

## FONCTIONS DE TRANSFERT – FILTRAGE

**Plan** (Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)

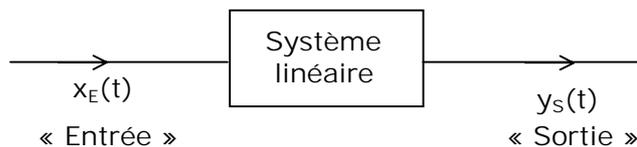
\*\*\*\*\*

I.	Fonction de transfert. ....	1
II.	Filtrage. ....	6
III.	Filtres du 1 <sup>er</sup> ordre. ....	8
IV.	Filtres du 2 <sup>e</sup> ordre. ....	11

\*\*\*\*\*

### I. Fonction de transfert.

Soit un circuit linéaire en régime sinusoïdal forcé. Nous étudierons désormais ce circuit sous l'œil de la « commande » : on lui applique une « grandeur d'entrée »  $x_E(t)$  (tension ou courant en électronique), et on s'intéresse à une « grandeur de sortie »  $y_S(t)$  (tension ou courant également en électronique).



On peut alors définir un système linéaire d'ordre  $n$  par un système tel que la relation  $x_E/y_S$  soit une équation différentielle linéaire d'ordre  $n$  à coefficients constants. On montre alors que le 2<sup>e</sup> membre de l'équation peut se mettre sous forme d'une combinaison linéaire de  $x_E$  et de ses dérivées successives jusqu'à un ordre  $m$  :

$$a_n \underline{y_S}^{(n)} + \dots + a_1 \overset{o}{\underline{y_S}} + a_0 \underline{y_S} = b_0 \underline{x_E} + b_1 \overset{o}{\underline{x_E}} + \dots + b_m \underline{x_E}^{(m)}$$

**I.1. Définition :** l'équation différentielle ci-dessus peut s'écrire en notation complexe :

$$a_n \underline{y_S}^{(n)} + \dots + a_1 \overset{o}{\underline{y_S}} + a_0 \underline{y_S} = b_0 \underline{x_E} + b_1 \overset{o}{\underline{x_E}} + \dots + b_m \underline{x_E}^{(m)}$$

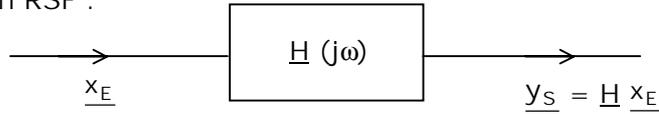
Soit :

$$\underline{y_S} (a_0 + a_1 (j\omega) + \dots + a_n (j\omega)^n) = \underline{x_E} (b_0 + b_1 (j\omega) + \dots + b_m (j\omega)^m)$$

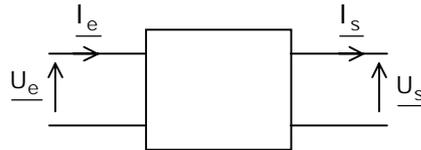
On passe alors :

$$\underline{H} (j\omega) = \frac{\underline{y_S}}{\underline{x_E}} = \frac{b_0 + b_1 (j\omega) + \dots + b_m (j\omega)^m}{a_0 + a_1 (j\omega) + \dots + a_n (j\omega)^n}$$

$\underline{H}(j\omega)$  est appelée fonction de transfert du système linéaire, puisque  $\underline{y}_S$  et  $\underline{x}_E$  sont proportionnels, en RSF :



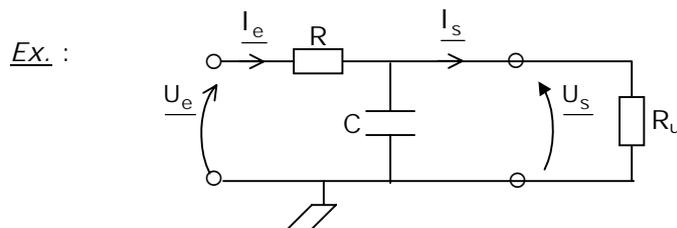
Rem. : on représente en général un système linéaire en RSF sous forme d'un quadripôle :



On peut alors définir 4 fonctions de transferts :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{U_s}{U_e} : \text{« amplification » en tension (sans dimension)} \\ \frac{I_s}{I_e} : \text{« amplification » en courant (sans dimension)} \\ \frac{U_s}{I_e} : \text{« transimpédance » (en } \Omega \text{)} \\ \frac{I_s}{U_e} : \text{« transadmittance » (en S)} \end{array} \right.$$

On notera de plus qu'une fonction de transfert n'est pas une grandeur intrinsèque au quadripôle, mais dépend de sa « charge ».



$$\left\{ \begin{array}{l} * \underline{H} = \frac{U_s}{U_e} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \text{ « à vide » (si } I_s = 0 \text{ ou } R_u \rightarrow \infty) \\ * \underline{H} = \frac{\underline{Z}}{R + \underline{Z}} \text{ sinon, où } \underline{Z} = \frac{R_u}{1 + jR_u C \omega} \end{array} \right.$$

### 1.2. Lien $\underline{H}$ / équation différentielle.

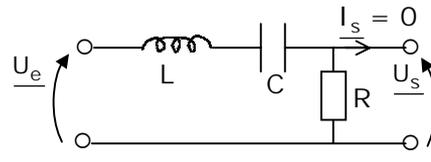
On voit que  $\underline{H}(j\omega)$  est une fraction rationnelle d'ordre n en  $p = j\omega$ .

\*Les coefficients de  $\underline{H}$  sont ceux de l'équation différentielle :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{er}} \text{ membre} \leftrightarrow \text{dénominateur} \\ 2^{\text{e}} \text{ membre} \leftrightarrow \text{numérateur} \end{array} \right.$$

On peut ainsi, inversement, « remonter » à l'équation différentielle  $x_E/y_S$  à partir de la fonction de transfert.

EX :



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

$$\Leftrightarrow \underline{U}_s (1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC) = j\omega RC \underline{U}_e$$

$$\Leftrightarrow \boxed{LC \overset{00}{u}_s + RC \overset{0}{u}_s + u_s = RC \overset{0}{u}_e}$$

(et cette équation différentielle est alors valable,  $\forall u_E$ , même non sinusoïdale bien sûr).

