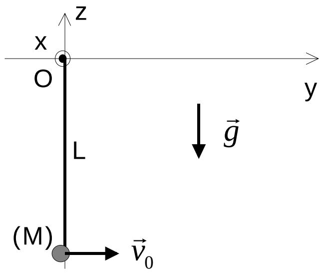
MECANIQUE DU POINT MATERIEL

EXERCICE D' ORAL

-EXERCICE 11.3-

• ENONCE :

« Différents mouvements d'un pendule »



On considère un pendule simple constitué d'un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable, auquel est suspendu un point matériel (M) de masse m.
L'autre extrémité est fixée en un point O et le mouvement de (M) se fait dans le plan horizontal yOz.
A l'instant initial, le mobile (M) est lancé, fil tendu, avec une vitesse horizontale : $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_y$

La rotation se fait sans frottements autour de l'axe Ox.

1) Quels sont les différents cas possibles pour le mouvement ultérieur du point matériel (M) ?
2) Donner des conditions sur v_0 pour obtenir chacun des cas décrits précédemment

• CORRIGE :

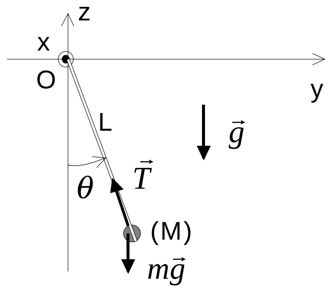
«Différents mouvements d'un pendule »

1) Pour une vitesse initiale v_0 inférieure à une vitesse limite v_{01}, le mouvement peut être **oscillatoire**, la corde restant tendue (dans le cas de petits angles de rotation, les oscillations sont quasi-harmoniques, de pulsation $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$).

• Pour $v_{01} \prec v_0 \prec v_{02}$, le **fil se détend** avant que le pendule ne puisse faire un tour complet (le point matériel décrit alors un bout de trajectoire parabolique, puis le fil se retend etc...).

• Pour $v_0 \succ v_{02}$, le pendule effectue un **mouvement révolutif**, le fil restant toujours tendu.

2)



Tant que le fil reste tendu, la force de tension $\vec{T}$ exercée par le fil ne travaille pas (elle reste perpendiculaire au déplacement).
On peut donc appliquer la conservation de l'énergie mécanique , ce qui sécrit en prenant l'origine des énergies potentielles au point O:

$$E_C + E_P = cste = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgL = \frac{1}{2}mv^2 - mgL\cos\theta$$

On en déduit une 1ère relation : $\boxed{v^2 = v_0^2 + 2gL(\cos\theta - 1)}$ (1)

• Par ailleurs, toujours pour le fil tendu, on applique le PFD au point (M) et on le projette sur le vecteur normal de la base de Frenet, ce qui fournit :

$ma_N = m\dfrac{v^2}{L} = T - mg\cos\theta \;\Rightarrow\; T = m\dfrac{v^2}{L} + mg\cos\theta \;\Rightarrow$ grâce à (1), on obtient :

$$\boxed{T(\theta) = m\frac{v_0^2}{L} + mg(3\cos\theta - 2)} \quad (2)$$

• On peut alors définir 2 angles importants : θ_V = angle pour lequel la vitesse s'annule, et θ_T angle pour lequel la tension du fil devient nulle, c'est-à-dire que le fil se détend.

♦ La relation (1) donne : $\boxed{\cos\theta_V = 1 - \dfrac{v_0^2}{2L}}$

♦ La relation (2) donne : $\boxed{\cos\theta_T = \dfrac{2}{3} - \dfrac{v_0^2}{3gL} = \dfrac{2}{3}\cos\theta_V}$

• Pour $\boxed{v_0 \leq v_{01} = \sqrt{2gL}}$: $\cos\theta_V$ et $\cos\theta_T$ sont ≥ 0, avec $\cos\theta_V \geq \cos\theta_T \Rightarrow \theta_T \geq \theta_V \Rightarrow$ la vitesse s'annule avant que le fil ne se détende $\Rightarrow$ **le mouvement peut être oscillatoire**.

Rq : pour le cas limite $v_0 = \sqrt{2gL}$, $\theta_V = \theta_T = \pi/2 \Rightarrow$ la tension devient nulle en même temps que la vitesse.

- Lorsque l'angle de rotation θ dépasse la valeur $\pi/2$, $\cos\theta_V$ et $\cos\theta_T$ sont ≤ 0 $\Rightarrow$ $\cos\theta_V \leq \cos\theta_T$ $\Rightarrow$ $\theta_T \leq \theta_V$: c'est donc cette fois vers la tension qu'il faut se tourner pour savoir si le mouvement peut être révolutif ou non. La relation (2) montre que c'est en $\theta = \pi$ que la tension est la plus faible ; elle y est nulle pour :

$0 = m\dfrac{v_{02}^2}{L} + mg(3\cos\pi - 2)$ $\Rightarrow$ $\boxed{v_{02} = \sqrt{5gL}}$ $\Rightarrow$ le mouvement est **révolutif** pour $v_0 \geq v_{02}$.

- Pour $v_{01} \prec v_0 \prec v_{02}$, le **fil se détend** pour un angle de rotation θ tel que $\pi/2 \prec \theta \prec \pi$, et le mouvement n'est ni oscillatoire, ni révolutif.

