eta}, w_j) = b(u_{\varepsilon\eta}, w_j, u_{\varepsilon\eta}) + \eta((u_{\varepsilon\eta}, w_j))_s + \\ \hspace{15em} + g(\chi, w_j) = (f, w_j) , \quad \forall j . \end{array} \right.$$

Donc, le système des  $w_j$  étant complet dans  $V_s$ , on déduit de (3.59) que

$$(3.60) \quad \left| \begin{array}{l} (u'_{\varepsilon\eta}, v) + \mu a(u_{\varepsilon\eta}, v) - b(u_{\varepsilon\eta}, v, u_{\varepsilon\eta}) + \eta((u_{\varepsilon\eta}, v))_s + g(\chi, v) = \\ \hspace{15em} = (f, v) \quad \forall v \in V_s . \end{array} \right.$$

Comme on a évidemment (3.35), on aura donc terminé l'étape i) si l'on montre que

$$(3.61) \quad \chi = j'_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}) .$$

On utilise à cet effet un « raisonnement de monotonie ». ■

Soit  $\varphi$  une fonction  $\in L^2(0, T; V_s)$ , avec  $\varphi' \in L^2(0, T; V'_s)$ ,  $\varphi(0) = 0$ ; posons :

$$\begin{aligned} X_\mu &= g \int_0^T (j'_\varepsilon(u_\mu) - j'_\varepsilon(\varphi), u_\mu - \varphi) dt + \mu \int_0^T a(u_\mu - \varphi) dt + \\ &\quad + \eta \int_0^T \|u_\mu - \varphi\|_s^2 dt + \int_0^T (u'_\mu - \varphi', u_\mu - \varphi) dt . \end{aligned}$$

Utilisant (3.36), on a :

$$\begin{aligned} X_\mu &= \int_0^T (f, u_\mu) dt - g \int_0^T [(j'_\varepsilon(u_\mu), \varphi) + (j'_\varepsilon(\varphi), u_\mu - \varphi)] dt \\ &\quad - \mu \int_0^T [a(u_\mu, \varphi) + a(\varphi, u_\mu - \varphi)] dt - \eta \int_0^T [((u_\mu, \varphi))_s \\ &\quad + ((\varphi, u_\mu - \varphi))_s] dt - \int_0^T [(u'_\mu, \varphi) + (\varphi', u_\mu - \varphi)] dt \end{aligned}$$

d'où  $X_\mu \rightarrow X$  avec

$$\begin{aligned} X = \int_0^T \{ & (f, u_{e\eta}) - g(\chi, \varphi) - g(j'_\varepsilon(\varphi), u_{e\eta} - \varphi) - \mu\alpha(u_{e\eta}, \varphi) \\ & - \mu\alpha(\varphi, u_{e\eta} - \varphi) - \eta((u_{e\eta}, \varphi))_s - \eta((\varphi, u_{e\eta} - \varphi))_s \\ & - (u'_{e\eta}, \varphi) - (\varphi', u_{e\eta} - \varphi) \} dt. \end{aligned}$$

Mais en prenant, ce qui est loisible,  $v = u_{e\eta}(t)$  (p.p.) dans (3.60), on en déduit que

$$\begin{aligned} X = \int_0^T \{ & g(\chi - j'_\varepsilon(\varphi), u_{e\eta} - \varphi) + \mu\alpha(u_{e\eta} - \varphi) + \eta \| u_{e\eta} - \varphi \|^2 + \\ & + (u'_{e\eta} - \varphi', u_{e\eta} - \varphi) \} dt. \end{aligned}$$

Comme  $X_\mu \geq 0 \quad \forall \mu$ , on a :

$$X \geq 0.$$

Prenant  $\varphi = u_{e\eta} - \lambda\psi$ ,  $\psi \in L^2(0, T; V_s)$ ,  $\psi' \in L^2(0, T; V'_s)$ ,  $\psi(0) = 0$ ,  $\lambda > 0$ , on en déduit que (après division par  $\lambda$ ) :

$$\begin{aligned} g \int_0^T (\chi - j'_\varepsilon(u_{e\eta} - \lambda\psi), \psi) dt + \lambda \int_0^T \{ & \mu\alpha(\psi) + \eta \| \psi \|^2 + \\ & + (\psi', \psi) \} dt \geq 0. \end{aligned}$$

Faisant  $\lambda \rightarrow 0$ , on en tire

$$g \int_0^T (\chi - j'_\varepsilon(u_{e\eta}), \psi) dt \geq 0 \quad \forall \psi$$

d'où (3.61). ■

On a donc terminé l'étape i) et montré l'existence de  $u_{e\eta}$  vérifiant (3.34), (3.35) et :

$$(3.62) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{e\eta} \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \\ u'_{e\eta} \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; V'_s), \\ \eta^{1/2} u_{e\eta} \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; V_s). \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

*Etape ii)*

On introduit, pour  $v$  fixée dans  $W$  (cf. (3.28)), l'expression :

$$(3.63) \quad \begin{aligned} Y_{e\eta} = \int_0^T \{ & (v', v - u_{e\eta}) + \mu\alpha(u_{e\eta}, v - u_{e\eta}) + b(u_{e\eta}, u_{e\eta}, v - u_{e\eta}) + \\ & + \eta((u_{e\eta}, v - u_{e\eta}))_s + g j'_\varepsilon(v) - g j'_\varepsilon(u_{e\eta}) - (f, v - u_{e\eta}) \} dt. \end{aligned}$$

D'après (3.34), on a :

$$(3.64) \quad \begin{aligned} Y_{e\eta} = \int_0^T (v' - u'_{e\eta}, v - u_{e\eta}) dt + g \int_0^T \{ & j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(u_{e\eta}) - \\ & - (j'_\varepsilon(u_{e\eta}), v - u_{e\eta}) \} dt. \end{aligned}$$

Mais le premier terme dans l'expression (3.64) de  $Y_{e\eta}$  vaut  $\frac{1}{2} |v(T) - u_{e\eta}(T)|^2$  et le deuxième terme est  $\geq 0$  d'après la convexité de  $v \rightarrow j_\varepsilon(v)$ . Donc  $Y_{e\eta} \geq 0$  ou encore

$$(3.65) \quad \begin{aligned} \int_0^T \{ & (v', v - u_{e\eta}) + \mu\alpha(u_{e\eta}, v) - b(u_{e\eta}, v, u_{e\eta}) + \eta((u_{e\eta}, v))_s + \\ & + g j'_\varepsilon(v) - (f, v - u_{e\eta}) \} dt \geq \mu \int_0^T \alpha(u_{e\eta}) dt + g \int_0^T j'_\varepsilon(u_{e\eta}) dt. \end{aligned}$$

D'après (3.62) on peut extraire une suite, encore notée  $u_{\varepsilon n}$ , telle que

$$(3.66) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{\varepsilon n} \rightarrow u \text{ dans } L^\infty(0, T; H) \text{ faible étoile et dans } L^2(0, T; V) \text{ faible,} \\ u'_{\varepsilon n} \rightarrow u' \text{ dans } L^2(0, T; V'_s) \text{ faible.} \end{array} \right.$$

On déduit alors de (3.65) et (3.66) que

$$(3.67) \quad \int_0^T \{ (v', v - u) + \mu a(u, v) - b(u, v, u) + g j(v) - (f, v - u) \} dt \geq \\ \geq \liminf \mu \int_0^T a(u_{\varepsilon n}) dt + \liminf g \int_0^T j_\varepsilon(u_{\varepsilon n}) dt.$$

Mais comme la fonction  $v \rightarrow \int_0^T a(v) dt$  est semi-continue inférieurement pour  $L^2(0, T; V)$  muni de la topologie faible, on a :

$$(3.68) \quad \liminf \int_0^T a(u_{\varepsilon n}) dt \geq \int_0^T a(u) dt.$$

Vérifions que

$$(3.69) \quad \liminf \int_0^T j_\varepsilon(u_{\varepsilon n}) dt \geq \int_0^T j(u) dt.$$

On a :

$$\int_0^T j(u) dt \leq (\int_Q D_{11}(u)^{(1+\varepsilon)/2} dx dt)^{1/(1+\varepsilon)} (\int_Q dx dt)^{\varepsilon/(1+\varepsilon)}$$

d'où

$$\int_0^T j_\varepsilon(u_{\varepsilon n}) dt \geq c_\varepsilon (\int_0^T j(u_{\varepsilon n}) dt)^{1+\varepsilon}, \\ c_\varepsilon = |Q|^{-\varepsilon}, \quad |Q| = \text{mesure de } Q.$$

$$(3.70) \quad \liminf \int_0^T j_\varepsilon(u_{\varepsilon n}) dt \geq \liminf \int_0^T j(u_{\varepsilon n}) dt$$

et comme la fonction  $v \rightarrow \int_0^T j(v) dt$  est continue convexe sur  $L^2(0, T; V)$  elle est semi-continue inférieurement pour la topologie faible de  $L^2(0, T; V)$ , donc

$$(3.71) \quad \liminf \int_0^T j(u_{\varepsilon n}) dt \geq \int_0^T j(u) dt$$

ce qui, joint à (3.70) donne (3.69).

De (3.67), (3.68), (3.69) on déduit que  $u$  satisfait à (3.28). ■

### 3.4. Démonstration du Théorème 3.1

#### 3.4.1. Démonstration de l'existence

Dans le cas «  $n = 2$  », l'introduction de la régularisation  $\eta((u, v))_s$  (cf. (3.34)) est inutile car  $s = 1$  donc  $V_s = V$  et le terme  $\mu a(u, v)$  est « de même force » que  $((u, v))_s$ .

On résout donc *directement* (3.32) avec (au lieu de (3.33)) :

$$(3.72) \quad u_\varepsilon(0) = u^0.$$

La méthode du n° 3.3 montre l'existence de  $u_\varepsilon$  solution de (3.32), (3.72) avec

$$(3.73) \quad u_\varepsilon \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; V)$$

$$(3.74) \quad u'_\varepsilon \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; V').$$

Le point *essentiel* qui permet d'obtenir l'existence d'une solution « forte » de (3.19) (au lieu de la formulation « faible » (3.28)) et qui permet de montrer l'unicité est que les estimations (3.73), (3.74) ont lieu dans deux espaces  $L^2(0, T; V)$  et  $L^2(0, T; V')$  qui sont en dualité.

Pour  $v \in L^2(0, T; V)$ , on introduit (comparer à (3.63)) :

$$(3.75) \quad Z_\varepsilon = \int_0^T \{ (u'_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + \mu a(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + b(u_\varepsilon, u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + \\ + gj_\varepsilon(v) - gj_\varepsilon(u_\varepsilon) - (f, v - u_\varepsilon) \} dt.$$

Utilisant (3.32) on voit que

$$(3.76) \quad Z_\varepsilon = g \int_0^T \{ j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(u_\varepsilon) - (j'_\varepsilon(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon) \} dt \geq 0.$$

Donc

$$(3.77) \quad \int_0^T \{ (u'_\varepsilon, v) + \mu a(u_\varepsilon, v) + b(u_\varepsilon, u_\varepsilon, v) + gj_\varepsilon(v) - (f, v - u_\varepsilon) \} dt \geq \\ \geq \int_0^T \{ (u'_\varepsilon, u_\varepsilon) + \mu a(u_\varepsilon) + gj_\varepsilon(u_\varepsilon) \} dt \\ = \frac{1}{2} |u_\varepsilon(T)|^2 - \frac{1}{2} |u^0|^2 + \mu \int_0^T a(u_\varepsilon) dt + g \int_0^T j_\varepsilon(u_\varepsilon) dt.$$

On peut supposer d'après (3.73), (3.74) que l'on a extrait de  $u_\varepsilon$  une sous-suite encore notée  $u_\varepsilon$ , telle que

$$(3.78) \quad u_\varepsilon \rightarrow u \text{ (resp. } u'_\varepsilon \rightarrow u') \text{ dans } L^2(0, T; V) \text{ (resp. } L^2(0, T; V')) \text{ faible.}$$

Il résulte de (3.78) que  $u_\varepsilon(T) \rightarrow u(T)$  dans  $H$  faible ; alors chaque terme du deuxième membre de (3.77) est semi-continu inférieurement dans la convergence définie en (3.78), d'où <sup>(2°)</sup>

$$\int_0^T \{ (u', v) + \mu a(u, v) + b(u, u, v) + gj(v) - (f, v - u) \} dt \geq \\ \geq \frac{1}{2} \liminf |u_\varepsilon(T)|^2 - \frac{1}{2} |u^0|^2 + \mu \liminf \int_0^T a(u_\varepsilon) dt \\ + g \liminf \int_0^T j_\varepsilon(u_\varepsilon) dt \\ \geq \frac{1}{2} |u(T)|^2 - \frac{1}{2} |u^0|^2 + \mu \int_0^T a(u) dt + g \int_0^T j(u) dt \\ = \int_0^T \{ (u', u) + \mu a(u) + gj(u) \} dt$$

et par conséquent

$$(3.79) \quad \int_0^T \{ (u', v - u) + \mu a(u, v - u) + b(u, u, v) + gj(v) - gj(u) - \\ - (f, v - u) \} dt \geq 0, \quad \forall v \in L^2(0, T; V).$$

On va maintenant montrer que si  $u$  satisfait à (3.79) alors  $u$  vérifie (3.19). Soit pour cela  $w$  un élément fixé quelconque de  $V$  et  $t_0$  fixé pour l'instant quelconque dans  $]0, T[$  ; on introduit

$$\mathcal{O}_j = ]t_0 - 1/j, t_0 + 1/j[ \subset ]0, T[$$

<sup>(2°)</sup> On voit, comme pour (3.58), que

$$\int_0^T b(u_\varepsilon, u_\varepsilon, v) dt \rightarrow \int_0^T b(u, u, v) dt.$$

pour  $j$  assez grand et on définit  $v$  par

$$(3.80) \quad v(t) = \begin{cases} w & \text{si } t \in \mathcal{O}_j \\ u(t) & \text{si } t \notin \mathcal{O}_j, \quad t \in [0, T]. \end{cases}$$

Pour le choix (3.80) de  $v$ , (3.79) se réduit à

$$(3.81) \quad \int_{\mathcal{O}_j} \{ (u', w - u) + \mu \alpha(u, w - u) + b(u, u, w) + gj(w) - gj(u) - (f, w - u) \} dt \geq 0.$$

Mais

$$b(u, u, w) = (\tilde{u}, w), \quad \tilde{u} \in L^2(0, T; V')$$

et divisant (3.81) par  $|\mathcal{O}_j| = \text{mesure de } \mathcal{O}_j$ , on a :

$$(3.82) \quad |\mathcal{O}_j|^{-1} \int_{\mathcal{O}_j} (u' + \mu Au + \tilde{u} - f, w) dt - |\mathcal{O}_j|^{-1} \int_{\mathcal{O}_j} \{ (u', u) + \mu \alpha(u) + gj(u) - (f, u) \} dt + gj(w) \geq 0.$$

Mais d'après le théorème de Lebesgue sur la différentiation des fonctions d'ensemble (cf. par exemple Dunford-Schwartz [1], III.12.9) on a :

$$|\mathcal{O}_j|^{-1} \int_{\mathcal{O}_j} (u' + \mu Au + \tilde{u} - f) dt \rightarrow u'(t_0) + \mu Au(t_0) + \tilde{u}(t_0) - f(t_0) \quad \text{dans } V' \text{ pour } t_0 \in E_1, \quad \text{Mes}(E_1) = 0$$

et

$$|\mathcal{O}_j|^{-1} \int_{\mathcal{O}_j} \{ (u', u) + \mu \alpha(u) + gj(u) - (f, u) \} dt \rightarrow (u'(t_0), u(t_0)) + \mu \alpha(u(t_0)) + gj(u(t_0)) - (f(t_0), u(t_0))$$

pour  $t_0 \notin E_2, \text{Mes}(E_2) = 0$ .

Alors pour  $t_0 \notin E_1 \cup E_2$  on peut passer à la limite dans (3.82); on trouve

$$(u'(t_0) + Au(t_0) + \tilde{u}(t_0) - f(t_0), w) - (u'(t_0), u(t_0)) - \mu \alpha(u(t_0)) - (f(t_0), u(t_0)) + gj(w) - gj(u(t_0))) \geq 0$$

i.e. (3.19). ■

### 3.4.2. Démonstration de l'unicité

Soient  $u$  et  $u_*$  deux solutions éventuelles de (3.19) et vérifiant (3.23), (3.24), (3.25) (et les conditions analogues pour  $u_*$ ). Prenant, ce qui est loisible,  $v = u_*(t)$  (resp.  $v = u(t)$ ) dans (3.19) (resp. dans l'inéquation analogue pour  $u$ ), on trouve en additionnant (et posant  $U = u - u_*$ ) :

$$(3.83) \quad - (U', U) - \mu \alpha(U) - b(u, u, U) + b(u_*, u_*, U) \geq 0$$

d'où

$$(3.84) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |U(t)|^2 + \mu \alpha \|U(t)\|^2 \leq b(u - U, u - U, U) - b(u, u, U) = -b(U, u, U).$$

Mais d'après (3.13)

$$\begin{aligned} |b(U(t), u(t), U(t))| &\leq c \|U(t)\| |U(t)| \|u(t)\| \leq \\ &\leq \mu\alpha \|U(t)\|^2 + c' \|u(t)\|^2 |U(t)|^2. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$(3.85) \quad m(t) = \|u(t)\|^2$$

on a donc

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |U(t)|^2 \leq c' m(t) |U(t)|^2$$

d'où

$$|U(t)|^2 \leq 2c' \int_0^t m(\sigma) |U(\sigma)|^2 d\sigma.$$

Comme  $m \in L^1(0, T)$ , on en déduit que  $U = 0$ . ■

*Remarque 3.7 (Démonstration de la Remarque 3.2)*

Si  $n = 2$ , toute fonction  $u$  vérifiant (3.29) et (3.28) satisfait à (3.19) (et donc (3.28), (3.29) admet, si  $n = 2$ , une solution unique).

Posons en effet

$$(3.86) \quad \mathcal{W}_1 = \{v \mid v \in L^2(0, T; V), \quad v' \in L^2(0, T; V'), \quad v(0) = 0\}.$$

La forme  $v \rightarrow$  (premier membre de (3.28)) est (pour  $n = 2$ ) continue sur  $\mathcal{W}$  muni de la topologie induite par  $\mathcal{W}_1$  et comme  $\mathcal{W}$  est dense dans  $\mathcal{W}_1$  on voit donc que (3.28) est vrai  $\forall v \in \mathcal{W}_1$ .

Prenons alors  $w$  quelconque dans  $\mathcal{W}_1$ . Comme  $u \in \mathcal{W}_1$  on peut prendre dans (3.28)

$$(3.87) \quad v = v_\theta = (1 - \theta)u + \theta w, \quad \theta \in ]0, 1[.$$

On note que

$$\begin{aligned} b(u, v_\theta, u) &= \theta b(u, w, u) \\ j(v_\theta) &\leq (1 - \theta)j(u) + \theta j(w). \end{aligned}$$

Donc (3.28) donne

$$(3.88) \quad \left| \int_0^T \{ (v'_\theta, w - u) + \mu a(u, w - u) - b(u, w, u) + gj(w) - gj(u) - (f, w - u) \} dt \geq 0. \right.$$

Divisant par  $\theta$  et faisant ensuite  $\theta \rightarrow 0$ , on déduit de (3.88) que

$$(3.89) \quad \left| \int_0^T \{ (u', w - u) + \mu a(u, w - u) - b(u, w, u) + gj(w) - gj(u) - (f, w - u) \} dt \geq 0 \right.$$

ce qui implique (comme  $\mathcal{W}_1$  est dense dans  $L^2(0, T; V)$ ) que (3.79) a lieu d'où le résultat suit. ■

4. UN THÉORÈME DE RÉGULARITÉ EN DIMENSION 2

**Théorème 4.1.** *On suppose que  $n = 2$  et que  $f$  et  $u^0$  sont donnés avec*

$$(4.1) \quad f \in L^2(0, T; V'), \quad f' \in L^2(0, T; V'), \quad f(0) \in H,$$

$$(4.2) \quad u^0 \in V \quad \text{et} \quad u^0 \in (H^2(\Omega))^2.$$

*Il existe alors une fonction  $u$  et une seule telle que*

$$(4.3) \quad u \in L^2(0, T; V) \quad (2^1),$$

$$(4.4) \quad u' \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H),$$

*et vérifiant (3.19) et (3.25).*

*Démonstration*

On part de  $u_\varepsilon$  solution de (3.32), (3.72).

Le théorème résulte alors des estimations supplémentaires :

$$(4.5) \quad \|u'_\varepsilon\|_{L^2(0,T;V)} + \|u'_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq C.$$

Pour obtenir (4.5), on montre les estimations analogues sur les  $u_m$ , solutions de

$$(4.6) \quad (u'_m, w_j) + \mu a(u_m, w_j) + b(u_m, u_m, w_j) + g(j'_\varepsilon(u_m), w_j) = (f, w_j),$$

$1 \leq j \leq m,$

$$(4.7) \quad u_m(0) = u_m^0, \quad u_m^0 \rightarrow u^0 \quad \text{dans} \quad V \cap (H^2(\Omega))^2.$$

On déduit de (4.6) pour  $t = 0$  que

$$(4.8) \quad \left| |u'_m(0)|^2 - \mu a(u_m^0, u'_m(0)) - b(u_m^0, u_m^0, u'_m(0)) - g(j'_\varepsilon(u_m^0), u'_m(0)) + (f(0), u'_m(0)) \right|.$$

Grâce à (4.2),  $|a(u_m^0, u'_m(0))| \leq c |u'_m(0)|$ .

De même utilisant en particulier (4.1) :

$$|g(j'_\varepsilon(u_m^0), u'_m(0)) + (f(0), u'_m(0))| \leq c |u'_m(0)|,$$

de sorte que (4.8) donne

$$(4.9) \quad |u'_m(0)|^2 \leq c |u'_m(0)| + |b(u_m^0, u_m^0, u'_m(0))|.$$

(21) En fait, grâce à (4.4),  $u$  est continue de  $[0, T] \rightarrow V$ .

Mais en dimension 2,  $H^2(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ , donc

$$|b(u_m^0, u_m^0, u_m'(0))| \leq c \|u_m^0\|_{(L^\infty(\Omega))^2} \|u_m^0\| |u_m'(0)| \leq c |u_m'(0)|$$

et (4.9) donne donc

$$(4.10) \quad |u_m'(0)| \leq C.$$

On prend maintenant la dérivée en  $t$  de (4.6) (en fait cela est formel et se justifie en prenant des quotients différentiels approximant la dérivation en  $t$ ). Il vient :

$$(4.11) \quad \left| \begin{aligned} & (u_m'', w_j) + \mu a(u_m', w_j) + b(u_m', u_m, w_j) + b(u_m, u_m', w_j) + \\ & + g((j'_\varepsilon(u_m)), w_j) = (f', w_j), \end{aligned} \right. \quad 1 \leq j \leq m.$$

Mais, comme on a déjà vu (Chap. 3)

$$(j'_\varepsilon(u_m))', u_m' \geq 0 \quad (2'')$$

et par conséquent, on déduit de (4.11) que

$$(4.12) \quad (u_m'', u_m') + \mu a(u_m', u_m') + b(u_m', u_m, u_m') + b(u_m, u_m', u_m') \leq (f', u_m').$$

Mais

$$\begin{aligned} b(u_m, u_m', u_m') &= 0, \\ |b(u_m', u_m, u_m')| &= |-b(u_m', u_m', u_m)| \leq (\text{d'après (3.13)}) \\ &\leq c \|u_m'\|^{3/2} |u_m'|^{1/2} \|u_m\|^{1/2} |u_m'|^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2} \mu \alpha \|u_m'\|^2 + c |u_m'|^2 \|u_m\|^2 |u_m'|^2. \end{aligned}$$

Comme on sait que  $|u_m(t)| \leq c$  on a donc

$$(4.13) \quad |b(u_m', u_m, u_m')| \leq \frac{1}{4} \mu \alpha \|u_m'\|^2 + c |u_m'|^2 \|u_m\|^2.$$

On déduit donc de (4.12) que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m'(t)|^2 + \mu \alpha \|u_m'(t)\|^2 &\leq \frac{1}{4} \mu \alpha \|u_m'(t)\|^2 + c |u_m'(t)|^2 \|u_m(t)\|^2 + \\ &+ \|f'(t)\|_* \|u_m'(t)\| \leq \frac{1}{2} \mu \alpha \|u_m'(t)\|^2 + \\ &+ c |u_m'(t)|^2 \|u_m(t)\|^2 + c \|f'(t)\|_*^2 \end{aligned}$$

d'où, grâce à (4.10) :

$$(4.14) \quad \begin{aligned} |u_m'(t)|^2 + \mu \alpha \int_0^t \|u_m'(\sigma)\|^2 d\sigma &\leq c + c \int_0^t \|f'(\sigma)\|_*^2 d\sigma + \\ &+ c \int_0^t |u_m'(\sigma)|^2 \|u_m(\sigma)\|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

(2'') En fait, ce qui est correct est l'analogie discrétisé de cette inégalité, conséquence de la monotonie de  $j'_\varepsilon$ .



D'après l'inégalité de Gronwall, on déduit de (4.14) que <sup>(23)</sup>

$$|u'_m(t)|^2 \leq c \exp(\int_0^t \|u_m(\sigma)\|^2 d\sigma), \quad t \leq T$$

et comme

$$\int_0^T \|u_m(\sigma)\|^2 d\sigma \leq C$$

on a :

$$(4.15) \quad |u'_m(t)| \leq c.$$

Mais alors (4.14) donne

$$(4.16) \quad \int_0^T \|u'_m(\sigma)\|^2 d\sigma \leq c$$

d'où les estimations désirées. ■

## 5. FLUIDES NEWTONIENS COMME LIMITES DES FLUIDES DE BINGHAM

### 5.1. Enoncé du résultat

On suppose dans tout ce numéro que

$$(5.1) \quad n = 2.$$

On désigne par  $u_g$  la solution donnée au Théorème 3.1,  $g$  étant dans la suite destiné à varier (et en particulier à tendre vers 0), les autres données étant *fixes*.  
Donc

$$(5.2) \quad u_g \in L^2(0, T; V), \quad \partial u_g / \partial t \in L^2(0, T; V'), \quad u_g(0) = u^0$$

et

$$(5.3) \quad \left| \begin{aligned} (u'_g(t), v - u_g(t)) + \mu a(u_g(t), v - u_g(t)) + b(u_g(t), u_g(t), v) + \\ + gj(v) - gj(u_g(t)) \geq (f(t), v - u_g(t)) \quad \forall v \in V. \end{aligned} \right.$$

Soit par ailleurs  $u$  la solution de l'équation de Navier-Stokes, donc :

$$(5.4) \quad u \in L^2(0, T; V), \quad u' \in L^2(0, T; V'), \quad u(0) = u^0,$$

et

$$(5.5) \quad (u'(t), v) + \mu a(u(t), v) + b(u(t), u(t), v) = (f(t), v) \quad \forall v \in V.$$

On va démontrer le <sup>(24)</sup>

**Théorème 5.1.** *Lorsque  $g \rightarrow 0$ , on a :*

$$(5.6) \quad \left| \begin{aligned} u_g \rightarrow u \text{ dans } L^2(0, T; V) \text{ faible,} \\ u'_g \rightarrow u' \text{ dans } L^2(0, T; V') \text{ faible.} \end{aligned} \right.$$

<sup>(23)</sup> Rappelons encore une fois que les  $c$  désignent des constantes *diverses*.

<sup>(24)</sup> On donne en Complément à la Remarque 5.3 ci-après un résultat général sur la dépendance de  $u_g$  en  $g$ .

## 5.2. Démonstration du Théorème 5.1

Il résulte de la Démonstration des Théorèmes 3.1 et 3.2 que

$$(5.7) \quad \|u_g\|_{L^2(0,T;V)} + \|u'_g\|_{L^2(0,T;V')} \leq c \quad \text{pour tout } g > 0, \quad g \text{ borné.}$$

Par conséquent, si  $g \rightarrow 0$ , on peut extraire de  $u_g$  une suite, encore notée  $u_g$ , telle que

$$(5.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_g \rightarrow w \text{ dans } L^2(0, T; V) \text{ faible,} \\ u'_g \rightarrow w' \text{ dans } L^2(0, T; V') \text{ faible,} \\ u_{ig} \text{ (i-ième composante de } u_g) \rightarrow w_{ig} \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort et p.p. } \quad (2^5), \\ u_{ig} u_{jg} \rightarrow w_i w_j \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) = L^2(Q) \quad (2^6). \end{array} \right.$$

Alors

$$(5.9) \quad b(u_g, u_g, v) = -b(u_g, v, u_g) \rightarrow -b(w, v, w) \text{ dans } L^2(0, T) \text{ faible,} \\ \forall v \in V.$$

Prenant dans (5.3)  $v = v(t)$  p.p.,  $v \in L^2(0, T; V)$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_0^T \{ (u'_g, v) + \mu a(u_g, v) - b(u_g, v, u_g) + gj(v) - gj(u_g) - \\ - (f, v - u_g) \} dt \geq \int_0^T \{ (u'_g, u_g) + \mu a(u_g) \} dt \\ = \frac{1}{2} |u_g(T)|^2 - \frac{1}{2} |u^0|^2 + \mu \int_0^T a(u_g) dt. \end{aligned}$$

Utilisant (5.8), (5.9) on en déduit, comme  $\int_0^T gj(u_g) dt \rightarrow 0$  :

$$\begin{aligned} \int_0^T \{ (w', v) + \mu a(w, v) - b(w, v, w) - (f, v - w) \} dt \\ \geq \liminf \frac{1}{2} |u_g(T)|^2 - \frac{1}{2} |u^0|^2 + \mu \liminf \int_0^T a(u_g) dt \\ \geq \frac{1}{2} |w(T)|^2 - \frac{1}{2} |u^0|^2 + \mu \int_0^T a(w) dt \\ = \int_0^T (w', w) dt + \mu \int_0^T a(w) dt \end{aligned}$$

et donc

$$(5.10) \quad \int_0^T \{ (w', v - w) + \mu a(w, v - w) - b(w, v, w) - (f, v - w) \} dt \geq 0 \\ \forall v \in L^2(0, T; V).$$

Il en résulte (comme à la fin du n° 3.4.1) que p.p. sur  $[0, T]$  :

$$(5.11) \quad \left| \begin{array}{l} (w'(t), v - w(t)) + \mu a(w(t), v - w(t)) - b(w(t), v, w(t)) - \\ - (f, v - w(t)) \geq 0 \end{array} \right. \quad \forall v \in V.$$

Prenant dans (5.11)  $v = w(t) \pm \psi$ ,  $\psi \in V$ , on en déduit que

$$(5.12) \quad (w'(t), \psi) + \mu a(w(t), \psi) - b(w(t), \psi, w(t)) - (f(t), \psi) = 0 \quad \forall \psi \in V$$

(2<sup>5</sup>) Cf. (3.54).

(2<sup>6</sup>) Cf. (3.56).

d'où résulte (d'après l'unicité de la solution de (5.4), (5.5)) que

$$w = u$$

d'où le Théorème. ■

*Remarque 5.1*

On peut utiliser la Démonstration du Théorème 5.1 pour montrer l'existence de  $u$  solution de (5.4), (5.5) (quant à l'unicité de la solution de (5.4), (5.5), la démonstration est analogue à celle du n° 3.4.2), mais cela est un peu artificiel puisque les démonstrations qui précèdent utilisent entre autres les techniques utilisées dans les équations de Navier-Stokes. ■

*Remarque 5.2*

Dans les conditions du Théorème 4.1, on obtiendra le résultat supplémentaire :

$$(5.13) \quad u'_g \rightarrow u' \text{ dans } L^2(0, T; V) \text{ faible et dans } L^\infty(0, T; H) \text{ faible étoile. } \blacksquare$$

*Remarque 5.3* <sup>(27)</sup>

On va vérifier le

**Théorème 5.2.** Pour  $g_1, g_2 \in [0, g_0]$ ,  $g_0 > 0$  fini quelconque, il existe  $c(g_0) = c$  telle que

$$(5.14) \quad \|u_{g_1} - u_{g_2}\|_{L^2(0, T; H)} + \|u_{g_1} - u_{g_2}\|_{L^2(0, T; V)} \leq c |g_1 - g_2|.$$

*Démonstration*

On prend  $v = u_{g_2}$  (resp.  $v = u_{g_1}$ ) dans l'inéquation relative à  $u_{g_1}$  (resp.  $u_{g_2}$ ); posant  $u_{g_1} - u_{g_2} = w$  et  $a(w, w) = a(w)$ , il vient en ajoutant :

$$- (w', w) - \mu a(w) + b(u_{g_1}, u_{g_1}, u_{g_2}) + b(u_{g_2}, u_{g_2}, u_{g_1}) + (g_1 - g_2) (j(u_{g_1}) - j(u_{g_2})) \geq 0$$

ou encore

$$(5.15) \quad (w', w) + \mu a(w) \leq |g_1 - g_2| |j(u_{g_1}) - j(u_{g_2})| + b(w, w, u_{g_1}).$$

Mais

$$|b(w, w, u_{g_1})| \leq c_1 \|u_{g_1}\| \|w\| |w| \leq \frac{1}{2} \mu a(w) + c_1 \|u_{g_1}\|^2 |w|^2$$

de sorte que (5.15) donne

$$(5.16) \quad \frac{d}{dt} |w(t)|^2 + \mu a(w(t)) \leq 2 |g_1 - g_2| |j(u_{g_1}) - j(u_{g_2})| + 2 c_1 \|u_{g_1}\|^2 |w|^2.$$

<sup>(27)</sup> Cette Remarque peut être passée.