\*En posant  $p = j\omega$ , les pôles de  $H(p)$  vérifient :  $a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n = 0$ .

Cette équation est l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle. Ainsi :

$p_i$ , pôles de  $H(p)$  = racines équation caractéristique

Pour un SL passif, ou actif stable :

$$\underline{Re}(P_i) < 0$$

\*Pour  $\omega = 0$  :  $\underline{H}(0) = H_0 = \frac{b_0}{a_0}$  est appelé transfert statique.

Si alors, pour  $t > 0$  :  $x_E = 1$  :

$$a_n y_S^{(n)} + \dots + a_1 \overset{0}{y}_S + a_0 y_S = b_0$$

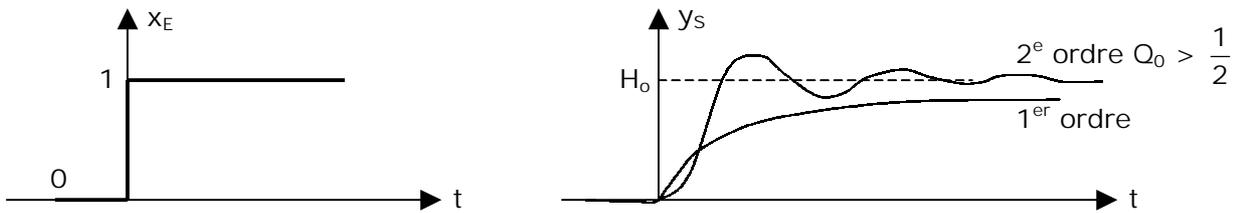
$$\Rightarrow y_S(t) = \underbrace{\text{SGESSM}}_{\rightarrow 0} + \frac{b_0}{a_0}$$

si  $t \rightarrow \infty$

On voit donc que :

$$\boxed{H_0 = H(p = 0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y_S(t) \quad \text{si } x_E = 1}$$

En électronique, la réponse à un échelon unité est appelée « réponse indicielle ». Donc :  
transfert statique = réponse indicielle en régime permanent



\*On montre de même (admis) que :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} H(p) = y_S(0^+) \text{ si } x_E = 1$$

Rem. : on aura toujours  $m \leq n$ , sinon :

$$\begin{cases} H \rightarrow \infty \\ \omega \rightarrow \infty \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} y_S \rightarrow \infty \\ \omega \rightarrow \infty \end{cases}, \text{ ce qui est}$$

exclu pour  $X_e$  borné et un système linéaire passif ou actif stable.

### 1.3. Intérêt de $\underline{H}$

Posons :

$$\begin{cases} x_E(t) = X_e \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_E) \leftrightarrow \underline{x_E} = X_e \sqrt{2} e^{j(\omega t + \varphi_E)} \\ y_S(t) = Y_s \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_S) \leftrightarrow \underline{y_S} = Y_s \sqrt{2} e^{j(\omega t + \varphi_S)} \end{cases}$$

Alors :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{y_S}}{\underline{x_E}} = \frac{Y_s}{X_e} = \frac{Y_s}{X_e} e^{j(\varphi_S - \varphi_E)}$$

Si on pose :  $\underline{H}(j\omega) = H(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$ , on voit que :

$$\begin{cases} |H| = H(\omega) = \frac{Y_s}{X_e} \\ \text{Arg } H = \varphi(\omega) = \varphi_S - \varphi_E = \text{déphasage sortie/entrée} \end{cases}$$

Ainsi, la connaissance de  $\underline{H}(j\omega)$  permet de connaître parfaitement la sortie  $y_S$  pour une entrée  $x_E$  donnée (son amplitude et sa phase à l'origine), pour toute valeur de  $\omega$ .

I.4. Représentations de  $\underline{H} = H(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$

\*Diagrammes linéaires : on trace  $H(\omega)$  et  $\varphi(\omega)$



Inconvénient : en électronique, on couvre en général une large plage de fréquences (en TP, avec du matériel de base, on peut couvrir la plage 100 Hz → 100 kHz), et ce mode de représentation est donc peu pratique et peu utilisé.

\*Diagramme de Bode : il s'agit d'utiliser une échelle logarithmique en abscisse (pour les raisons invoquées ci-dessus).

On définit de plus :

$$G_{dB} = 20 \log H, \text{ gain en décibels}$$

(uniquement si  $H = \frac{U_s}{U_e}$  ou  $H = \frac{I_s}{I_e}$  est sans dimension).

Le diagramme de Bode est alors le tracé des 2 courbes :



Rem. : • On trace en général un diagramme de Bode sur du papier « semi-logarithmique » (avec une échelle logarithmique).

•  $\log \omega \rightarrow -\infty$  : un diagramme de Bode ne « s'arrête pas » à  $\log \omega = 0$ .  
 $\omega \rightarrow 0$

• Si  $\underline{H} = \underline{H}_1 \underline{H}_2$  :  $\begin{cases} G_{dB} = G_{1dB} + G_{2dB} \\ \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \end{cases}$

on peut alors sommer les deux diagrammes de Bode de  $\underline{H}_1$  et  $\underline{H}_2$  pour obtenir celui de  $\underline{H}$ .

