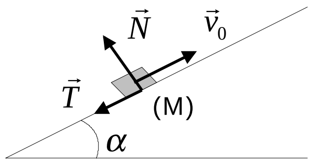
-EXERCICE 11.1-

• ENONCE :

« Glissement sur un plan incliné »



Un point matériel (M), de masse m et de vitesse initiale $\vec{v}_0$, est lancé vers le haut, selon la ligne de plus grande pente d'un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. Le coefficient de frottement dynamique de l'objet sur le plan incliné est égal à f.

• On rappelle la loi de Coulomb dans le cas du **glissement** : $\|\vec{T}\| = f \times \|\vec{N}\|$, où $\vec{T}$ est la réaction tangentielle du plan sur l'objet et $\vec{N}$ la réaction normale.

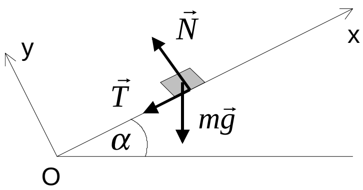
(on pourra noter $T = \|\vec{T}\|$ et $N = \|\vec{N}\|$).

• **Question :** calculer de deux manières différentes la distance D que parcourra le mobile avant de s'arrêter.

• CORRIGE :

« Glissement sur un plan incliné »

1)



Nous allons d'abord appliquer le PFD au mobile, ceci dans le référentiel lié au plan incliné, supposé galiléen. Il vient:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{N}$$

Projetons cette relation sur les axes Ox et Oy:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -mg\sin\alpha - T \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = 0 = -mg\cos\alpha + N \end{cases} \Rightarrow T = fN = fmg\cos\alpha \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha) \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\times t + v_0 \Rightarrow x(t) = -\frac{g}{2}(\sin\alpha + f\cos\alpha)\times t^2 + v_0 t$$ (en prenant $x(0) = 0$)

• La vitesse s'annule à l'instant $t_1 = \dfrac{v_0}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}$, valeur que l'on injecte dans $x(t)$ pour trouver :

$$D = -\frac{g}{2}(\sin\alpha + f\cos\alpha)\times\left(\frac{v_0}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}\right)^2 + \frac{v_0^2}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)} \Rightarrow \boxed{D = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}}$$

2) Dans cet exercice, il n'y a qu'un seul degré de liberté (l'abscisse x) $\Rightarrow$ une seule équation scalaire suffit pour déterminer le mouvement du point matériel (M) $\Rightarrow$ il est préférable d'appliquer le Théorème de l'Energie Cinétique. On remarque que le poids dérive d'une énergie potentielle et que la force $\vec{N}$ ne travaille pas, puisqu'elle est constamment perpendiculaire au déplacement ; on peut donc écrire :

$$\Delta E_C = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{T}) = -\Delta E_P + W(\vec{T}) = -mg(z_{final} - z_{initial}) + \int_0^D \vec{T}\cdot d\vec{l}$$; d'où, en tenant compte de $\vec{T} = -T\vec{e}_x = -fmg\cos\alpha\vec{e}_x = \overrightarrow{cste}$ et de $d\vec{l} = dx\vec{e}_x$, on obtient :

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = -mgD\sin\alpha - fmg\cos\alpha \times D$$ $\Rightarrow$ on retrouve bien : $\boxed{D = \dfrac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}}$

Rq : comme on pouvait s'y attendre, la méthode énergétique est plus rapide.