Mais

$$|j(u_{g_1}) - j(u_{g_2})| \leq j(u_{g_1} - u_{g_2}) = j(w) \leq (\text{d'après Cauchy-Schwarz}) \leq c_2 a(w)^{1/2},$$

de sorte que

$$2 |g_1 - g_2| |j(u_{g_1}) - j(u_{g_2})| \leq \frac{1}{2} \mu a(w) + c_2 |g_1 - g_2|^2$$

et on déduit de (5.16) que

$$\frac{d}{dt} |w(t)|^2 + \frac{1}{2} \mu a(w(t)) \leq 2 c_1 \|u_{g_1}\|^2 |w|^2 + c_2 |g_1 - g_2|^2$$

et donc pour  $t \leq T$  :

$$(5.17) \quad |w(t)|^2 + \frac{1}{2} \mu \int_0^t a(w(\sigma)) d\sigma \leq c_2 T |g_1 - g_2|^2 + 2 c_1 \int_0^t \|u_{g_1}\|^2 |w(\sigma)|^2 d\sigma.$$

On en déduit en particulier, par l'inégalité de Gronwall, que

$$(5.18) \quad |w(t)|^2 \leq c_2 T |g_1 - g_2|^2 \exp(2 c_1 \int_0^t \|u_{g_1}(\sigma)\|^2 d\sigma) \leq c_2 T |g_1 - g_2|^2 \exp(2 c_1 \int_0^T \|u_{g_1}\|^2 d\sigma).$$

Mais pour  $g_1 \in [0, g_0]$ ,  $u_{g_1}$  demeure dans un borné de  $L^2(0, T; V)$  d'où

$$(5.19) \quad |w(t)| \leq c_3 |g_1 - g_2|, \quad t \in [0, T].$$

Reportant (5.19) dans le deuxième membre de (5.18) on en déduit que

$$\|w\|_{L^2(0, T; V)} \leq c_4 |g_1 - g_2|$$

d'où (5.14). ■

*Remarque 5.4* Le cas «  $g \rightarrow +\infty$  »

On va montrer

$$(5.20) \quad \text{lorsque } g \rightarrow \infty, \quad u_g \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0, T; V) \text{ faible.}$$

En effet, on peut d'abord préciser en partie (5.7) en observant que

$$(5.21) \quad \|u_g\|_{L^2(0, T; V)} \leq c \quad \text{lorsque } g \rightarrow \infty.$$

(Par contre, il n'est pas vrai que  $\|u'_g\|_{L^2(0, T; V')} \leq c$  lorsque  $g \rightarrow \infty$  car l'estimation des  $u'_g$  dans la démonstration du Théorème 3 fait intervenir  $g$ .)

Si l'on fait  $v = 0$  dans (5.3) on obtient en outre :

$$(5.22) \quad g \int_0^T j(u_g) dt + \mu \int_0^T a(u_g) dt + \frac{1}{2} |u_g(T)|^2 \leq \int_0^T (f, u_g) dt + \frac{1}{2} |u^0|^2$$

d'où l'on déduit que

$$(5.23) \quad \int_0^T j(u_g) dt \leq c/g .$$

D'après (5.21) on peut extraire une suite, encore notée  $u_g$ , telle que

$$(5.24) \quad u_g \rightarrow w \quad \text{dans } L^2(0, T; V) \text{ faible} .$$

Comme la fonction  $v \rightarrow \int_0^T j(v) dt$  est semi-continue inférieurement pour la topologie faible de  $L^2(0, T; V)$ , on a :

$$\liminf \int_0^T j(u_g) dt \geq \int_0^T j(w) dt$$

ce qui, joint à (5.23), montre que

$$\int_0^T j(w) dt = 0$$

donc  $j(w) = 0$  p.p. et donc  $w = 0$ , d'où le résultat. ■

Evidemment le résultat (5.20) est clair du point de vue mécanique, le fluide se comportant à la limite (pour  $g \rightarrow \infty$ ) comme un corps rigide.

On peut d'ailleurs compléter (5.20) sous les hypothèses :

$$(5.25) \quad f = \{ f_1, f_2 \}, \quad f_i \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad i = 1, 2; \quad u^0 = 0 .$$

On va montrer que l'on a alors

$$(5.26) \quad u_g = 0 \quad \text{pour} \quad g \geq g_c = \text{seuil critique convenable} .$$

En effet, il suffit, d'après l'unicité, de vérifier que pour  $g$  assez grand, la fonction nulle est solution de (5.3), i.e. que

$$(5.27) \quad gj(v) \geq (f(t), v) \quad \forall v \in V .$$

Or, grâce à (5.25),

$$|(f(t), v)| \leq c_1(\|v_1\|_{L^2(\Omega)} + \|v_2\|_{L^2(\Omega)})$$

et d'après une inégalité due à L. Nirenberg [1] et étendue par M. J. Strauss [1]

$$\|v_1\|_{L^2(\Omega)} + \|v_2\|_{L^2(\Omega)} \leq c_2 j(v) ,$$

donc

$$|(f(t), v)| \leq c_3 j(v)$$

de sorte que (5.27) a bien lieu pour  $g$  assez grand. ■

*Problèmes ouverts*

- 1) la fonction  $g \rightarrow u_g$  étant lipschitzienne sur tout compact de  $g$  à valeurs dans  $L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$  calculer  $\partial u_g / \partial g$  p.p. en  $g$  ;
- 2) peut-on montrer — ce qui est « intuitif » mécaniquement et confirmé par les résultats numériques de M. Fortin [1] — que la région où  $D_i(u_g) = 0$  croît avec  $g$  ?

**6. PROBLÈMES STATIONNAIRES****6.1. Énoncé des résultats**

Pour des raisons de commodité pour la suite, nous introduisons un paramètre  $\lambda \geq 0$  dans les énoncés qui suivent.

**Théorème 6.1.** *Soit  $f$  donné dans  $V'$ . Il existe  $u \in V$  tel que*

$$(6.1) \quad \mu a(u, v - u) + \lambda b(u, u, v) + g_j(v) - g_j(u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in V_\sigma,$$

où

$$(6.2) \quad \sigma = \max(1, n/2 - 1) \quad (\text{donc } \sigma = 1 \text{ si } n \leq 4).$$

Notons que cet énoncé a un sens, car  $u, v, w \rightarrow b(u, v, w)$  est continue sur  $V \times V \times V_\sigma$  (utiliser l'inégalité de Hölder et le théorème de plongement de Sobolev qui implique que  $u \in L^{q_1}(\Omega)$ ,  $1/q_1 = \frac{1}{2} - 1/n$  si  $n > 2$ , et  $w \in L^{q_2}(\Omega)$ ,  $1/q_2 = \frac{1}{2} - \sigma/n$  si  $n > 2$ ). ■

On peut, par ailleurs, étudier le comportement du problème lorsque  $g \rightarrow 0$  :

**Théorème 6.2.** *On suppose  $n \leq 4$ . On peut trouver une famille  $u_g$  de solutions de (6.1) de façon que, lorsque  $g \rightarrow 0$ , on ait*

$$(6.3) \quad u_g \rightarrow u \quad \text{dans } V \text{ faible},$$

où  $u$  est une solution du problème stationnaire pour les fluides newtoniens :

$$(6.4) \quad \begin{cases} \mu a(u, v) + \lambda b(u, u, v) = (f, v) & \forall v \in V, \\ u \in V. \quad \blacksquare \end{cases}$$

*Remarque 6.1*

Supposons  $n \leq 4$ . Alors  $b(u, v, w)$  est continue sur  $V \times V \times V$  et

$$(6.5) \quad b(u, v, w) \leq c_1 a(u)^{1/2} a(v)^{1/2} a(w)^{1/2}.$$

Pour  $f \in V'$  posons par ailleurs

$$(6.6) \quad [f]_* = \sup \{ |(f, v)| / a(v)^{1/2} \}, \quad v \in V.$$

Alors :

$$(6.7) \quad \left| \begin{array}{l} \text{si } \mu^2 > \lambda c_1 [f]_* \text{ la solution } u (= u_g) \text{ de (6.1) est unique, et de même la} \\ \text{solution } u \text{ des équations de Navier-Stokes stationnaires est unique et} \\ \text{l'on a (6.3) sans extraction de sous-suite.} \end{array} \right.$$

En effet, si  $u$  (resp.  $U_*$ ) est solution de (6.1) et si l'on prend, ce qui est loisible lorsque  $n \leq 4$ ,  $v = u_*$  (resp.  $u$ ) dans (6.1) (resp. l'inéquation analogue pour  $u_*$ ), on obtient par addition (si l'on pose  $w = u - u_*$ ) :

$$-\mu a(w) + \lambda b(u, u, u_*) + \lambda b(u_*, u_*, u) \geq 0$$

donc

$$(6.8) \quad \mu a(w) \leq \lambda b(w, w, u) \leq \lambda c_1 a(w) a(u)^{1/2}.$$

Mais prenant  $v = 0$  dans (6.1) on trouve que

$$\mu a(u) + gj(u) \leq (f, u) \leq [f]_* a(u)^{1/2}$$

d'où en particulier

$$\mu a(u)^{1/2} \leq [f]_*$$

de sorte que (6.8) donne

$$\mu a(w) \leq \lambda c_1 \mu^{-1} [f]_* a(w)$$

ce qui entraîne «  $w = 0$  » si l'on a (6.7).

(Cette Remarque est analogue à la Remarque 7.6, Chapitre 1 de Lions [1].) ■

*Remarque 6.2*

Si  $\lambda = 0$  on a existence et unicité de  $u$  solution dans  $V$  de

$$(6.9) \quad \mu a(u, v - u) + gj(v) - gj(u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in V.$$

Nous reviendrons au n° 9 sur ce problème. ■

**6.2. Démonstration**

*Démonstration du Théorème 6.1*

Nous donnons seulement le schéma des démonstrations.

On commence par l'équation *bi-régularisée* <sup>(28)</sup>

$$(6.10) \quad \mu a(u_{\varepsilon\eta}, v) + \eta((u_{\varepsilon\eta}, v))_\sigma + \lambda b(u_{\varepsilon\eta}, u_{\varepsilon\eta}, v) + g(j'_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}), v) = (f, v) \quad \forall v \in V_\sigma,$$

$j_\varepsilon$  étant défini comme au n° 3.

On montre l'existence de  $u_{\varepsilon\eta}$  par les méthodes de *monotonie* (cf. Lions [1], Chap. 2). On vérifie en outre que

$$(6.11) \quad \|u_{\varepsilon\eta}\| \leq C \quad (\text{constante indépendante de } \varepsilon, \eta, \lambda, g),$$

$$(6.12) \quad \eta^{1/2} \|u_{\varepsilon\eta}\|_\sigma \leq C.$$

<sup>(28)</sup> Le terme  $\eta((u_{\varepsilon\eta}, v))_\sigma$  est inutile si  $n \leq 4$ .

On passe à la limite en  $\varepsilon, \eta$  par un procédé analogue à celui utilisé pour la démonstration du Théorème 3.2 : on introduit

$$(6.13) \quad \begin{aligned} Y_{\varepsilon\eta} = & \mu a(u_{\varepsilon\eta}, v - u_{\varepsilon\eta}) + \lambda b(u_{\varepsilon\eta}, u_{\varepsilon\eta}, v - u_{\varepsilon\eta}) + \eta((u_{\varepsilon\eta}, v - u_{\varepsilon\eta}))_{\sigma} + \\ & + g j_{\varepsilon}(v) - g j_{\varepsilon}(u_{\varepsilon\eta}) - (f, v - u_{\varepsilon\eta}). \end{aligned}$$

Utilisant (6.10) on voit que

$$(6.14) \quad \begin{aligned} Y_{\varepsilon\eta} = & g[j_{\varepsilon}(v) - j_{\varepsilon}(u_{\varepsilon\eta}) - (j'_{\varepsilon}(u_{\varepsilon\eta}), v - u_{\varepsilon\eta})] \geq 0 \\ \text{d'où} & \mu a(u_{\varepsilon\eta}, v) + \eta((u_{\varepsilon\eta}, v))_{\sigma} + \lambda b(u_{\varepsilon\eta}, u_{\varepsilon\eta}, v) + g j_{\varepsilon}(v) - \\ & - (f, v - u_{\varepsilon\eta}) \geq \mu a(u_{\varepsilon\eta}) + g j_{\varepsilon}(u_{\varepsilon\eta}). \end{aligned}$$

D'après (6.11), on peut extraire une sous-suite, encore notée  $u_{\varepsilon\eta}$ , telle que

$$(6.15) \quad u_{\varepsilon\eta} \rightarrow u \quad \text{dans } V \text{ faible.}$$

Le premier membre de (6.14) converge alors vers  $(2^{\circ})$

$$(6.16) \quad \mu a(u, v) + \lambda b(u, u, v) + g j(v) - (f, v - u), \quad v \in V_{\sigma}.$$

Par ailleurs

$$\liminf a(u_{\varepsilon\eta}) \geq a(u)$$

et par un raisonnement analogue à celui qui a conduit à (3.71), on a :

$$\liminf j_{\varepsilon}(u_{\varepsilon\eta}) \geq j(u).$$

On en déduit, avec (6.16) et (6.14) que  $u$  satisfait à (6.1). ■

#### Démonstration du Théorème 6.2

La Démonstration du Théorème 6.1 montre l'existence de  $u_g \in V$  solution de

$$(6.17) \quad \mu a(u_g, v - u_g) + \lambda b(u_g, u_g, v) + g j(v) - g j(u_g) \geq (f, v - u_g) \quad \forall v \in V$$

et

$$(6.18) \quad \|u_g\| \leq c \quad (\text{constante indépendante de } g, \quad g \geq 0 \text{ quelconque}).$$

On peut alors extraire une suite encore notée  $u_g$  telle que l'on ait (6.3), d'où le Théorème 6.2 pourvu que l'on montre que  $u$  est solution de (6.4).

Or on déduit de (6.17) que

$$(6.19) \quad \mu a(u_g, v) + \lambda b(u_g, u_g, v) + g j(v) - (f, v - u_g) \geq \mu a(u_g);$$

$(2^{\circ})$  On utilise un raisonnement de compacité pour montrer que

$$b(u_{\varepsilon\eta}, u_{\varepsilon\eta}, v) \rightarrow b(u, u, v).$$



le premier membre de (6.19) converge, lorsque  $g \rightarrow 0$ , vers

$$\mu a(u, v) + \lambda b(u, u, v) - (f, v - u)$$

et

$$\liminf \mu a(u_g) \geq \mu a(u) ;$$

donc

$$(6.20) \quad \mu a(u, v - u) + \lambda b(u, u, v) - (f, v - u) \geq 0 .$$

Prenant — ce qui est loisible —  $v = u \pm w$ ,  $w \in V$ , on voit que  $u$  satisfait à (6.4). ■

*Remarque 6.3*

On vérifie, par un raisonnement analogue à celui de la Remarque 5.3 que

$$(6.21) \quad u_g \rightarrow 0 \quad \text{dans } V \text{ faible lorsque } g \rightarrow +\infty$$

(quelle que soit  $u_g$  solution de (6.17)). ■

## 7. PROBLÈME EXTÉRIEUR

### 7.1. Formulation du problème sous forme d'inéquation variationnelle

On utilise les espaces  $V, V_s$  comme au n° 3 (les définitions données à ce numéro étant valables que  $\Omega$  soit borné ou non).

On introduit l'ensemble  $\mathcal{U}_{ad}$  des fonctions  $v$ , dans une classe fonctionnelle que l'on précisera, qui sont à divergence nulle et telles que

$$(7.1) \quad v = 0 \quad \text{sur } l', \quad v = \{ U, 0, 0 \} \text{ à l'infini ,}$$

la deuxième condition (7.1) étant prise dans un sens convenable qu'on va également préciser.

Le problème est alors, formellement, de trouver  $u = u(t)$  avec

$$(7.2) \quad u(t) \in \mathcal{U}_{ad} ,$$

$$(7.3) \quad \left| \begin{array}{l} \partial u(t)/\partial t, v - u(t) + \mu a(u(t), v - u(t)) + b(u(t), u(t), v - u(t)) + \\ \quad \quad \quad + g_j(v) - g_j(u(t)) \geq (f(t), v - u(t)) \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} , \end{array} \right.$$

$$(7.4) \quad u(0) = u_0 , \quad u_0 \in \mathcal{U}_{ad} .$$

Si l'on introduit

$$(7.5) \quad w(t) = u(t) - u_0$$

on cherche alors

$$(7.6) \quad w(t) \in V$$

(ce qui, une fois  $u_0$  donné, précise le sens dans lequel on interprète la condition «  $u(t) = \{U, 0, 0\}$  à l'infini ») avec

$$(7.7) \quad \left| \begin{array}{l} (w'(t), v - w(t)) + \mu a(w(t), v - w(t)) + b(w(t), w(t), v - w(t)) + \\ + c(w(t), v - w(t)) + gj(v + u_0) - gj(w(t) + u_0) \geq (\tilde{f}(t), v - w(t)) \end{array} \right. \quad \forall v \in V,$$

où

$$(7.8) \quad c(w, v) = b(u_0, w, v) + b(w, u_0, v),$$

$$(7.9) \quad (\tilde{f}(t), v) = (f(t), v) - a(u_0, v) - b(u_0, u_0, v),$$

et avec  $w(0) = 0$ .

On fera l'hypothèse

$$(7.10) \quad \partial u_0 / \partial x_i \in (L^\infty(\Omega))^3, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{ou } (L^\infty(\Omega))^2 \text{ en dimension 2}).$$

Alors

$$(7.11) \quad |c(v, v)| \leq c_0 |v|^2. \quad \blacksquare$$

On peut maintenant poser le problème de façon précise, en distinguant deux cas selon que la dimension  $n$  vaut 2 ou 3 :

1) dans le cas  $n = 2$ , on cherche  $w$  vérifiant (7.7) et

$$(7.12) \quad w \in L^2(0, T; V), \quad \partial w / \partial t \in L^2(0, T; V'),$$

$$(7.13) \quad w(0) = 0;$$

2) dans le cas  $n = 3$ , on cherche  $w$  vérifiant

$$(7.14) \quad w \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \quad \partial w / \partial t \in L^2(0, T; V'_s),$$

(7.13) et l'inéquation « faible »

$$(7.15) \quad \int_0^T [(v', u - w) + \mu a(w, v - w) - b(w, v, w) + c(w, v - w) + \\ + gj(v + u_0) - gj(w + u_0) - (\tilde{f}, v - w)] dt \geq 0$$

$\forall v$  tel que

$$(7.16) \quad v \in L^2(0, T; V'_s), \quad v' \in L^2(0, T; H), \quad v(0) = 0. \quad \blacksquare$$

## 7.2. Résultats

On a les résultats suivants :

$$(7.17) \quad \left| \begin{array}{l} \text{pour } f \text{ donnée dans } L^2(0, T; V') \text{ et } u^0 \in V \text{ avec (7.10), il existe } u \text{ unique,} \\ \text{solution de (7.7), (7.12), (7.13);} \end{array} \right.$$

$$(7.18) \quad \left| \begin{array}{l} \text{pour } f \text{ donnée dans } L^2(0, T; V') \text{ et } u^0 \in V \text{ avec (7.10), il existe } w \text{ solu-} \\ \text{tion de (7.13), (7.14), (7.15) (cas } n = 3). \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

Remarque 7.1

Le problème de l'unicité est ouvert dans (7.18). ■

Remarque 7.2

On obtient également des résultats analogues à ceux des nos 4 et 5. ■

Pour la Démonstration des résultats (7.17), (7.18) on opère comme dans les numéros précédents. On se borne aux lignes essentielles pour le cas (7.17); pour le cas (7.18), on introduit, comme dans les numéros précédents, un terme supplémentaire de régularisation.

On commence donc par la résolution de

$$(7.19) \quad \left\{ \begin{aligned} & (w'_\varepsilon, v) + \mu a(w'_\varepsilon, v) + b(w_\varepsilon, w'_\varepsilon, v) + c(w_\varepsilon, v) + \\ & \hspace{20em} + g(j'_\varepsilon(w_\varepsilon + u_0), v) = (\tilde{f}, v) \end{aligned} \right.$$

avec

$$(7.20) \quad w_\varepsilon(0) = 0$$

On utilise à cet effet la méthode de Galerkin mais avec une « base »  $w_1, \dots, w_n, \dots$  quelconque de  $V$  <sup>(30)</sup>. Il y a quelques différences dans les estimations a priori. On prend  $V = w_\varepsilon$  dans (7.19). On n'a plus  $a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \alpha > 0$ , car  $\Omega$  n'est pas borné, mais

$$(7.21) \quad a(v, v) + |v|^2 \geq \alpha \|v\|^2, \quad \alpha > 0, \quad v \in V.$$

On utilise par ailleurs (7.11) et le fait que

$$\begin{aligned} (j'_\varepsilon(w_\varepsilon + u_0), w_\varepsilon) &= (j'_\varepsilon(w_\varepsilon + u_0), w_\varepsilon + u_0) - (j'_\varepsilon(w_\varepsilon + u_0), u_0) \geq \\ &\geq - (j'_\varepsilon(w_\varepsilon + u_0), u_0) \geq -c_1(1 + \|w_\varepsilon(t)\|), \end{aligned}$$

d'où, grâce à l'inégalité de Gronwall <sup>(31)</sup>,

$$(7.22) \quad |w_\varepsilon(t)| \leq c,$$

$$(7.23) \quad \int_0^T \|w_\varepsilon\|^2 d\sigma \leq c.$$

Il y a maintenant une différence dans l'estimation de  $w'_\varepsilon$ . On utilise la transformation de Fourier en  $t$  <sup>(32)</sup> pour obtenir ceci :

$$(7.24) \quad \left\{ \begin{aligned} & \text{si } D_t^{1/4-\beta} w_{i,m} = \text{restriction à } (0, T) \text{ de la transformée de Fourier inverse} \\ & \text{en } \tau \text{ de } |\tau|^{1/4-\beta} \hat{w}_{\varepsilon,m}, \text{ où } \hat{w}_{\varepsilon,m} \text{ est la transformée de Fourier en } t \text{ de } \tilde{w}_{\varepsilon,m} \\ & \text{(prolongement de } w_{i,m} \text{ par 0 hors de } (0, T)) \end{aligned} \right.$$

<sup>(30)</sup> On ne peut plus utiliser, sur un ouvert non borné, les bases de fonctions propres. On pourrait utiliser ici la méthode proposée dans Lions-Strauss [1], p. 62.

<sup>(31)</sup> Ces estimations sont d'abord établies pour l'approximation  $w_{\varepsilon,m}$ , puis l'on passe à la limite en  $m$ .

<sup>(32)</sup> Cf. Lions [1], Chapitre 1, n° 6.5. La même démonstration est valable dans la situation présente.

alors

$$(7.25) \quad \forall \beta > 0, \quad D_t^{1/4-\beta} w_{\varepsilon m} \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; H).$$

On en déduit, en utilisant le Théorème 5.2 de Lions [1], Chapitre 1, que l'on peut extraire une suite  $w_{\varepsilon \mu}$  telle que

$$\begin{aligned} w_{\varepsilon \mu} &\rightarrow w_\varepsilon \text{ dans } L^\infty(0, T; H) \text{ faible étoile et dans } L^2(0, T; V) \text{ faible,} \\ w_{\varepsilon i \mu} w_{\varepsilon j \mu} &\rightarrow w_{\varepsilon i} w_{\varepsilon j} \text{ dans } L^2(Q) \text{ faible} \quad (33) \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que  $w_\varepsilon$  satisfait à (7.19), (7.20) et aux estimations

$$(7.26) \quad \|w_\varepsilon\|_{L^2(0,T;V)} + \|w_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H)} + \|D_t^{1/4-\beta} w_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H)} \leq c.$$

On passe enfin à la limite en  $\varepsilon$  comme au n° 3. ■

*Remarque 7.2*

Un autre procédé de démonstration consiste à introduire les ouverts *bornés*

$$(7.27) \quad \Omega_M = \Omega \cap \{x \mid |x| < M\}.$$

On résout alors les problèmes analogues sur  $\Omega_M$  (appliquant le n° 3 à  $M$  fixé) puis on fait tendre  $M$  vers  $+\infty$ . ■

## 8. ÉCOULEMENT LAMINAIRE DANS UNE CONDUITE CYLINDRIQUE

### 8.1. Rappel des équations

Soit  $\Omega$  une section droite de la conduite ; nous supposons que  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  de frontière  $\Gamma$  régulière. Nous cherchons le champ de vitesses  $u = u(x)$  ( $u =$  scalaire) satisfaisant à

$$(8.1) \quad \sigma_{31,1}^p + \sigma_{32,2}^p = -c \quad \text{dans } \Omega \quad (34)$$

$$(8.1) \quad \sigma_{3i}^p = g \frac{D_{3i}}{[(D_{13})^2 + (D_{23})^2]^{1/2}} + 2\mu D_{3i}, \quad i = 1, 2 \quad \text{dans } \Omega$$

et à la condition à la frontière

$$(8.3) \quad u = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Rappelons que dans (8.2)

$$(8.4) \quad D_{3i} = \frac{1}{2} u_{,i}, \quad i = 1, 2.$$

(33) On utilise le Théorème 5.2, loc. cit., *Sur tout compact de  $\bar{\Omega}$ .*

(34)  $c =$  chute linéique de pression.

Nous allons maintenant donner un énoncé variationnel, conduisant à la formulation précise du problème.

8.2. Formulation variationnelle

**Théorème 8.1.** *Si  $u$  est un champ de vitesses, solution « forte » de (8.1), (8.2), (8.3), alors  $u$  satisfait à l'inéquation variationnelle*

$$(8.5) \quad \mu a(u, v - u) + gj(v) - gj(u) \geq (c, v - u) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

où

$$(8.6) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx,$$

$$(8.7) \quad j(v) = \int_{\Omega} |\text{grad } v| \, dx,$$

$$(8.8) \quad (f, v) = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

*Démonstration*

Multipliant (8.1) par  $v - u$  il vient, après intégrations par parties

$$(8.9) \quad \int_{\Omega} \sigma_{3i}^D(v - u)_{,i} \, dx - (c, v - u) = 0$$

et utilisant (8.2) on en tire

$$(8.10) \quad \mu \int_{\Omega} u_{,i}(v - u)_{,i} \, dx + g \int_{\Omega} \frac{u_{,i}(v - u)_{,i}}{(u_{,i} u_{,i})^{1/2}} \, dx = (c, v - u).$$

Comme

$$u_{,i} v_{,i} \leq (u_{,i} u_{,i})^{1/2} (v_{,i} v_{,i})^{1/2}$$

on en déduit (8.5). ■

La formulation précise du problème de l'écoulement laminaire dans une conduite cylindrique est alors : trouver  $u \in H_0^1(\Omega)$  solution de (8.5).

Comme le fait que le deuxième membre de (8.5) contienne une constante  $c$  ne joue pas un rôle essentiel, on clarifie l'exposé en introduisant le problème un peu plus général :

$$(8.11) \quad \left| \begin{array}{l} \text{pour } f \text{ donnée dans } L^2(\Omega), \text{ on cherche } u \in H_0^1(\Omega) \text{ solution de} \\ \mu a(u, v - u) + gj(v) - gj(u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

*Remarque 8.1*

L'énoncé a un sens --- et le Théorème 8.2 ci-après est encore valable --- si l'on suppose plus généralement que

$$(8.12) \quad f \in H^{-1}(\Omega).$$

Mais l'hypothèse «  $f \in L^2(\Omega)$  » interviendra dans le Théorème 8.3. ■

Le problème (8.11) *équivaut* à la minimisation de la fonctionnelle

$$(8.13) \quad J_g(v) = \frac{1}{2} \mu a(v) + gj(v) - (f, v) \quad (3^5)$$

où

$$(8.14) \quad a(v) = a(v, v).$$

Donc, d'après le Chapitre 1, n° 3, on a :

**Théorème 8.2.** *Le problème (8.11) (ou le problème équivalent (8.13)) admet une solution  $u_g$  unique.*

On va maintenant étudier des propriétés de  $u_g$  et de la fonction  $g \rightarrow u_g$ .

### 8.3. Propriétés de la solution

**Théorème 8.3.** *La fonction  $g \rightarrow u_g$  est continue lipschitzienne de  $g \geq 0 \rightarrow H_0^1(\Omega)$ . En outre*

$$(8.15) \quad u_g = 0 \quad \text{pour } g \geq g_c = \text{seuil critique dépendant de } \Omega \text{ et } f,$$

et

$$(8.16) \quad \left| \begin{array}{l} \text{la fonction } g \rightarrow a(u_g) \text{ (resp. } g \rightarrow j(u_g)) \text{ est continue décroissante (nulle} \\ \text{pour } g \geq g_c). \end{array} \right.$$

*Démonstration*

Si l'on fait  $v = 0$  puis  $v = 2u = 2u_g$  dans (8.11) on trouve

$$(8.17) \quad \mu a(u_g) + gj(u_g) = (f, u_g)$$

de telle sorte que

$$(8.18) \quad J_g(u_g) = -\frac{1}{2} \mu a(u_g).$$

On déduit de (8.17) que (et ceci est valable si  $f \in H^{-1}(\Omega)$ )

$$(8.19) \quad \|u_g\| \leq c \quad (\| \cdot \| = \text{norme dans } H_0^1(\Omega)) \quad \text{pour } g \geq 0.$$

Montrons maintenant la continuité *forte* de  $g \rightarrow u_g$  et la propriété (de Lipschitz) :

$$(8.20) \quad a(u_g - u_{g_0})^{1/2} \leq \mu^{-1} (\text{Mes } \Omega)^{1/2} |g - g_0|.$$

En effet prenant  $v = u_{g_0}$  (resp.  $u_g$ ) dans l'inéquation (8.11) pour  $u_g$  (resp. pour  $u_{g_0}$ ) et ajoutant, il vient :

$$(8.21) \quad -\mu a(u_g - u_{g_0}) - (g - g_0)(j(u_g) - j(u_{g_0})) \geq 0.$$

(3<sup>5</sup>) On introduit l'indice  $g$  parce que, dans la suite, on va faire varier  $g$ , toutes choses égales par ailleurs.

Mais

$$(8.22) \quad |j(v) - j(w)| = \left| \int_{\Omega} (|\text{grad } v| - |\text{grad } w|) \, dx \right| \leq j(v - w) \leq \\ \leq (\text{Cauchy Schwarz}) \leq (\text{Mes } \Omega)^{1/2} a(v - w)^{1/2}$$

de sorte que (8.21) donne

$$(8.23) \quad \mu a(u_g - u_{g_0}) \leq (\text{Mes } \Omega)^{1/2} |g - g_0| a(u_g - u_{g_0})^{1/2}$$

d'où (8.20).

Montrons maintenant (8.15). On a d'après le théorème de Nirenberg et M. Strauss [1] :

$$(8.24) \quad |(f, v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^1(\Omega)} \leq c_1 \|f\|_{L^2(\Omega)} j(v).$$

Alors  $u = 0$  est solution de (8.11) si  $gj(v) \geq (f, v) \quad \forall v$ , ce qui est vrai d'après (8.24) dès que

$$(8.25) \quad g \geq c_1 \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Restent à montrer les propriétés (8.16). On a

$$J_g(v) \leq J_h(v) \quad \forall v \quad \text{si } g \leq h,$$

donc

$$\inf J_g(v) = -\frac{1}{2} \mu a(u_g) \leq \inf J_h(v) = -\frac{1}{2} \mu a(u_h)$$

d'où la décroissance de  $g \rightarrow a(u_g)$ .