•  $\begin{cases} G_{dB} = 0 \Leftrightarrow H = 1 \\ G_{dB} < 0 \Leftrightarrow H < 1 \\ G_{dB} > 0 \Leftrightarrow H > 1 \end{cases}$

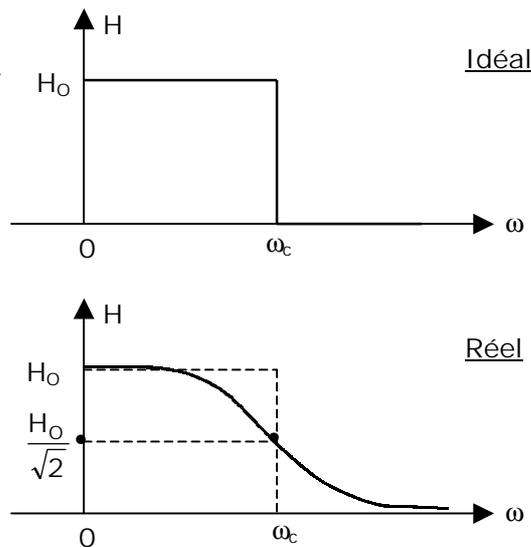
$$\left\{ \begin{array}{l} H = 10 \Leftrightarrow G_{dB} = 20 \\ H = 10^2 \Leftrightarrow G_{dB} = 40 \\ \vdots \\ H = 10^{-1} \Leftrightarrow G_{dB} = -20 \\ H = 10^{-2} \Leftrightarrow G_{dB} = -40 \\ \vdots \end{array} \right.$$

## II. Filtrage.

En électronique, un « filtre » est un système linéaire qui transmet (le plus parfaitement possible) certaines fréquences et atténue (le plus possible) les autres.

Il est caractérisé par sa « bande passante », bande de fréquences (ou de pulsations) transmise par le filtre :  $[\omega_{c1}, \omega_{c2}]$  ou  $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}$ .  $\omega_{c1}$  et  $\omega_{c2}$  sont les « pulsations de coupure ».

### II.1. Filtre passe-bas.

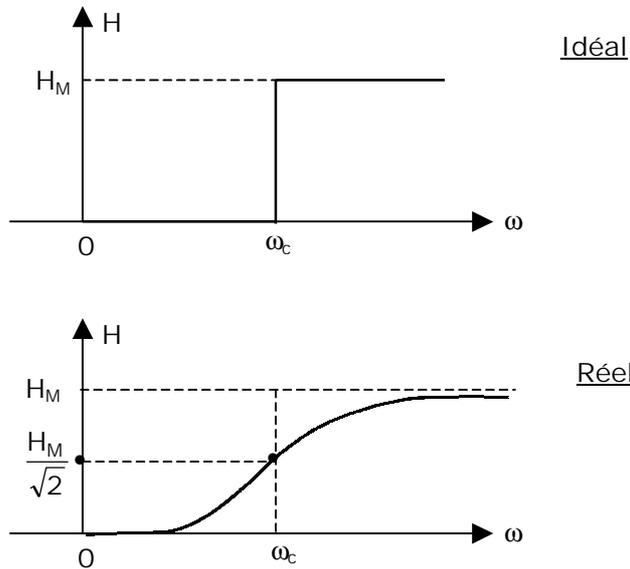


Par convention, on définit la « bande passante à -3 dB », c'est-à-dire les pulsations de coupure à -3 dB telles que :

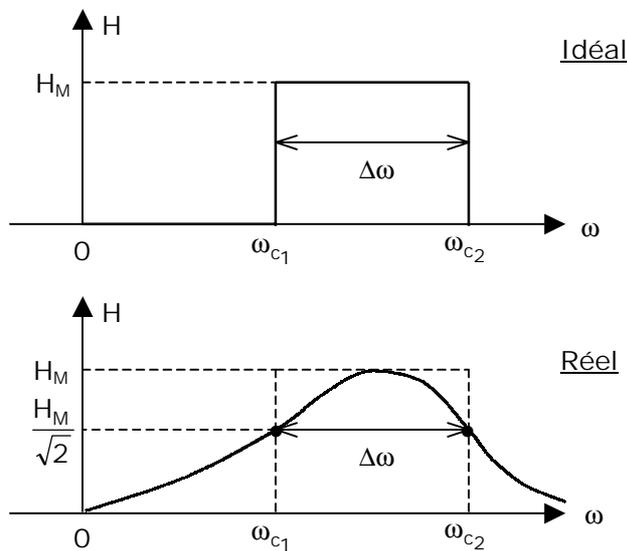
$$H(\omega_c) = \frac{H_{Max}}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow G(\omega_c) = G_{Max} - 3 \text{ dB}$$

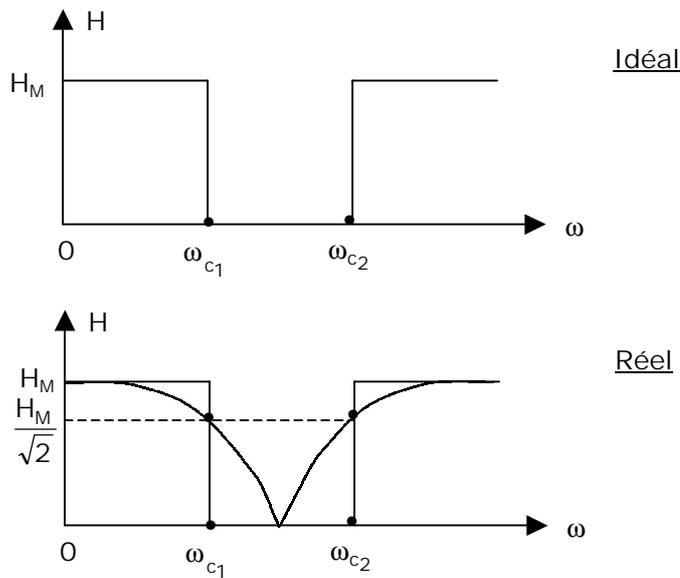
II.2. Filtre passe-haut.



II.3. Filtre passe-bande :



II.4. Filtre « réjecteur de bande ».



( $[\omega_{c1}, \omega_{c2}]$ ) est alors appelée bande « réjectée ».

