-EXERCICE 29.7-

• ENONCE :

« Effet Meissner »

• A très basse température, certains métaux deviennent supraconducteurs (leur résistivité devient non mesurable).

• Placés dans un champ magnétique extérieur **permanent** $\vec{B}_e$, on constate que les lignes du champ magnétique $\vec{B}_e$ sont « expulsés » du métal : en fait, le champ ne pénètre que sur une épaisseur très faible, comme dans « l'effet de peau » (mais, rappelons-le, le champ est ici permanent, donc la théorie « classique » ne permet pas d'interpréter ce phénomène).

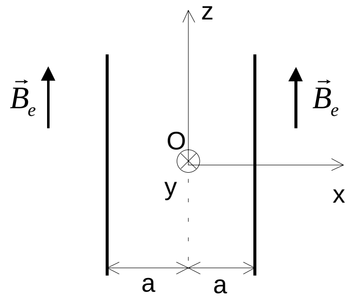
• Pour l'interpréter de manière « phénoménologique », London (1935) propose d'ajouter aux équations de Maxwell la relation :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{j} = -\frac{ne^2}{m}\vec{B}}$$

où n est le nombre d'électrons par unité de volume, m la masse des électrons et e leur charge.

1) Etablir l'équation différentielle satisfaite par le champ $\vec{B}$ dans le métal.

2)



On considère une lame de métal supraconducteur d'épaisseur 2a selon Ox, et illimitée selon les axes Oy et Oz.
On applique un champ extérieur permanent, parallèle aux faces de la lame .
On suppose que le champ intérieur est parallèle au champ $\vec{B}_e$.

Calculer le champ magnétique $\vec{B}$ à l'intérieur de la lame ; on posera : $\boxed{\delta = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 ne^2}}}$

3) Calculer la densité de courant $\vec{j}$ et représenter les lignes de courant.

4) <u>Application numérique</u> : on donne pour l'aluminium : 3 électrons libres par atome ;

$$\rho = 2,7.10^3 kg.m^{-3} \; ; \; m = 9.10^{-31} kg \; ; \; M_{Al} = 27 g.mol^{-1}$$

Calculer δ en donnant sa dimension.

5) En supposant que les lignes de courant se « referment » à l'infini, quel est le sens du moment magnétique et du champ magnétique $\vec{B}_i$ créés par ces courants ? Conclure.

ONDES ELECTROMAGNETIQUES

EXERCICE D' ORAL

• **CORRIGE :** « Effet Meissner »

1) En régime permanent, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B}=\mu_0\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{B})=\overrightarrow{grad}(div\vec{B})-\Delta\vec{B}=-\Delta\vec{B}=\mu_0\overrightarrow{rot}\vec{j}=\mu_0\left(-\frac{ne^2}{m}\vec{B}\right) \Rightarrow \boxed{\Delta\vec{B}-\frac{\mu_0 ne^2}{m}\vec{B}=\vec{0}}$$

2) Le système étant invariant par translation selon Oy et Oz, on a : $\boxed{\vec{B}=B(x)\vec{e}_z}$

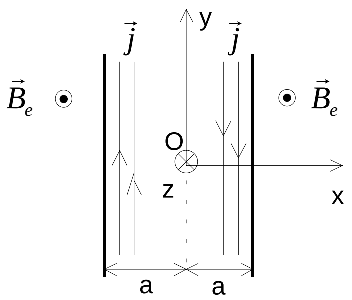
• En projection sur l'axe Oz, il vient : $\dfrac{d^2B(x)}{dx^2}-\dfrac{\mu_0 ne^2}{m}B(x)=0 \Rightarrow B(x)=a\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{x}{\delta}\right)+b\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{x}{\delta}\right)$

• A l'échelle microscopique, le champ magnétique est **continu** $\Rightarrow$ $B(-a)=B(a)=B_e$, d'où :

$$\boxed{\vec{B}(x)=B_e\times\frac{\mathrm{ch}(x/\delta)}{\mathrm{ch}(a/\delta)}\vec{e}_z}$$

3) et 5) On sait que : $\vec{j}=\dfrac{1}{\mu_0}\times\overrightarrow{rot}\vec{B}(x)=\dfrac{1}{\mu_0}\times\left(-\dfrac{dB_z}{dx}\right)\vec{e}_y \Rightarrow \boxed{\vec{j}(x)=-\dfrac{B_e}{\mu_0\delta}\times\dfrac{\mathrm{sh}(x/\delta)}{\mathrm{ch}(a/\delta)}\vec{e}_y}$

• On peut alors représenter quelques lignes de courant qui, comme nous le verrons dans l'application numérique, sont purement **superficielles** :



En utilisant la règle du tire-bouchon, on constate que le moment magnétique et le champ magnétique créés par les courants $\vec{j}$ sont de sens **contraire** du champ magnétique extérieur : la résistivité étant nulle, ces courants peuvent atteindre des valeurs très élevées et créer ainsi un champ magnétique qui annule le champ d'origine extérieure, ceci à l'intérieur du métal supraconducteur.
Il s'agit encore d'un phénomène de modération (comme l'induction), mais en régime permanent.

4) Il faut déjà calculer la densité volumique d'électrons libres :

$$n=3\times N_A\times\frac{\rho}{M_{Al}}=3\times 6{,}02.10^3\times\frac{2{,}7.10^3}{27.10^3} \Rightarrow \boxed{n\simeq 1{,}81.10^{28}\,m^{-3}}$$

• Enfin : $\delta=\sqrt{\dfrac{m}{\mu_0 ne^2}}$, avec $|e|=1{,}6.10^{-19}C \Rightarrow \boxed{\delta\simeq 12{,}5\ nm}$

• δ a la dimension d'une **longueur**, et correspond à la « **profondeur de pénétration** » du champ magnétique extérieur dans le métal supraconducteur ; en effet, en se plaçant à une profondeur de 3δ à partir de la surface et en considérant que $\delta \ll a$, on a :

$$B(a-3\delta)=B_e\times\frac{\exp\left(\dfrac{a}{\delta}-3\right)+\exp\left(-\dfrac{a}{\delta}+3\right)}{\exp(a/\delta)+\exp(-a/\delta)}\simeq B_e\times\frac{\exp\left(\dfrac{a}{\delta}-3\right)}{\exp(a/\delta)}=B_e\times\exp(-3)\simeq 0{,}05\times B_e \ll B_e$$