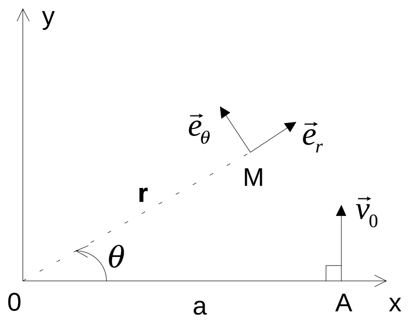
-EXERCICE 15.7-

• ENONCE :

« Force centrale en $1/r^5$ »



Dans un référentiel galiléen, un point matériel M, de masse m, est soumis à une force **centrale** de la forme:

$\vec{F} = -\frac{km}{r^5}\vec{e}_r$ où k est une constante positive

1) Rappeler les propriétés générales d' un mouvement à force centrale .

2) Déterminer l'énergie potentielle E_P de la particule M (l'énergie potentielle sera prise nulle lorsque la particule est à l'infini).

• A l'instant initial, la particule se trouve au point A, situé à la distance a du centre attracteur O, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ perpendiculaire au rayon-vecteur $\overrightarrow{OA}$.

3) En utilisant les grandeurs conservatives, établir une équation différentielle du premier ordre, liant r et $\frac{dr}{d\theta}$.

4) On souhaite que la trajectoire de la particule soit un cercle de diamètre OA : donner une relation vérifiée par r, a et θ .

5) En déduire l'expression de $v_0 = \|\vec{v}_0\|$ en fonction de k et a .

• CORRIGE :

« Force centrale en $1/r^5$ »

1) Le mouvement est **plan** et obéit à la « **loi des aires** » : $C = r^2 \times \dot{\theta} = cste$

(résultats obtenus en écrivant :

$$\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \vec{M}_0^{ext} = \vec{0} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}) = \frac{d}{dt}\left[mr\vec{e}_r \wedge \left(\dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta\right)\right] = \frac{d}{dt}\left(mr^2 \times \dot{\theta}\vec{e}_z\right) \Rightarrow \vec{C} = r^2 \times \dot{\theta}\vec{e}_z = \overrightarrow{cste}\ )$$

2) Cherchons la fonction scalaire telle que :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_P = -\left(\frac{\partial E_P}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\times\frac{\partial E_P}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{e}_z\right) = -\frac{km}{r^5}\vec{e}_r \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial E_P}{\partial \theta} = \frac{\partial E_P}{\partial z} = 0}$$

$\Rightarrow$ E_P ne dépend que de r ; en projection sur $\vec{e}_r$, il vient :

$$-\frac{dE_P(r)}{dr} = -\frac{km}{r^5} \Rightarrow E_P(r) = -\frac{km}{4r^4} + cste \ ; \text{ or : } E_P(\infty) = 0 \Rightarrow cste = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_P(r) = -\frac{km}{4r^4}}$$

3) La loi des aires fournit : $C = \left\|\vec{C}\right\| = \left\|\overrightarrow{OA} \wedge \vec{v}_0\right\| = av_0 = r^2 \times \frac{d\theta}{dt}$ (1)

• La force étant conservative (elle dérive d'un potentiel), il y a également conservation de l'énergie mécanique de la particule, d'où :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{km}{4r^4} = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] - \frac{km}{4r^4} = E(0) = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{km}{4a^4} \qquad (2)$$

• De la relation (1), on tire : $\frac{d\theta}{dt} = \frac{av_0}{r^2}$; par ailleurs : $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\times\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\times\frac{av_0}{r^2}$ $\Rightarrow$ en reportant ces résultats dans la relation (2), on aboutit à :

$$\boxed{\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right] \times \frac{a^2v_0^2}{r^4} - \frac{k}{2r^4} = v_0^2 - \frac{k}{2a^4}} \qquad (3)$$

4) La particule décrivant un cercle de diamètre OA, alors le triangle OMA est rectangle en M $\Rightarrow$

$OM = OA \times \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = a\cos\theta}$

5) On a alors : $\frac{dr}{d\theta} = -a\sin\theta$ $\Rightarrow$ en remplaçant dans l'équation (3), il vient :

$$(a^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta) \times \frac{a^2v_0^2}{r^4} - \frac{k}{2r^4} = v_0^2 - \frac{k}{2a^4} = \frac{a^4v_0^2}{r^4} - \frac{k}{2r^4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a^4v_0^2 - \frac{k}{2} = \left(v_0^2 - \frac{k}{2a^4}\right)\times r^4} \qquad (4)$$

• La relation (4) devant être vérifiée $\forall r$, on a nécessairement :

$$\boxed{v_0 = \frac{1}{a^2}\times\sqrt{\frac{k}{2}}}$$