Par ailleurs (8.21) montre que

$$(g - g_0)(j(u_g) - j(u_{g_0})) \leq 0$$

d'où la décroissance de  $g \rightarrow j(u_g)$ . ■

Vérifions maintenant le

**Théorème 8.4.** *Si l'on suppose que*

$$(8.26) \quad f \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

alors

$$(8.27) \quad u_g \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

*Démonstration*

Prenons dans (8.11) (on écrit  $u$  au lieu de  $u_g$ )  $v = u^+$  ; alors  $v - u = u^-$  et il vient

$$(8.28) \quad \mu a(u, u^-) + g(j(u^+) - j(u)) \geq (f, u^-)$$

mais  $a(u, u^-) = -a(u^-)$  et comme

$$(8.29) \quad j(u) = j(u^+) + j(u^-)$$

on en déduit

$$(8.30) \quad \mu a(u^-) + gj(u^-) + (f, u^-) \leq 0.$$

Comme  $f \geq 0$  on a :  $(f, u^-) \geq 0$  et donc (8.30) implique que  $a(u^-) = 0$  donc

$$u^- = 0. \quad \blacksquare$$

On va maintenant donner une *propriété de comparaison des solutions* pour deux domaines  $\Omega_1, \Omega_2, \overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ ; soit  $u_i$  la solution de

$$(8.31) \quad \begin{cases} \mu a_{\Omega_i}(u_i, v - u_i) + g(j_{\Omega_i}(v) - j_{\Omega_i}(u_i)) \geq (f, v - u_i)_{\Omega_i}, \\ \forall v \in H_0^1(\Omega_i), \quad i = 1, 2, \quad (u_i \in H_0^1(\Omega_i)) \end{cases}$$

où

$$a_{\Omega_i}(u, v) = \int_{\Omega_i} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx,$$

$$j_{\Omega_i}(v) = \int_{\Omega_i} |\text{grad } v| \, dx.$$

$$(f, v)_{\Omega_i} = \int_{\Omega_i} f v \, dx.$$

**Théorème 8.5.** *On suppose que  $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ , et que*

$$(8.32) \quad f_2 \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega_2, \quad f_2 \geq f_1 \quad \text{p.p. dans } \Omega_1.$$

Alors

$$(8.33) \quad u_1 \leq u_2 \quad \text{p.p. dans } \Omega_1.$$

*Démonstration*

Prenons dans (8.31) pour  $i = 1$  :

$$v = u_1 - (u_2 - u_1)^-$$

(c'est loisible car sur  $\Gamma_1 =$  frontière de  $\Omega_1$ , on a :  $u_1 = 0, u_2 \geq 0$  d'après (8.32) et le Théorème 8.4, donc  $(u_2 - u_1)^- = 0$  et donc  $v = 0$  sur  $\Gamma_1$ ); il vient

$$(8.34) \quad \begin{aligned} \mu a_{\Omega_1}(u_1, -(u_2 - u_1)^-) + g(j_{\Omega_1}(u_1 - (u_2 - u_1)^-) - j_{\Omega_1}(u_1)) &\geq \\ &\geq -(f_1, (u_2 - u_1)^-)_{\Omega_1}. \end{aligned}$$

Soit maintenant  $u_1 =$  prolongement de  $u_1$  à  $\Omega_2$  par 0 hors de  $\Omega_1$ , donc  $u_1 \in H_0^1(\Omega_2)$  et soit

$$(8.35) \quad v = u_2 + (u_2 - \tilde{u}_1)^-;$$

on a :  $v \in H_0^1(\Omega_2)$ , on peut donc prendre cet élément  $v$  dans (8.31) pour  $i = 2$ . Comme  $v = u_2$  dans  $\Omega_2 - \overline{\Omega}_1$ , il vient :

$$(8.36) \quad \begin{aligned} \mu a_{\Omega_2}(u_2, (u_2 - u_1)^-) + g(j_{\Omega_2}(u_1 + (u_2 - u_1)^-) - j_{\Omega_2}(u_2)) &\geq \\ &\geq (f_2, (u_2 - u_1)^-)_{\Omega_1}. \end{aligned}$$

Mais l'on note que

$$j_{\Omega_1}(u_1 - (u_2 - u_1)^-) + j_{\Omega_1}(u_1 + (u_2 - u_1)^-) - j_{\Omega_1}(u_1) - j_{\Omega_1}(u_2) = 0$$



de sorte que (8.34) et (8.36) entraînent :

$$\mu a_{\Omega_1}(u_2 - u_1, (u_2 - u_1)^-) \geq (f_2 - f_1, (u_2 - u_1)^-)_\Omega,$$

d'où

$$(8.37) \quad \mu a_{\Omega_1}((u_2 - u_1)^-) + (f_2 - f_1, (u_2 - u_1)^-)_\Omega \leq 0.$$

Mais d'après la deuxième condition (8.32) on a :

$$(f_2 - f_1, (u_2 - u_1)^-)_\Omega \geq 0$$

de sorte que (8.37) implique que  $a_{\Omega_1}((u_2 - u_1)^-) = 0$  donc que  $(u_2 - u_1)^- = 0$  dans  $\Omega_1$  (car  $(u_2 - u_1)^- \in H_0^1(\Omega_1)$ ). ■

### 9. INTERPRÉTATION DES INÉQUATIONS AVEC DES MULTIPLICATEURS

On va démontrer les résultats suivants :

**Théorème 9.1.** *On se place dans le cadre du Théorème 3.1 ; on désigne par  $u_g$  la solution du problème. Il existe alors des fonctions  $m^g = \{m_{ij}^g\}$  et une distribution  $p^g$  sur  $Q$  telles que*

$$(9.1) \quad m_{ij}^g \in L^\infty(Q) \quad m_{ij}^g = m_{ji}^g, \quad \forall i, j, \quad m_{kk}^g = 0,$$

$$(9.2) \quad m_{ij}^g m_{ij}^g \leq 1 \quad \text{p.p. dans } Q,$$

$$(9.3) \quad m_{ij}^g D_{ij}(u_g) = (D_{ij}(u_g) D_{ij}(u_g))^{1/2} \quad \text{p.p. dans } Q,$$

$$(9.4) \quad \partial u_{gi} / \partial t - \mu \Delta u_{gi} + u_{gj} \partial u_{gi} / \partial x_j - g \sqrt{2} \partial m_{ij}^g / \partial x_j = f_i - \partial p^g / \partial x_i, \quad i = 1, 2.$$

Réciproquement, soient  $u_g, m_{ij}^g, p^g$  données avec

$$(9.5) \quad u_g \in L^2(0, T; V), \quad u'_g \in L^2(0, T; V'),$$

$$(9.6) \quad u_g(0) = u_0,$$

et les relations (9.1), ..., (9.4). Alors  $u_g$  est la solution du problème donné au Théorème 3.1.

Le Théorème suivant montre que les « multiplicateurs »  $m_{ij}^g$  dépendent continûment de  $g$  dans une topologie convenable.

**Théorème 9.2.** *Si  $g \rightarrow g_0$  ( $g_0 \geq 0$ ) on peut choisir les multiplicateurs  $m_{ij}^g$  de façon que*

$$(9.7) \quad m_{ij}^{g_0} \rightarrow m_{ij}^g \text{ dans } L^\infty(Q) \text{ faible étoile} \quad (3.6)$$

où les  $m_{ij}^{g_0}$  sont des multiplicateurs relatifs à la solution  $u_{g_0}$  (et ayant donc les propriétés analogues à celles données au Théorème 9.1 précédent). ■

$$(3.6) \quad m_{ij}^{g_0} = 0 \quad \text{si } g_0 = 0.$$

Vérifions d'abord la propriété réciproque dans l'énoncé du Théorème 9.1. On déduit de (9.4) que

$$\begin{aligned} & (u'(t), v - u(t)) + \mu a(u(t), v - u(t)) + b(u(t), u(t), v - u(t)) + \\ & + gj(v) - gj(u(t)) - (f(t), v - u(t)) = g[j(v) - j(u) - \\ & - 2(m_{ij}^q, D_{ij}(v) - D_{ij}(u))] = X; \end{aligned}$$

mais d'après (9.3)  $j(u) = 2(m_{ij}^q, D_{ij}(u))$  et d'après (9.2),

$$2(m_{ij}^q, D_{ij}(v)) \leq 2 \int_{\Omega} (D_{ij}(v) D_{ij}(v))^{1/2} dx = j(v)$$

donc  $X \geq 0$  d'où le résultat. ■

Montrons maintenant l'existence des multiplicateurs  $m_{ij}^q$ .

Pour simplifier l'écriture, commençons par supprimer l'indice  $g$ . On introduit

$$B(u, v) \in V,$$

défini par

$$(9.8) \quad b(u, v, w) = (B(u, v), w), \quad u, v, w \in V,$$

et l'on pose

$$(9.9) \quad F = \partial u / \partial t - \mu \Delta u + B(u, u) - f;$$

$F$  est un élément de  $L^2(0, T; V')$  et l'inéquation variationnelle s'écrit

$$(9.10) \quad (F(t), v) + gj(v) - [(F(t), u(t)) + gj(u(t))] \geq 0 \quad \forall v \in V$$

Remplaçant  $v$  par  $\pm \lambda v$ ,  $\lambda > 0$  (9.10) équivaut à

$$(9.11) \quad \lambda [\pm (F(t), v) + gj(v)] - [(F(t), u(t)) + gj(u(t))] \geq 0;$$

prenant dans (9.11)  $v = v(t)$  où  $t \rightarrow v(t)$  est dans  $L^2(0, T; V)$ , on en déduit que

$$(9.12) \quad \left| \begin{array}{l} \lambda [\pm \int_0^T (F, v) dt + g \int_0^T j(v) dt] - \int_0^T ((F, u) + gj(u)) dt \geq 0 \\ \forall v \in L^2(0, T; V) \quad \text{et} \quad \forall \lambda \geq 0. \end{array} \right.$$

On en déduit que

$$(9.13) \quad \left| \int_0^T (F, v) dt \right| \leq g \int_0^T j(v) dt \quad \forall v \in L^2(0, T; V)$$

et que

$$(9.14) \quad \int_0^T ((F, u) + gj(u)) dt = 0.$$

(En effet, on déduit de (9.12) que  $\int_0^T ((F, u) + gj(u)) dt \leq 0$  et comme d'après

$$(9.13) \quad \int_0^T ((F, u) + gj(u)) dt \geq 0, \text{ on en déduit (9.14).})$$

On va maintenant utiliser le Théorème de Hahn-Banach. On introduit l'espace

$$\Phi = \{ \varphi \mid \varphi = \{ \varphi_{ij} \}, \quad \varphi_{ij} = \varphi_{ji}, \quad \varphi_{ij} \in L^1(Q) \}$$

muni de la norme

$$(9.15) \quad \| \varphi \|_{\Phi} = \int_Q (\varphi_{ij} \varphi_{ij})^{1/2} dx dt .$$

Considérons l'application

$$(9.16) \quad v \xrightarrow{\pi} D_{ij}(v) = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) ,$$

de  $L^2(0, T; V) \rightarrow \Phi$ . L'inégalité (9.13) équivaut à

$$(9.17) \quad \left| \int_0^T (F, v) dt \right| \leq g \sqrt{2} \| \pi v \|_{\Phi} .$$

Par conséquent, d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe

$$m^g \in \Phi' = \{ \varphi \mid \varphi = \{ \varphi_{ij} \}, \quad \varphi_{ij} = \varphi_{ji}, \quad \varphi_{ij} \in L^{\infty}(Q) \} ,$$

tel que

$$(9.18) \quad \int_0^T (F, v) dt = - g \sqrt{2} \int_Q m_{ij}^g D_{ij}(v) dx dt ,$$

(on peut même prendre  $\{ m_{ij}^g \}$  dans  $\Phi'$  tel que  $m_{kk}^g = 0$  car  $D_{kk}(v) = 0$ , ce que nous ferons) et tel que

$$(9.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \| m^g \|_{\Phi'} \leq 1 \\ \text{où } \Phi' \text{ est muni de la norme duale de (9.15)} . \end{array} \right.$$

Mais (9.19) équivaut à (9.2), (9.18) équivaut (d'après la définition de  $F$ ) à (9.4) et (9.14) équivaut à (en utilisant (9.18))

$$(9.20) \quad \int_Q m_{ij}^g D_{ij}(u) dx dt = \int_Q (D_{ij}(u) D_{ij}(u))^{1/2} dx dt :$$

comme l'on a (9.2), (9.20) entraîne (9.3). ■

*Remarque 9.1*

Posons

$$\sigma_{ij}^g = - p^g \delta_{ij} + 2 \mu D_{ij}(u) + g \sqrt{2} m_{ij}^g ;$$

alors il est immédiat de voir que (9.2), (9.3) équivalent à :  $\{ \sigma_{ij}^g \}$  et  $\{ D_{ij}(u) \}$  sont liés par la loi de comportement du fluide de Bingham.

De plus (9.14) équivaut alors à

$$\partial u_{qj} / \partial t + u_{qj} u_{qj,i} = \sigma_{ij,i} + f_i ,$$

ce qui établit que  $\sigma_{ij}^g$  est le champ de contraintes solution du problème.

Ceci constitue de plus une *interprétation rigoureuse* de  $u(x, t)$  solution du problème variationnel (2.7). (Rappelons qu'une interprétation formelle en avait été donné à la Remarque 2.2.) ■

*Démonstration du Théorème 9.2*

D'après le Théorème 5.2 on sait que lorsque  $g \rightarrow g_0$  on a :

$$(9.21) \quad u_g \rightarrow u_{g_0} \quad \text{dans } L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H).$$

Par ailleurs d'après l'analogie du Théorème 5.1 (avec  $g \rightarrow g_0$  au lieu de  $g \rightarrow 0$ ) on a :

$$(9.22) \quad \partial u_g / \partial t \rightarrow \partial u_{g_0} / \partial t \quad \text{dans } L^2(0, T; V') \text{ faible.}$$

D'après (9.2) on peut extraire une sous-suite encore notée  $m_{ij}^g$  telle que

$$(9.23) \quad m_{ij}^g \rightarrow \mu_{ij} \quad \text{dans } L^\infty(Q) \text{ faible étoile}$$

et

$$(9.24) \quad \mu_{ij} \mu_{ij} \leq 1 \quad \text{p.p. dans } Q.$$

On déduit de (9.4) que

$$(9.25) \quad (u'_g, v) + \mu a(u_g, v) + b(u_g, u_g, v) - (f, v) = -2g(m_{ij}^g, D_{ij}(v))$$

et l'on peut passer à la limite en  $g$  dans (9.25) ; il vient

$$(9.26) \quad (u'_{g_0}, v) + \mu a(u_{g_0}, v) + b(u_{g_0}, u_{g_0}, v) - (f, v) = -2g_0(\mu_{ij}, D_{ij}(v)).$$

Mais  $u_{g_0}$  est la solution de l'inéquation variationnelle correspondant à  $g_0$ , donc

$$(u'_{g_0}, v - u_{g_0}) + \mu a(u_{g_0}, v - u_{g_0}) + b(u_{g_0}, u_{g_0}, v - u_{g_0}) - (f, v - u_{g_0}) + g_0 j(v) - g_0 j(u_{g_0}) \geq 0$$

d'où en comparant avec (9.26)

$$g_0 \{ j(v) - j(u_{g_0}) - 2(\mu_{ij}, D_{ij}(v - u_{g_0})) \} \geq 0 \quad \forall v$$

donc

$$(9.27) \quad J(v) - 2(\mu_{ij}, D_{ij}(v)) - [j(u_{g_0}) - 2(\mu_{ij}, D_{ij}(u_{g_0}))] \geq 0,$$

donc prenant  $v = 0$  :

$$j(u_{g_0}) - 2(\mu_{ij}, D_{ij}(u_{g_0})) \leq 0.$$

Mais d'après (9.24)  $j(u_{g_0}) - 2(\mu_{ij}, D_{ij}(u_{g_0})) \geq 0$ , donc

$$j(u_{g_0}) - 2(\mu_{ij}, D_{ij}(u_{g_0})) = 0$$

et donc

$$(9.28) \quad \mu_{ij} D_{ij}(u_{g_0}) = (D_{ij}(u_{g_0}) D_{ij}(u_{g_0}))^{1/2} \quad \text{p.p. dans } Q.$$

On peut donc prendre  $m_{ij}^{g_0} = \mu_{ij}$ . ■

*Remarque 9.1*

On a des résultats de type analogue pour les inéquations *stationnaires* étudiées dans ce chapitre. ■

**10. COMMENTAIRES**

Les équations de l'hydrodynamique des fluides newtoniens visqueux incompressibles ont donné lieu à de très nombreux travaux.

Du point de vue « mathématique », on consultera J. Leray [1], [2], [3], O. A. Ladyzenskaya [1], J. Serrin [1], R. Finn [1], Lions-Prodi [1], Lions [1].

Du point de vue « mécanique » on trouvera dans R. Berker [1] une étude très complète des solutions explicites ainsi que les références aux travaux antérieurs.

La théorie présentée ici aux n<sup>os</sup> 1 à 7 semble nouvelle (nous avons publié une note aux C. R. sur ce sujet, Duvaut-Lions [4]).

Du point de vue mécanique, il s'agit d'une généralisation des problèmes usuels à un fluide non newtonien ; le fluide de Bingham a été retenu, car c'est le plus simple qui conduise à des inéquations variationnelles. Les problèmes correspondants pour d'autres types de fluides non newtoniens ne sont probablement pas hors d'atteinte par les méthodes de ce Livre, mais nous ne les avons pas abordés ici.

Du point de vue mathématique, il s'agit d'une généralisation (stricte) des problèmes usuels. Il se pose alors naturellement la question de l'extension éventuelle de tous les résultats connus pour les équations de Navier-Stokes aux inéquations relatives aux fluides de Bingham. Cela est un énorme travail, plusieurs recherches étant en cours sur ce sujet. Nous avons laissé de côté ici les problèmes suivants :

- 1) étude de solutions *locales* en  $t$  et *fortes* des inéquations ;
- 2) comportement de la solution lorsque  $t \rightarrow +\infty$  ;
- 3) comportement de la solution lorsque  $\mu \rightarrow 0$  ; théorie de la couche limite ;
- 4) recherche des solutions périodiques ou presque périodiques (en  $t$ ) ;
- 5) extension éventuelle des travaux de C. Foias et G. Prodi [1], [2] relatifs aux équations de Navier-Stokes ;
- 6) adaptation de la théorie de la turbulence.

L'étude de l'*approximation numérique* de la solution est donnée dans Fortin [1], D. Bégis [1], R. Glowinski [1] et l'ouvrage déjà mentionné de Glowinski-Lions-Trémolières [1].

# CHAPITRE 7

## ÉQUATIONS DE MAXWELL PROBLÈMES D'ANTENNES

Ce chapitre suppose connu le Chapitre 1, nos 1 à 3.

### 1. INTRODUCTION

Les phénomènes d'électromagnétisme peuvent conduire à des inéquations variationnelles, soit avec les équations de Maxwell dans un milieu polarisable, soit lorsqu'on les couple avec la mécanique des fluides de Bingham pour donner la magnétodynamique des fluides (de Bingham). Cette deuxième possibilité est abordée dans Duvaut-Lions [7]. Le présent chapitre est consacré aux phénomènes unilatéraux liés aux équations de Maxwell. Faute de pouvoir renvoyer à un exposé unifié des phénomènes d'électromagnétisme classiques, nous avons repris la mise en équation du phénomène au n° 2. développé une étude mathématique des solutions classiques aux nos 4, 5, 6. Cette étude était indispensable pour aborder ensuite les équations de Maxwell en milieu polarisable. Le n° 3 est une présentation des problèmes physiques envisagés.

### 2. LES LOIS DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME

Les lois de l'électromagnétisme résultent

- i) de concepts physiques (charge électrique, densité de courant) que nous introduisons ici sans explications expérimentales pour lesquelles nous renvoyons aux ouvrages classiques (Panofsky-Phillips [1], G. Bruhat [1]);
- ii) de lois universelles (conservation de la charge électrique, loi de Faraday) que nous énoncerons et traduirons sous forme mathématique (P. Germain [3]);
- iii) de lois de comportement caractéristiques de chaque milieu.

Les équations qui résultent de l'ensemble de ces lois sont les *équations de Maxwell* si le milieu considéré est au repos. Dans le cas où c'est un milieu continu en mouvement, ce sont les équations de la *magnétodynamique des fluides*.

## 2.1. Grandeurs physiques

Nous introduisons les concepts suivants :

— *Charge électrique* : elle sera représentée par le scalaire  $q$ , qui sera, suivant les cas, une densité volumique, surfacique ou linéique de charge électrique ; sans précision supplémentaire, il s'agira de densité volumique.

— *Courant électrique* : c'est un vecteur  $\mathbf{J}$  de  $\mathbb{R}^3$  qui mesure un flux de charges électriques : le flux de charges électriques à travers un élément de surface  $dS$  dans le sens de la normale unitaire  $\mathbf{n}$  à  $dS$  est donné par le produit scalaire  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS$ . Le vecteur  $\mathbf{J}$  sera aussi appelé vecteur densité de courant.

— *Induction magnétique* : c'est un vecteur  $\mathbf{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  qui interviendra dans la loi de Faraday.

— *Champ électrique* : c'est un vecteur  $\mathbf{H}$  de  $\mathbb{R}^3$ .

D'autres grandeurs physiques seront introduites dans la suite de l'exposé.

## 2.2. Conservation de la charge électrique

Quel que soit le domaine  $\mathcal{D}$  fixe de  $\mathbb{R}^3$  de frontière  $\partial\mathcal{D}$  régulière, la variation par unité de temps de la charge électrique totale contenue à l'intérieur de  $\mathcal{D}$  est produite par le flux de charges à travers  $\partial\mathcal{D}$  et par un éventuel apport volumique  $g$  de charges par unité de volume et de temps, ce qui se traduit par

$$(2.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{D}} q \, dx = - \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_{\mathcal{D}} g \, dx$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure unitaire à la frontière  $\partial\mathcal{D}$  de  $\mathcal{D}$ .

Cette relation étant valable quel que soit  $\mathcal{D}$ , il en résulte que ponctuellement

$$(2.2) \quad \partial q / \partial t + \text{Div } \mathbf{J} = g. \quad \blacksquare$$

Introduisons alors un vecteur  $\mathbf{D}$ , *induction électrique*, ou *potentiel de charge*, tel que

$$(2.3) \quad q = \text{Div } \mathbf{D},$$

et un vecteur  $\mathbf{G}$  tel que

$$(2.4) \quad g = \text{Div } \mathbf{G}.$$

Alors l'équation (2.2) montre que le vecteur  $\partial\mathbf{D}/\partial t + \mathbf{J} - \mathbf{G}$  est à divergence nulle. Il existe donc au moins un vecteur  $\mathbf{H}$ , que nous appellerons *champ magnétique* tel que

$$(2.5) \quad \partial\mathbf{D}/\partial t + \mathbf{J} - \text{Rot } \mathbf{H} = \mathbf{G}.$$

Si la production volumique de charges  $g$  est nulle, on peut prendre  $\mathbf{G} = 0$ , l'équation (2.5) fournit alors,  $\Sigma$  étant une variété bidimensionnelle de bord  $\partial\Sigma$  dans  $\mathbb{R}^3$

$$(2.6) \quad \int_{\Sigma} (\partial\mathbf{D}/\partial t + \mathbf{J}) \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}.$$

(Le vecteur unitaire  $\mathbf{n}$  à  $\Sigma$  oriente le bord  $\partial\Sigma$  dont le vecteur tangent infinitésimal est  $d\mathbf{s}$ .)

La relation (2.6) est connue sous le nom de *théorème d'Ampère*. ■

#### Remarque 2.1

Le vecteur  $\mathbf{G}$  est défini à un champ de rotationnel près. *Le choix de  $\mathbf{G}$  influe donc directement sur la valeur du champ magnétique.* ■

#### Remarque 2.2

Si le champ vectoriel  $\mathbf{D}$  est discontinu à travers une surface  $\Sigma$  de normale unitaire  $\mathbf{n}$ , et si  $\mathcal{D}$  est un domaine partagé par  $\Sigma$  en deux sous-domaines  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ ,  $\mathbf{n}$  étant dirigé vers  $\mathcal{D}_2$ , nous avons

$$(2.7) \quad \int_{\partial\mathcal{D}_1} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\mathcal{D}_1} q \, dx,$$

$$(2.8) \quad \int_{\partial\mathcal{D}_2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\mathcal{D}_2} q \, dx,$$

$$(2.9) \quad \int_{\mathcal{D}} q \equiv \int_{\mathcal{D}_1} q \, dx + \int_{\mathcal{D}_2} q \, dx + \int_{\Sigma \cap \mathcal{D}} q \, d\Sigma = \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Par comparaison, nous obtenons

$$(2.10) \quad \int_{\Sigma \cap \mathcal{D}} q \, d\Sigma = - \int_{\Sigma \cap \mathcal{D}_1} \mathbf{D}^{(1)} \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma + \int_{\Sigma \cap \mathcal{D}_2} \mathbf{D}^{(2)} \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma,$$

cette relation étant valable quels que soient  $\Sigma$  et  $\mathcal{D}$ .

Il en résulte sur  $\Sigma$  l'égalité ponctuelle,

$$(2.11) \quad (\mathbf{D}^{(2)} - \mathbf{D}^{(1)}) \cdot \mathbf{n} = q.$$

Dans la relation ci-dessus, les indices (1) et (2) se rapportent aux régions  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  respectivement, et  $q$  représente une densité surfacique de charges électriques sur  $\Sigma$ . Précisons également que, dans l'équation (2.9) le premier membre  $\int_{\mathcal{D}} q$  représente une somme de toutes les charges à l'intérieur de  $\mathcal{D}$ , c'est-à-dire la somme des charges volumiques à l'intérieur de  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  et les charges surfaciques sur  $\Sigma \cap \mathcal{D}$ .

Un raisonnement tout à fait analogue, basé sur la relation

$$(2.12) \quad \int_{\mathcal{D}} \text{rot } \mathbf{V} \, dx = \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{n} \wedge \mathbf{V} \, dS,$$

et conduit à partir de l'équation (2.5) donne,

$$(2.13) \quad \mathbf{n} \wedge (\mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{H}^{(1)}) = \mathbf{J},$$

où  $\mathbf{J}$  désigne une densité surfacique de courant sur  $(\Sigma_1)$ .

Notons que les équations (2.11) et (2.13) sont contenues dans (2.3) et (2.5) comprises au sens des distributions. ■



**2.3. Loi de Faraday** La dérivée par rapport au temps du flux de l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  à travers une portion de surface  $\Sigma$  fixe, de bord  $\partial\Sigma$ , est opposée à la circulation du champ électrique le long du contour  $\partial\Sigma$ .

Cette loi s'exprime analytiquement par

$$(2.14) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Il résulte de (2.14) que,  $\Sigma$  étant une surface fermée  $\partial\mathcal{D}$  frontière d'un ouvert  $\mathcal{D}$ ,

$$(2.15) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{D}} \text{Div } B \, dx = 0,$$

c'est-à-dire que, ponctuellement,

$$(2.16) \quad \partial(\text{Div } B)/\partial t = 0.$$

Si l'on suppose qu'à un instant  $t_0$  le champ  $\mathbf{B}_0$  est tel que  $\text{Div } \mathbf{B}_0 = 0$ , alors à tout instant  $t$

$$(2.17) \quad \text{Div } \mathbf{B} = 0.$$

L'équation (2.14) fournit aussi, ponctuellement

$$(2.18) \quad \partial B/\partial t + \text{rot } E = 0,$$

laquelle contient strictement (2.16). ■

#### Remarque 2.3

Si  $\Sigma$  est une éventuelle surface de discontinuité pour les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ , nous montrons, comme cela a été fait à la Remarque 2.2, que

$$(2.19) \quad (\mathbf{B}^{(2)} - \mathbf{B}^{(1)}) \cdot \mathbf{n} = 0,$$

$$(2.20) \quad \mathbf{n} \wedge (\mathbf{E}^{(2)} - \mathbf{E}^{(1)}) = 0. \quad \blacksquare$$

#### Remarque 2.4

Si on introduit un nouveau repère en translation uniforme de vitesse  $\mathbf{V}_0$  par rapport au premier, et si on définit par

$$\left| \begin{array}{ll} q' = q & \mathbf{J}' = \mathbf{J} - q\mathbf{V}_0 \\ \mathbf{D}' = \mathbf{D} & \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{V}_0 \wedge \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' = \mathbf{B} & \mathbf{H}' = \mathbf{H} - \mathbf{V}_0 \wedge \mathbf{D}, \end{array} \right.$$

les nouvelles grandeurs électromagnétiques dans ce repère, il est facile de voir que les équations de Maxwell (2.5), (2.18), ainsi qu'évidemment (2.3) et (2.17) restent valables dans le nouveau repère. Ces équations possèdent l'invariance galiléenne.

## 2.4. Récapitulation. Equations de Maxwell

C'est le nom donné à l'ensemble des quatre équations :

$$(2.21) \quad \partial \mathbf{D} / \partial t + \mathbf{J} - \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{G},$$

$$(2.22) \quad \partial \mathbf{B} / \partial t + \text{rot } \mathbf{E} = 0,$$

$$(2.23) \quad \text{Div } \mathbf{D} = q,$$

$$(2.24) \quad \text{Div } \mathbf{B} = 0.$$

A ce stade, l'équation (2.23) peut être considérée comme une définition de  $q$ , charge électrique, et l'équation (2.24) est une conséquence de (2.22) et de l'hypothèse  $\text{Div } \mathbf{B} = 0$  à un instant particulier.

Par ailleurs, si on prend la divergence de l'expression intervenant dans (2.21), on retrouve l'équation de conservation de la charge électrique.

Les deux équations de Maxwell essentielles sont donc (2.21) et (2.22). Le vecteur  $\mathbf{G}$  étant supposé donné, ces équations constituent six relations scalaires entre quinze inconnues scalaires, les composantes des vecteurs  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{J}$ . Il est donc clair que ce groupe d'équations est insuffisant pour permettre la prédiction des phénomènes électromagnétiques. Ceci justifie l'introduction de lois à caractère moins universel, dites *lois de comportement*, variables d'un milieu continu à un autre.

## 2.5. Lois de comportement

Nous en considérons deux groupes :

i) *Proportionnalité des champs et inductions* : cette loi se traduit par les deux relations,

$$(2.25) \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$(2.26) \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

où  $\epsilon$  est la constante diélectrique du milieu et  $\mu$  est la perméabilité magnétique. Ces scalaires sont supposés indépendants des phénomènes électro-magnétiques dont le milieu est le siège. Ce sont donc des *lois linéaires*.

ii) *Loi d'Ohm* : si le milieu est « stable », c'est-à-dire possède une résistivité  $\sigma$  indépendante des grandeurs électromagnétiques, la loi d'Ohm nous fournit la relation linéaire

$$(2.27) \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}.$$

Si le milieu est « ionisable » sous l'effet du champ électrique, sa résistivité  $\sigma$  varie énormément en fonction de ce dernier et la loi d'Ohm doit être remplacée par les relations,

$$(2.28) \quad \left| \begin{array}{ll} \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} & \text{si } |\mathbf{E}| < E_0 \\ \mathbf{J} = (\sigma + \lambda) \mathbf{E} & \text{si } |\mathbf{E}| = E_0 \end{array} \right.$$

où  $E_0$  est une constante positive, le seuil d'ionisation et où  $\lambda$  est un scalaire positif ou nul convenable.

Un tel comportement se rencontre dans les gaz soumis à de forts champs électriques. Il donne lieu aux phénomènes d'arc électrique ou de claquage d'antenne. ■

#### Remarque 2.5

La loi mathématique (2.28) ne traduit pas tout à fait exactement le phénomène observé expérimentalement. En effet, si  $E$  et  $J$  représentent les modules des vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{J}$  respectivement, (2.28) donne un graphe de la fonction  $J = J(E)$  représenté sur la figure n° 1, alors que le graphe mesuré expérimentalement ressemble plutôt à celui de la figure n° 2. Nous retiendrons néanmoins la loi (2.28) car le graphe réel (Fig. n° 2) montre un phénomène de *retard à l'ionisation* qui correspond en fait à une *instabilité physique*.

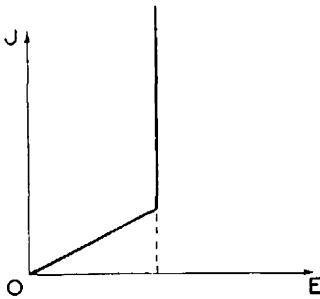


Figure 1.

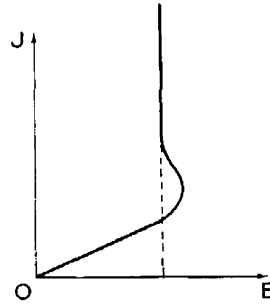


Figure 2.

#### Remarque 2.6

Les équations (2.25) et (2.26) ne possèdent pas l'invariance galiléenne. Il est donc indispensable de ne les appliquer, dans le cas général, que dans un repère fixe, ou tout au moins toujours dans le même repère.

Dans Duvaut-Lions [7], pour le cas particulier de la magnétohydrodynamique, ces lois devront être appliquées dans des repères locaux liés au fluide en mouvement. Il sera alors nécessaire, auparavant, de poser des hypothèses simplificatrices qui rendront ces relations galiléennes. ■

#### Remarque 2.7

Les lois de comportement constituent neuf relations supplémentaires liant les quinze inconnues scalaires. Nous avons donc, avec les lois de Maxwell, autant d'équations que d'inconnues.

### 3. PROBLÈMES PHYSIQUES ENVISAGÉS

#### 3.1. Milieu stable avec frontière supraconductrice

Soit un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  de frontière  $\Gamma$  régulière et bornée. Cet ouvert  $\Omega$  peut être borné ou non borné. Nous cherchons les champs de vecteurs  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{J}$  vérifiant

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \partial \mathbf{D} / \partial t + \mathbf{J} - \text{Rot}(\hat{\mu} \mathbf{B}) = \mathbf{G}_1 & \text{dans } \Omega \\ \partial \mathbf{B} / \partial t + \text{Rot}(\hat{\varepsilon} \mathbf{D}) = \mathbf{G}_2 & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

où les seconds membres  $\mathbf{G}_1$  et  $\mathbf{G}_2$  satisfont à

$$(3.2) \quad \text{Div } \mathbf{G}_2 = 0, \quad \mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{n} = 0,$$

(on a symétrisé les seconds membres de (2.21) et (2.22)), et où on a posé

$$(3.3) \quad \hat{\mu} = 1/\mu, \quad \hat{\varepsilon} = 1/\varepsilon.$$

Ces quantités  $\hat{\varepsilon}$  et  $\hat{\mu}$  sont strictement positives et restent bornées; elles peuvent dépendre de  $x$ , en particulier être constantes par morceaux.

On a les conditions initiales

$$(3.4) \quad \mathbf{B}(x, t) |_{t=0} = \mathbf{B}_0(x), \quad \mathbf{D}(x, t) |_{t=0} = \mathbf{D}_0(x).$$

et on rappelle que  $\text{Div } \mathbf{D} = q$ ,  $\text{Div } \mathbf{B} = 0$ .

Les équations (3.1) à (3.4) sont générales pour tous les problèmes envisagés.

L'hypothèse « milieu stable » équivaut à la *loi d'Ohm*

$$(3.5) \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \sigma \hat{\varepsilon} \mathbf{D} \quad \text{dans } \Omega$$

et la frontière supraconductrice impose les conditions sur  $\Gamma$ ,

$$(3.6) \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{D} \wedge \mathbf{n} = 0$$

que nous supposons réalisées aussi par les conditions initiales  $\mathbf{B}_0$  et  $\mathbf{D}_0$ ; la condition (3.6) sur  $\mathbf{B}$  est alors incluse dans (3.1) et (3.2).