### III. Filtrage du 1<sup>er</sup> ordre.

#### III.1. Forme canonique.

L'équation différentielle  $x_E/y_S$  est :

$$\tau \dot{y}_S + y_S = \dots$$

En notation complexe, on aura donc :

$$\underline{y}_S (j\tau\omega + 1) = \underline{x}_E (\dots)$$

Pour l'étude fréquentielle, on préfère en général poser  $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$  ; alors :

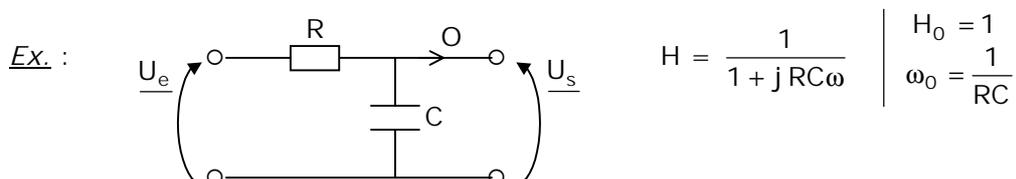
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{y}_S}{\underline{x}_E} = \frac{\dots}{1 + j\omega/\omega_0}$$

#### III.2. Filtre passe-bas :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\omega/\omega_0}$$

$$H(0) = H_0$$

$$H(\infty) = 0$$



Alors :

$$\begin{cases} H(\omega) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \omega^2 / \omega_0^2}} & (\text{si } H_0 > 0) \\ \varphi(\omega) = - \text{Arctan} \frac{\omega}{\omega_0} \end{cases}$$

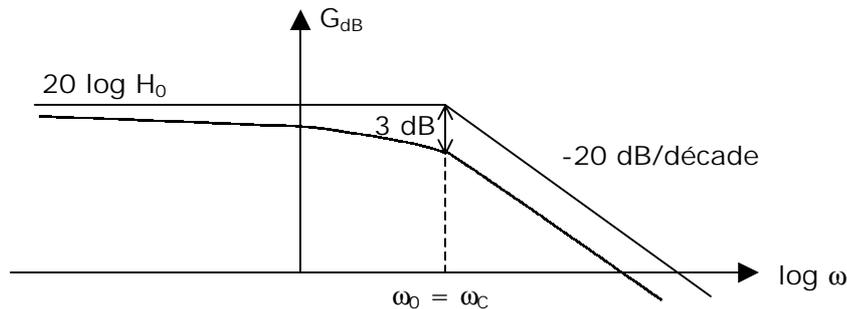
Le diagramme de Bode peut se tracer point par point (expérimentalement ou à la calculette). On peut en donner l'allure à partir du diagramme asymptotique :

\*Si  $\omega \ll \omega_0$  :  $H \approx H_0$  :  $G_{dB} \approx 20 \log H_0 = \text{cste}$   
 $\varphi \approx 0$

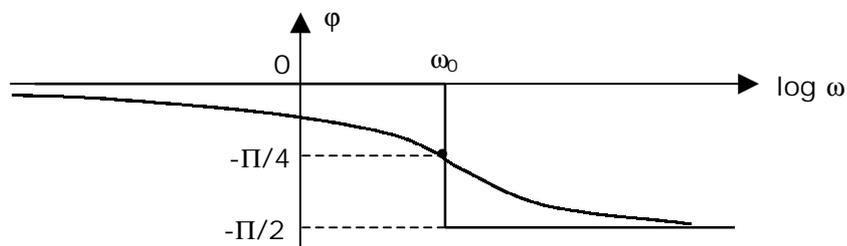
\*Si  $\omega \gg \omega_0$  :  $H \approx H_0 \frac{\omega_0}{\omega}$  :  $G_{dB} \approx 20 \log H_0 \omega_0 - 20 \log \omega$   
 $\varphi \approx -\pi/2$

Dans ce cas  $G_{dB}(10 \omega) = G_{dB}(\omega) - 20$  : on dit que l'asymptote est une droite de pente -20 dB par décade (une décade de pulsation est l'intervalle  $[\omega, 10 \omega]$ ).

On peut alors tracer le diagramme de Bode asymptotique, et l'allure du diagramme réel :



On remarque que  $H(\omega_0) = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$ , donc  $\omega_0 = \omega_c$ . Le filtre idéal du 1<sup>er</sup> ordre présenterait une pente infinie : un filtre du 1<sup>er</sup> ordre est d'assez mauvaise qualité, mais très simple à réaliser.



Rem. :

\*Si  $\omega \ll \omega_0$  :  $H(j\omega) \approx H_0 \in \mathbb{R}$

Donc  $y_S(t) \approx H_0 x_E(t)$ ,  $\forall t$  : le système réalise l'opération : « multiplication par une constante ».

\*Si  $\omega \gg \omega_0$  : 
$$\underline{H}(j\omega) \approx \frac{H_0 \omega_0}{j\omega} = \frac{y_s}{x_E}$$

Donc 
$$y_s(t) = H_0 \omega_0 \int x_E(t) dt$$

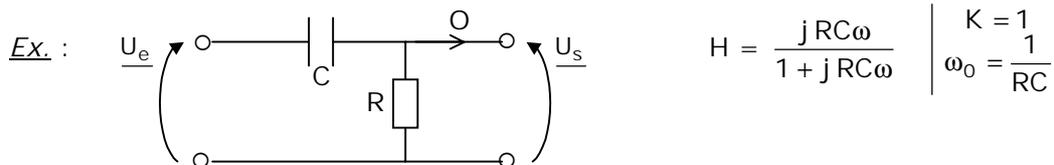
Le système se comporte alors comme un intégrateur, ce qui est associé à l'asymptote – 20 dB/décade.

On peut rapprocher cette remarque du 2.2i) où nous avons étudié la succession de charges et décharges du condensateur dans un circuit (R, C) :

$$\begin{cases} \omega \ll \omega_0 & \leftrightarrow T \gg \tau \\ \omega \gg \omega_0 & \leftrightarrow T \ll \tau \end{cases}$$

### III.3. Filtre passe-haut.

$$\underline{H}(j\omega) = K \frac{j\omega / \omega_0}{1 + j\omega / \omega_0} \quad \begin{cases} H(0) = 0 \\ H(\infty) = K \end{cases}$$



Alors :

$$\begin{cases} H(\omega) = \frac{K \omega / \omega_0}{\sqrt{1 + \omega^2 / \omega_0^2}} & (\text{si } K > 0) \\ \varphi = \Pi/2 - \text{Arctan} \frac{\omega}{\omega_0} \end{cases}$$

\*Si  $\omega \ll \omega_0$  :

$$\begin{cases} H(\omega) \approx K \frac{\omega}{\omega_0} \\ \varphi \approx \Pi/2 \end{cases}$$

