-EXERCICE 29.6-

• ENONCE :

« Energie d'un condensateur et vecteur de Poynting »

• On considère un condensateur plan de capacité C, dont les armatures sont des disques parallèles de rayon R, écartés d'une distance $a \ll R$.

• Compte tenu de la condition précédente, le champ électrique $\vec{E}$ entre les armatures pourra être considéré comme **uniforme** et perpendiculaire aux disques, le champ magnétique $\vec{B}$ étant quant à lui **orthoradial**.

• On suppose que la charge du condensateur est une fonction du temps $q(t)$.

1) En désignant par $W_C(t)$ l'énergie emmagasinée par le condensateur, calculer sa variation temporelle, soit $\dfrac{dW_C(t)}{dt}$, en fonction de $q(t)$ et de C.
2) Déterminer les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, ainsi que le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$, en tout point de l'espace inter armatures.
3) En déduire la puissance électromagnétique entrant à travers la surface latérale délimitant le condensateur ; comparer à $\dfrac{dW_C(t)}{dt}$ et conclure.

<u>Rappel</u> : en coordonnées cylindriques, on a :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \left(\frac{1}{r}\times\frac{\partial B_z}{\partial\theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r}\times\frac{\partial (rB_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\times\frac{\partial B_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_z$$

• CORRIGE :

«Energie d'un condensateur et vecteur de Poynting »

1) $W_C(t) = \dfrac{q(t)^2}{2C}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{dW_C(t)}{dt} = \dfrac{1}{C} \times \dfrac{dq(t)}{dt} \times q(t)}$

2) En négligeant les effets de bord, on peut en effet admettre que le champ électrique est quasiment uniforme entre les armatures du condensateur ; on écrit alors, en notant σ la densité surfacique de charges portées par un disque :

$\vec{E}(t) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z$, où $\vec{e}_z$ est perpendiculaire aux plans des disques $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E}(t) = \dfrac{q(t)}{\varepsilon_0 \pi R^2}\vec{e}_z}$

• A ce stade, on peut, à priori, calculer le champ magnétique de 2 façons différentes :

♦ à partir de l'équation de M.F : $\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{0} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\Rightarrow$ $\vec{B}$ ne dépendrait pas du temps !

En fait, le champ électrique n'est que **quasiment** uniforme et les opérations de dérivation spatiale (lorsqu'on fait « agir » le rotationnel) entraînent des écarts non négligeables par rapport à la dérivation spatiale d'un champ rigoureusement uniforme (c'est le contraire lors d'une opération d'intégration, qui « lisse » ou « moyenne » ces mêmes écarts) $\Rightarrow$ on optera pour le calcul suivant.

♦ à partir de l'équation de M.A : $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \dfrac{1}{c^2} \times \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \dfrac{1}{c^2} \times \dfrac{dq/dt}{\varepsilon_0 \pi R^2}\vec{e}_z$

• Puisque le champ $\vec{B}$ est orthoradial et ne dépend pas de θ (invariance par rotation autour de l'axe Oz), on obtient les relations :

♦ $\dfrac{\partial B_\theta}{\partial z} = 0$ $\Rightarrow$ B_θ **ne dépend pas** non plus de la variable z.

♦ $\dfrac{1}{r} \times \dfrac{\partial (rB_\theta)}{\partial r} = \dfrac{1}{r} \times \dfrac{d(rB_\theta)}{dr} = \dfrac{1}{\pi \varepsilon_0 c^2 R^2} \times \dfrac{dq(t)}{dt}$ $\Rightarrow$ $rB_\theta = \dfrac{dq/dt}{2\pi \varepsilon_0 c^2 R^2} \times r^2 + cste$

Or, le champ magnétique devant rester fini sur l'axe (en r=0), il faut $\boxed{cste = 0}$; d'où :

$$\boxed{\vec{B}(r,t) = \frac{dq/dt}{2\pi \varepsilon_0 c^2 R^2} \times r\vec{e}_\theta}$$

• On en déduit le vecteur de Poynting :

$\vec{\Pi}(r,t) = \vec{E} \wedge \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{q(t)}{\pi \varepsilon_0 R^2} \times \dfrac{dq/dt}{2\pi \varepsilon_0 \mu_0 c^2 R^2} \times r \times (\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{\Pi}(r,t) = -\dfrac{r}{2\pi^2 \varepsilon_0 R^4} \times q(t) \times \dfrac{dq(t)}{dt}\vec{e}_r}$

3) Exprimons le vecteur de Poynting à la périphérie du condensateur, c'est-à-dire en r=R ; on a :

$\vec{\Pi}(R,t) = -\dfrac{1}{2\pi^2 \varepsilon_0 R^3} \times q(t) \times \dfrac{dq(t)}{dt}\vec{e}_r$ $\Rightarrow$ on peut calculer la puissance électromagnétique **entrant** dans le condensateur à travers sa surface latérale selon :

$$P_{em}(t) = \iint_{surf.lat} \Pi(R,t)\vec{e}_r \cdot (-\vec{e}_r)dS = -\iint_{surf.lat} \Pi(R,t) \times dS = \frac{1}{2\pi^2\varepsilon_0 R^3} \times \frac{dq(t)}{dt} \times q(t) \times 2\pi Ra \Rightarrow$$

$$\boxed{P_{em}(t) = \frac{a}{\pi\varepsilon_0 R^2} \times \frac{dq(t)}{dt} \times q(t) = \frac{1}{C} \times \frac{dq(t)}{dt} \times q(t)}$$

Rq1 : en effet, la capacité d'un condensateur plan est donnée par $C = \varepsilon_0 \times \frac{S}{e}$, où S est la surface d'une armature (ici, $S = \pi R^2$) et e l'écartement des 2 armatures.

Rq2 : on trouve donc que $P_{em}(t) = \frac{dW_C(t)}{dt}$, ce qui traduit le fait que **toute** la puissance électromagnétique entrant en r=R est emmagasinée dans le condensateur, sans aucune perte (normal pour un condensateur « parfait », modélisé par sa seule capacité).