Le scalaire  $\sigma$ , conductivité du milieu, est positif borné; il peut dépendre de  $x$ .

#### 3.2. Milieu polarisable de frontière supraconductrice

Les équations et conditions sont les mêmes que dans le problème paragraphe 3.1 à l'exception de (3.5) qui doit être remplacé par (2.28) que nous transcrivons en fonction de  $\mathbf{D}$ ,

$$(3.7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} |\mathbf{D}| < \mathcal{D}_0 \Rightarrow \mathbf{J} = \sigma \hat{\varepsilon} \mathbf{D} \\ |\mathbf{D}| = \mathcal{D}_0 \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \mathbf{J} = (\sigma \hat{\varepsilon} + \lambda) \mathbf{D} \\ (\mathcal{D}_0 = \hat{\varepsilon} E_0). \end{array} \right.$$

Le scalaire  $E_0$  est une constante positive que l'on appelle le seuil de claquage, ou tension de claquage. Cette appellation est particulièrement parlante dans le cas d'un condensateur plan que l'on charge de plus en plus : il se crée entre les plaques un champ électrique  $E$  d'intensité croissante qui, lorsqu'il atteint le seuil  $E_0$ , ionise le diélectrique entre les plaques ; celui-ci devient brutalement conducteur et laisse passer un courant qui décharge le condensateur et, en général, le détruit. Un phénomène analogue peut avoir lieu avec des antennes : si le champ électrique créé par l'antenne est trop intense, le gaz atmosphérique peut devenir ionisé, donc conducteur, et un courant électrique important traverse alors l'antenne en la détériorant : c'est le phénomène du *claquage d'antenne* (à éviter...). ■

La conductivité  $\sigma$  qui intervient dans (3.7) est toujours très faible, sinon nulle.

### Remarque 3.1

Dans chacun des problèmes ci-dessus, on peut remplacer les conditions aux limites (3.6) par

$$(3.8) \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{B} \wedge \mathbf{n} = 0$$

mais les problèmes auxquels cela conduit semblent moins intéressants d'un point de vue physique. De toutes façons, tout ce qui suit s'adapte facilement au cas (3.8).

### 3.3. Antenne bipolaire

L'ouvert  $\Omega$  est l'espace  $\mathbb{R}^3$  entier et nous considérons deux ouverts  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  disjoints contenus dans  $\mathbb{R}^3$  comme l'indique la figure 3, qui sont le siège d'injections données d'électricité. Soit  $g(x, t)$  la densité volumique de charges électriques apportées par unité de temps dans  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

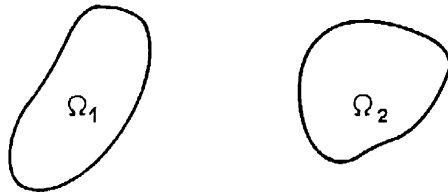


Figure 3.

Le problème ainsi posé se rattache aux problèmes des paragraphes 3.1 et 3.2 en prenant  $\Gamma$  vide et en précisant les seconds membres  $G_1$  et  $G_2$  des équations (3.1), ceci conformément à la Remarque 2.1. ■

#### Détermination de $G_1$ et $G_2$

Nous prenons  $G_2 = 0$ , ceci ne faisant pas de difficulté.

La fonction  $G_1$  doit être telle que

$$(3.9) \quad \text{Div } \mathbf{G}_1 = g$$

la fonction  $g$ , injection d'électricité étant donnée sur  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Nous la prolongons à  $\mathbb{R}^3$  en la prenant nulle sur le complémentaire de  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ , et nous remarquons que, l'espace entier devant rester neutre à chaque instant

$$(3.10) \quad \int_{\mathbb{R}^3} g(x, t) dx = 0, \quad \forall t.$$

Cette condition (3.10) est la condition d'intégrabilité de l'équation

$$(3.11) \quad \Delta \Phi + g = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3.$$

Ceci nous incite à choisir, parmi toutes les fonctions  $G_1$  qui satisfont (3.9), celle dont le rotationnel est nul, c'est-à-dire

$$(3.12) \quad G_1 = - \text{grad } \Phi$$

où  $\Phi$  est solution de (3.11). ■

Le problème de l'antenne bipolaire est alors un cas particulier du problème paragraphe 3.1 si le milieu est stable et du problème du paragraphe 3.2 si le milieu est polarisable.

### 3.4. Antenne à fente. Diffraction d'une onde électromagnétique par un supraconducteur

Le problème suivant se pose fréquemment :

Soit  $\{B^{(1)}, D^{(1)}\}$  une onde électromagnétique dans  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire une solution des équations de Maxwell sans second membre dans un milieu *stable* et, en général homogène. Quelle perturbation subit la solution  $\{B^{(1)}, D^{(1)}\}$  si on introduit un corps supraconducteur dans  $\mathbb{R}^3$ ? C'est le problème de la diffraction d'une onde électromagnétique par un supraconducteur. L'antenne à fente peut être schématisée par un phénomène analogue. L'ouvert  $\Omega$  étant l'extérieur d'un corps  $\mathcal{V} = \bar{\Omega}$  borné supraconducteur, soit une répartition de doublets donnée sur un arc de courbe  $\overline{AB}$  de  $\Omega$  (Fig. 4). En l'absence de  $\mathcal{V}$  la répartition donnée de doublets rayonnerait dans  $\mathbb{R}^3$  une onde électromagnétique  $\{B^{(1)}, D^{(1)}\}$ , facile à écrire puisqu'il s'agit d'une distribution de doublets.

La présence du supraconducteur perturbe l'onde  $\{B^{(1)}, D^{(1)}\}$  et nous avons affaire à un phénomène de diffraction.

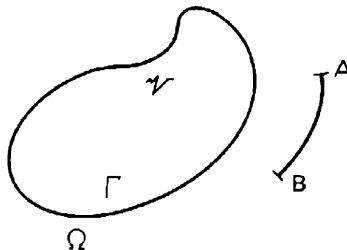


Figure 4.

*Mise en équations*

Posons :

$$(3.13) \quad \{ \mathbf{B}^{(2)}, \mathbf{D}^{(2)} \} = \{ \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{D}^{(1)} \} + \{ \mathbf{B}, \mathbf{D} \}$$

où  $\{ \mathbf{B}^{(2)}, \mathbf{D}^{(2)} \}$  est la solution en présence du corps supraconducteur. Les ondes électromagnétiques  $\{ \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{D}^{(1)} \}$  et  $\{ \mathbf{B}^{(2)}, \mathbf{D}^{(2)} \}$  satisfont aux équations de Maxwell sans second membre, donc du fait de la linéarité, il en est de même de  $\{ \mathbf{B}, \mathbf{D} \}$ , soit

$$(3.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial \mathbf{D} / \gamma t + \sigma \hat{\varepsilon} \mathbf{D} - \text{Rot} (\hat{\mu} \mathbf{B}) = 0 \\ \partial \mathbf{B} / \gamma t + \text{Rot} (\hat{\varepsilon} \mathbf{D}) = 0, \end{array} \right.$$

et à la frontière  $I'$  du supraconducteur

$$(3.15) \quad \mathbf{B}^{(2)} \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{D}^{(2)} \wedge \mathbf{n} = 0$$

d'où il résulte que

$$(3.16) \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{P}^{(1)} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{D} \wedge \mathbf{n} = -\mathbf{D}^{(1)} \wedge \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma.$$

Complétons les équations (3.14) et (3.16) par des données initiales

$$(3.17) \quad \mathbf{B}(x, t) |_{t=0} = \mathbf{B}_0(x), \quad \mathbf{D}(x, t) |_{t=0} = \mathbf{D}_0(x)$$

qui satisfont

$$(3.18) \quad \text{Div } \mathbf{B}_0(x) = 0. \quad \blacksquare$$

**3.5. Récapitulation. Formulation unifiée des problèmes**

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  borné ou non <sup>(1)</sup>, de frontière  $I'$  bornée <sup>(2)</sup> régulière (par exemple  $\Gamma$  est une variété une fois continûment différentiable de dimension 2,  $\Omega$  étant localement d'un seul côté de  $\Gamma$ ).

On note :  $\tilde{\Omega} = \int \Omega$  ( $\tilde{\Omega} = \mathcal{V}$  dans le n° 3.4).

On donne dans  $\Omega$  les fonctions  $\varepsilon$  et  $\mu$  qui sont constantes par morceaux <sup>(3)</sup>; on suppose que, plus précisément

$$(3.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \varepsilon_i, \quad \mu = \mu_i \quad \text{dans } \Omega_i, \quad i = 1, \dots, q \quad (4), \\ \varepsilon_i > 0, \quad \mu_i > 0, \end{array} \right.$$

la frontière commune (cf. Fig. 5)  $\Sigma_{ij}$  à  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$  étant supposée bornée et régulière.

<sup>(1)</sup>  $\Omega$  est borné dans les Problèmes des n°s 3.1 et 3.2, non borné dans les autres cas.

<sup>(2)</sup> Ou vide.

<sup>(3)</sup> On pourrait généraliser ce point à des fonctions régulières par morceaux. On suppose explicitement que  $\varepsilon$  est constante au voisinage de  $\Gamma$ .

<sup>(4)</sup>  $q = 2$  dans les antennes bipolaires.

On cherche alors les champs de vecteurs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{D}$  tels que, avec la notation (3.3) ( $\hat{\mu} = 1/\mu$ ,  $\hat{\varepsilon} = 1/\varepsilon$ ) :

$$(3.20) \quad \partial \mathbf{D} / \partial t + \mathbf{J} - \text{Rot}(\hat{\mu} \mathbf{B}) = \mathbf{G}_1,$$

$$(3.21) \quad \partial \mathbf{B} / \partial t + \text{Rot}(\hat{\varepsilon} \mathbf{D}) = \mathbf{G}_2,$$

$$(3.22) \quad n \wedge \mathbf{D} = 0 \quad \text{sur } \Gamma,$$

$$(3.23) \quad \mathbf{B}(0) = \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{D}(0) = \mathbf{D}_0 \quad \text{sur } \Omega,$$

avec dans les milieux stables :

$$(3.24) \quad \mathbf{J} = \sigma \hat{\varepsilon} \mathbf{D}$$

et avec dans les milieux polarisables :

$$(3.25) \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{J} = \sigma \hat{\varepsilon} \mathbf{D} \quad \text{si } |\mathbf{D}| < \mathcal{D}_0 \text{ (constante positive)} \\ \mathbf{J} = (\sigma + \lambda) \hat{\varepsilon} \mathbf{D} \quad \text{pour } \lambda \geq 0 \text{ convenable si } |\mathbf{D}| = \mathcal{D}_0. \end{array} \right.$$

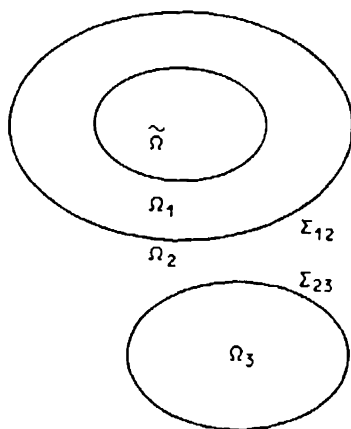


Figure 5.

### Remarque 3.2

Nous « supprimons » de l'énoncé les conditions du type

$$\text{Div } \mathbf{B} = 0, \quad n \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad \text{etc.}$$

qui apparaîtront comme propriétés de la solution du problème ci-dessus lorsque les données  $\mathbf{G}_i$  et  $\mathbf{B}_0, \mathbf{D}_0$  sont « convenables ». ■



*Remarque 3.3*

Les conditions aux interfaces  $\Sigma_{ij}$  sont *conséquences* des équations qui sont prises au sens des distributions dans  $\Omega$  (cf. Remarque 2.2). ■

*Orientation*

Les n<sup>os</sup> 4 à 7 étudient les milieux stables, le n<sup>o</sup> 8 étudie les milieux polarisables. Nous étudierons ensuite les problèmes *non homogènes* correspondant aux « antennes à fente ».

**4. ÉTUDE DES MILIEUX STABLES. PREMIER THÉORÈME D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ**

**4.1. Outils d'analyse fonctionnelle pour la formulation « faible » du problème**

*Remarque sur les notations*

Sauf dans les énoncés des résultats principaux, les vecteurs sont écrits en caractères non gras.

*Espace  $H(\text{Rot}; \Omega)$*

On définit

$$(4.1) \quad H(\text{Rot}; \Omega) = \{ v \mid v \in (L^2(\Omega))^3, \text{Rot } v \in (L^2(\Omega))^3 \}.$$

Muni de la norme (du graphe)

$$(4.2) \quad (\| v \|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \| \text{Rot } v \|_{L^2(\Omega)^3}^2)^{1/2},$$

l'espace  $H(\text{Rot}; \Omega)$  est un espace de Hilbert.

**Lemme 4.1.** *On suppose que  $\Omega$  a une frontière  $\Gamma$  régulière et bornée. Soit  $(C_K^1(\overline{\Omega}))^3$  l'espace des vecteurs une fois continûment différentiables dans  $\overline{\Omega}$  et à support compact dans  $\overline{\Omega}$  (condition sans objet si  $\Omega$  est borné). Alors  $(C_K^1(\overline{\Omega}))^3$  est dense dans  $H(\text{Rot}; \Omega)$ .*

*Démonstration*

Si  $v \in H(\text{Rot}; \Omega)$  et si  $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$  alors  $\varphi v \in H(\text{Rot}; \Omega)$ , l'opérateur « Rot » étant un système différentiel du premier ordre.

Soit alors  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\psi = 1$  dans un voisinage de l'origine, et  $\psi_M$  définie par

$$\psi_M(x) = \psi(x/M).$$

Désignant encore par  $\psi_M$  la restriction de  $\psi_M$  à  $\overline{\Omega}$ , on a :

$$\psi_M v \in H(\text{Rot}; \Omega) \quad \text{si} \quad v \in H(\text{Rot}; \Omega)$$

et on vérifie sans peine que

$$\psi_M v \rightarrow v \quad \text{dans} \quad H(\text{Rot}; \Omega) \quad \text{lorsque} \quad M \rightarrow +\infty.$$

Or  $\forall M, \psi_M v$  est à support compact dans  $\bar{\Omega}$ . On est donc ramené à approcher (au sens de  $H(\text{Rot}; \Omega)$ ) un élément  $v$  à support compact dans  $\bar{\Omega}$ .

On introduit alors un recouvrement ouvert fini  $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_N$  d'un voisinage dans  $\mathbb{R}^3$  de  $\Gamma$ , chaque  $\mathcal{O}_i$  étant un ouvert borné ayant la propriété <sup>(5)</sup> :

$$(4.3) \quad \left| \begin{array}{l} \forall i, \forall \varepsilon > 0 \text{ il existe un vecteur } \lambda_i \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que} \\ \quad |\lambda_i| \leq \varepsilon, \\ \text{et les ouverts translats } \mathcal{O}_i + \lambda_i \text{ formant un recouvrement ouvert} \\ \text{d'un voisinage de } \Gamma \text{ dans } \mathbb{R}^3. \end{array} \right.$$

Alors si  $\alpha_1 \dots \alpha_N$  est une partition de l'unité d'un voisinage de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{R}^3$  subordonnée à  $\{\mathcal{O}_i\}$ ,  $\alpha_i \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_i)$ , on peut écrire

$$(4.4) \quad v = \sum_{i=1}^N \alpha_i v + v_0,$$

$v_0 \in H(\text{Rot}; \Omega)$ , à support compact dans  $\Omega$ .

On peut approcher (par régularisation)  $v_0$  par des éléments de  $\mathcal{D}(\Omega)$  et tout revient donc à approcher  $\alpha_i v = w$  ( $i$  fixé quelconque).

On introduit une suite  $t_n$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  telle que (cf. (4.3))

$$(4.5) \quad \left| \begin{array}{l} |t_n| \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty) \\ w_n(x) = w(x - t_n) \in H(\text{Rot}; \Omega_n), \quad \bar{\Omega} \subset \Omega_n. \end{array} \right.$$

Si alors :

$$\varphi_n = \text{restriction de } w_n \text{ à } \Omega$$

on a :

$$\varphi_n \rightarrow w \text{ dans } H(\text{Rot}; \Omega) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

et, par conséquent, tout revient à approcher par une suite de  $(C_k^1(\bar{\Omega}))^3$

$$\varphi_n = \psi \quad (n \text{ fixé}).$$

Mais (d'après (4.5))  $\psi$  est restriction à  $\Omega$  de  $\Psi \in H(\text{Rot}; \Omega')$ ,  $\Omega' \supset \bar{\Omega}$ . Si l'on introduit  $\theta \in \mathcal{D}(\Omega')$ ,  $\theta = 1$  sur  $\bar{\Omega}$ , on a

$$(4.6) \quad \left| \begin{array}{l} \theta \Psi \in H(\text{Rot}; \mathbb{R}^3) \text{ (en prolongeant } \theta \Psi \text{ par } 0 \text{ hors de } \Omega'). \\ \theta \Psi = \psi \text{ sur } \Omega. \end{array} \right.$$

Mais (par régularisation) il existe  $F_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ ,  $F_j \rightarrow \theta \Psi$  dans  $H(\text{Rot}; \mathbb{R}^3)$  et si  $f_j =$  restriction de  $F_j$  à  $\Omega$ , on en déduit que  $f_j \rightarrow \psi$  dans  $H(\text{Rot}; \Omega)$ ; comme  $f_j \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ , cela termine la démonstration du lemme. ■

<sup>(5)</sup> Variante d'une propriété introduite par Hörmander [1]. Noter qu'un tel recouvrement  $\{\mathcal{O}_i\}$  existe.



Remarque 4.1

La démonstration précédente est générale et n'utilise pas la structure particulière du système différentiel « Rot ». ■

**Lemme 4.2.** *Hypothèses du Lemme 4.1. Soit  $n$  la normale à  $\Gamma$  dirigée (pour fixer les idées) vers l'extérieur de  $\Omega$ . L'application*

$$(4.7) \quad u \rightarrow n \wedge u \mid_{\Gamma} = n \wedge u$$

de  $(C^1_k(\bar{\Omega}))^3 \rightarrow (C^1(\Gamma))^3$ , se prolonge par continuité en une application, encore notée  $u \rightarrow n \wedge u$ , linéaire continue de  $H(\text{Rot}; \Omega) \rightarrow (H^{-1/2}(\Gamma))^3$ .

Démonstration

Pour  $\varphi \in (H^{1/2}(\Gamma))^3$  soit  $\Phi \in (H^1(\Omega))^3$  tel que

$$\Phi \mid_{\Gamma} = \varphi,$$

l'application  $\varphi \rightarrow \Phi$  étant linéaire continue de  $(H^{1/2}(\Gamma))^3 \rightarrow (H^1(\Omega))^3$ .

Pour  $u$  donnée dans  $H(\text{Rot}; \Omega)$ , posons

$$(4.8) \quad \pi(\varphi) = (\text{Rot } u, \Phi) - (u, \text{Rot } \Phi)$$

où, de façon générale

$$(4.9) \quad (f, g) = \int_{\Omega} f_i g_i dx.$$

La notation (4.8) est légitime. En effet, le deuxième membre est *indépendant du choix* de  $\Phi$  (pourvu que  $\Phi \mid_{\Gamma} = \varphi$ ); si en effet  $\Psi$  est un deuxième vecteur tel que  $\Psi \in (H^1(\Omega))^3$ ,  $\Psi \mid_{\Gamma} = \varphi$ , alors

$$\Phi - \Psi = \Theta \in (H^1_0(\Omega))^3$$

et alors

$$(\text{Rot } u, \Theta) = (u, \text{Rot } \Theta).$$

L'application  $\varphi \rightarrow \pi(\varphi)$  est linéaire continue sur  $(H^{1/2}(\Gamma))^3$ , donc de la forme

$$(4.10) \quad \begin{cases} \pi(\varphi) = (\sigma_u, \varphi)_{\Gamma}, & \sigma_u \in (H^{-1/2}(\Gamma))^3, \\ ( \quad , \quad )_{\Gamma} \text{ désignant le produit scalaire entre } (H^{-1/2}(\Gamma))^3 \text{ et } (H^{1/2}(\Gamma))^3, \\ u \rightarrow \sigma_u \text{ étant linéaire continue de } H(\text{Rot}; \Omega) \rightarrow (H^{-1/2}(\Gamma))^3. \end{cases}$$

Mais si  $u \in (C^1_k(\bar{\Omega}))^3$  on a :

$$(4.11) \quad (\text{Rot } u, \Phi) - (u, \text{Rot } \Phi) = \int_{\Gamma} (n \wedge u) \varphi d\Gamma \quad (\Phi \mid_{\Gamma} = \varphi)$$

donc

$$\sigma_u = n \wedge u \quad \text{si} \quad u \in (C^1_k(\bar{\Omega}))^3$$

d'où le lemme. ■

Le Lemme 4.2 permet d'introduire l'espace

$$(4.12) \quad H_0(\text{Rot}; \Omega) = \{ v \mid v \in H(\text{Rot}; \Omega), n \wedge v = 0 \text{ sur } \Gamma \},$$

qui est fermé dans  $H(\text{Rot}; \Omega)$ .

**Lemme 4.3.** *Hypothèses du Lemme 4.1. Soit*

$$(4.13) \quad X = \text{espace des vecteurs } \varphi \text{ de } (C^1_k(\bar{\Omega}))^3 \text{ tels que } n \wedge \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

L'espace  $X$  est dense dans  $H_0(\text{Rot}; \Omega)$ .

*Démonstration*

Pour  $u \in H_0(\text{Rot}; \Omega)$ , soit  $\tilde{u}$  = prolongement de  $u$  à  $\mathbb{R}^3$  par 0 hors de  $\Omega$ ; alors, si  $\Phi \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}^3))^3$ , on a (\*)

$$\begin{aligned} (\text{Rot } \tilde{u}, \Phi)_{\mathbb{R}^3} &= (\tilde{u}, \text{Rot } \Phi)_{\mathbb{R}^3} = (u, \text{Rot } \varphi)_{\Omega} = (\text{Rot } u, \varphi)_{\Omega} - \\ &\quad - (n \wedge u, \varphi)_{\Gamma} = (\text{Rot } u, \varphi)_{\Omega} \quad (\text{car } n \wedge u = 0 \text{ sur } \Gamma) \end{aligned}$$

donc

$$\text{Rot } (\tilde{u}) = (\text{Rot } \tilde{u}) \in (L^2(\mathbb{R}^3))^3$$

donc  $\tilde{u} \in H(\text{Rot}; \mathbb{R}^3)$ ,  $\tilde{u}$  étant évidemment à support dans  $\bar{\Omega}$ .

On introduit  $\{ \vartheta_i \}, \{ \alpha_i \}$  comme dans la démonstration du Lemme 4.1 (\*).

On peut écrire

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^q \alpha_i \tilde{u}_i + u_0,$$

$u_0 \in H(\text{Rot}; \mathbb{R}^3)$  à support compact dans  $\Omega$ , et tout revient à approcher  $\alpha_i \tilde{u}_i = w$ .

On effectue maintenant (comme dans (4.5)) des *translations*, mais alors que dans (4.5) on effectuait des translations « vers l'extérieur » de  $\Omega$ , on amène ici  $w$  « vers l'intérieur » de  $\Omega$  : on considère  $t_n \in \mathbb{R}^3$  tels que

$$(4.14) \quad \left| \begin{array}{l} |t_n| \rightarrow 0, \\ (\mathcal{O}_i \cap \Omega) + t_n \subset \Omega : \end{array} \right.$$

on définit  $w_n$  par

$$w_n(x) = w(x - t_n);$$

$w_n \in H(\text{Rot}; \mathbb{R}^3)$  et  $w_n$  est à support compact dans  $\Omega$ .

On approche donc  $w_n$  (au sens de  $H(\text{Rot}; \Omega)$ ) par des éléments de  $(\mathcal{D}(\Omega))^3$  par régularisation, d'où le lemme. ■

(\*) Les indices dénotent les domaines d'intégration. On désigne par  $\varphi$  la restriction de  $\Phi$  à  $\Omega$ .

(\*) On raisonne maintenant *exactement* comme dans Hörmander [1], Théorème 1.

*Remarque 4.2*

On a en fait démontré davantage que le lemme, à savoir

$$(4.15) \quad \mathcal{D}(\Omega)^3 \text{ est dense dans } H_0(\text{Rot}; \Omega). \quad \blacksquare$$

**4.2. Opérateur  $\mathcal{A}$ . Formulation « faible » du problème***Espace  $\mathcal{H}$* 

On pose

$$(4.16) \quad \mathcal{H} = (L^2(\Omega))^6 = (L^2(\Omega))^3 \times (L^2(\Omega))^3;$$

si  $\Phi = \{\varphi, \psi\} \in \mathcal{H}$  ( $\varphi \in (L^2(\Omega))^3$ ,  $\psi \in (L^2(\Omega))^3$ ), et si  $\Phi_* = \{\varphi_*, \psi_*\} \in \mathcal{H}$ , on pose

$$(4.17) \quad (\Phi, \Phi_*)_{\mathcal{H}} = (\hat{\varepsilon}\varphi, \varphi_*) + (\hat{\mu}\psi, \psi_*),$$

(où l'on utilise la notation (4.9)); comme les fonctions  $\hat{\varepsilon}$  et  $\hat{\mu}$  sont *bornées* dans  $\Omega$  et vérifient

$$(4.18) \quad \inf \hat{\varepsilon} > 0, \quad \inf \hat{\mu} > 0,$$

le produit scalaire (4.17) est *équivalent* au produit scalaire « usuel »

$$(\varphi, \varphi_*) + (\psi, \psi_*). \quad \blacksquare$$

*Remarque 4.3*

Naturellement le choix du produit scalaire particulier (4.17) n'est pas absolument indispensable — puisque le résultat final (Théorème 4.1) est *indépendant* du produit scalaire sur  $\mathcal{H}$ ; mais, par contre, ce choix simplifie les démonstrations, puisque, par exemple, la propriété (4.24) ci-dessous *dépend* du produit scalaire sur  $\mathcal{H}$ .  $\blacksquare$

*Le domaine  $D(\mathcal{A})$* 

Pour définir l'opérateur non borné  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{H}$ , on définit d'abord son domaine  $D(\mathcal{A})$  :

$$(4.19) \quad D(\mathcal{A}) = \{ \Phi \mid \Phi = \{\varphi, \psi\} \in \mathcal{H}, \text{ Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi) \in (L^2(\Omega))^3, \\ \text{Rot}(\hat{\mu}\psi) \in (L^2(\Omega))^3, n \wedge \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma \}. \quad \blacksquare$$

*Remarque 4.4*

La définition (4.19) *a un sens*; il faut pour cela vérifier que  $n \wedge \varphi$  a un sens; or  $\hat{\varepsilon}$  est constante au voisinage de  $\Gamma$ ; il existe donc un ouvert  $\Omega_1 \subset \Omega$  (comme à la figure 5) tel que  $\Gamma \subset$  frontière de  $\Omega_1$ ; alors

$$(4.20) \quad \varphi \in H(\text{Rot}; \Omega_1)$$

et la frontière  $\partial\Omega_1$  de  $\Omega_1$  comprenant  $\Gamma$ , on peut (variante immédiate du Lemme 4.2) définir

$$(4.21) \quad n \wedge \varphi \in (H^{-1/2}(\Gamma))^3,$$

et

$$(4.22) \quad \left| \begin{array}{l} \text{l'application } \varphi \rightarrow n \wedge \varphi \text{ est linéaire continue de} \\ H(\text{Rot}; \Omega_1) \rightarrow (H^{-1/2}(\Gamma))^3. \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

*Opérateur  $\mathcal{A}$*

Pour  $\Phi \in D(\mathcal{A})$  on pose

$$(4.23) \quad \mathcal{A}\Phi = \{ -\text{Rot}(\hat{\mu}\psi), \text{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi) \} \quad (\in \mathcal{H}).$$

On a le

**Lemme 4.4.** *Le domaine  $D(\mathcal{A})$  est dense dans  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{A}$  est fermé. On a :*

$$(4.24) \quad \mathcal{A}^* = -\mathcal{A}, \quad D(\mathcal{A}^*) = D(\mathcal{A}).$$

*Démonstration*

Désignons par  $(\pi\mathcal{D}(\Omega_i))^6$  l'espace des  $\Phi$  telles que la restriction  $\Phi^i$  de  $\Phi$  à  $\Omega_i$  soit dans  $\mathcal{D}(\Omega_i)^6$ ,  $i = 1, \dots, q$ . Evidemment  $(\pi\mathcal{D}(\Omega_i))^6$  est dense dans  $\mathcal{H}$  et contenu dans  $D(\mathcal{A})$  donc  $D(\mathcal{A})$  est dense dans  $\mathcal{H}$ .

Vérifions que  $\mathcal{A}$  est fermé. Si  $\Phi_j \in D(\mathcal{A})$ ,  $\Phi_j = \{ \varphi_j, \psi_j \} \rightarrow \Phi$  dans  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{A}\Phi_j \rightarrow \Psi$  dans  $\mathcal{H}$ , on a :

$$\varphi_j \rightarrow \varphi, \quad \psi_j \rightarrow \psi \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^3$$

et  $\text{Rot}(\hat{\mu}\psi_j)$  et  $\text{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi_j)$  convergent dans  $(L^2(\Omega))^3$ ; mais  $\text{Rot}(\hat{\mu}\psi_j) \rightarrow \text{Rot}(\hat{\mu}\psi)$  dans  $(\mathcal{D}'(\Omega))^3$ ,  $\text{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi_j) \rightarrow \text{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi)$  dans  $(\mathcal{D}'(\Omega))^3$  donc

$$\text{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi) \in (L^2(\Omega))^3, \quad \text{Rot}(\hat{\mu}\psi) \in (L^2(\Omega))^3.$$

Par ailleurs  $\varphi_j^1$  (restriction de  $\varphi_j$  à  $\Omega_1$ )  $\rightarrow \varphi^1$  dans  $H(\text{Rot}; \Omega_1)$  et donc (cf. (4.22))  $n \wedge \varphi_j^1 (= 0) \rightarrow n \wedge \varphi^1$  (sur  $\Gamma$ ) dans  $(H^{-1/2}(\Gamma))^3$ , donc  $n \wedge \varphi^1 = 0$  sur  $\Gamma$ , donc  $\Phi \in D(\mathcal{A})$ .

Notons maintenant que l'on peut décrire  $D(\mathcal{A})$  de la façon suivante : si

$$\Phi = \{ \varphi, \psi \}, \quad \Phi^i = \{ \varphi^i, \psi^i \} = \text{restriction de } \Phi \text{ à } \Omega_i,$$

alors

$$(4.25) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Rot } \varphi^i, \text{Rot } \psi^i \in (L^2(\Omega_i))^3, \\ \hat{\mu}_i n \wedge \psi^i = \hat{\mu}_j n \wedge \psi^j \quad \text{sur } \Sigma_{ij} \text{ (même } n), \\ \hat{\varepsilon}_i n \wedge \varphi^i = \hat{\varepsilon}_j n \wedge \varphi^j \quad \text{sur } \Sigma_{ij}, \quad n \wedge \varphi^1 = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{array} \right.$$

et réciproquement.

Soit alors  $\Phi_* \in D(\mathcal{A}^*)$ , i.e. un élément de  $\mathcal{H}$  tel que la forme linéaire

$$\Phi \rightarrow (\mathcal{A}\Phi, \Phi_*)_{\mathcal{H}}$$

soit continue sur  $D(\mathcal{A})$  pour la topologie induite par  $\mathcal{H}$ . La forme  $\Phi \rightarrow (\mathcal{A}\Phi, \Phi_*)_{\mathcal{H}}$  est donc en particulier continue sur  $(\pi\mathcal{D}(\Omega_i))^6$  pour la topologie induite par  $\mathcal{H}$ ; or si  $\Phi \in (\pi\mathcal{D}(\Omega_i))^6$ , on a :

$$(\mathcal{A}\Phi, \Phi_*) = - \sum_i (\hat{\mu}_i \psi^i, \text{Rot}(\hat{\varepsilon}_i \varphi_*^i))_{\Omega_i} + \sum_i (\hat{\varepsilon}_i \varphi^i, \text{Rot}(\hat{\mu}_i \psi_*^i))_{\Omega_i},$$

d'où résulte que

$$\text{Rot}(\hat{\varepsilon}_i \varphi_*^i) \in (L^2(\Omega_i))^3, \quad \text{Rot}(\hat{\mu}_i \psi_*^i) \in (L^2(\Omega_i))^3$$

ou encore

$$(4.26) \quad \text{Rot} \varphi_*^i \in (L^2(\Omega_i))^3, \quad \text{Rot} \psi_*^i \in (L^2(\Omega_i))^3.$$

On peut alors (Lemme 4.2) définir  $n \wedge \varphi_*^i$ ,  $n \wedge \psi_*^i$  sur  $\Sigma_{ij}$  et  $\Gamma$ .