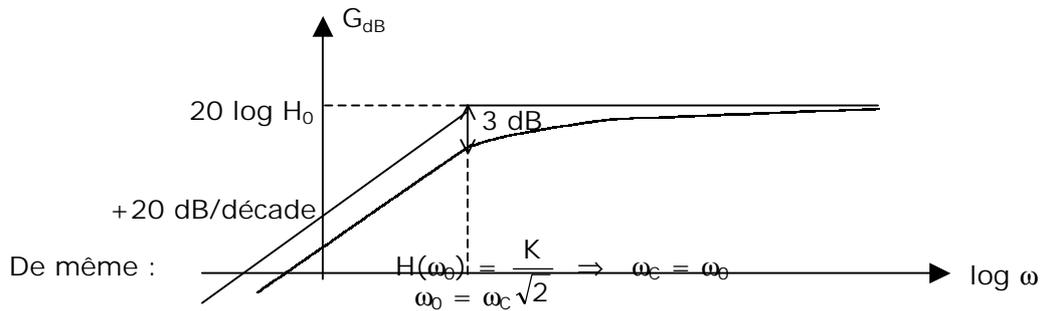
$$G_{dB} \approx 20 \log \frac{K}{\omega_0} + 20 \log \omega$$

(Droite de pente + 20 dB/décade)

\*Si  $\omega \gg \omega_0$  :

$$\begin{cases} H(\omega) \approx K \\ \varphi \approx 0 \end{cases} \quad : \quad G_{dB} \approx 20 \log K$$

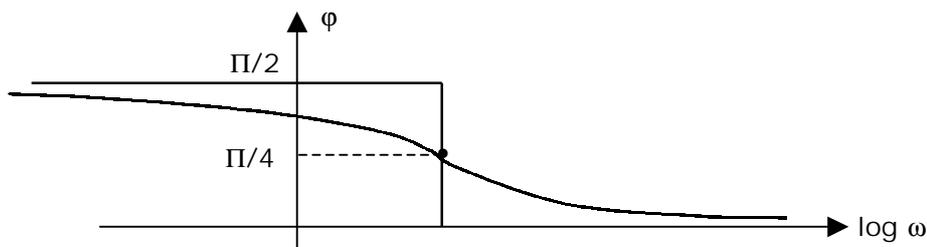
D'où le diagramme de Bode :



$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow \underline{H}(j\omega) \approx K j \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{y_S}{x_E}$$

$$\Rightarrow y_S(r) = \frac{K}{\omega_0} \overset{\circ}{x}_E$$

L'asymptote à ± 20 dB/décade traduit donc un comportement dérivateur du système.



#### IV. Filtrage du 2<sup>e</sup> ordre.

IV.1. **Forme canonique** : l'équation différentielle  $x_E/y_S$  est :

$$\overset{\circ}{y}_S + \frac{\omega_0}{Q_0} \overset{\circ}{y}_S + \omega_0^2 y_S = \dots$$

En notation complexe, on aura donc :

$$(-\omega^2 + j \omega \frac{\omega_0}{Q_0} + \omega_0^2) \underline{y}_S = \underline{x}_E \quad (\dots)$$

Ou encore, après division par  $\omega_0^2$  :

$$\underline{H} = \frac{y_S}{x_E} = \frac{\dots}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{j \omega}{\omega_0 Q_0}} = \frac{\dots}{1 - x^2 + \frac{j x}{Q_0}}$$

( $x = \omega/\omega_0$  pulsation réduite)

Rem. : si  $Q_0 < \frac{1}{2}$ , les pôles de  $H(p)$  sont réels négatifs et peuvent être notés :  $-\omega_1, -\omega_2$ .

On peut alors factoriser le dénominateur sous forme de 2 termes du 1<sup>er</sup> ordre :

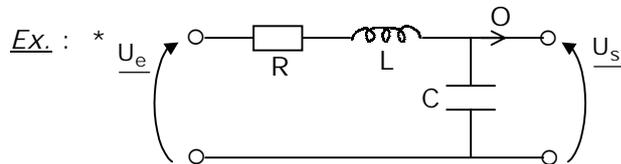
$$H = \frac{\dots\dots\dots}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

On peut noter que  $\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2$ , donc en échelle logarithmique,  $\omega_0$  est au milieu de  $[\omega_1, \omega_2]$ . De plus, si  $Q_0 \ll 1$  (système très peu amorti) :  $\omega_1 \ll \omega_2$ .

IV.2. Filtre passe-bas.

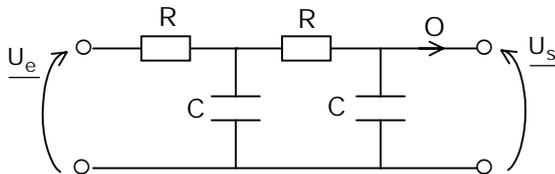
$$H = \frac{H_0}{1 - x^2 + j x/Q_0}$$

$$\begin{cases} x = 0 : H = H_0 \\ x \rightarrow \infty : H \rightarrow 0 \end{cases}$$



$$H = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + j RC\omega}$$

\*Double cellule (RC) :



$$H = \frac{1}{1 - R^2 C^2 \omega^2 + 3 j RC\omega}$$

$$\left(\omega_0 = \frac{1}{RC} ; Q_0 = 1/3\right)$$

On a :

$$H = \frac{H_0}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + (x/Q_0)^2}}$$