Prenons maintenant  $\Phi \in D(\mathcal{A})$  avec  $\Phi^i \in (C_K^1(\bar{\Omega}_i))^6$ , et donc vérifiant les relations (4.25). Alors

$$(4.27) \quad \begin{aligned} (\mathcal{A}\Phi, \Phi_*) &= - \sum_i (\text{Rot}(\hat{\mu}_i \psi^i), \hat{\varepsilon}_i \varphi_*^i)_{\Omega_i} + \sum_i (\text{Rot}(\hat{\varepsilon}_i \varphi^i), \mu_i \psi_*^i)_{\Omega_i} = \\ &= - \int_{\Sigma_{ij}} (n \wedge \psi^i) \varphi_*^i \hat{\mu}_i \hat{\varepsilon}_i d\Sigma_{ij} + \int_{\Sigma_{ij}} (n \wedge \varphi^i) \psi_*^i \hat{\varepsilon}_i \hat{\mu}_i d\Sigma_{ij} - \\ &\quad - \int_{\Gamma} (n \wedge \psi^i) \varphi_*^i \hat{\varepsilon}_i \hat{\mu}_i d\Gamma - (\hat{\mu}\psi, \text{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi_*)) + (\hat{\varepsilon}\varphi, \text{Rot}(\mu\psi_*)). \end{aligned}$$

D'après (4.26) les intégrales de volume dans (4.27) sont continues pour  $\Phi$  variant dans la topologie induite par  $\mathcal{H}$  et donc il en est de même de la somme des intégrales de surfaces — donc les intégrales :

$$(4.28) \quad \left| \begin{array}{l} \int_{\Sigma_{ij}} ((n \wedge \psi^i) \varphi_*^i \hat{\varepsilon}_i \hat{\mu}_i - (n \wedge \psi^j) \varphi_*^j \hat{\varepsilon}_j \hat{\mu}_j) d\Sigma_{ij}, \\ \int_{\Sigma_{ij}} ((n \wedge \varphi^i) \psi_*^i \hat{\varepsilon}_i \hat{\mu}_i - (n \wedge \varphi^j) \psi_*^j \hat{\varepsilon}_j \hat{\mu}_j) d\Sigma_{ij}, \\ \int_{\Gamma} (n \wedge \psi^i) \varphi_*^i \hat{\varepsilon}_i \hat{\mu}_i d\Gamma \end{array} \right.$$

sont continues pour la topologie induite par  $\mathcal{H}$ .

Tenant compte de (4.25), la première intégrale dans (4.28) vaut

$$- \int_{\Sigma_{ij}} \{ \hat{\varepsilon}_i n \wedge \varphi_*^i - \hat{\varepsilon}_j n \wedge \varphi_*^j \} \mu_j \psi^j d\Sigma_{ij}$$

qui est continue pour la topologie induite par  $\mathcal{H}$  si et seulement si

$$\hat{\varepsilon}_i n \wedge \varphi_*^i = \hat{\varepsilon}_j n \wedge \varphi_*^j \quad \text{sur} \quad \Sigma_{ij}.$$

La deuxième intégrale dans (4.28) conduit de la même façon à

$$\hat{\mu}_i n \wedge \psi_*^i = \hat{\mu}_j n \wedge \psi_*^j \quad \text{sur} \quad \Sigma_{ij}$$

et la troisième intégrale à  $n \wedge \varphi_*^i = 0$  sur  $\Sigma$ .

Donc  $\Phi_* \in D(\mathcal{A})$  et  $\mathcal{A}^* \Phi_* = -\mathcal{A}\Phi$ . Réciproquement, si  $\Psi \in D(\mathcal{A})$  alors,

$$\forall \Phi \in D(\mathcal{A}), \quad (\mathcal{A}\Phi, \Psi)_{\mathcal{H}} = -(\Phi, \mathcal{A}\Psi)_{\mathcal{H}},$$

donc  $\Psi \in D(\mathcal{A}^*)$ , d'où (4.24). ■

On est maintenant en mesure de poser le problème suivant :  
on pose

$$(4.29) \quad \mathcal{M}\Phi = \{ \sigma \hat{\varepsilon} \varphi, 0 \} \quad \text{si} \quad \Phi = \{ \varphi, \psi \}$$

ce qui définit

$$(4.30) \quad \mathcal{M} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H}).$$

On cherche une fonction  $U = \{ D, B \}$  telle que

$$(4.31) \quad U \in L^\infty(0, T; \mathcal{H}),$$

$$(4.32) \quad \left| \int_0^T [ - (U, \partial\Phi/\partial t)_{\mathcal{H}} - (U, \mathcal{A}\Phi)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{M}U, \Phi)_{\mathcal{H}} ] dt = \int_0^T (G, \Phi)_{\mathcal{H}} dt + (U_0, \Phi(0))_{\mathcal{H}} \right.$$

$\forall \Phi$  telle que

$$(4.33) \quad \left| \begin{array}{l} \Phi \in L^2(0, T; D(\mathcal{A})), \\ \partial\Phi/\partial t \in L^2(0, T; \mathcal{H}), \quad \Phi(T) = 0; \end{array} \right.$$

dans (4.32),  $G$  et  $U_0$  sont donnés avec

$$(4.34) \quad G = \{ G_1, G_2 \} \in L^2(0, T; \mathcal{H}),$$

$$(4.35) \quad U_0 = \{ D_0, B_0 \} \in \mathcal{H}.$$

Nous allons vérifier le

**Lemme 4.5.** *Le problème (4.31), (4.32) est une formulation « faible » du problème de Maxwell pour milieux « stables ».*

#### Démonstration

En effet supposons que  $U = \{ D, B \}$  vérifie (3.20)... (3.24). Alors si nous prenons  $\Phi = \{ \varphi, \psi \}$  avec (4.33) et que nous prenons les produits scalaires de (3.20) et (3.21) respectivement avec  $\hat{\varepsilon}\varphi$  et  $\hat{\mu}\psi$ , nous obtenons (4.32) après intégration par parties. ■

#### Orientation

Nous allons maintenant (au n° 4.3 qui suit) résoudre le problème (4.31), (4.32). Puis aux n°s 5 et 6, nous étudierons la question de l'existence de solutions « fortes » pour le problème. ■





et d'après le lemme de Gronwall, on a :

$$(4.41) \quad \|U_m(t)\|_{\mathcal{X}} \leq \text{constante indépendante de } m.$$

D'après (4.41) on peut alors extraire une suite  $U_\mu$  telle que

$$(4.42) \quad U_\mu \rightarrow U \quad \text{dans } L^\infty(0, T; \mathcal{H}) \text{ faible étoile.}$$

Soit alors :

$$(4.43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_j \in C^1([0, T]), \quad \xi_j(T) = 0, \\ \sum_{j=1}^{m_0} \xi_j \Phi_j = \Psi. \end{array} \right.$$

On utilise (4.37) pour  $m = \mu$ ; on multiplie par  $\xi_j$ ,  $j \leq m_0 \leq \mu$ ; sommant en  $j$  et intégrant par parties, on a, en tenant compte de (4.24) :

$$(4.44) \quad \left| \int_0^T [- (U_\mu, \partial\Psi/\partial t)_{\mathcal{X}} - (U_\mu, \mathcal{A} * \Psi)_{\mathcal{X}} + (\mathcal{M}U_\mu, \Psi)_{\mathcal{X}}] dt = \int_0^T (G, \Psi)_{\mathcal{X}} dt + (U_{0\mu}, \Psi(0))_{\mathcal{X}}. \right.$$

Grâce à (4.42) et (4.38) on peut passer à la limite dans (4.44). On obtient donc l'existence de  $U$  satisfaisant à (4.31) et à (4.32), pour toute fonction  $\Phi = \Psi$  de la forme (4.43).

Mais grâce à (4.36), si  $\Phi$  est donnée avec (4.33) on peut trouver une suite  $\Psi_k$  de fonctions de la forme (4.43) telles que  $\Psi_k \rightarrow \Phi$  dans  $L^2(0, T; D(\mathcal{A}))$ ,

$$\partial\Psi_k/\partial t \rightarrow \partial\Phi/\partial t \quad \text{dans } L^2(0, T; \mathcal{H}),$$

donc (4.32) a lieu  $\forall\Phi$  avec (4.33). ■

*Démonstration de l'unicité*

Supposons que l'on ait (4.32) avec  $G = 0$ ,  $U_0 = 0$ .

Soit  $\tilde{U}$  = prolongement de  $U$  par 0 pour  $t < 0$ ; prenons alors dans (4.32)

$$\Phi = \xi\Psi,$$

$$\xi = \text{restriction à } [0, T] \text{ de } \Xi \in \mathcal{D}'(-\infty, T[).$$

On en déduit, au sens de  $\mathcal{D}'(-\infty, T[)$  :

$$d(\tilde{U}, \Psi)_{\mathcal{X}}/dt - (\tilde{U}, \mathcal{A}\Psi)_{\mathcal{X}} + (\mathcal{M}\tilde{U}, \Psi)_{\mathcal{X}} = 0.$$

Si  $\tilde{U}$  désigne le prolongement par 0 pour  $t > T$ , on obtient sur  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  cette fois :

$$(4.45) \quad d(\tilde{U}, \Psi)_{\mathcal{X}}/dt - (\tilde{U}, \mathcal{A}\Psi)_{\mathcal{X}} + (\mathcal{M}\tilde{U}, \Psi)_{\mathcal{X}} = c\delta(t - T).$$

Si  $\rho \in \mathcal{D}(R)$ , à support dans  $[0, \varepsilon]$ , on déduit de (4.45) par convolution en  $t$  par  $\rho$  :

$$(4.46) \quad \left( \frac{d}{dt} (\tilde{U} * \rho), \Psi \right)_{\mathcal{X}} - (\tilde{U} * \rho, \mathcal{A}\Psi)_{\mathcal{X}} + (\mathcal{M}(\tilde{U} * \rho), \Psi) = c\rho(t - T)$$

d'où, comme  $\rho(t - T) = 0$  si  $t \leq T$  :

$$(4.47) \quad \left| \left( \frac{d}{dt} (\tilde{U} * \rho(t)), \Psi \right)_{\mathcal{H}} - (\tilde{U} * \rho(t), \mathcal{A}\Psi)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{M}(\tilde{U} * \rho(t)), \Psi)_{\mathcal{H}} \right| = 0, \quad t \leq T.$$

Mais on déduit de (4.47) que la forme

$$\Psi \rightarrow (\tilde{U} * \rho(t), \mathcal{A}\Psi)_{\mathcal{H}}$$

est continue sur  $D(\mathcal{A})$  pour la topologie induite par  $\mathcal{H}$ . Donc  $\tilde{U} * \rho(t) \in D(\mathcal{A})$  et on peut prendre  $\Psi = \tilde{U} * \rho(t)$  dans (4.47) ; utilisant (4.24) on en déduit que (posant  $\tilde{U} * \rho(t) = w(t)$ ) :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_{\mathcal{H}}^2 + (\mathcal{M}w(t), w(t))_{\mathcal{H}} = 0, \quad t \leq T,$$

$w = 0$  si  $t \leq 0$ , d'où  $w = 0$ . Donc

$$\tilde{U} * \rho = 0 \quad \text{dans} \quad t < T, \quad \forall \rho$$

donc  $U = 0$ . ■

#### 4.4. Dépendance continue de la solution en les constantes diélectriques et les perméabilités magnétiques

Soit  $\{\varepsilon^j, \mu^j\}$  une suite de fonctions telles que

$$(4.48) \quad \left| \begin{array}{l} \hat{\varepsilon}^j = 1/\varepsilon^j, \quad \hat{\mu}^j = 1/\mu^j \in \text{borné de } L^\infty(\Omega), \\ \hat{\varepsilon}^j \geq c_1 > 0, \quad \hat{\mu}^j \geq c_2 > 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega, \\ \varepsilon^j, \mu^j \text{ sont constantes par morceaux, } \varepsilon^j = \text{Cte dans un voisinage de } \Gamma; \end{array} \right.$$

$$(4.49) \quad \hat{\varepsilon}^j \rightarrow \hat{\varepsilon}, \quad \hat{\mu}^j \rightarrow \hat{\mu} \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

et soit  $\sigma^j$  avec

$$(4.50) \quad \sigma^j \in \text{borné de } L^\infty(\Omega), \quad \sigma^j \rightarrow \sigma \quad \text{p.p.},$$

où  $\varepsilon, \mu, \sigma$  sont donnés comme dans les sections précédentes.

Soient  $\mathcal{A}^j$  et  $\mathcal{M}^j$  les opérateurs analogues à  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{M}$  correspondants aux  $\varepsilon^j, \mu^j, \sigma^j$ .

Soit  $U^j$  la solution correspondante du problème analogue au problème (4.31), (4.32). On a le :

**Théorème 4.2.** *Sous les hypothèses (4.48), (4.49), (4.50), on a :*

$$(4.51) \quad U^j \rightarrow U \quad \text{dans } L^\infty(0, T; \mathcal{H}) \text{ faible étoile.}$$

*Démonstration*

Soit  $U_m^j$  la solution approchée du problème (analogue à (4.37))

$$(4.52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{d}{dt} U_m^j(t), \Phi_k \right)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{A}^j U_m^j(t), \Phi_k)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{M}^j U_m^j(t), \Phi_k)_{\mathcal{H}} = (G(t), \Phi_k)_{\mathcal{H}} \\ U_m^j(0) = U_{0m} \end{array} \right. \quad 1 \leq k \leq m,$$

Alors (en utilisant seulement ici (4.50), car le terme en  $\mathcal{A}^j$  disparaît) on obtient

$$\| U_m^j(t) \|_{\mathcal{H}} \leq \text{Cte indépendante de } m \text{ et de } j.$$

On obtient donc :

$$(4.53) \quad U^j \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; \mathcal{H}).$$

On peut donc extraire une suite encore notée  $U^j$  telle que

$$(4.54) \quad U^j \rightarrow U_* \text{ dans } L^\infty(0, T; \mathcal{H}) \text{ faible étoile.}$$

On aura donc (4.51) si l'on peut montrer que  $U_*$  est solution du problème (4.31), (4.32), donc que  $U_* = U$ . Or introduisons  $\Phi^j$  avec

$$(4.55) \quad \Phi^j \in L^2(0, T; D(\mathcal{A}^j)), \quad (\Phi^j)' \in L^2(0, T; \mathcal{H}'), \quad \Phi^j(T) = 0.$$

On a :

$$(4.56) \quad \int_0^T \{ - (U^j, (\Phi^j)')_{\mathcal{H}} - (U^j, \mathcal{A}^j \Phi^j)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{M}^j U^j, \Phi^j)_{\mathcal{H}} \} dt = \\ = \int_0^T (G, \Phi^j)_{\mathcal{H}} dt + (U_0, \Phi^j(0))_{\mathcal{H}}.$$

Admettons un instant le

**Lemme 4.6.** *On peut trouver, pour  $\Phi$  donnée avec (4.33) et telle que*

$$\Phi' \in L^2(0, T; D(\mathcal{A})),$$

*une suite  $\Phi^j$  de fonctions satisfaisant à (4.55) et telles que*

$$(4.57) \quad \Phi^j \rightarrow \Phi \text{ dans } L^2(0, T; \mathcal{H}'), \quad (\Phi^j)' \rightarrow \Phi' \text{ dans } L^2(0, T; \mathcal{H}).$$

$$(4.58) \quad \mathcal{A}^j \Phi^j \rightarrow \mathcal{A} \Phi \text{ dans } L^2(0, T; \mathcal{H}).$$

Grâce à (4.54), (4.57), (4.58) on peut passer à la limite dans (4.56) ; on obtient ainsi que  $U_*$  satisfait à (4.32) car l'espace des  $\Phi$  vérifiant les conditions du Lemme 4.6 est dense dans l'espace des  $\Phi$  vérifiant (4.33), d'où le théorème, sous réserve de la démonstration du Lemme 4.6. ■

Commençons par la démonstration d'un autre lemme, intéressant en lui-même :

**Lemme 4.7.** *Soit  $f$  donné dans  $\mathcal{H}$ . Pour tout  $\lambda > 0$ , il existe  $U \in D(\mathcal{A})$  unique tel que*

$$(4.59) \quad (\mathcal{A} + \lambda) U = f,$$

et l'on a

$$(4.60) \quad \|U\|_{\mathcal{H}} \leq \lambda^{-1} \|f\|_{\mathcal{H}}.$$

*Remarque 4.5*

Le Lemme 4.7 exprime que  $-\mathcal{A}$  est *générateur infinitésimal* d'un semi-groupe de contractions dans  $\mathcal{H}$  <sup>(8)</sup> (cf. aussi n° 10). ■

*Démonstration du Lemme 4.7*

On applique la méthode de Galerkin; soit  $\Phi_1, \dots, \Phi_m \dots$  une base de  $D(\mathcal{A})$ , comme dans la démonstration du Théorème 4.1 et soit  $U_m \in [\Phi_1, \dots, \Phi_m]$  vérifiant

$$(4.61) \quad ((\mathcal{A} + \lambda) U_m, \Phi_j)_{\mathcal{H}} = (f, \Phi_j)_{\mathcal{H}}, \quad 1 \leq j \leq m;$$

le système d'équations (en dimension finie) (4.61) admet une solution unique; si  $U_m = \xi_j \Phi_j$ , multipliant (4.61) par  $\xi_j$  et sommant en  $j$ , il vient, comme  $(\mathcal{A} U_m, U_m)_{\mathcal{H}} = 0$ :

$$\lambda \|U_m\|_{\mathcal{H}}^2 = (f, U_m)_{\mathcal{H}}$$

d'où  $\|U_m\|_{\mathcal{H}} \leq \lambda^{-1} \|f\|_{\mathcal{H}}$ . On peut donc extraire une suite  $U_\mu$  telle que

$$U_\mu \rightarrow U_* \quad \text{dans } \mathcal{H} \text{ faible.}$$

Prenant (4.61) pour  $m = \mu$  et avec  $j$  fixé  $\leq \mu$ , que l'on écrit

$$\lambda(U_\mu, \Phi_j)_{\mathcal{H}} - (U_\mu, \mathcal{A} \Phi_j)_{\mathcal{H}} = (f, \Phi_j)_{\mathcal{H}},$$

on obtient à la limite

$$\lambda(U_*, \Phi_j)_{\mathcal{H}} - (U_*, \mathcal{A} \Phi_j)_{\mathcal{H}} = (f, \Phi_j)_{\mathcal{H}}$$

et cela ayant lieu  $\forall j$  on a donc

$$(4.62) \quad \lambda(U_*, \Phi)_{\mathcal{H}} - (U_*, \mathcal{A} \Phi)_{\mathcal{H}} = (f, \Phi)_{\mathcal{H}}, \quad \forall \Phi \in D(\mathcal{A}).$$

On en déduit que la forme  $\Phi \rightarrow (U_*, \mathcal{A} \Phi)_{\mathcal{H}}$  est continue sur  $D(\mathcal{A})$  pour la topologie induite par  $\mathcal{H}$ , donc que  $U_* \in D(\mathcal{A})$  et que (4.62) s'écrit

$$((\mathcal{A} + \lambda) U_*, \Phi)_{\mathcal{H}} = (f, \Phi)_{\mathcal{H}}, \quad \forall \Phi \in D(\mathcal{A});$$

<sup>(8)</sup> Le choix de la norme dans  $\mathcal{H}$  est ici très important.

donc  $U_*$  est solution de (4.59) et l'on peut prendre  $U = U_*$ ; comme  $(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = 0$  on déduit de (4.59) que

$$\lambda \|U\|_{\mathcal{H}}^2 = (f, U)_{\mathcal{H}}$$

d'où l'unicité et (4.60). ■

*Démonstration du Lemme 4.6*

Pour  $\Phi = \Phi(t)$  donné, on définit  $\Phi^j(t)$  (p.p. en  $t$ ) comme étant la solution dans  $D(\mathcal{A}^j)$  de

$$(4.63) \quad (\mathcal{A}^j + \lambda) \Phi^j(t) = (\mathcal{A} + \lambda) \Phi(t), \quad (\lambda > 0 \text{ fixé}).$$

D'après le Lemme 4.7,  $\Phi^j(t)$  existe et est unique dans  $D(\mathcal{A}^j)$ . On vérifie sans peine que (comme  $\Phi' \in L^2(0, T; D(\mathcal{A}))$ )

$$(4.64) \quad (\mathcal{A}^j + \lambda) (\Phi^j(t))' = (\mathcal{A} + \lambda) \Phi'(t).$$

Tout revient alors à montrer que

$$(4.65) \quad \Phi^j \rightarrow \Phi \quad \text{dans } L^2(0, T; \mathcal{H}) \text{ faible}.$$

En effet, si l'on admet un instant (4.65), alors (4.63) entraîne

$$\begin{aligned} \int_0^T ((\mathcal{A}^j + \lambda) \Phi^j, \Phi^j)_{\mathcal{H}} dt &= \lambda \int_0^T \|\Phi^j\|_{\mathcal{H}}^2 dt = \int_0^T ((\mathcal{A} + \lambda) \Phi, \Phi^j)_{\mathcal{H}} dt \\ &\rightarrow \int_0^T ((\mathcal{A} + \lambda) \Phi, \Phi)_{\mathcal{H}} dt = \lambda \int_0^T \|\Phi\|_{\mathcal{H}}^2 dt \end{aligned}$$

donc

$$\int_0^T \|\Phi^j\|_{\mathcal{H}}^2 dt \rightarrow \int_0^T \|\Phi\|_{\mathcal{H}}^2 dt$$

ce qui, joint à (4.65) montre la convergence dans  $L^2(0, T; \mathcal{H})$  fort. Mais alors  $\mathcal{A}^j \Phi^j = (\mathcal{A} + \lambda) \Phi - \lambda \Phi^j \rightarrow \mathcal{A} \Phi$  dans  $L^2(0, T; \mathcal{H})$  fort et de la même façon (4.64) montrera que  $(\Phi^j)' \rightarrow \Phi'$  dans  $L^2(0, T; \mathcal{H})$  fort — ainsi d'ailleurs que  $\mathcal{A}^j(\Phi^j)' \rightarrow \mathcal{A} \Phi'$  dans  $L^2(0, T; \mathcal{H})$ .

Reste donc à montrer (4.65). On déduit de (4.63) que

$$\|\Phi^j(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \lambda^{-1} \|(\mathcal{A} + \lambda) \Phi(t)\|_{\mathcal{H}}$$

donc que

$$(4.66) \quad \Phi^j \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; \mathcal{H}).$$

On peut alors extraire une suite — encore notée  $\Phi^j$  — telle que

$$(4.67) \quad \Phi^j \rightarrow \Phi_* \quad \text{dans } L^2(0, T; \mathcal{H}) \text{ faible}.$$

Il reste à montrer que  $\Phi_* = \Phi$ . Or si  $\Theta = \{\theta, \chi\} \in (\mathcal{D}(Q))^6$  où  $Q = \Omega \times ]0, T[$ ,  $\Phi^j = \{\varphi^j, \psi^j\}$  et si  $(\cdot, \cdot)$  désigne le produit scalaire entre  $(\mathcal{D}'(Q))^6$  et  $(\mathcal{D}(Q))^6$

et entre  $(\mathcal{D}'(Q))^3$  et  $(\mathcal{D}(Q))^3$ , on a :

$$(4.68) \quad (\mathcal{A}^j \Phi^j, \Theta) = -(\text{Rot } \hat{\mu}^j \psi^j, \theta) + (\text{Rot } \hat{\varepsilon}^j \varphi^j, \chi) = \\ = -(\hat{\mu}^j \psi^j, \text{Rot } \theta) + (\hat{\varepsilon}^j \varphi^j, \text{Rot } \chi) ;$$

mais d'après (4.48), (4.49) et le théorème de Lebesgue, on a :

$$\hat{\mu}^j \text{Rot } \theta \rightarrow \hat{\mu} \text{Rot } \theta \quad \text{dans } (L^2(Q))^3, \\ \hat{\varepsilon}^j \text{Rot } \chi \rightarrow \hat{\varepsilon} \text{Rot } \chi \quad \text{dans } (L^2(Q))^3,$$

et (4.68) donne alors avec (4.67), si  $\Phi_* = \{ \varphi_*, \psi_* \}$  :

$$(\mathcal{A}^j \Phi^j, \Theta) \rightarrow -(\psi_*, \hat{\mu} \text{Rot } \theta) + (\varphi_*, \hat{\varepsilon} \text{Rot } \chi) = (\mathcal{A} \Phi_*, \Theta)$$

et donc

$$(4.69) \quad \mathcal{A}^j \Phi^j \rightarrow \mathcal{A} \Phi_* \quad \text{dans } (\mathcal{D}'(Q))^6.$$

Par ailleurs, d'après (4.63) et (4.67) :

$$\mathcal{A}^j \Phi^j \rightarrow (\mathcal{A} + \lambda) \Phi - \lambda \Phi_* \quad \text{dans } L^2(0, T; \mathcal{H}) \text{ faible}$$

d'où, comparant à (4.69) :

$$(4.70) \quad \mathcal{A}^j \Phi^j \rightarrow \mathcal{A} \Phi_* \quad \text{dans } L^2(0, T; \mathcal{H}) \text{ faible},$$

et

$$(4.71) \quad (\mathcal{A} + \lambda) \Phi_* = (\mathcal{A} + \lambda) \Phi.$$

On aura donc  $\Phi_* = \Phi$  si l'on montre que  $\Phi_* \in L^2(0, T; D(\mathcal{A}))$ . Or, d'après (4.67), (4.69) et le Lemme 4.2, on a :

$$n \wedge \Phi^j \rightarrow n \wedge \Phi_* \quad \text{dans } L^2(0, T; (H^{-1/2}(\Gamma))^3) \text{ faible} ;$$

comme  $n \wedge \Phi^j = 0$  on a donc  $n \wedge \Phi_* = 0$ , d'où le résultat désiré. ■

#### Application 4.1

On a supposé les  $\varepsilon, \mu$  constantes par morceaux dans les divers milieux  $\Omega_i$ . En fait, il s'agit là d'une idéalisation, les  $\varepsilon, \mu$  étant en fait des fonctions continues dans  $\bar{\Omega}$ , constantes dans « l'intérieur » des  $\Omega_i$  et passant « rapidement » d'une valeur à une autre au voisinage des interfaces. Le Théorème 4.2 montre que le problème « idéal » est une approximation du problème « réel ». ■

#### Application 4.2

Soit

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^q \Omega_i \cup \Sigma_{ij}.$$

Si l'un des domaines  $\Omega_{i_0}$  a un volume tendant vers 0 (pour des constantes  $\varepsilon_{i_0}, \mu_{i_0}$  fixées) la solution correspondante converge, toujours d'après le Théorème 4.2, vers la solution du problème pour

$$\Omega = \bigcup_{i \neq i_0} \Omega_i \cup \bigcup_{i \neq i_0} \Sigma_{ij}.$$

## 5. MILIEUX STABLES. EXISTENCE DE SOLUTIONS « FORTES »

### 5.1. Solution forte dans $D(\mathcal{A})$

On va maintenant démontrer le

**Théorème 5.1.** *On suppose que  $G$  et  $U_0$  sont donnés avec*

$$(5.1) \quad G, \partial G / \partial t \in L^2(0, T; \mathcal{H}),$$

$$(5.2) \quad U_0 \in D(\mathcal{A}), \quad (U_0 = \{ \mathbf{D}_0, \mathbf{B}_0 \}).$$

*Il existe alors une fonction  $U = \{ \mathbf{D}, \mathbf{B} \}$  et une seule, solution de*

$$(5.3) \quad U \in L^\infty(0, T; D(\mathcal{A})),$$

$$(5.4) \quad \partial U / \partial t \in L^\infty(0, T; \mathcal{H}),$$

$$(5.5) \quad \partial \mathbf{D} / \partial t - \text{Rot}(\hat{\mu} \mathbf{B}) + \sigma \hat{\varepsilon} \mathbf{D} = \mathbf{G}_1,$$

$$(5.6) \quad \partial \mathbf{B} / \partial t + \text{Rot}(\hat{\varepsilon} \mathbf{D}) = \mathbf{G}_2,$$

$$(5.7) \quad n \wedge \mathbf{D} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \times ]0, T[ ,$$

$$(5.8) \quad \mathbf{D}(0) = \mathbf{D}_0, \quad \mathbf{B}(0) = \mathbf{B}_0$$

*Démonstration*

1) On reprend la méthode de Galerkin utilisée dans la démonstration du Théorème 4.1 ; comme  $U_0 \in D(\mathcal{A})$  on peut prendre la « base »  $\Phi_1, \dots, \Phi_m, \dots$  de façon que

$$(5.9) \quad U_0 \in [\Phi_1].$$

On prend (4.37), (4.38) (avec  $U_{0m} = U_0$ , loisible grâce à (5.9)). On peut dériver (4.37) en  $t$ , ce qui donne :

$$(5.10) \quad (U_m''(t), \Phi_j)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{A}U_m'(t), \Phi_j)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{M}U_m'(t), \Phi_j)_{\mathcal{H}} = (G'(t), \Phi_j)_{\mathcal{H}}.$$

On déduit de (4.37) que

$$(U_m'(0), \Phi_j)_{\mathcal{H}} = (G(0) - \mathcal{A}U_0 - \mathcal{M}U_0, \Phi_j)$$

d'où

$$(5.11) \quad \|U_m'(0)\|_{\mathcal{H}} \leq \|G(0) - \mathcal{A}U_0 - \mathcal{M}U_0\|_{\mathcal{H}}.$$



Multipliant (5.10) par  $k'_{jm}(t)$  et sommant en  $j$ , il vient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U'_m(t)\|_{\mathcal{X}}^2 + (\mathcal{M}U'_m(t), U'_m(t))_{\mathcal{X}} = (G'(t), U'_m(t))_{\mathcal{X}},$$

ce qui, joint à (5.11), donne

$$(5.12) \quad \|U'_m(t)\|_{\mathcal{X}} \leq \text{Cte indépendante de } m.$$

On en déduit que la solution  $U$  du problème faible (donnée par le Théorème 4.1) vérifie (5.4), et que  $U(0) = U_0$  d'où (5.8).

2) On peut alors intégrer par parties en  $t$  dans (4.32), d'où

$$(5.13) \quad \int_0^T [(\partial U / \partial t, \Phi)_{\mathcal{X}} - (U, \mathcal{A}\Phi)_{\mathcal{X}} + (\mathcal{M}U, \Phi)_{\mathcal{X}}] dt = \int_0^T (G, \Phi)_{\mathcal{X}} dt.$$

Prenant dans (5.13)

$$\Phi \in (\mathcal{D}(\Omega \times ]0, T[))^6$$

on en déduit (5.5), (5.6). Par conséquent

$$\text{Rot}(\hat{\mu}B) = \partial D / \partial t + \sigma \hat{\epsilon}D - G_1 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$\text{Rot}(\hat{\epsilon}D) = -\partial B / \partial t + G_2 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),$$

et, par conséquent, pour avoir (5.3) il ne reste plus qu'à montrer (5.7).

Pour cela, on considère  $\Phi = \{\varphi, \psi\}$ ,  $\Phi$  vérifiant (4.33) et étant à valeurs dans  $(C_k^1(\bar{\Omega}))^6$  (cf. Lemme 4.1) avec en outre  $n \wedge \varphi = 0$  sur  $\Gamma \times ]0, T[$ . Prenant le produit scalaire de (5.5) (resp. (5.6)) avec  $\hat{\epsilon}\varphi$  (resp.  $\hat{\mu}\psi$ ), il vient

$$(\partial U / \partial t, \Phi)_{\mathcal{X}} + \int_{\Gamma} \hat{\epsilon}\hat{\mu}(n \wedge D) \psi d\Gamma - (U, \mathcal{A}\Phi)_{\mathcal{X}} + (\mathcal{M}U, \Phi)_{\mathcal{X}} = (G, \Phi)_{\mathcal{X}}$$

d'où, par intégration en  $t$  et comparaison à (5.13) :

$$\int_{\Gamma \times ]0, T[} \hat{\epsilon}\hat{\mu}(n \wedge D) \psi d\Gamma dt = 0$$

d'où (5.7). ■

## 5.2. Solution du problème physique

Dans les exemples physiques, la fonction  $G_2$  vérifie des propriétés supplémentaires par rapport à (5.1). Pour bien séparer l'intervention des hypothèses, nous allons donner deux énoncés où l'on déduit des propriétés supplémentaires de  $\mathbf{B}$  à partir des propriétés des données ; on a d'abord le :

**Théorème 5.2.** *On se place dans les hypothèses du Théorème 5.1 et on suppose en outre que*

$$(5.14) \quad \operatorname{Div} G_2 = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times ]0, T[ ,$$

$$(5.15) \quad \operatorname{Div} B_0 = 0 .$$

Alors

$$(5.16) \quad \operatorname{Div} B = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times ]0, T[ .$$

*Démonstration*

Appliquant l'opérateur  $\operatorname{Div}$ , au sens des distributions, aux deux membres de (5.6), on en déduit que (car  $\operatorname{Div} \cdot \operatorname{Rot} \varphi = 0$  et on a (5.14)) :

$$(5.17) \quad \partial(\operatorname{Div} B)/\partial t = 0$$

d'où (5.16) grâce à (5.15). ■

On va maintenant montrer que si  $nG_2 = 0$  et  $n \cdot B_0 = 0$  sur  $\Gamma \times ]0, T[$  et  $\Gamma$  alors  $n \cdot B = 0$  sur  $\Gamma \times ]0, T[$ . Mais on a besoin pour cela de quelques résultats supplémentaires d'Analyse Fonctionnelle, que nous allons donner. ■

On introduit (comparer à (4.1)) l'espace

$$(5.18) \quad H(\operatorname{Div}; \Omega) = \{ v \mid v \in (L^2(\Omega))^3, \operatorname{Div} v \in L^2(\Omega) \}$$

qui est un espace de Hilbert pour la norme

$$(\| v \|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + \| \operatorname{Div} v \|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2} .$$

On démontre comme au Lemme 4.1 (cf. Remarque 4.1) le :

**Lemme 5.1.** *L'espace  $(C_K^1(\overline{\Omega}))^3$  est dense dans  $H(\operatorname{Div}; \Omega)$ .*

On va vérifier le

**Lemme 5.2.** *L'application*

$$(5.19) \quad v \rightarrow n \cdot v|_{\Gamma} = n \cdot v$$

de  $(C_K^1(\overline{\Omega}))^3 \rightarrow C^1(\Gamma)$  se prolonge par continuité en une application linéaire, encore notée  $v \rightarrow n \cdot v$ , continue de  $H(\operatorname{Div}; \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ .