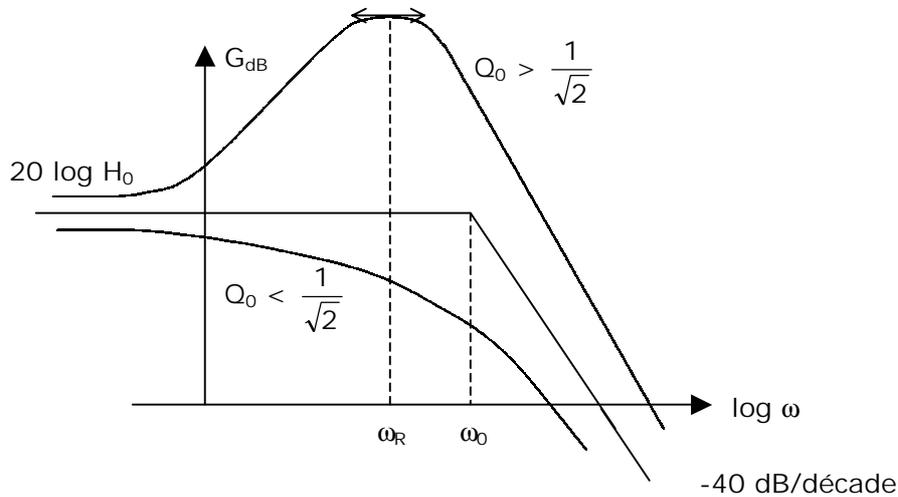
\*Si  $x \ll 1$  ( $\omega \ll \omega_0$ ) :  $H \approx H_0$

$$G_{dB} \approx 20 \log H_0$$

\*Si  $x \gg 1$  ( $\omega \gg \omega_0$ ) :  $H \approx \frac{H_0}{x^2} \approx \frac{H_0}{\omega^2} \omega_0^2$

$$G_{dB} \approx 20 \log H_0 \omega_0^2 - 40 \log \omega$$

On obtient ainsi une asymptote de pente -40 dB/décade, caractéristique du 2<sup>e</sup> ordre (le filtre est de meilleur qualité qu'un 1<sup>er</sup> ordre). Le diagramme de Bode (en gain) a l'allure suivante :



L'étude faite en 4.5.ii) montre que :

- Si  $Q_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , le diagramme réel reste en-dessous des asymptotes (pas de résonance).
- Si  $Q_0 > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , il est au-dessus (résonance).

Le phénomène de résonance est en général indésirable, pour un filtre passe-bas.

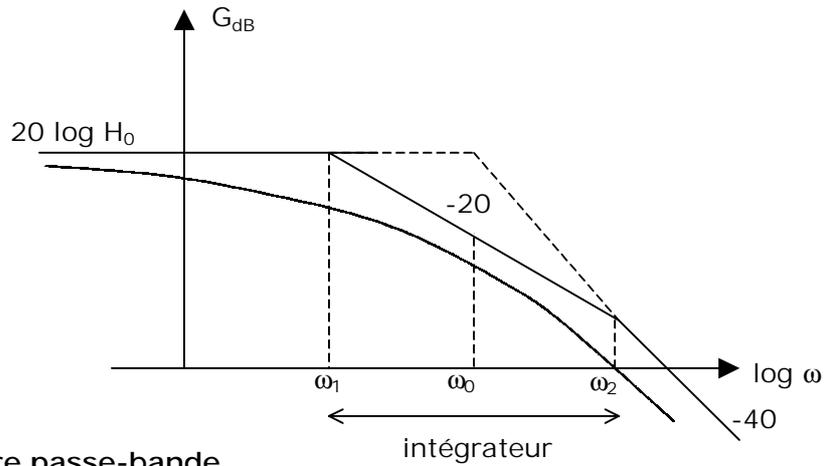
Rem. :

\*Pour  $\omega = \omega_0$  ( $x = 1$ ) :  $\frac{H}{H_0} = Q_0$ , donc  $\omega_0 \neq \omega_c$  en général (sauf pour  $Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ...).

\*Pour  $Q_0 \ll 1$  : 
$$\left( \begin{array}{l} \underline{H} \approx \frac{H_0}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_2}\right)} \\ \omega_1 \ll \omega_2 \end{array} \right.$$

Ainsi, le diagramme asymptotique va présenter une asymptote intermédiaire, entre  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , à -20 dB/décade :

$$\left( \begin{array}{l} \omega \ll \omega_1 : \underline{H} \approx H_0 \\ \omega_1 \ll \omega \ll \omega_2 : \underline{H} \approx \frac{H_0}{j \omega / \omega_1} \quad (\text{intégrateur}) \\ \omega \gg \omega_2 : \underline{H} \approx - \frac{H_0}{\omega^2 / \omega_0^2} \end{array} \right.$$



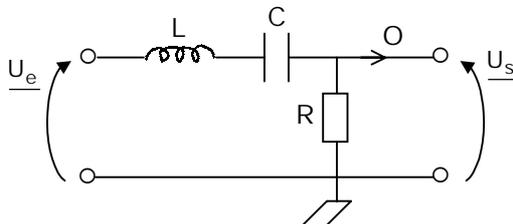
IV.3. Filtre passe-bande.

$$\underline{H} = \frac{K j x / Q_0}{1 - x^2 + j x / Q_0} = \frac{K}{1 + j Q_0 \left( x - \frac{1}{x} \right)}$$

$x = 0 : H = 0$

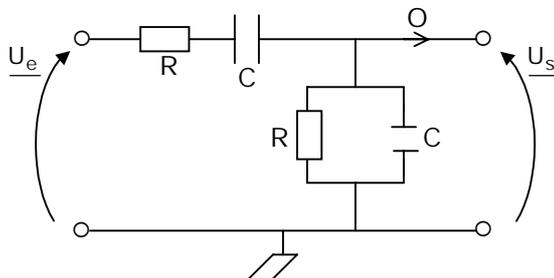
$x \rightarrow \infty : H \rightarrow 0$

Ex. : \*



$$\underline{H} = \frac{j RC\omega}{1 - LC\omega^2 + j RC\omega}$$

\* « Pont de Wien » :



$$\underline{H} = \frac{j RC\omega}{1 - R^2 C^2 \omega^2 + 3 j RC\omega}$$

$(K = \frac{1}{3} ; Q_0 = \frac{1}{3} ; \omega_0 = \frac{1}{RC})$

On a :

$$H = \frac{K}{\sqrt{1 + Q_0^2 \left( x - \frac{1}{x} \right)^2}}$$

\*Si  $x \ll 1$  ( $\omega \ll \omega_0$ ) :

$$\begin{cases} H \approx \frac{K x}{Q_0} \approx \frac{K \omega}{\omega_0 Q_0} \\ G_{dB} \approx 20 \log \frac{K}{\omega_0 Q_0} + 20 \log \omega \end{cases}$$

(asymptote à + 20 dB/décade)

\*Si  $x \gg 1$  ( $\omega \gg \omega_0$ ) :

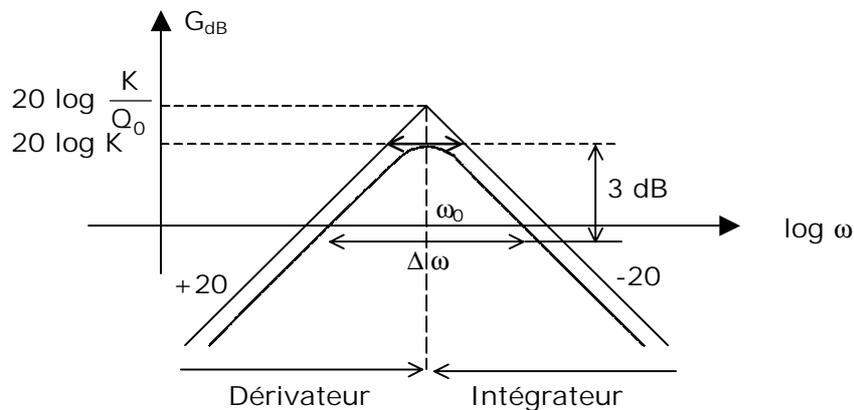
$$\begin{cases} H \approx \frac{K}{Q_0 x} = \frac{K \omega_0}{\omega Q_0} \\ G_{dB} \approx 20 \log \frac{K \omega_0}{Q_0} - 20 \log \omega \end{cases}$$

(asymptote à -20 dB/décade)

De plus, pour  $\omega = \omega_0$  :  $H = H_{Max} = K$ , et les 2 asymptotes se coupent en  $\frac{K}{Q_0}$ .

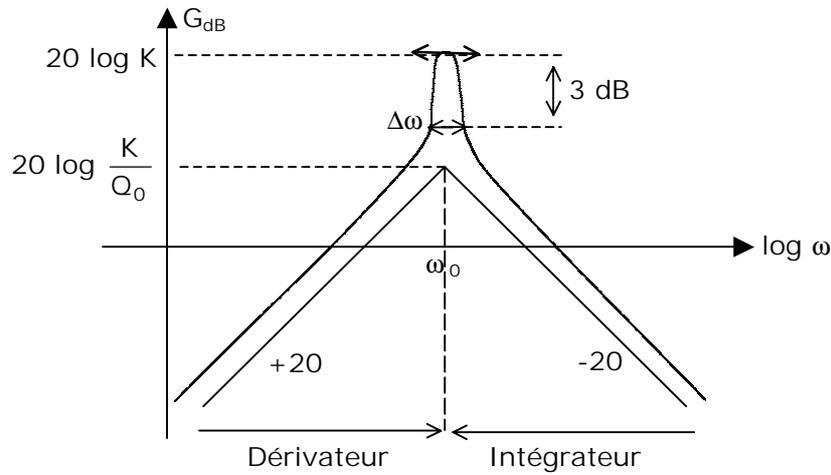
L'allure du diagramme de Bode (en gain) dépend donc ici de la place de  $Q_0$  par rapport à 1 :

1<sup>er</sup> cas :  $Q_0 < 1$  : on reste en-dessous des asymptotes :



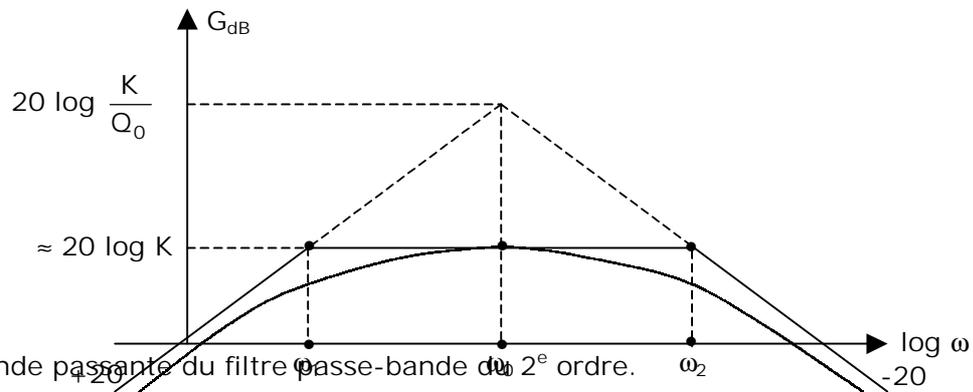
Le filtre est alors « peu sélectif ».

2<sup>e</sup> cas :  $Q_0 > 1$  : on es au-dessus des asymptotes, avec une résonance aiguë si  $Q_0 \gg 1$  (filtre « très sélectif »).



Rem. : Si  $Q_0 \ll 1$ , on a de même : 
$$\underline{H} \approx \frac{K j \frac{\omega}{\omega_0} Q_0}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

Le diagramme présente alors une asymptote intermédiaire entre  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , et est très peu sélectif.



Soit  $\Delta\omega$  la bande passante du filtre passe-bande du 2<sup>e</sup> ordre.

Montrons que :

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q_0}} \quad : \text{ Plus } Q_0 \text{ est élevé, plus le filtre est « sélectif »}$$

Les pulsations de coupure (réduites)  $x_{c1} = \frac{\omega_{c1}}{\omega_0}$  et  $x_{c2} = \frac{\omega_{c2}}{\omega_0}$  vérifient :

$$H(x) = \frac{K}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow Q_0^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow Q_0 \left(x - \frac{1}{x}\right) = \pm 1$$

On obtient ainsi deux équations du 2<sup>e</sup> degré en x :

$$x^2 \pm \frac{1}{Q_0} x - 1 = 0$$

On choisit la racine positive de chaque équation

$$\begin{cases} x_{c1} = -\frac{1}{2Q_0} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \\ x_{c2} = \frac{1}{2Q_0} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta x = x_{c2} - x_{c1} = \frac{1}{Q_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$$