*Démonstration*

Le principe est le même que dans la démonstration du Lemme 4.2. Pour  $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$  on définit  $\Phi \in H^1(\Omega)$  avec

$$(5.20) \quad \Phi|_{\Gamma} = \varphi ,$$

et

$$(5.21) \quad \text{l'application } \varphi \rightarrow \Phi \text{ est linéaire continue de } H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega) .$$

Pour  $u$  donné dans  $H(\text{Div}; \Omega)$  posons

$$(5.22) \quad \pi(\varphi) = (\text{Div } u, \Phi) - (u, \text{Div } \Phi)$$

où

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx ;$$

la notation (5.22) est légitime, car le deuxième membre de (5.22) ne dépend pas du choix de  $\Phi$ , pourvu que l'on ait (5.20).

L'application  $\varphi \rightarrow \pi(\varphi)$  est linéaire continue de  $H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$ , donc

$$(5.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi(\varphi) = (\tau_u, \varphi), \quad \tau_u \in H^{-1/2}(\Gamma), \\ ( \ , \ ) \text{ désignant le produit scalaire entre } H^{-1/2}(\Gamma) \text{ et } H^{1/2}(\Gamma), \\ \text{l'application } u \rightarrow \tau_u \text{ étant linéaire continue de } H(\text{Div}; \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma). \end{array} \right.$$

Mais si  $u \in (C_k^1(\overline{\Omega}))^3$ , alors

$$\pi(\varphi) = \int_{\Gamma} (n \cdot u) \varphi d\Gamma$$

d'où le lemme. ■

Notons que si  $G_2 \in L^2(0, T; (L^2(\Omega))^3)$  avec (5.14), alors

$$(5.24) \quad G_2 \in L^2(0, T; H(\text{Div}; \Omega))$$

et donc, appliquant le Lemme 5.2,

$$(5.25) \quad n \cdot G_2 \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma)).$$

On peut alors énoncer le

**Théorème 5.3.** *On se place dans les hypothèses du Théorème 5.2 et on suppose en outre que*

$$(5.26) \quad nG_2 = 0 \text{ sur } \Gamma \times ]0, T[$$

et

$$(5.27) \quad nB_0 = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Alors

$$(5.28) \quad n \cdot B = 0 \text{ sur } \Gamma \times ]0, T[.$$

*Démonstration*

On déduit de (5.6) que

$$(5.29) \quad B(t) + \int_0^t \text{Rot}(\hat{\varepsilon}D)(\sigma) d\sigma = B_0 + \int_0^t G_2(\sigma) d\sigma.$$

Comme  $\text{Rot}(\hat{\varepsilon}D) \in (L^2(\Omega))^3$ , et  $\text{Div}(\text{Rot}(\hat{\varepsilon}D)) = 0$ , on a :

$$\text{Rot}(\hat{\varepsilon}D) \in L^2(0, T; H(\text{Div}; \Omega))$$

et par conséquent on peut appliquer l'opérateur  $v \rightarrow n \cdot v$  aux deux membres de (5.29); on en déduit, en utilisant (5.26) et (5.27) que

$$n \cdot B(t) + \int_0^t n \cdot \text{Rot}(\hat{\varepsilon}D)(\sigma) d\sigma = 0.$$

On aura donc (5.28) si l'on vérifie que

$$(5.30) \quad n \cdot \text{Rot}(\hat{\varepsilon}D)(\sigma) = 0 \quad (\text{p.p. en } \sigma).$$

Or, comme  $\hat{\varepsilon}$  est constante sur  $\Gamma$  :

$$n \cdot \text{Rot}(\hat{\varepsilon}D) = \hat{\varepsilon} n \cdot \text{Rot} D$$

et de façon générale

$$(5.31) \quad n \cdot \text{Rot} \psi = \text{opérateur de dérivation tangentielle sur } \Gamma \text{ sur le vecteur } n \wedge \psi.$$

Or  $n \wedge D = 0$ , donc on a (5.30). ■

## 6. MILIEUX STABLES. SOLUTIONS FORTES DANS LES ESPACES DE SOBOLEV

### 6.1. Théorèmes de plongement

**Théorème 6.1.** Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert borné de frontière  $\partial\mathcal{O}$  régulière <sup>(9)</sup>. Soit  $X$  l'espace défini par

$$(6.1) \quad X = \{ v \mid v \in (L^2(\mathcal{O}))^3, \text{ Rot } v \in (L^2(\mathcal{O}))^3, \text{ Div } v \in L^2(\mathcal{O}), \\ n \cdot v = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O} \}$$

qui est un espace de Hilbert pour la norme

$$(6.2) \quad \|v\|_X = (\|v\|_{(L^2(\mathcal{O}))^3}^2 + \|\text{Rot } v\|_{(L^2(\mathcal{O}))^3}^2 + \|\text{Div } v\|_{L^2(\mathcal{O})}^2)^{1/2};$$

alors

$$(6.3) \quad X = (H^1(\mathcal{O}))^3,$$

(identité algébrique et topologique).

*Démonstration*

Nous vérifierons à la fin de cette section le

**Lemme 6.1.** L'espace des vecteurs  $\varphi \in (C^1(\mathcal{O}))^3$  tels que  $n \cdot \varphi = 0$  sur  $\partial\mathcal{O}$  est dense dans  $X$ .

<sup>(9)</sup> Résultat valable avec  $\mathcal{O}$  borné ou non.

On part alors de l'identité, pour  $\varphi \in (C^1(\bar{\mathcal{O}}))^3$

$$(6.4) \quad \int_{\mathcal{O}} \varphi_{i,j} \varphi_{i,j} dx = \int_{\mathcal{O}} (|\text{Div } \varphi|^2 + |\text{Rot } \varphi|^2) dx + \int_{\partial\mathcal{O}} (n_i \varphi_i \varphi_{j,j} - n_j \varphi_i \varphi_{j,i}) dS,$$

$dS$  = élément de surface de  $\partial\mathcal{O}$ .

Mais si  $n \cdot \varphi = 0$  l'intégrale de surface dans (6.4) se réduit à

$$(6.5) \quad - \int_{\partial\mathcal{O}} n_j \varphi_i \varphi_{j,i} dS = - \int_{\partial\mathcal{O}} \varphi(n_j \varphi_{j,i}) dS + \int_{\partial\mathcal{O}} \varphi_i \varphi_j n_{j,i} dS$$

où l'on a prolongé la fonction  $x \rightarrow n(x)$  dans un voisinage de  $\partial\mathcal{O}$  en une fonction  $C^1$ , de sorte que  $n_{j,i}$  a un sens. Mais, puisque  $n\varphi = 0$ , l'opérateur  $\varphi_i \partial/\partial x_i$  est un opérateur différentiel tangentiel sur  $\partial\mathcal{O}$  et donc  $\varphi_i(n\varphi)_{,i} = 0$  sur  $\partial\mathcal{O}$ .

Donc (6.5) montre que

$$(6.6) \quad - \int_{\partial\mathcal{O}} n_j \varphi_i \varphi_{j,i} dS = \int_{\partial\mathcal{O}} \varphi_i \varphi_j n_{j,i} dS$$

d'où en portant dans (6.4)

$$(6.7) \quad \int_{\mathcal{O}} \varphi_{i,j} \varphi_{i,j} dx = \int_{\mathcal{O}} (|\text{Div } \varphi|^2 + |\text{Rot } \varphi|^2) dx + \int_{\partial\mathcal{O}} \varphi_i \varphi_j n_{j,i} dS.$$

Mais

$$(6.8) \quad \left| \int_{\partial\mathcal{O}} \varphi_i \varphi_j n_{j,i} dS \right| \leq C_1 \int_{\mathcal{O}} \varphi_i \varphi_i dx.$$

Par ailleurs,  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe  $c(\varepsilon)$  telle que si  $\psi \in C^1(\bar{\mathcal{O}})$  :

$$(6.9) \quad \int_{\partial\mathcal{O}} \psi^2 dS \leq \varepsilon \int_{\mathcal{O}} \psi_{,i} \psi_{,i} dx + c(\varepsilon) \int_{\mathcal{O}} \psi^2 dx ;$$

utilisant (6.9) dans (6.8), on a, en choisissant  $\varepsilon$  de façon que  $c_1 \varepsilon = 1/2$  :

$$(6.10) \quad \left| \int_{\partial\mathcal{O}} \varphi_j \varphi_{j,i} n_{j,i} dS \right| \leq \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}} \varphi_{i,j} \varphi_{i,j} dx + c_2 \int_{\mathcal{O}} |\varphi|^2 dx$$

ce qui avec (6.7) donne

$$(6.11) \quad \int_{\mathcal{O}} \varphi_{i,j} \varphi_{i,j} dx \leq 2 \int_{\mathcal{O}} [|\text{Div } \varphi|^2 + |\text{Rot } \varphi|^2 + c_2 |\varphi|^2] dx$$

d'où le théorème suit, grâce au Lemme 6.1. ■

**Théorème 6.2.** *On se place dans les conditions des nos 4 et 5. Soit  $Y$  l'espace défini par*

$$(6.12) \quad Y = \{ v \mid v \in (L^2(\Omega))^3, \text{ Div } v = 0, \text{ Rot } (\hat{\mu}v) \in (L^2(\Omega))^3, n \cdot v = 0 \text{ sur } \Gamma \},$$

*espace de Hilbert pour la norme*

$$(6.13) \quad \| v \|_Y = (\| v \|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + \| \text{Rot } (\hat{\mu}v) \|_{(L^2(\Omega))^3}^2)^{1/2}.$$

Alors  $\forall v \in Y$ , on a :

$$(6.14) \quad v_i \in (H^1(\Omega_i))^3$$

où  $v_i$  est la restriction de  $v$  à  $\Omega_i$ ,  $\mu = 1/\hat{\mu} = \text{constante dans } \Omega_i$  <sup>(10)</sup>, et

$$(6.15) \quad \|v_i\|_{(H^1(\Omega_i))^3} \leq c \|v\|_Y.$$

*Démonstration*

1) Soit  $\Omega_1$  l'ouvert où  $\mu = \text{valeur de } \mu \text{ sur } \Gamma$  et  $\theta$  une fonction scalaire de  $C_K^1(\overline{\Omega}_1)$ ,  $\theta = 1$  au voisinage de  $\Gamma$  et  $\theta = 0$  au voisinage de  $\partial\Omega_1 - \Gamma$ . Le vecteur  $\theta v$  vérifie, pour  $v \in Y$  :

$$(6.16) \quad \begin{cases} \theta v \in (L^2(\Omega_1))^3, \\ \text{Div}(\theta v) \in L^2(\Omega_1), & \text{Rot}(\theta v) \in (L^2(\Omega_1))^3, \\ n(\theta v) = 0 \text{ sur } \partial\Omega_1 \end{cases}$$

et donc, d'après le Théorème 6.1, on a :

$$(6.17) \quad \theta v \in (H^1(\Omega_1))^3.$$

2) Posant  $\hat{\mu}v = u$ , on a donc :

$$(6.18) \quad \begin{cases} u \in (L^2(\Omega))^3, & \text{Div}(\mu u) = 0, & \text{Rot } u \in (L^2(\Omega))^3, \\ nu = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$

$$(6.19) \quad u \in (H^1(\mathcal{O}_1))^3, \quad \mathcal{O}_1 = \text{voisinage de } \Gamma \text{ dans } \Omega_1.$$

On peut alors prolonger  $u$  en une fonction vectorielle  $w$  définie sur  $\mathbb{R}^3$  telle que

$$(6.20) \quad \begin{cases} w \in (H^1(\mathcal{O}_2))^3, & \mathcal{O}_2 = \text{voisinage de } \mathfrak{f}\Omega \text{ dans } \mathbb{R}^3 \\ w = u \text{ sur } \Omega. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$(6.21) \quad f = \text{Rot } w$$

et si l'on définit  $\Psi = \{ \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3 \}$  par transformation de Fourier <sup>(11)</sup> de la façon suivante :

$$(6.22) \quad \hat{\Psi}_1 = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{|\xi|^2} (\xi_2 \hat{f}_3 - \xi_3 \hat{f}_2),$$

<sup>(10)</sup> Rappelons que  $\mu$  est constant au voisinage de  $\Gamma$ .

<sup>(11)</sup> Les notations sont celles du Chapitre 1, n° 3.2.

(et les formules déduites de (6.22) par permutation circulaire), on a :

$$(6.23) \quad \text{Rot } \Psi = f$$

et

$$(6.24) \quad \partial \Psi / \partial x_i \in (L^2)^3 \quad \text{où} \quad L^2 = L^2(\mathbb{R}^3).$$

Alors  $\text{Rot}(w - \Psi) = 0$ , donc

$$(6.25) \quad w = \Psi = \text{grad} \cdot P, \quad \partial P / \partial x_i \in L^2.$$

Si l'on désigne par  $\psi$  (resp.  $p$ ) la restriction de  $\Psi$  (resp.  $P$ ) à  $\Omega$ , on déduit de (6.25) que

$$(6.26) \quad u - \psi = \text{grad } p,$$

d'où, comme  $\text{Div}(\mu u) = 0$  dans  $\Omega$  :

$$(6.27) \quad \text{Div}(\mu \text{ grad } p) + \text{Div}(\mu \psi) = 0.$$

Désignant par  $p_i$  (resp.  $\psi_i$ ) la restriction de  $p$  (resp.  $\psi$ ) à  $\Omega_i$ , on a donc

$$(6.28) \quad \text{Div}(\mu_i \text{ grad } p_i) + \text{Div}(\mu_i \psi_i) = 0 \quad \text{dans } \Omega_i.$$

Par ailleurs les  $p_i$  vérifient les conditions aux limites et de transmission suivantes : comme  $n \cdot u = 0$  sur  $\Gamma$ , on a :

$$(6.29) \quad \partial p / \partial n = -n \cdot \psi \quad \text{sur } \Gamma,$$

et comme  $\text{Div}(\mu u) = 0$  dans  $\Omega$  on a, à l'interface  $\Sigma_{ij}$ , frontière commune de  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$  :

$$\mu_i n \cdot u_i = \mu_j n \cdot u_j$$

d'où

$$(6.30) \quad \mu_i \partial p / \partial n - \mu_j \partial p / \partial n = (\mu_j - \mu_i) n \psi.$$

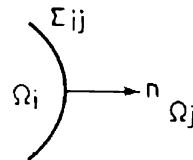
Mais comme d'après (6.24)

$$(6.31) \quad n \psi \in H^{1/2}(\Gamma) \quad \text{et} \quad \in H^{1/2}(\Sigma_{ij}),$$

on déduit de (6.28), (6.29), (6.30) et de la régularité des solutions des problèmes de transmission que

$$(6.32) \quad \partial^2 p_{ij} / \partial x_j \partial x_k \in L^2(\Omega_i) \quad \forall j, k$$

d'où le résultat suit d'après (6.26) et  $v_i = \mu_i u_i$ . ■



Démonstration du Lemme 6.1

Il est équivalent de montrer que l'espace des vecteurs  $\varphi$  de  $(H^2(\mathcal{O}))^3$  tels que  $n\varphi = 0$  sur  $\partial\mathcal{O}$  est dense dans  $X$ .

Comme si  $v \in X$  et  $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$  alors  $v\psi \in X$ , la propriété est en fait locale et revient à la situation suivante. On considère (cf. schéma sur Figure 6) une « carte locale »,

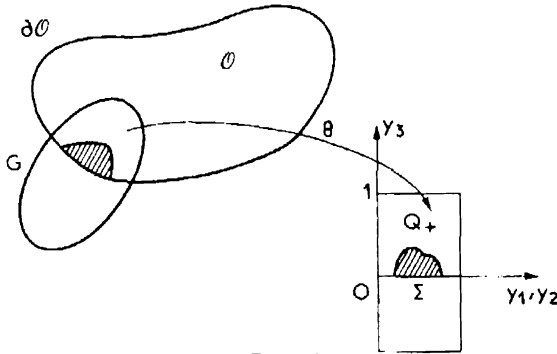


Figure 6.

i.e. un ouvert  $G$  et une application  $\theta$  de  $G \rightarrow Q$ ,

$$Q = \Sigma \times ]-1, 1[ ,$$

$$\Sigma = ]0, 1[ \times ]0, 1[ ,$$

une fois continûment différentiable ainsi que son inverse de  $G \rightarrow Q$  et de  $Q \rightarrow G$ , appliquant  $\mathcal{O} \cap G \rightarrow Q_+ = \Sigma \times ]-1, 1[$  et  $\partial\mathcal{O} \cap G \rightarrow \Sigma$ .

On peut supposer que la direction normale à  $\partial\mathcal{O} \cap G$  devient la direction des  $y_3$ . Soient  $P_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) les images par  $\theta$  des opérateurs différentiels Rot (3 composantes) et Div ; donc

$$(6.33) \quad P_i \varphi = P_{jk}^i \partial\varphi_j / \partial x_k$$

et on peut supposer que

$$(6.34) \quad p_{33} = 1 .$$

On part d'une fonction vectorielle  $v$  de  $X$  à support comme indiqué (hachuré) sur la Figure 6 (dans  $G \cap \mathcal{O}$ ) et on considère son image  $w$  par  $\theta$ . Alors  $w \in Y$ ,  $Y$  étant défini par

$$Y = \{ \varphi \mid \varphi \in (L^2(Q_+))^3, \quad P_i \varphi \in L^2(Q_+), \quad \varphi_3 = 0 \text{ sur } \Sigma \}^{(12)}$$

(puisque  $v$  tangent à  $\partial\mathcal{O}$  devient  $w$  tangent à  $\Sigma$ ).

(12) Espace de Hilbert pour la norme

$$(\| \varphi \|_{L^2(Q_+)}^2 + \sum \| P_i \varphi \|_{L^2(Q_+)}^2)^{1/2} .$$



Par ailleurs  $w$  a un support comme indiqué hachuré sur Figure 6, i.e. est nulle au voisinage de  $y_3 = 1$  et de  $\partial\Sigma \times ]0, 1[$ ; on dira que  $w$  a la propriété (S).

Donc le problème est le suivant : approcher  $w \in Y$  ayant la propriété (S) (au sens de la topologie de  $Y$ ) par des éléments de  $\mathcal{W}$  :

$$\mathcal{W} = \{ \varphi \mid \varphi \in (H^1(Q_+))^3, \varphi_3 = 0 \text{ sur } \Sigma, \varphi \text{ a la propriété (S)} \}.$$

On utilise une régularisation tangentielle en  $y_1, y_2$ ; introduisant  $\rho^m = \rho^m(y_1, y_2)$  suite régularisante, i.e.

$$\rho^m \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_{y_1, y_2}^2), \quad \rho^m \geq 0, \quad \int \rho^m(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = 1,$$

$\rho^m$  à support dans  $y_1^2 + y_2^2 \leq 1/m$ , on introduit

$$(6.35) \quad \psi^m = w * \rho^m$$

(i.e.  $\psi^m(y) = \int w(y_1 - \lambda_1, y_2 - \lambda_2, y_3) \rho^m(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2$ ); alors

$$(6.36) \quad \psi_3^m \in L^2(0, 1; H^1(\Sigma))$$

et  $\psi^m$  a la propriété (S) et vérifie  $\psi_3^m = 0$  sur  $\Sigma$ ; en outre, d'après le *Lemme de Friedrichs* (cf. K. O. Friedrichs [2]) :

$$\psi^m \rightarrow w \text{ dans } Y.$$

D'après (6.34) on a :

$$(6.37) \quad \partial\psi_3^m/\partial y_3 \in L^2(Q_+)$$

ce qui, joint à (6.36), montre que

$$(6.38) \quad \psi_3^m \in H^1(Q_+).$$

Fixant  $m$ , on est donc ramené à ceci : soit  $\psi$  donné avec

$$(6.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_i \in L^2(0, 1; H^1(\Sigma)), \quad i = 1, 2, \\ \psi_3 \in H^1(Q_+), \quad \psi_3 = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ \rho \text{ a la propriété (S)}. \end{array} \right.$$

Il faut approcher  $\psi$  au sens de  $Y$  par des éléments  $\varphi$  de  $\mathcal{W}$ . On peut prendre :

$$\varphi_3 = \psi_3.$$

Si l'on pose  $\hat{\psi} = \{ \psi_1, \psi_2 \}$ , on a :

$$(6.40) \quad P_i \psi = Q_i \hat{\psi} + p_{3k}^i \partial\psi_3/\partial y_k$$

et par conséquent, il suffit d'approcher  $\hat{\psi}$  par des éléments  $\hat{\phi}$  au sens :

$$(6.41) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_i \hat{\phi} \rightarrow Q_i \hat{\psi} \quad \text{dans} \quad (L^2(Q_+))^2, \\ \hat{\phi} \rightarrow \psi \quad \text{dans} \quad (L^2(Q_+))^2, \quad \hat{\phi} \in (H^1(Q_+))^2, \end{array} \right.$$

les fonctions  $\hat{\phi}$  étant nulles au voisinage de  $y_3 = 1$  et de  $\partial\Sigma \times ]0, 1[$ , mais sans conditions aux limites. Or cela est possible d'après le Lemme 4.1 et la Remarque 4.1. ■

## 6.2. Appartenance de $B$ à un espace de Sobolev

**Théorème 6.3.** *On se place dans les hypothèses du Théorème 5.3. On suppose que la frontière  $\Gamma$  et les « interfaces »  $\Sigma_{ij}$  sont deux fois continûment différentiables. Alors,  $B^i$  désignant la restriction de  $B$  à  $\Omega_i$  on a*

$$(6.42) \quad B^i \in L^\infty(0, T; (H^1(\Omega_i))^3).$$

*Démonstration*

D'après les Théorèmes 5.1, 5.2, 5.3, on a, avec la notation (6.12) :

$$(6.43) \quad B \in L^\infty(0, T; Y)$$

de sorte que (6.42) est conséquence du Théorème 6.2. ■

*Remarque 6.1*

Le résultat (6.42) permet d'appliquer le *Théorème de plongement de Sobolev* (Sobolev [1]) :  $H^1(\Omega_i) \subset L^6(\Omega_i)$ , donc

$$(6.44) \quad B^i \in L^\infty(0, T; (L^6(\Omega_i))^3).$$

Ce résultat est essentiel dans l'étude des équations de la Magnéto-Hydrodynamique (Duvaut-Lions [7]). ■

## 6.3. Appartenance de $D$ à un espace de Sobolev

**Théorème 6.4.** *On se place dans les hypothèses du Théorème 6.3 et on suppose en outre que*

$$(6.45) \quad \sigma \hat{\varepsilon} = \text{Cte dans } \Omega \text{ (par exemple } \sigma = 0),$$

$$(6.46) \quad \text{Div } G_1 = 0,$$

$$(6.47) \quad \text{Div } D_0 = 0.$$

Alors,  $D^i$  désignant la restriction de  $D$  à  $\Omega_i$ , on a :

$$(6.48) \quad D^i \in L^\infty(0, T; (H^1(\Omega_i))^3).$$

*Démonstration*

Appliquant l'opérateur Div aux deux membres de (5.5), on en déduit (grâce à (6.45)) :

$$\partial(\text{Div } D)/\partial t + \sigma \hat{\varepsilon} \text{Div } D \doteq \text{Div } G_1,$$

d'où

$$(6.49) \quad \text{Div } D = 0.$$

On en déduit (6.48) par des raisonnements analogues à ceux des nos 6.1 et 6.2. Nous renvoyons pour tous les détails à C. Bardos [1]. ■

**7. ANTENNES A FENTE. PROBLÈMES NON HOMOGENES (13)****7.1. Position du problème (cf. n° 3.4)**

Le problème est le suivant : on cherche les vecteurs  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{B}$  tels que (14) :

$$(7.1) \quad \partial \mathbf{D} / \partial t - \text{Rot}(\hat{\mu} \mathbf{B}) + \sigma \hat{\varepsilon} \mathbf{D} = \mathbf{G}_1, \quad (\text{Div } G_1 = 0),$$

$$(7.2) \quad \partial \mathbf{B} / \partial t + \text{Rot}(\hat{\varepsilon} \mathbf{D}) = \mathbf{G}_2, \quad (\text{Div } G_2 = 0),$$

$$(7.3) \quad n \cdot \mathbf{B} = g, \quad n \wedge \mathbf{D} = h \quad \text{sur} \quad \Gamma \times ]0, T[,$$

$$(7.4) \quad \text{Div } \mathbf{B} = 0$$

$$(7.5) \quad \mathbf{B}(0) = \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{D}(0) = \mathbf{D}_0 \quad (\text{Div } \mathbf{B}_0 = 0, \text{Div } \mathbf{D}_0 = 0).$$

*Remarque 7.1*

Le problème est dit « non homogène » à cause des conditions aux limites (7.3). ■

*Remarque 7.2*

Dans le cadre du problème du n° 3.4, on a

$$(7.6) \quad g = -n \cdot \mathbf{B}^{(1)}, \quad h = +n \wedge \mathbf{D}^{(1)},$$

$$(7.7) \quad G_1 = 0,$$

$$(7.8) \quad G_2 = 0. \quad \blacksquare$$

**7.2. Enoncé du résultat**

Posons de façon générale

$$(7.9) \quad \varphi_\tau = \varphi - n(n\varphi) \text{ (sur } \Gamma \text{)}.$$

L'opérateur  $\varphi \rightarrow n \cdot \text{Rot } \varphi|_\Gamma$  s'écrit alors

$$(7.10) \quad \left| \begin{array}{l} n \cdot \text{Rot } \varphi|_\Gamma = Q\varphi_\tau, \\ Q = \text{opérateur différentiel tangentiel à } \Gamma \text{ du premier ordre.} \end{array} \right.$$

(13) Ce n° peut être passé pour la lecture de la suite du chapitre.

(14) On généralise un peu la situation du n° 3.4.

Dégageons alors des conditions *nécessaires* (formelles pour l'instant) sur les données pour que le problème (7.1) ... (7.5) admette une solution.

Notons que l'on peut remplacer  $n \wedge D = h$  par une condition (équivalente)

$$(7.11) \quad D_t = h_* \quad \text{sur } \Gamma \times ]0, T[.$$

On déduit de (7.2) que

$$\partial(nB)/\partial t + n \operatorname{Rot}(\hat{\varepsilon}D) = nG_2 \text{ sur } \Gamma$$

d'où, tenant compte de (7.10)

$$\partial(nB)/\partial t + \hat{\varepsilon}QD_t = nG_2$$

d'où

$$(7.12) \quad \partial g/\partial t + \hat{\varepsilon}Qh_* = nG_2 \quad \text{sur } \Gamma \times ]0, T[.$$

Comme  $nD_t = 0$  on déduit de (7.11) que

$$(7.13) \quad nh_* = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times ]0, T[.$$

Par ailleurs, si  $\operatorname{Div} B = 0$  alors  $\int_{\partial\Omega} nBd(\hat{\nu}\Omega) = 0$  d'où

$$(7.14) \quad \int_{\Gamma} g \, dS = 0.$$

Enfin  $nB(0) = g(0)$  donne

$$(7.15) \quad nB_0 = g(0). \quad \blacksquare$$

On va vérifier, toujours formellement, que si  $\{ \mathbf{D}, \mathbf{B} \}$  est solution de (7.1), (7.2) avec

$$(7.16) \quad n \wedge D = h \quad \text{sur } \Gamma \times ]0, T[,$$

et (7.5), et si (7.12) ... (7.15) ont lieu alors <sup>(15)</sup> on a (7.3), (7.4), (7.5).

En effet (7.2) entraîne

$$\partial(nB)/\partial t + \hat{\varepsilon}Qh_* = nG_2$$

d'où d'après (7.12)

$$\partial(nB)/\partial t = \partial g/\partial t$$

et comme on a (7.15), on en déduit que  $n \cdot B = g$ .  $\blacksquare$

Admettons alors pour un instant l'existence d'un vecteur  $P$  tel que

$$(7.17) \quad \begin{cases} P, \partial P/\partial t \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))^3), \\ \operatorname{Div} P = 0, \\ P_t = h_* \quad \text{sur } \Gamma \times ]0, T[. \end{cases}$$

<sup>(15)</sup> On suppose que  $\operatorname{Div} G_2 = 0$ ,  $\operatorname{Div} B_0 = 0$ .

Si nous introduisons

$$(7.18) \quad D^* = D - P,$$

alors

$$(7.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial D^*/\partial t - \text{Rot}(\hat{\mu}B) + \sigma \hat{\varepsilon} D^* = G_1 - \partial P/\partial t - \sigma \hat{\varepsilon} P = G_1, \\ \partial B/\partial t + \text{Rot}(\hat{\varepsilon}D) = G_2 - \text{Rot}(\hat{\varepsilon}P) = G_2, \\ n \wedge D = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \times ]0, T[, \\ D^*(0) = D_0 - P(0), B(0) = B_0, \end{array} \right.$$

et le problème (7.1) ... (7.5) équivaut à (7.19) qui est un problème homogène.

On dira alors que le problème (7.1) ... (7.5) admet une solution « faible » (unique) si le problème (7.19) admet (au sens du Lemme 4.5) une solution « faible » unique.

Cela posé, nous allons vérifier au n° 7.3 ci-après le

**Théorème 7.1.** *On suppose que*

$$(7.20) \quad G_1, G_2 \in L^2(0, T; (L^2(\Omega))^3),$$

$$(7.21) \quad h_*, \partial h_*/\partial t \in L^2(0, T; (H^{1/2}(\Gamma))^3),$$

$$(7.22) \quad g \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma))$$

et que les conditions (7.12), (7.13), (7.14) ont lieu. Alors le problème (7.1) ... (7.5) admet une solution « faible » unique.

### 7.3. Démonstration du Théorème 7.1

D'après ce qu'on a vu au n° 7.2, tout revient à montrer le

**Lemme 7.1.** *Sous les hypothèses du Théorème 7.1, on peut trouver P vérifiant (7.17).*

*Démonstration*

Introduisons l'espace  $Z$  défini par

$$(7.23) \quad Z = \{ \varphi \mid \varphi \in (H^1(\Omega))^3, \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma, \text{Div } \varphi = 0 \},$$

qui est fermé dans  $(H^1(\Omega))^3$ . La « trace »  $\varphi|_{\Gamma}$  de  $\varphi$  sur  $\Gamma$  vérifie

$$(7.24) \quad \varphi|_{\Gamma} \in \mathcal{Z}$$

où

$$(7.25) \quad \mathcal{Z} = \{ \psi \mid \psi \in (H^{1/2}(\Gamma))^3, \int_{\Gamma} n\psi \, d\Gamma = 0 \}$$

(sous-espace fermé de  $(H^{1/2}(\Gamma))^3$ ).

D'après par exemple Cattabriga [1], on peut trouver une application

$$\psi \rightarrow \mathcal{R}\psi$$

linéaire continue de  $\mathcal{X} \rightarrow Z$  telle que

$$(7.26) \quad \mathcal{R}\psi|_{\Gamma} = \psi.$$

Définissons alors

$$(7.27) \quad P(t) = \mathcal{R}h_*(t), \quad t \in [0, T].$$

D'après (7.13),  $h_*$  et  $\partial h_*/\partial t$  sont éléments de  $L^2(0, T; \mathcal{X})$  et donc comme  $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; Z)$  on a :

$$P, \partial P/\partial t \in L^2(0, T; Z)$$

ce qui donne les deux premières conditions (7.17).

On a ensuite  $P|_{\Gamma} = h_*$  (d'après (7.26)) d'où

$$P_{\tau} = P - n(nP) = h_* - n(nh_*) = h_*$$

et toutes les conditions (7.17) sont satisfaites. ■

### Remarque 7.3

On pourrait certainement obtenir les conditions nécessaires et suffisantes pour l'obtention des solutions *fortes*, ou bien, au contraire, de solutions plus générales (par transposition); mais cela ne semble écrit nulle part...

Pour l'étude systématique des problèmes non homogènes pour les systèmes paraboliques et certains systèmes hyperboliques (ou bien posés au sens de Petrowsky) — mais ne contenant pas le cas des équations de Maxwell, cf. Lions-Magenes [1]. ■

## 8. MILIEUX POLARISABLES

### 8.1. Résultat d'existence et d'unicité pour une inéquation variationnelle relative aux opérateurs de Maxwell

Les notations sont celles du n° 4.

On donne  $G = \{G_1, G_2\}$  et  $U_0 = \{D_0, B_0\}$  avec (comme au Théorème 5.1)

$$(8.1) \quad G, \partial G/\partial t \in L^2(0, T; \mathcal{H}),$$

$$(8.2) \quad U_0 \in D(\mathcal{A}).$$

On définit l'ensemble

$$(8.3) \quad K = \{ \varphi \mid \varphi \in (L^2(\Omega))^3, \quad \hat{\varepsilon} \mid \varphi(x) \mid \leq \mathcal{D}_0 \quad \text{p.p. dans } \Omega \}$$

où

$$(8.4) \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{D}_0 \text{ est une fonction } > 0 \text{ constante par morceaux, et plus précisément :} \\ \mathcal{D}_0 = \text{Cte dans les régions où } \hat{\varepsilon} \text{ et } \hat{\mu} \text{ sont constants. } \blacksquare \end{array} \right.$$

*Remarque 8.1*

Un cas physiquement intéressant sera (cf. Fig. 7)

$$(8.5) \quad \mathcal{D}_0 = \left| \begin{array}{l} \text{Cte } d_0 > 0 \text{ dans } \Omega_3, \\ + \infty \text{ dans } \Omega_1 \cup \Omega_2, \end{array} \right.$$

la définition de  $K$  étant alors équivalente à

$$(8.6) \quad K = \{ \varphi \mid \varphi \in (L^2(\Omega))^3, \quad \hat{\varepsilon}_3 \mid \varphi(x) \mid \leq d_0 \quad \text{p.p. dans } \Omega_3, \\ \varphi \text{ quelconque dans } \Omega_1 \cup \Omega_2 \},$$

(dans ce cas  $\Omega = \mathbb{R}^3$ ). ■

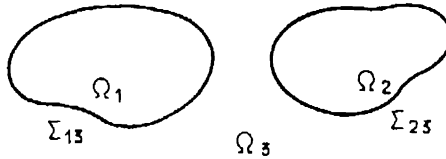


Figure 7.