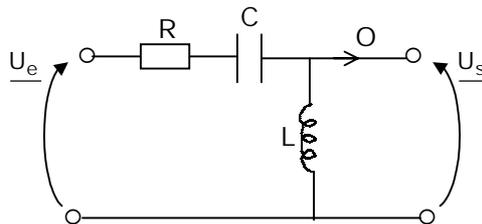
**IV.4. Filtre passe-haut :**

$$\underline{H} = \frac{K(-x^2)}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q_0}}$$

$x = 0 : H = 0$

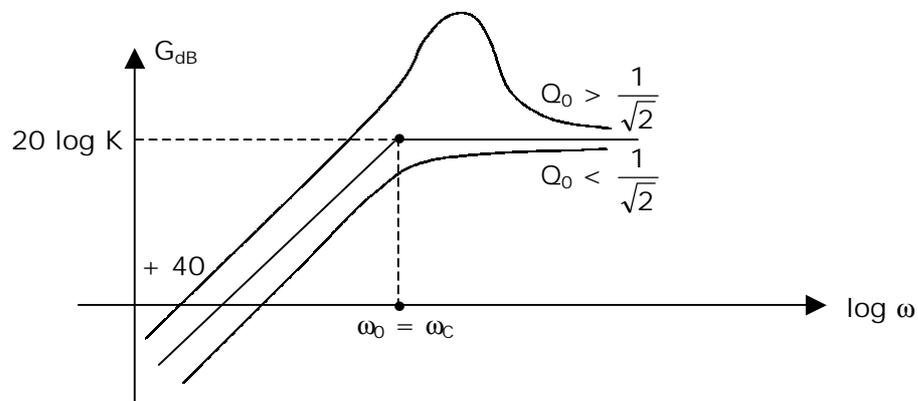
$x \rightarrow \infty : H \rightarrow K$

Ex. :



$$\underline{H} = -\frac{-LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

Les filtres passe-haut sont moins utilisés en électronique. Le diagramme de Bode s'obtient de manière analogue au passe-bas :



**Remarques finales sur les filtres**

\*Un filtre passif est constitué de R, L, C. Les bobines sont problématiques car encombrantes et susceptibles de se coupler entre elles.

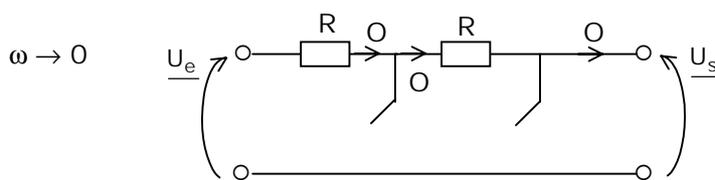
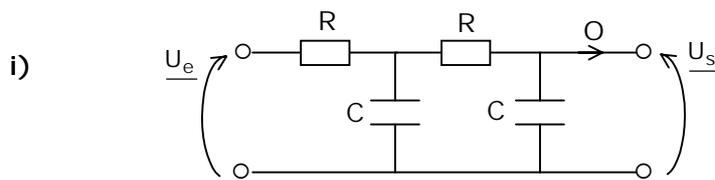
Un filtre actif sera alors uniquement composé de R, C et d'amplificateurs opérationnels (seul élément actif au programme), ces derniers permettant de simuler une impédance inductive à l'aide de R et C (cf 6.3i).

\*On peut prévoir a priori, sans calculs, le comportement d'un filtre à basses et hautes fréquences. On utilise le fait que :

$$\omega \rightarrow 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{C\omega} \rightarrow \infty \\ L\omega \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

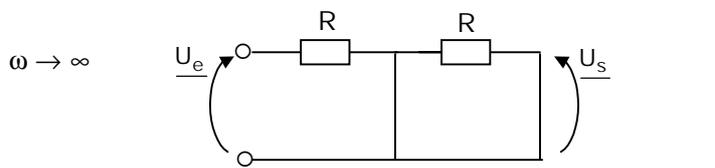
$$\omega \rightarrow \infty \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{C\omega} \rightarrow 0 \\ L\omega \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

**Exemples**



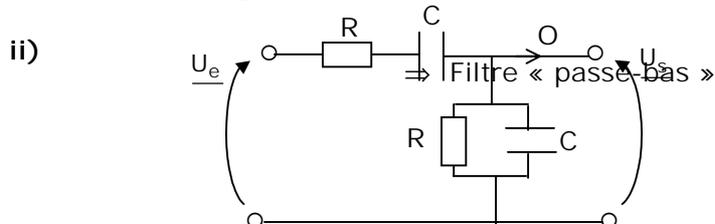
$$\underline{U}_s = \underline{U}_e$$

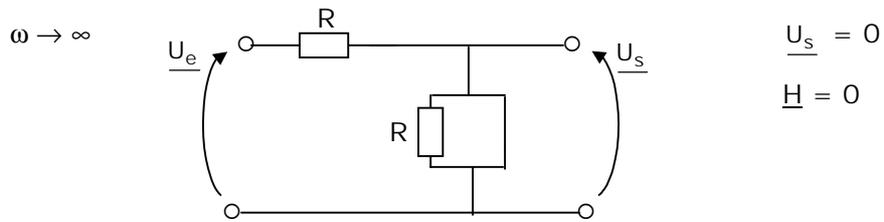
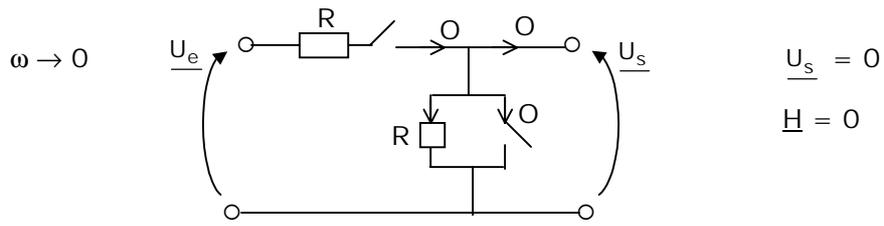
$$\underline{H} = 1$$



$$\underline{U}_s = 0$$

$$\underline{H} = 0$$





⇒ Filtre « passe-bande »