On a :

$$(8.7) \quad K \text{ est un ensemble convexe fermé de } (L^2(\Omega))^3. \quad \blacksquare$$

On démontrera au n° 8.3 ci-après le

**Théorème 8.1.** *On suppose  $G$  et  $U_0$  donnés avec (8.1), (8.2) et que*

$$(8.8) \quad \mathbf{D}_0 \in K$$

et que <sup>(16)</sup>

$$(8.9) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Rot Rot } (\hat{\varepsilon} \mathbf{D}_0) \in (L^2(\Omega))^3, \quad n \wedge \text{Rot } (\hat{\varepsilon} \mathbf{D}_0) = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ n \wedge \mathbf{B}_0 = 0 \text{ sur } \Gamma, \quad \text{Rot Rot } (\hat{\mu} \mathbf{B}_0) \in (L^2(\Omega))^3, \\ n \wedge \text{Rot } (\hat{\mu} \mathbf{B}_0) = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

<sup>(16)</sup> Ces conditions peuvent être évitées si l'on considère des solutions « faibles » des problèmes dans les milieux polarisables.

Il existe alors un couple de vecteurs  $\{\mathbf{D}, \mathbf{B}\}$  et un seul tels que

$$(8.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D}, \mathbf{B} \in L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3), \\ \partial\mathbf{D}/\partial t, \partial\mathbf{B}/\partial t \in L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3), \end{array} \right.$$

$$(8.11) \quad \mathbf{D}(t) \in K, \quad t \in [0, T],$$

$$(8.12) \quad \text{Rot}(\hat{\varepsilon}\mathbf{D}) \in L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3),$$

$$(8.13) \quad n \wedge \mathbf{D} = 0 \text{ sur } \Gamma \times ]0, T[ ,$$

$$(8.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\partial\mathbf{D}(t)/\partial t, \varepsilon(\varphi - \mathbf{D}(t))) + (\sigma\varepsilon\mathbf{D}(t), \varepsilon(\varphi - \mathbf{D}(t))) - \\ - (\hat{\mu}\mathbf{B}(t), \text{Rot}(\hat{\varepsilon}(\varphi - \mathbf{D}(t)))) \geq (\mathbf{G}_1(t), \hat{\varepsilon}(\varphi - \mathbf{D}(t))) \quad (17) \\ \forall \varphi \in K, \text{ tel que } \text{Rot} \hat{\varepsilon}\varphi \in (L^2(\Omega))^3 \quad \text{et} \quad n \wedge \varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \end{array} \right.$$

$$(8.15) \quad \partial\mathbf{B}/\partial t + \text{Rot}(\hat{\varepsilon}\mathbf{D}) = \mathbf{G}_2,$$

$$(8.16) \quad \mathbf{D}(0) = \mathbf{D}_0, \quad \mathbf{B}(0) = \mathbf{B}_0. \quad \blacksquare$$

Remarque 8.2

Si  $\text{Div} \mathbf{G}_2 = 0$  et  $n\mathbf{B}_0 = 0$  on déduit de (8.15) que

$$(8.17) \quad \text{Div} \mathbf{B} = 0$$

et

$$(8.18) \quad n \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \quad \blacksquare$$

Avant de démontrer le Théorème 8.1, vérifions que ce Théorème résout les problèmes des milieux polarisables.

## 8.2. Interprétation de l'inéquation variationnelle. Résolution des problèmes des milieux polarisables

L'interprétation que nous donnons est partiellement formelle. Si nous supposons que  $\text{Rot}(\hat{\mu}\mathbf{B}) \in (L^2(\Omega))^3$ , alors (8.14) s'écrit

$$(8.19) \quad (F(t), \hat{\varepsilon}(\varphi - D(t))) \geq 0 \quad \forall \varphi \in K,$$

où

$$(8.20) \quad F(t) = \partial D(t)/\partial t + \sigma\hat{\varepsilon}D(t) - \text{Rot}(\hat{\mu}\mathbf{B}(t)) - \mathbf{G}_1(t).$$

Mais (8.19) équivaut à une condition ponctuelle

$$F(x, t) \cdot \hat{\varepsilon}(\varphi(x) - D(x, t)) \geq 0 \quad \forall \varphi \in K, \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

ou encore :

$$(8.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(x, t) \cdot (k - \hat{\varepsilon}D(x, t)) \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}^3 \text{ avec} \\ |k| \leq \mathcal{D}_{0i} \quad \text{si } x \in \Omega_i \quad (18). \end{array} \right.$$

(17) Dans cette expression,  $(f, g) = \int_{\Omega} f_i g_i dx$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

(18)  $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_{0i}$  dans  $\Omega_i$ .



Il faut alors distinguer deux cas :

i) si  $\hat{\varepsilon} | D(x, t) | < \mathcal{D}_{0i}$  alors

$$F(x, t) = 0;$$

ii) si  $\hat{\varepsilon} | D(x, t) | = \mathcal{D}_{0i}$  alors il existe  $\lambda_i(x, t)$  tel que

$$\lambda_i(x, t) \geq 0, \quad F(x, t) = -\lambda_i(x, t) \hat{\varepsilon} D(x, t)$$

ou encore

$$(8.22) \quad \begin{cases} \partial D(x, t) / \partial t + (\sigma + \lambda_i(x, t)) \hat{\varepsilon} D(x, t) - \text{Rot } \hat{\mu} B(x, t) = G_1(x, t), \\ \lambda_i(x, t) \geq 0. \end{cases}$$

Cela contient bien les problèmes des milieux polarisables.

### 8.3. Démonstration du Théorème 8.1

#### 8.3.1. Démonstration de l'existence

On va utiliser :

- 1) une régularisation, pour se ramener à des opérateurs de type « parabolique » ;
- 1) une pénalisation, pour se ramener à des équations.

On introduit l'espace  $\mathcal{V}$  défini par

$$(8.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V} = \{ \Phi \mid \Phi = \{ \varphi, \psi \}, \quad \varphi \in (L^2(\Omega))^3, \quad \psi \in (L^2(\Omega))^3, \\ \text{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi) \in (L^2(\Omega))^3, \quad \text{Rot}(\hat{\mu}\psi) \in (L^2(\Omega))^3, \quad n \wedge \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma \}; \end{array} \right.$$

pour  $\Phi \in \mathcal{V}$ ,  $\Phi_* = \{ \varphi_*, \psi_* \} \in \mathcal{V}$ , on pose

$$(8.24) \quad ((\Phi, \Phi_*)) = (\text{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi), \text{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi_*)) + (\text{Rot}(\hat{\mu}\psi), \text{Rot}(\hat{\mu}\psi_*))$$

et on note que  $\mathcal{V}$  est un espace de Hilbert pour la norme

$$(8.25) \quad \|\Phi\|_{\mathcal{V}} = (\|\varphi\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + \|\psi\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + ((\Phi, \Phi)))^{1/2}.$$

On introduit ensuite un opérateur de pénalisation  $\beta$  de  $(L^2(\Omega))^3 \rightarrow (L^2(\Omega))^3$ , attaché à  $K$ , donc :

$$(8.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta \text{ est borné monotone et lipschitzien de } (L^2(\Omega))^3 \rightarrow (L^2(\Omega))^3, \\ \beta(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi \in K. \end{array} \right.$$

Par exemple, on pourra prendre :

$$(8.27) \quad \beta(\varphi)(x) \left\{ \begin{array}{l} = \varphi_i(x) - \mathcal{D}_{0i} \frac{\varphi_i(x)}{\hat{\varepsilon}_i | \varphi_i(x) |} \quad \text{si } x \in \Omega_i, \quad \hat{\varepsilon}_i | \varphi_i(x) | \geq \mathcal{D}_{0i} \\ = 0 \quad \text{si } x \in \Omega_i, \quad \hat{\varepsilon}_i | \varphi_i(x) | \leq \mathcal{D}_{0i}. \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

*Equation régularisée et pénalisée*

Pour  $\eta$  et  $\lambda > 0$ , on cherche

$$(8.29) \quad D = D_{\eta\lambda}, \quad B = B_{\eta\lambda}, \quad U = U_{\eta\lambda} = \{ D_{\eta\lambda}, B_{\eta\lambda} \},$$

solutions de

$$(8.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} (D', \hat{\varepsilon}\varphi) + (B', \mu\psi) + ((\sigma\hat{\varepsilon}D), \hat{\varepsilon}\varphi) - (\hat{\mu}B, \text{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi)) + \\ \quad + (\text{Rot}(\hat{\varepsilon}D), \hat{\mu}\psi) + \eta((U, \Phi)) + \lambda^{-1}(\beta(D), \varphi) = (G, \Phi)_{\mathcal{H}} \end{array} \right.$$

$$\forall \Phi = \{ \varphi, \psi \} \in \mathcal{V}, \quad \text{avec}$$

$$(8.31) \quad D(0) = D_0, \quad B(0) = B_0.$$

Dans (8.30) on a posé :  $G = \{ G_1, G_2 \}$ .

Le problème (8.30), (8.31) admet une solution unique (cas particulier du Théorème 1.2, Chapitre 2 de Lions [1]) qui vérifie

$$(8.32) \quad U \in L^2(0, T; \mathcal{V}) \cap L^\infty(0, T; \mathcal{H}).$$

Si l'on fait «  $t = 0$  » dans (8.30) on trouve (en notant que  $\beta(D_0) = 0$  puisque  $D_0 \in K$ ) :

$$\begin{aligned} (D'(0), \hat{\varepsilon}\varphi(0)) + (B'(0), \hat{\mu}\psi(0)) + (\sigma\hat{\varepsilon}D_0, \hat{\varepsilon}\varphi(0)) - \\ - (\text{Rot}(\hat{\mu}B_0), \hat{\varepsilon}\varphi(0)) + (\text{Rot}(\hat{\varepsilon}D_0), \hat{\mu}\psi(0)) + \\ + \eta(\text{Rot}(\hat{\varepsilon}D_0), \text{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi(0))) + \\ + \eta(\text{Rot}(\hat{\mu}B_0), \text{Rot}(\hat{\mu}\psi(0))) = (G(0), \Phi(0))_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, grâce à (8.9), que

$$(8.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} D'(0) = G_1(0) - \sigma\hat{\varepsilon}D_0 + \text{Rot}(\hat{\mu}B_0) - \eta \text{Rot}(\text{Rot}(\hat{\varepsilon}D_0)), \\ B'(0) = G_2(0) - \text{Rot}(\hat{\varepsilon}D_0) - \eta \text{Rot}(\text{Rot}(\hat{\mu}B_0)). \end{array} \right.$$

Donc

$$(8.34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{D'(0), B'(0)\} = \{D'_{\eta\lambda}(0), B'_{\eta\lambda}(0)\} \text{ demeure dans un ensemble} \\ \text{borné de } \mathcal{H} \text{ lorsque } \eta \text{ et } \lambda \rightarrow 0. \end{array} \right.$$

Si l'on désire (8.30) en  $t$  (<sup>19</sup>), on obtient :

$$(8.35) \quad \begin{aligned} (D'', \hat{\varepsilon}\varphi) + (B'', \mu\psi) + (\sigma\hat{\varepsilon}D', \hat{\varepsilon}\varphi) - (\hat{\mu}B', \text{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi)) + \\ + (\text{Rot}(\hat{\varepsilon}D'), \hat{\mu}\psi) + \eta((U', \Phi)) + \lambda^{-1}((\beta(D))', \varphi) = (G', \Phi)_{\mathcal{H}}; \end{aligned}$$

on prend dans (8.35)  $\varphi = D'$ ,  $\psi = B'$ ; il vient (<sup>20</sup>)

$$(8.36) \quad (U'', U')_{\mathcal{H}} + (\sigma\hat{\varepsilon}D', \hat{\varepsilon}D') + \eta \|U'\|^2 + \lambda^{-1}((\beta(D))', D') = (G', U')_{\mathcal{H}}.$$

(<sup>19</sup>) Ce que l'on justifie par la méthode des quotients différentiels.

(<sup>20</sup>)  $\langle U'', U' \rangle_{\mathcal{H}} = \langle (U')', U' \rangle_{\mathcal{H}}$ .

Mais (cela se justifiant toujours par la méthode des quotients différentiels)

$$((\beta(D))', D') = \lim h^{-2} (\beta(D(t+h)) - \beta(D(t)), D(t+h) - D(t)) \geq 0$$

(d'après la monotonie de  $\beta$ ) et donc (8.36) donne <sup>(21)</sup>

$$(8.37) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U'(t)\|_{\mathcal{X}}^2 + \eta \|U'(t)\|^2 \leq c_1 \|U'(t)\|_{\mathcal{X}}^2 + c_2 \|G'(t)\|_{\mathcal{X}}^2.$$

De (8.37) et (8.34) on déduit, avec l'inégalité de Gronwall :

$$(8.38) \quad U'_{\eta\lambda} \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; \mathcal{X}),$$

$$(8.39) \quad \eta^{1/2} U'_{\eta\lambda} \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; \mathcal{V}).$$

Comme  $U_{\eta\lambda}(0) = U_0 = \{D_0, B_0\}$  on déduit de (8.38) <sup>(22)</sup> que

$$(8.40) \quad U_{\eta\lambda} \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; \mathcal{X}). \quad \blacksquare$$

*Passage à la limite en  $\eta$  et  $\lambda$ .*

D'après (8.38) et (8.40) on peut extraire une suite, encore notée  $U_{\eta\lambda}$ , telle que lorsque  $\lambda \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$  :

$$(8.41) \quad U_{\eta\lambda} \text{ (resp. } U'_{\eta\lambda}) \rightarrow U \text{ (resp. } U') \text{ dans } L^\infty(0, T; \mathcal{X}) \text{ faible étoile.}$$

Nous allons vérifier que,  $\forall \Phi = \{\varphi, \psi\}$  donnée avec

$$(8.42) \quad \Phi \in L^2(0, T; \mathcal{V}), \quad \varphi(t) \in K \text{ p.p.,}$$

on a :

$$(8.43) \quad \int_0^T \{ (U', \Phi - U)_{\mathcal{X}} + (\sigma \hat{\varepsilon} D, \hat{\varepsilon}(\varphi - D)) - (\hat{\mu} B, \text{Rot } \hat{\varepsilon} \varphi) + (\hat{\varepsilon} D, \text{Rot } \hat{\mu} \psi) - (G, \Phi - U) \} dt \geq 0.$$

En effet, remplaçant dans (8.30)  $\Phi = \{\varphi, \psi\}$  par  $\Phi - U_{\eta\lambda}$ , on a :

$$(8.44) \quad \begin{aligned} & (U'_{\eta\lambda}, \Phi - U_{\eta\lambda})_{\mathcal{X}} + (\sigma \hat{\varepsilon} D_{\eta\lambda}, \hat{\varepsilon}(\varphi - D_{\eta\lambda})) - (\hat{\mu} B_{\eta\lambda}, \text{Rot } \hat{\varepsilon}(\varphi - D_{\eta\lambda})) + \\ & + (\text{Rot } \hat{\varepsilon} D_{\eta\lambda}, \hat{\mu}(\psi - B_{\eta\lambda})) + \eta ((U_{\eta\lambda}, \Phi)) - \\ & - (G, \Phi - U_{\eta\lambda})_{\mathcal{X}} = \eta \|U_{\eta\lambda}\|^2 - \lambda^{-1} (\beta(D_{\eta\lambda}), \varphi - D_{\eta\lambda}). \end{aligned}$$

Mais comme  $\varphi = \varphi(t) \in K$  on a  $\beta(\varphi) = 0$  et le deuxième membre de (8.44) vaut

$$\eta \|U_{\eta\lambda}\|^2 + \lambda^{-1} (\beta(\varphi) - \beta(D_{\eta\lambda}), \varphi - D_{\eta\lambda}) \geq 0.$$

<sup>(21)</sup> On note que  $|(\sigma \hat{\varepsilon} D', \hat{\varepsilon} D')| \leq c \|U'(t)\|_{\mathcal{X}}^2.$

<sup>(22)</sup> On peut également obtenir (8.40) directement à partir de (8.30).

Notant que, évidemment

$$(\hat{\mu}B_{\eta\lambda}, \text{Rot } \hat{\varepsilon}D_{\eta\lambda}) - (\text{Rot } \hat{\varepsilon}D_{\eta\lambda}, \hat{\mu}B_{\eta\lambda}) = 0,$$

on déduit donc de (8.44) que

$$(8.45) \quad \int_0^T \{ (U'_{\eta\lambda}, \Phi - U_{\eta\lambda})_{\mathcal{X}} + (\sigma \hat{\varepsilon}D_{\eta\lambda}, \hat{\varepsilon}(\varphi - D_{\eta\lambda})) - \\ - (\hat{\mu}D_{\eta\lambda}, \text{Rot } (\hat{\varepsilon}\varphi)) + (\hat{\varepsilon}D_{\eta\lambda}, \text{Rot } (\hat{\mu}\psi)) + \\ + \eta((U_{\eta\lambda}, \Phi)) - (G, \Phi - U_{\eta\lambda})_{\mathcal{X}} \} dt \geq 0.$$

Par conséquent

$$(8.46) \quad \int_0^T \{ (U'_{\eta\lambda}, \Phi)_{\mathcal{X}} + (\sigma \hat{\varepsilon}D_{\eta\lambda}, \hat{\varepsilon}\varphi) - (\hat{\mu}B_{\eta\lambda}, \text{Rot } (\hat{\varepsilon}\varphi)) + \\ + (\hat{\varepsilon}D_{\eta\lambda}, \text{Rot } (\hat{\mu}\psi)) + \eta((U_{\eta\lambda}, \Phi)) - (G, \Phi - U_{\eta\lambda})_{\mathcal{X}} \} dt \geq \\ \geq \frac{1}{2} \| U_{\eta\lambda}(T) \|_{\mathcal{X}}^2 - \frac{1}{2} \| U_0 \|_{\mathcal{X}}^2 + \int_0^T (\sigma \hat{\varepsilon}D_{\eta\lambda}, \hat{\varepsilon}D_{\eta\lambda}) dt.$$

Utilisant (8.41) et (8.39), on voit que le premier membre de (8.46) converge vers

$$\int_0^T \{ (U', \Phi)_{\mathcal{X}} + (\sigma \hat{\varepsilon}D, \hat{\varepsilon}\varphi) - (\hat{\mu}B, \text{Rot } \hat{\varepsilon}\varphi) + \\ + (\hat{\varepsilon}D, \text{Rot } \hat{\mu}\psi) - (G, \Phi - U)_{\mathcal{X}} \} dt$$

et que la limite inférieure du deuxième membre est

$$\geq \frac{1}{2} \| U(T) \|_{\mathcal{X}}^2 - \frac{1}{2} \| U_0 \|_{\mathcal{X}}^2 + \int_0^T (\sigma \hat{\varepsilon}D, \hat{\varepsilon}D) dt = \\ = \int_0^T \{ (U', U)_{\mathcal{X}} + (\sigma \hat{\varepsilon}D, \hat{\varepsilon}D) \} dt,$$

d'où l'on déduit (8.43). ■

Utilisons maintenant le fait que, dans (8.43), *il n'y a pas de contraintes sur la composante  $\psi$  de  $\Phi$* . Si donc l'on remplace  $\psi$  par  $k\psi$ ,  $k \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi$  étant inchangé, on a encore (8.43) et faisant  $k \rightarrow \pm \infty$ , on en déduit que *le coefficient de  $\psi$  est nul*, i.e.

$$(8.47) \quad \int_0^T \{ (B', \hat{\mu}\psi) + (\hat{\varepsilon}D, \text{Rot } (\hat{\mu}\psi)) - (G_2, \hat{\mu}\psi) \} dt = 0.$$

On en déduit que (8.15) a lieu, donc  $\text{Rot } (\hat{\varepsilon}D) = G_2 - \partial B/\partial t$  satisfait à (8.12). Puis prenant le produit scalaire de (8.15) avec  $\hat{\mu}\psi$  et intégrant on en déduit, par comparaison à (8.47), que

$$\int_{\Gamma \times (0, T)} \hat{\varepsilon}\hat{\mu}(n \wedge D) \psi d\Gamma dt = 0$$

d'où (8.13). ■

Par ailleurs, on déduit de (8.15) que

$$\int_0^T \{ (B', \hat{\mu}(\psi - B)) + (\text{Rot } (\hat{\varepsilon}D), \hat{\mu}(\psi - B)) - (G_2, \hat{\mu}(\psi - B)) \} dt = 0$$

de sorte que (8.43) s'écrit

$$(8.48) \quad \int_0^T \{ (D', \dot{\varepsilon}(\varphi - D)) + (\sigma \dot{\varepsilon} D, \dot{\varepsilon}(\varphi - D)) - (\hat{\mu} B, \text{Rot } \dot{\varepsilon}(\varphi - D)) - (G_1, \dot{\varepsilon}(\varphi - D)) \} dt \geq 0 .$$

Mais on passe de là, comme déjà vu, à une condition *locale en t*, i.e. à (8.14). ■

Il ne reste donc plus, pour avoir l'existence dans le Théorème 8.1, qu'à montrer (8.11).

On déduit de (8.11) (prenant  $\varphi = D_{\eta\lambda}$ ,  $\psi = B_{\eta\lambda}$ ) que

$$(8.49) \quad \lambda^{-1} \int_0^T (\beta(D_{\eta\lambda}), D_{\eta\lambda}) dt \leq c .$$

Par ailleurs d'après (8.40) et la définition de  $\beta$ ,  $\beta(D_{\eta\lambda})$  demeure dans un borné de  $L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3)$  et on peut donc supposer, par extraction éventuelle d'une sous-suite, que

$$(8.50) \quad \beta(D_{\eta\lambda}) \rightarrow \chi \quad \text{dans } L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3) \text{ faible étoile .}$$

Mais on déduit de (8.30) que

$$\partial D_{\eta\lambda} / \partial t + \sigma \dot{\varepsilon} D_{\eta\lambda} - \text{Rot}(\hat{\mu} B_{\eta\lambda}) + \eta \text{Rot Rot}(\dot{\varepsilon} D_{\eta\lambda}) + \lambda^{-1} \beta(D_{\eta\lambda}) = G_1$$

d'où résulte (avec (8.38), (8.39), (8.40)) que

$$\beta(D_{\eta\lambda}) \rightarrow 0 \quad \text{dans } (\mathcal{D}'(\Omega \times ]0, T[))^3 \quad \text{par exemple ;}$$

comparant à (8.50) on a donc

$$(8.51) \quad \beta(D_{\eta\lambda}) \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3) \text{ faible étoile .}$$

Si  $\varphi$  est une fonction *quelconque* de  $L^2(0, T; (L^2(\Omega))^3)$ , on a :

$$\int_0^T (\beta(\varphi) - \beta(D_{\eta\lambda}), \varphi - D_{\eta\lambda}) dt \geq 0 .$$

Utilisant (8.49) et (8.51) on en déduit que

$$(8.52) \quad \int_0^T (\beta(\varphi), \varphi - D) dt \geq 0 .$$

Prenons dans (8.52)

$$\varphi = D + s\theta, \quad s > 0, \quad \theta \in L^2(0, T; (L^2(\Omega))^3) \text{ quelconque .}$$

Il vient

$$s \int_0^T (\beta(D + s\theta), \theta) dt \geq 0$$

donc

$$\int_0^T (\beta(D + s\theta), \theta) dt \geq 0$$

donc faisant  $s \rightarrow 0$

$$\int_0^T (\beta(D), \theta) dt \geq 0 \quad \forall \theta$$

donc

$$\beta(D) = 0$$

d'où (8.11). ■

### 8.3.2. Démonstration de l'unicité

Soient  $\{D, B\}, \{D_*, B_*\}$  deux solutions éventuelles du problème. Posons :

$$(8.53) \quad u = D - D_*, \quad v = B - B_*.$$

Prenons dans (8.14) (resp. l'inéquation analogue pour  $D_*, B_*$ )

$$\varphi = D_* \text{ (resp. } \varphi = D \text{)}.$$

Ajoutant, il vient :

$$(8.54) \quad - (u', \hat{e}u) - (\sigma \hat{e}u, \hat{e}u) + (\hat{\mu}v, \text{Rot } \hat{e}u) \geq 0.$$

On déduit par ailleurs de (8.15) et de l'équation analogue pour  $\{D_*, B_*\}$  que

$$(8.55) \quad v' + \text{Rot } (\hat{e}u) = 0.$$

Donc

$$(v', \hat{\mu}v) + (\text{Rot } (\hat{e}u), \hat{\mu}v) = 0$$

et (8.54) équivaut à

$$- (u', \hat{e}u) - (v', \hat{\mu}v) - (\sigma \hat{e}u, \hat{e}u) \geq 0$$

d'où, en particulier, si  $W = \{u, v\}$  :

$$- \frac{d}{dt} \|W(t)\|_{\mathcal{W}}^2 \geq 0$$

et comme  $W(0) = 0$  on a  $W = 0$ . ■

## 9. MILIEUX STABLES COMME LIMITES DE MILIEUX POLARISABLES

### 9.1. Enoncé du résultat

On va démontrer que lorsque « la polarisation augmente indéfiniment » la solution du problème correspondant converge vers la solution du problème usuel (pour milieu stable). De façon précise :

**Théorème 9.1.** *On suppose que*

$$(9.1) \quad \mathcal{D}_0 \rightarrow +\infty$$

(i.e.  $\inf \mathcal{D}_0 \rightarrow +\infty$ ). Soit  $U^{\mathcal{D}_0} = \{D^{\mathcal{D}_0}, B^{\mathcal{D}_0}\}$  (resp.  $U = \{D, B\}$ ) la solution du problème de polarisation (Théorème 8.1) (resp. du problème usuel, Théorème 5.1). Alors

$$(9.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} D^{\mathcal{D}_0} \rightarrow D, \quad \partial D^{\mathcal{D}_0}/\partial t \rightarrow \partial D/\partial t, \quad B^{\mathcal{D}_0} \rightarrow B, \quad \partial B^{\mathcal{D}_0}/\partial t \rightarrow \partial B/\partial t \\ \text{dans } L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3) \text{ faible étoile,} \end{array} \right.$$

$$(9.3) \quad \text{Rot}(\hat{\varepsilon}D^{\mathcal{D}_0}) \rightarrow \text{Rot}(\hat{\varepsilon}D) \text{ dans } L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3) \text{ faible étoile.}$$

### 9.2. Démonstration du Théorème 9.1

La démonstration du Théorème 8.1 montre que

$$(9.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} D^{\mathcal{D}_0}, \partial D^{\mathcal{D}_0}/\partial t, B^{\mathcal{D}_0}, \partial B^{\mathcal{D}_0}/\partial t \text{ demeurent dans un ensemble borné de} \\ L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3) \text{ lorsque } \mathcal{D}_0 \rightarrow +\infty. \end{array} \right.$$

L'équation (8.15) donne alors :

$$\text{Rot}(\varepsilon D^{\mathcal{D}_0}) = G_2 - \hat{\varepsilon}B^{\mathcal{D}_0}/\partial t$$

demeure dans un ensemble borné de  $L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3)$ .

On peut donc extraire une suite, encore notée  $D^{\mathcal{D}_0}, B^{\mathcal{D}_0}$  telle que l'on ait (9.2), (9.3), mais où il reste à montrer que  $D, B$  est solution du problème usuel, et pour cela, il reste seulement à montrer que

$$(9.5) \quad \partial D/\partial t + \sigma \varepsilon D - \text{Rot}(\hat{\mu}B) = G_1.$$

Soit  $\varphi$  donné avec

$$(9.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi \in (L^2(\Omega))^3, \quad \text{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi) \in (L^2(\Omega))^3, \quad n \wedge \varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ \varphi \in (L^\infty(\Omega))^3, \end{array} \right.$$

et soit

$$(9.7) \quad K^{\mathcal{D}_0} = \text{convexe } K \text{ donné par (8.3).}$$

Grâce au fait que  $\varphi \in (L^\infty(\Omega))^3$  on a :

$$(9.8) \quad \varphi \in K^{\mathcal{D}_0} \quad \text{pour } \mathcal{D}_0 \text{ assez grand,}$$

et donc (8.14) donne

$$\begin{aligned} & (\partial D^{\mathcal{D}_0}/\partial t, \hat{\varepsilon}(\varphi - D^{\mathcal{D}_0})) + (\sigma \hat{\varepsilon}D^{\mathcal{D}_0}, \hat{\varepsilon}(\varphi - D^{\mathcal{D}_0})) - \\ & \quad - (\hat{\mu}B^{\mathcal{D}_0}, \text{Rot} \hat{\varepsilon}(\varphi - D^{\mathcal{D}_0})) \geq (G_1, \hat{\varepsilon}(\varphi - D^{\mathcal{D}_0})) \end{aligned}$$

d'où, si l'on prend maintenant  $\varphi = \varphi(t)$  avec

$$(9.9) \quad \|\varphi(t)\|_{(L^r(\Omega))^3} \leq \text{Cte}, \quad t \in [0, T] :$$

$$(9.10) \quad \int_0^T \{ (\partial D^{\mathcal{D}0}/\partial t, \hat{\varepsilon}\varphi) + (\sigma \hat{\varepsilon} D^{\mathcal{D}0}, \hat{\varepsilon}\varphi) - (\hat{\mu} B^{\mathcal{D}0}, \text{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi)) + \\ + (\hat{\mu} B^{\mathcal{D}0}, \text{Rot}(\hat{\varepsilon} D^{\mathcal{D}0})) - (G_1, \hat{\varepsilon}(\varphi - D^{\mathcal{D}0})) \} dt \geq \\ \geq \int_0^T [(\partial D^{\mathcal{D}0}/\partial t, \hat{\varepsilon} D^{\mathcal{D}0}) + (\sigma \hat{\varepsilon} D^{\mathcal{D}0}, \hat{\varepsilon} D^{\mathcal{D}0})] dt .$$

Mais d'après (8.15)

$$(9.11) \quad \partial B^{\mathcal{D}0}/\partial t + \text{Rot}(\hat{\varepsilon} D^{\mathcal{D}0}) = G_2$$

de sorte que (9.10) s'écrit encore

$$(9.12) \quad \int_0^T \{ (\partial D^{\mathcal{D}0}/\partial t, \hat{\varepsilon}\varphi) + (\sigma \hat{\varepsilon} D^{\mathcal{D}0}, \hat{\varepsilon}\varphi) - (\hat{\mu} B^{\mathcal{D}0}, \text{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi)) + \\ + (\hat{\mu} B^{\mathcal{D}0}, G_2) - (G_1, \hat{\varepsilon}(\varphi - D^{\mathcal{D}0})) \} dt \geq \\ \geq \int_0^T \{ (\partial U^{\mathcal{D}0}/\partial t, U^{\mathcal{D}0})_{\mathcal{X}} + (\sigma \hat{\varepsilon} D^{\mathcal{D}0}, \hat{\varepsilon} D^{\mathcal{D}0}) \} dt = \\ = \frac{1}{2} \|U^{\mathcal{D}0}(T)\|_{\mathcal{X}}^2 - \frac{1}{2} \|U_0\|_{\mathcal{X}}^2 + \int_0^T (\sigma \hat{\varepsilon} D^{\mathcal{D}0}, \hat{\varepsilon} D^{\mathcal{D}0}) dt$$

et l'on peut passer à la limite (resp. limite inférieure) dans le premier (resp. deuxième) membre de (9.12); on obtient :

$$(9.13) \quad \int_0^T \{ (\partial D/\partial t, \hat{\varepsilon}\varphi) + (\sigma \hat{\varepsilon} D, \hat{\varepsilon}\varphi) - (\hat{\mu} B, \text{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi)) + \\ + (\hat{\mu} B, G_2) - (G_1, \hat{\varepsilon}(\varphi - D)) \} dt \geq \\ \geq \int_0^T (\partial U/\partial t, U)_{\mathcal{X}} + (\sigma \hat{\varepsilon} D, \hat{\varepsilon} D) \} dt .$$

Mais par ailleurs (9.11) donne à la limite

$$(9.14) \quad \partial B/\partial t + \text{Rot}(\hat{\varepsilon} D) = G_2$$

et tenant compte de (9.14) dans (9.13) on trouve

$$(9.15) \quad \int_0^T \{ (\partial D/\partial t, \hat{\varepsilon}(\varphi - D)) + (\sigma \hat{\varepsilon} D, \hat{\varepsilon}(\varphi - D)) - (\hat{\mu} B, \text{Rot}(\hat{\varepsilon}(\varphi - D))) - \\ - (G_1, \hat{\varepsilon}(\varphi - D)) \} dt \geq 0 .$$

On passe de là à une condition *ponctuelle*, et par conséquent

$$(9.16) \quad (\partial D/\partial t, \hat{\varepsilon}(\varphi - D)) + (\sigma \hat{\varepsilon} D, \hat{\varepsilon}(\varphi - D)) - (\hat{\mu} B, \text{Rot}(\hat{\varepsilon}(\varphi - D))) - \\ - (G_1, \hat{\varepsilon}(\varphi - D)) \geq 0 \quad \text{p.p. en } t ,$$

$\forall \varphi$  vérifiant (9.6).



Mais on vérifie (par les procédés analogues à ceux du n° 6) que l'espace des  $\varphi$  vérifiant (9.6) est *dense* dans l'espace des fonctions  $\varphi$  telles que

$$(9.17) \quad \varphi \in (L^2(\Omega))^3, \quad \text{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi) \in (L^2(\Omega))^3, \quad n \wedge \varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Alors (9.16) a lieu  $\forall \varphi$  avec (9.17). On peut donc remplacer  $\varphi$  par  $D \pm \varphi$  dans (9.16) d'où

$$(\hat{\sigma}D/\partial t, \hat{\varepsilon}\varphi) + (\sigma\hat{\varepsilon}D, \hat{\varepsilon}\varphi) - (\hat{\mu}B, \text{Rot}(\hat{\varepsilon}\varphi)) - (G_1, \hat{\varepsilon}\varphi)$$

$\forall \varphi$  avec (9.16) d'où le résultat suit. ■

## 10. COMPLÉMENTS DIVERS

### Remarque 10.1

Le Lemme 4.7 joint au théorème de Hille et Yosida (cf. Hille-Phillips [1], Yosida [1]) montre que

**Théorème 10.1.** *L'opérateur —  $\mathcal{A}$  est générateur infinitésimal d'un semi-groupe  $t \rightarrow G(t)$  continue de  $t \geq 0 \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H})$ .*

Autrement dit, si  $U_0$  est donné dans  $\mathcal{H}$  (resp.  $D(\mathcal{A})$ ) il existe une fonction  $t \rightarrow U(t)$  et une seule, solution de

$$(10.1) \quad \partial U/\partial t + \mathcal{A}U = 0,$$

$$(10.2) \quad U(0) = U_0$$

solution faible (resp. forte) de (10.1), telle que  $t \rightarrow U(t)$  est continue (resp. une fois continûment différentiable) de  $t \geq 0 \rightarrow \mathcal{H}$ , et donnée par

$$(10.3) \quad U(t) = G(t) U_0.$$

Si  $U_0 \in D(\mathcal{A})$  alors  $U(t) \in D(\mathcal{A}) \quad \forall t \geq 0$ .

En outre — le choix de la norme dans  $\mathcal{H}$  étant ici important —  $G(t)$  est un *opérateur de contractions*, i.e.

$$(10.4) \quad \|G(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H})} \leq 1, \quad t \geq 0. \quad \blacksquare$$

## 11. COMMENTAIRES

Nous avons étudié dans ce Chapitre deux types de milieux : « stable » et « ionisable », caractérisés respectivement par la loi d'Ohm (2.27) et la loi (2.28). Dans la pratique des lois intermédiaires seront fréquentes sous la forme

$$J = \Phi(E).$$

Si  $\Phi$  est une application multivoque de graphe maximal monotone les résultats obtenus ici doivent se généraliser. Cependant les mesures physiques relatives à ces phénomènes semblent faire intervenir des phénomènes de retard comme cela a été indiqué à la Remarque 2.5 ; alors la fonction  $\Phi$  n'est plus monotone. D'un point de vue mathématique les problèmes correspondants n'ont pas été étudiés. Néanmoins le cas  $\Phi$  lipschitzienne peut être traité. ■

Dans tous les développements abordés ici nous n'avons tenu aucun compte du fait que la vitesse de la lumière est grande (par rapport à  $L/T$ , où  $L$  est une longueur de référence), ce qui implique que les phénomènes périodiques stationnaires sont obtenus au bout d'un temps petit lorsque l'excitation est elle-même sinusoïdale. La justification mathématique de cette situation conduit au problème suivant :

Reprenons l'exemple du n° 3.1 avec

$$G_1(x, t) = Y(t) G_1(x) e^{i\omega t}$$

$$G_2(x, t) = Y(t) G_2(x) e^{i\omega t}$$

où  $Y(t)$  égale zéro pour  $t < 0$  et  $+1$  pour  $t > 0$ . où  $i = \sqrt{-1}$ , où  $\omega$  est une constante positive et  $G_1(x)$  et  $G_2(x)$  sont des fonctions données de  $x$  seul.

Montrer que la solution  $(B, D)$  est pour  $t$  assez grand voisine d'une expression de la forme

$$B(x, t) = B^*(x) e^{i\omega t}, \quad D(x, t) = D^*(x) e^{i\omega t}.$$

On peut poser le même problème à partir de la situation du n° 3.2 avec

$$g(x, t) = g^*(x) e^{i\omega t}$$

et à partir du n° 3.3 avec

$$B^{(1),n} = Y(t) h^*(x) e^{i\omega t},$$

$$D^{(1),n} = Y(t) d^*(x) e^{i\omega t}. \quad \blacksquare$$

Les théorèmes de plongement du n° 6 recourent des résultats de C. Goulaouic et B. Hanouzet [1], J. Gobert [3] et G. Schmidt [1].

## BIBLIOGRAPHIE

B. D. ANNIN

- [1] Existence and uniqueness of the solution of the elastic-plastic torsion problem for a cylindrical bar of oval cross section. *P.V. of Appl. Math. Mech.*, 29 (1965), 1038-1047.

M. ARTOLA

- [1] Sur les perturbations des équations d'évolution. Application à des problèmes de retard. *Annales E.N.S.*, 2 (1969), 137-253.

C. BAIOCCHI

- [1] A paraître.

MM. BALABAN, A. E. GREEN, P. M. NAGHDJ

- [1] Acceleration waves in elastic-plastic materials. *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 8 (1970), pp. 315-335.

C. BARDOS

- [1] A paraître.

D. BEGIS

- [1] Thèse 3<sup>e</sup> cycle, Paris (1972).

R. BELLMAN et K. COOK

- [1] *Differentiel-Difference Equations*. Acad. Press, New York (1963).

R. BERKER

- [1] Mouvement d'un fluide visqueux incompressible. *Handbuch der Physik*, Vol. VIII, 2 (1963).

A. BEURLING et J. DENY

- [1] Espaces de Dirichlet. I. Le cas élémentaire. *Acta Math.*, 99 (1958), 203-224.

E. B. BIHOVSKI

- [1] Solution des problèmes mixtes pour les équations de Maxwell dans le cas de frontières supraconductrices (en russe). *Vestnik Leningrad Univ.*, 13 (1957), 50-65.

E. B. BIHOVSKI et N. V. SMIRNOV

- [1] Sur les décompositions orthogonales des espaces de fonctions vecteurs... *Troudi Mat. Inst. Steklov*, LIX (1960), 5-33.

M. BIROLI

- [1] Sulla perturbazione delle disequazioni d'evoluzione paraboliche. *Annali Sc. Norm. Sup. Pisa* (à paraître).

N. BOURBAKI

- [1] *Espaces vectoriels topologiques*. Chap. 3 et 4. Hermann, Paris (1955).

J. F. BOURGAT

- [1] Thèse 3<sup>e</sup> cycle, Paris (1971).

H. BRÉZIS

- [1] Équations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité. *Annales Inst. Fourier*, 18 (1968), 115-175.

- [2] Inéquations variationnelles. *J. de Math. Pures et Appliquées* (1971).

(2) D. J. W. SIMPSON

H. BRÉZIS et J. L. LIONS

[1] Sur certains problèmes unilatéraux hyperboliques. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 264 (1967), 928-931.

H. BRÉZIS et M. SIBONY

[1] *Archive for Rat. Mech and Analysis* (1971).

H. BRÉZIS et G. STAMPACCHIA

[1] Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques. *Bull. Soc. Math. France*, 96 (1968), 153-180.

F. BROWDER

[1] Non linear elliptic boundary value problems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69 (1963), 862-674.

G. BRUHAT

[1] *Electricité*. Masson.

L. BRUN

[1] Méthodes énergétiques dans les systèmes évolutifs linéaires. I. Séparation des énergies. II. Théorèmes d'unicité. *J. Mécanique*, 8 (1969), 125-166 et 167-192.

H. D. BUI et K. DANGVAN

[1] Sur le problème aux limites en vitesse des contraintes du solide élasto-plastique. *Int. J. Solid Structures*, Vol. 6 (1970), 183-193.

H. CABANNES

[1] *Magnétodynamique des fluides*. « Les cours de Sorbonne » C.D.U. Paris (1969).

P. CASAL

[1] Capillarité interne en mécanique des milieux continus. *C. R. Acad. Sci.*, tome 256, 29 avril 1963.

L. CATTABRIGA

[1] Su un problema al conterno relativo al sistema di equazioni di Stokes. *Rend. Sem. Mat. Padova*, 31 (1961), 1-33.

J. CÉA et R. GLOWINSKI

[1] A paraître.

J. CÉA, R. GLOWINSKI et J. NÉDÉLEC

[1] A paraître.

B. D. COLEMAN et W. NOLL

[1] Material symmetry and thermodynamic Inequalities in Finite Elastic Deformations. *Archive for Rat. Mech. Analysis*, Vol. 15, n° 2 (1964), pp. 87-111.

V. COMMINCIOLI

[1] Un risultato relativo a disequazioni variazionali d'evoluzione per operatori del primo ordine in  $t$  con termini di ritardo. *Annali Mat. Pura ed Applicata* (à paraître).

[2] Disequazione variazionali d'evoluzione per operatori del 2° ordine in  $t$  con termini di ritardo. *Boll. U.M.I.* (à paraître).

[3] Publications du Laboratoire de Calcul de l'Université de Pavie (1971).

COOKE : Cf. Bellman et Cooke.

B. COURJARET

[1] A paraître.

N. COUTRIS

[1] Flexion élastoplastique d'une plaque. *C. R. Acad. Sc. Paris*, tome 270 (1970), pp. 1377-1380.

T. G. COWLING

- [1] *Magneto hydrodynamics*. Interscience. Tracts n° 4 (1957).

N. CRITESCU

- [1] *Dynamic plasticity*. North Holland Publ. Company, Amsterdam (1967).

C. M. DAFERMOS

- [1] An abstract Volterra equation with applications to linear-visco-elasticity. A paraître dans *J. of Diff. Eq.*  
 [2] On the existence and the Asymptotic Stability of solutions of the Equations of linear Thermoelasticity. *Archive for Rat. Mech. Analysis*, 29 (1968), 241-271.

DANGVAN : Cf. Bui et Dangvan.

W. A. DAY

- [1] Time reversal and the Symmetry of the Relaxation function of a linear Viscoelastic Material. *Archive Rat. Mech. Analysis.*, 40 (3) (1971), 155-159.

DENY : Cf. Beurling et Deny.

DINCA

- [1] Sur la monotonie d'après Minty-Browder de l'opérateur de la théorie de plasticité. *C. R. Acad. Sci.*, tome 269 (1969), pp. 535-538.

J. N. DISTEFANO

- [1] On a class of Volterra integral equations ... Univ. of Southern Calif., 243, janvier 1968.

N. DUNFORD et J. T. S. SCHWARTZ

- [1] *Linear operators*. Part I, Interscience Pub. (1958).

G. DUVAUT

- [1] Application du principe de l'indifférence matérielle à un milieu élastique matériellement polarisé. *C. R. Acad. Sci. Paris*, tome 258 (1964), 3631-3634.  
 [2] Lois de comportement pour un milieu isotrope matériellement polarisé de degré deux. *C. R. Acad. Sci. Paris*, tome 261 (1965), 3178-3179.  
 [3] Problème de Signorini en viscoélasticité linéaire. *C. R. Acad. Sci. Paris*, tome 268 (1969), pp. 1044-1046.  
 [4] Le problème de Signorini en viscoélasticité linéaire. *C. R. Acad. Sci. Paris*, tome 268 (1969), pp. 1044-1046.  
 [5] Problèmes unilatéraux en mécanique des milieux continus. *Congrès International des mathématiciens*, Nice (1970).

G. DUVAUT, J. L. LIONS

- [1] Sur de nouveaux problèmes d'inéquations variationnelles posés par la Mécanique. Le cas stationnaire. *C. R. Acad. Sc. Paris*, tome 269 (1969), 510-513.  
 [2] Sur de nouveaux problèmes d'inéquations variationnelles posés par la Mécanique. Le cas d'évolution. *C. R. Acad. Sc. Paris*, tome 269 (1969), 570-572.  
 [3] Nouvelles inéquations variationnelles rencontrées en thermique et en thermo-élasticité. *C. R. Acad. Sc. Paris*, tome 269 (1969), 1198-1201.  
 [4] Ecoulement d'un fluide rigide viscoplastique incompressible. *C. R. Acad. Sc. Paris*, tome 270 (1970), 58-61.  
 [5] Sur les équations de Maxwell des milieux polarisables et sur la magnéto-dynamique des fluides de Bingham. *C. R. Acad. Sc. Paris*, tome 270 (1970), 1600-1603.  
 [6] Elasticité avec frottement. *J. de Mécanique* (1971).  
 [7] Inéquations en thermo-élasticité et magnéto-hydrodynamique. *Archive Rat. Mech. Anal.* (1972).  
 [8] Transfert thermique dans les fluides de Bingham. (à paraître).

A. C. ERINGEN et SUHUBI

- [1] Non linear theory of micro-elastic solids. *Internat. J. Engng Sci.*, 2, 4 (1964), pp. 389-404.

G. FICHERA

- [1] Problemi elastostatici con vincoli unilaterali il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno. *Mem. Accad. Naz. Lincei*, 8 (7) (1964), 91-140.

R. FINN

- [1] On the exterior stationary problem for the Navier Stokes equations and Associated perturbation problems. *Erchive Rat. Mech. Anal.*, 19 (1965), 363-406.

W. FLUGGE

- [1] *Viscoelasticity*. Blaisdell publishing Company (1967).

C. FOIAS et G. PRODI

- [1] Sur le comportement global des solutions non stationnaires des équations de Navier Stokes en dimension 2. *Rend. Sem. Mat. Padova*, XXXIX (1967), 1-34.

- [2] A paraître.

M. FORTIN

- [1] Résolution numérique d'écoulements newtoniens et non newtoniens. Thèse, Paris (1962).

M. FREMOND

- [1] Solide posé sur un sol élastique. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 271 (1970), 508-510.

- [2] Thèse, Paris (1971).

A. G. FREDRICKSON

- [1] *Principles and Applications of Rheology*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J. (1964).

A. M. FREUDENTHAL et H. GEIRINGER

- [1] The mathematical theories of the inelastic Continuum. *Handbuch der Physik Encyclopedia of Physics*, Vol. VII, Elasticity and Plasticity. Springer Verlag (1958).

K. O. FRIEDRICHS

- [1] Differential forms on Riemannian manifolds. *Comm. Pure Applied Math.* 8 (1955), 551-590.

- [2] Symmetric hyperbolic linear differential equations. *Comm. Pure Applied Math.*, 7 (1954), 345-392.

A. FUSCIARDI, U. MOSCO, F. SCARPINI et A. SCIHAFFINO

- [1] *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (1972).

GEIRINGER : Cf. Freudenthal et Geiringer.

P. GERMAIN

- [1] *Mécanique des milieux continus*. Masson (1962).

- [2] *Cours de Mécanique des solides* (1964-1965). Faculté des Sciences de Paris.

- [3] Théorie des ondes de chocs en dynamique des gaz et en magnétodynamique des fluides. Cours à la Faculté des Sciences de Paris. Département de Mécanique (1962-1963).

R. GLOWINSKI, J. L. LIONS et R. TREMOLIÈRES

- [1] *Approximation numérique des solutions des inéquations en Mécanique et en Physique*. Paris, Dunod (en préparation). Cf. Céa-Glowinski, Céa-Glowinski-Nédélec.

J. GOBERT

- [1] Une inéquation fondamentale de la théorie de l'élasticité. *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège*, n° 3 et 4 (1962).

- [2] Opérateurs matriciels de dérivation elliptiques et problèmes aux limites. *Mémoires de la Soc. Royale des Sciences de Liège* (1961) (6), 7-143.

- [3] Sur une inégalité de coercivité. *J. of Math. Analysis and Applications*, 35 (1971).

C. GOULAOUIC, B. HANOUZET

- [1] Un résultat de régularité pour les solutions d'un système d'équations différentielles (à paraître).

M. GOURSAT

- [1] Thèse 3<sup>e</sup> cycle. Paris (1971).

A. E. GREEN

- [1] On Reissner theory of bending of elastic plates. *Quart. Appl. Math.*, Vol. 7 (1949).

A. E. GREEN et R. S. RIVLIN

- [1] Multipolar continuum mechanics : functional theory I. *Proceedings of the Royal Society, A*, Vol. 284 (1965).

A. E. GREEN et W. ZERNA

- [1] *Theoretical elasticity*, Oxford Clarendon Press (1968).

A. E. GREEN : Cf. Balaban, Green, Naghdi.

A. HAAR et Th. VON KARMAN

- [1] Zur theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien. *Nachr. der Wiss. zu Goettingen, math. Phys. Klasse* (1909), 204-218.

A. HALANAY

- [1] *Differential Equations, Stability, Oscillations, Time Lags*. Acad. Press New-York (1966).

HANOUZET : Cf. Goulaouic et Hanouzet.

Y. HAUGAZEAU

- [1] Thèse, Paris (1968).

R. HAYART

- [1] Extension des formules de Murnaghan relatives au solide en phase d'élasticité finie, au cas de couples superficiels. *C. R. Acad. Sci.*, tome 258, 3 février 1964.

H. HENCKY

- [1] *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 4, 323 (1924).

- [2] Über die berücksichtigung der schubverzerrung in ebenen platten. *Ing. Archiv.*, XVI Band, (1947).

C. T. HERAKOVICH et P. G. HODGE

- [1] Elastic-plastic torsion of hollow bars by quadratic programming. *Int. J. Mech. Sciences*. Pergamon Press (1969), 11, 53-63.

R. HILL

- [1] *Mathematical theory of plasticity*. University Press (Oxford) (1950).

- [2] *Quarterly Journal of mechanics and applied mathematics*, 1, 18 (1948).

- [3] *Journal of applied mechanics*, 17, 64 (1950).

- [4] *Philosophical Magazine*, 42, 868 (1951).

E. HILLE et R. S. PHILLIPS

- [1] *Functional Analysis and Semi Groups*. *Amer. Math. Soc. Coll. Pub.*, XXXI (1957).

P. G. HODGE

- [1] Elastic-plastic torsion as a problem in non linear programming. *Int. J. Solids Structures* (1967), 3, 989-999. Cf. Herakovich et Hodge. Prager et Hodge.

L. HORMANDER

- [1] Definitions of maximal differential operators. *Arkiv for Mat.*, 46 (1958), 501-504.

A. HOUEURT

- [1] *Eléments de mécanique des fluides dans les milieux poreux*. I.F.P. (Technip), Paris (1957).

F. JOHN

- [1] Plane strain problem for a perfectly elastic material of harmonic type. *Com. on pure and applied math*, Vol. XIII (1960), pp. 239-296.
- [2] Plane elastic waves of finite amplitude in Hadamard material of Harmonic materials. *Com. on pure and applied math.*, Vol. XIX (1966), pp. 309-341.

KARMAN : Cf. Haar et Karman

W. I. KOITER

- [1] General theorems for elastic plastic solids. *Progress in solid mechanics*, Vol., pp. 165-221. North Holland, P.C. (1960).

M. A. KRASNOËL'SKII

- [1] *Topological methods in the theory of Non linear Integral Equations*. Pergamon Press (1964) (Traduction de l'édition russe de 1956).

O. A. LADYZENSKAYA

- [1] *La théorie mathématique des fluides visqueux incompressibles*. Moscou (1961). Trad. anglaise, Gordon-Breach, New York (1963).

O. A. LADYZENSKAYA et V. A. SOLONNIKOV

- [1] Résolution de certains problèmes non stationnaires de la magnéto-hydrodynamique des fluides visqueux incompressibles (en russe). *Troudi Mat. Inst. Steklov*, LIX (1960), 115-173.

H. LANCHON

- [1] Solution du problème de torsion élastoplastique d'une barre cylindrique de Section quelconque. *C. R. Acad. Sci. Paris*, tome 269 (1969), pp. 791-794.
- [2] Sur la solution du problème de torsion élastoplastique d'une barre cylindrique de section multiconnexe. *C. R. Acad. Sci. Paris*, tome 271 (1970), pp. 1137-1140.
- [3] Problème d'élastoplasticité statique pour un matériau régi par la loi de Hencky. *C. R. Acad. Sci.*, tome 271 (1970), pp. 888-891.
- [4] Thèse, Paris (à paraître).

H. LANCHON, G. DUVAUT

- [1] Sur la solution du problème de torsion élastoplastique d'une barre cylindrique de section quelconque. *C. R. Acad. Sci. Paris*, tome 264 (1967), pp. 520-523.

L. LANDAU et E. LIFCHITZ

- [1] *Théorie de l'élasticité*, tome VII. Editions MIR, Moscou (1967).
- [2] *Course of theoretical Physics. Fluid Mechanics*. Pergamon Press (1959).

P. LÉONARD

- [1] Problèmes aux limites pour les opérateurs matriciels de dérivation hyperboliques des premier et second ordres. XI (1965), 7-128.

J. LÉRAY

- [1] Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que posent l'hydrodynamique. *J. Math. Pures et Appl.*, XII (1933), 1-82.
- [2] Essai sur le mouvement plan d'un liquide visqueux que limitent des parois. *J. Math. Pures et Appl.*, XIII (1934), 331-418.
- [3] Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta. Math.*, 63 (1934). 193-248.

M. LÉVY

- [1] Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au-delà des limites élastiques. *Comptes rendus de l'Acad. des Sci.*, 70 (1870), 1323-1325.
- [2] Mémoire sur les équations des corps solides ductiles au-delà de la limite élastique. *Journal des mathématiques pures et appliquées*, 16 (1871), 369-372.



LIFCHITZ : Cf. Landau et Lifchitz.

T. H. LIN

[1] *Theory of inelastic structures*. John Wiley and Sons édit. (1968).

J. L. LIONS

[1] *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, Gauthier-Villars (1969).

[2] *Sur le contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod, Gauthier-Villars (1968).

[3] Les problèmes aux limites en théorie des distributions. *Acta Mathematica*, 94 (1955). 13-153.

[4] Sur un nouveau type de problème non linéaire pour opérateurs hyperboliques du deuxième ordre. Sem. J. Leray, Collège de France, 1965-66, II, 17-33.

[5] Singular perturbations and singular layers in variational inequalities. *Symp. Non Linear Func. Analysis*, avril 1971 ; et *C. R. Acad. Sci. Paris* (1971).

[6] Cours Faculté des Sciences de Paris (1971).

[7] Inéquations variationnelles d'évolution. Congrès International des Mathématiciens. Nice (1970).

J. L. LIONS et E. MAGENES

[1] *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Dunod, Paris, Vol. 1 et 2 (1968) ; Vol. 3 (1970).

J. L. LIONS et J. PEETRE

[1] Sur une classe d'espaces d'interpolation. *Inst. Hautes Etudes*, 19, Paris (1964), 5-68.

J. L. LIONS et G. PRODI

[1] Un théorème d'existence et unicité dans les équations de Navier Stokes en dimension 2. *C. R. Acad. Sci. Paris* (1959), 248.

J. L. LIONS, G. STAMPACCHIA

[1] Variational inequalities. *Comm. Pure Applied Math.*, XX (1967), 493-519.

J. L. LIONS et W. STRAUSS

[1] Some non linear evolution equations. *Bull. Soc. Math. France*, 93 (1965), 43-96.

J. L. LIONS : Cf. Brézis. Duvaut. Glowinski.

A. E. H. LOVE

[1] *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Dover (1944).

E. MAGENES et G. STAMPACCHIA

[1] I problema al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, Serie III, Vol. XII, fasc. III (1958), pp. 247-358.

E. MAGENES : Cf. Lions et Magenes.

G. MANDEL

[1] *Cours de mécanique des milieux continus*, tome 1, *Mécanique des fluides*, tome 2, *Mécanique des Solides*. Gauthier-Villars (1966).

[2] Séminaire de plasticité Publ. Sci. Tech. Ministère de l'air. N.T. 116 (1962).

MAROCCO

[1] Thèse 3<sup>e</sup> cycle, Paris (1970).

R. D. MINDLIN et H. F. TIERSTEN

[1] Effects of couple-Stress in linear elasticity. *Arch. f. Rat. Mech. Anal.*, Vol. 11, n<sup>o</sup> 5, décembre 1962, pp. 415-448.

G. MINY

- [1] Monotone (non linear) operators in Hilbert Space. *Duke Math. J.*, 29 (1962), 341-346.

M. MOONEY

- [1] *J. of Appl. Physics*, 11 (1940), 528.

J. J. MOREAU

- [1] Fonctionnelles convexes. Collège de France (1966-1967).  
 [2] La notion de surpotentiel et les liaisons unilatérales en élastostatique. *C. R. de l'Acad. des Sci. Paris*. Séance du 16-12-68, tome 257, pp. 954-957.  
 [3] Sur la naissance de la cavitation dans une conduite. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 259 (1964), 3948-3951.

MOSCO : Cf. Fusciardi.

P. P. MOSOLOV et V. P. MIASNIKOV

- [1] Variational methods in the theory of the fluidity of a viscous plastic medium. *PMM*, 29 (1965), 468-492.

C. MULLER

- [1] *Foundations of the Mathematical theory of Electromagnetic Waves*. Springer, tome 155, Grundlehren der Math. Wiss. (1969).

MUSKAT

- [1] *The flow of homogenous fluid flow through porous media*. MacGraw-Hill (1937).  
 [2] *Multiphase flow through porous media*. MacGraw-Hill.

NAGHDI : Cf. Balaban, Green, Naghdi.

B. NAYROLLES

- [1] Essai de théorie fonctionnelle des structures rigides plastiques parfaites. *Journal de mécanique*, Vol. IX, n° 3 (1970), pp. 491-506.  
 [2] Quelques applications variationnelles de la théorie des fonctions duales à la mécanique des solides. *Journal de mécanique* (à paraître).

J. NECAS

- [1] *Les méthodes directes dans la théorie des équations elliptiques*. Acad. Tchécoslovaque des Sciences, Prague (1967).

J. C. NÉDÉLEC

- [1] Sur des inéquations variationnelles (à paraître).

L. NIRENBERG

- [1] Communication personnelle, avril 1971.

J. C. NITSCHÉ

- [1] Variational problems with inequalities as boundary conditions or How to fashion a Cheap hat for Giacometti's Brother. *Arch. f. Rat. Mech. Anal.*, Vol. 35, n° 2 (1969), pp. 83-113.

W. NOLL et C. TRUESDELL

- [1] The non linear field theory of mechanics. *Handbuch der Physik*, Vol. III,3. Springer Verlag (1965). Cf. Coleman et Noll.

W. PANOFKY, M. PHILLIPS

- [1] *Classical electricity and magnetism*. Addison-Wesley publishing Company (1962).

J. PEETRE

- [1] Espaces d'interpolation et théorème de Sobolev. *Ann. Inst. Fourier*, 16 (1966), 279-317. Cf. Lions et Peetre.

M. PHILLIPS : Cf. Panofsky et Phillips.

M. PIAU

[1] Conduction de la chaleur et propagation des ondes dans les milieux élasto-plastiques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 271 (1970), 1133-1136.

W. PRAGER et P. G. HODGE

[1] *Theory of perfectly plastic solids*. Wiley (1961).

W. PRAGER

[1] *Introduction to mechanics of continua*. Ginn and Company (1961).

[2] *Problèmes de plasticité théorique*. Dunod (1958).

[3] On ideal locking materials. *Transaction of the Society of rheology*, Vol. 1, 169-175 (1957).

PRODI : Cf. Foias et Prodi, Lions et Prodi.

E. REISSNER

[1] On the theory of bending of elastic plates. *J. of Math and Physics*, Vol. 23 (1944).

[2] The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.* June (1945).

A. REUSS

[1] *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 10, 266 (1930).

RIVLIN : Cf. Green et Rivlin.

Y. ROCARD

[1] *Thermodynamique*. Masson et Cie, 2<sup>e</sup> édit. (1967).

T. ROCKAFELLAR

[1] Duality and stability in extremum problems involving convex functions. *Pacific J. of Math.*, 21 (1967), pp. 167-187.

[2] Integrals which are convex functionals. *Pacific J. of Math*. Vol. 24, n° 3 (1968).

M. de SAINT-VENANT

[1] Sur l'établissement des équations des mouvements intérieurs opérés dans les corps ductiles au-delà des limites d'élasticité. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 70 (1870), 473-480.

[2] Sur les équations du mouvement intérieur des solides ductiles. *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 16 (1871), 373-382.

E. SANCHEZ-PALENCIA

[1] Sur l'existence et l'unicité des solutions de certains problèmes aux limites posés par la magnétohydrodynamique. Thèse Faculté des Sciences de Paris, Département de Mécanique (1969).

G. SANDER

[1] Application de la méthode des éléments finis à la flexion des plaques. *Publication de l'Université de Liège*, n° 15 (1969).

SCARPINI : Cf. Fusciardi.

M. SCHATZMAN

[1] Thèse 3<sup>e</sup> cycle, Paris (1971).

SCHIAFFINO : Cf. Fusciardi.

G. SCHMIDT

[1] Spectral and Scattering theory for Maxwell's equations in an exterior domain. *Archive Rat. Mech. Analy.*, 28 (1968), 284-322.

J. SCHWARTZ : Cf. Dunford et Schwartz.

L. SCHWARTZ

- [1] *Théorie des distributions*, I, II. Hermann, Paris (1950-1951) (2<sup>e</sup> édition 1957).  
 [2] Distributions à valeurs vectorielles, I, II. *Annales Institut Fourier*, 7 (1957), 1-141 ; 8 (1958), 1-209.

L. I. SEDOV

- [1] *Introduction to the mechanics of continuous medium*. Addison-Wesley (1965).

J. FERRIN

- [1] The initial value problem for the Navier Stokes equations, dans *Non Linear problems*, éd. par R. E. Langer (1963), 69-98.

M. J. SEWELL

- [1] On dual approximation principles and optimization in continuum mechanics. *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, Ser. A265 (1969-1970), 319-351.

M. SIBONY

- [1] Une méthode itérative pour les inéquations variationnelles non linéaires. *Pub. IRIA* (1968). Cf. Brézis et Sibony.

A. SIGNORINI

- [1] Sopra alcune questioni di Elastostatica. *Atti della Soc. Ital. per il Progresso della Scienza* (1933).  
 [2] Questioni di Elastostatica linearizzata e semilinearizzata. *Rend. di Matem. e delle sur appl.*, Vol. XVIII (1959).

SMIRNOV : Cf. Bihovski et Smirnov.

S. L. SOBOLEV

- [1] *Applications de l'analyse fonctionnelle aux équations de la physique mathématique*. Leningrad (1950).

L. SOLOMON

- [1] *Elasticitate Liniana*. Editura Academiei Republicii Socialiste Romania.

V. A. SOLONNIKOV

- [1] Sur certains problèmes aux limites stationnaires de la magnéto-hydrodynamique (en russe). *Troudi Mat. Dwest. Steklov*, LIX (1960), 174-187.

V. A. SOLONNIKOV : Cf. Ladyzenskaya et Solonnikov.

STAMPACCHIA : Cf. Brézis et Stampacchia, Lions et Stampacchia.

M. J. STRAUSS

- [1] Variations of Korn's and Sobolev's inequalities. Berkeley Symposium, été 1971.

W. STRAUSS : Cf. Lions et Strauss.

R. TEMAN

- [1] Solutions généralisées d'équations non linéaires non uniformément elliptiques. *Archive for Rat. Mech. Analysis* (1971).

- [2] Cours Fac. Sci., Orsay (1971).

TIERSTEN : Cf. Mindlin et Tiersten.

S. TIMOSHENKO et S. WOJNOWSKI-KRIEGER

- [1] *Theory of plates and shells*, 2<sup>e</sup> édition. McGraw-Hill (1959).

T. W. TING

- [1] Elastic plastic torsion problem III. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 34 (1969), pp. 228-243.  
 [2] Elastic plastic torsion of convex cylindrical bars. *J. Math. Mec.*, n° 19 (1969), pp. 531-551.  
 [3] Elastic plastic torsion of simply connected cylindrical bars. *Indiana University Math. J.*, Vol. 20, n° 11 (1971), 1047-1076.

E. TONTI

- [1] On the formal structure of continuum mechanics, part I : deformation theory. *Meccanica*, Vol. V, n° 1 (1970).

TRÉMOLIÈRES : Cf. Glowinski-Lions.

H. TRESCA

- [1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 59, 754 (1864) ; 70, 27 (1870) ; 18, 733 (1868) ; 20 (1872).

C. TRUESDELL et R. TOUPIN

- [1] *The classical field theory*. Handbuck der Physik, Band III,1 (Springer) (1960). Cf. Noll et Truesdell.

R. A. TOUPIN

- [1] Theories of elasticity with couple stress. *Arch. Rat. Mech. Analysis*, Vol. 17, n° 2, pp. 85-112.

D. VIAUD

- [1] *Publication IRIA* (1971).

K. WASHIZU

- [1] *Variational methods in elasticity and Plasticity*. Pergamon Press (1968).

WOINOWSKI-KRIEGER : Cf. Timoshenko et Woinowski-Krieger.

K. YOSIDA

- [1] *Functional Analysis*. Grundlehren B123, Springer (1965).

ZERNA : Cf. Green et Zerna.

*Imprimé en France*

Imprimerie JOUVE, 12, Rue de Tournon, PARIS (6<sup>e</sup>)

Dépôt légal : N° 7320. ... 1<sup>er</sup> trimestre 1972