J. QUINET

Cours élémentaire de mathématiques supérieures

4 - Equations différentielles

6e édition

Dunod

J. QUINET
Ingénieur de l'École Supérieure d'Électricité

COURS ÉLÉMENTAIRE DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

Tome 4
Equations différentielles

6e édition
par une équipe de professeurs
Avec la participation de

J. FAZEKAS
Professeur à l'École Centrale d'Électronique de Paris

Dunod

© BORDAS, Paris, 1977

ISBN 2-04-007423-6

" Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur, ou de ses ayants-droit, ou ayants-cause, est illicite (loi du 11 mars 1957, alinéa 1er de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal. La loi du 11 mars 1957 n'autorise, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, que les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective d'une part, et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration "

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

1.1 Définition. Nous avons introduit au tome 1 les applications d'un ensemble E dans un ensemble F. Aux tomes 2 et 3, nous avons étudié le cas où E est une partie de l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels et où F est égal à $\mathbf{R}$ (ou à $\mathbf{C}$); ce cas est celui des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles (ou complexes).

En pratique, on rencontre souvent le cas où l'ensemble E est une partie du produit cartésien de deux ou trois ensembles. Lorsque E est une partie de $\mathbf{R}^2$, une application f de E dans $\mathbf{R}$ (ou dans $\mathbf{C}$) s'appelle *fonction de deux variables*. A tout élément (x, y) de E, cette fonction associe un nombre réel (ou complexe) noté $f(x, y)$. De même, lorsque E est une partie de $\mathbf{R}^3$, une application f de E dans $\mathbf{R}$ (ou dans $\mathbf{C}$) prend le nom de *fonction de trois variables* : la valeur qu'elle prend sur un triplet (x, y, z) se note $f(x, y, z)$.

EXEMPLES

1. L'aire A d'un rectangle est le produit de la longueur b de la base par la longueur h de la hauteur; c'est donc une fonction des deux variables b et h :

$$A = bh = f(b, h) .$$

2. L'intensité I d'un courant électrique dans une résistance est fonction de la valeur R de cette résistance et de la d.d.p. V aux bornes :

$$I = V/R = f(V, R) .$$

3. La capacité C d'un condensateur est fonction de l'aire S en regard des plaques et de leur écartement e :

$$C = \frac{\varepsilon_r}{9 \times 10^9} \frac{S}{4\pi e} = f(S, e) .$$

4. La quantité de chaleur W dissipée dans une résistance électrique R est fonction de R, de l'intensité I et du temps t ; c'est donc une fonction de trois variables :

$$W = RI^2t = f(R, I, t) .$$

5. L'induction magnétique B produite par une bobine est une fonction de trois variables, à savoir le nombre N de tours, l'intensité I et la longueur l :

$$B = 4\pi\, 10^{-7}\, NI/l = f(N, I, l) .$$

6. On rencontre aussi des fonctions de plus de trois variables. Ainsi, la force électromagnétique F qui s'exerce sur un conducteur électrique placé dans un champ magnétique est une fonction de quatre variables :

$$F = BIl \sin \alpha = f(B, I, l, \alpha) .$$

Ensemblé de définition. Comme dans le cas des fonctions d'une variable, la première étape consiste à déterminer l'ensemble de définition :

Ainsi, lorsque f est définie par la formule

$$f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2}\,,$$

l'ensemble de définition est l'ensemble des couples (x, y) de nombres réels tels que

$$x^2+y^2 \leqslant 1\,.$$

On représente le couple (x, y) dans le plan rapporté à un repère orthonormal par le point M de coordonnées x et y. L'ensemble de définition est alors représenté par l'ensemble des points situés à une distance de l'origine inférieure à 1 (Fig. 1.1).

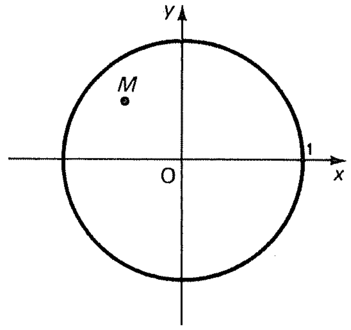


FIG. 1.1

De même, lorsque f est définie par la formule

$$f(x, y) = \sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}\,,$$

l'ensemble de définition (Fig. 1.2) est l'ensemble des couples (x, y) de nombres réels tels que

$$|x| \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad |y| \leqslant 1\,.$$

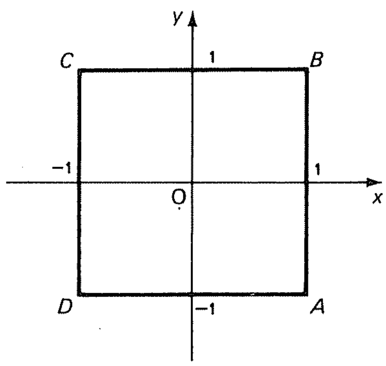


FIG. 1.2

Enfin, lorsque f est définie par la formule

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

l'ensemble de définition est le plan $\mathbf{R}^2$ privé de $(0, 0)$.

1.2 Parties remarquables. Pour alléger l'écriture, nous nous bornerons à étudier les fonctions de deux variables. Mais, même dans ce cas, la théorie est plus compliquée que dans celui d'une variable : en effet, la plupart des fonctions d'une variable sont définies sur des intervalles, *et la notion d'intervalle n'a aucun sens dans le plan* $\mathbf{R}^2$. Il nous faut donc introduire quelques parties remarquables du plan.

Soient (x_0, y_0) un point de $\mathbf{R}^2$ et α un nombre réel positif. On appelle *disque fermé* de centre (x_0, y_0) et de rayon α la partie de $\mathbf{R}^2$ constituée des points (x, y) dont la distance au point (x_0, y_0) est inférieure à α :

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \leqslant \alpha .$$

Lorsque α est strictement positif, on appelle *disque ouvert* de centre (x_0, y_0) et de rayon α la partie de $\mathbf{R}^2$ constituée des points (x, y) dont la distance au point (x_0, y_0) est strictement inférieure à α :

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \alpha .$$

On dit qu'une partie P de $\mathbf{R}^2$ est bornée s'il existe un point (x_0, y_0) de $\mathbf{R}^2$ et un nombre réel positif α tels que P soit contenue dans le disque fermé de centre (x_0, y_0) et de rayon α.

EXEMPLES

1. Soient a, b, c et d quatre nombres réels tels que $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$. Le rectangle $[a, b] \times [c, d]$ est borné.

En effet, ce rectangle est contenu dans le disque fermé de centre $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}\sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2}$.

2. La partie du plan comprise entre deux droites parallèles n'est pas bornée.

On dit qu'une partie P de $\mathbf{R}^2$ est ouverte, ou encore que P est un *ouvert*, si, pour tout point (x, y) de P, il existe un disque ouvert de centre (x, y) contenu dans P. On appelle *fermé*, ou partie fermée, toute partie de $\mathbf{R}^2$ dont le complémentaire est un ouvert.

Par exemple, les disques ouverts sont des ouverts, les disques fermés sont des fermés.

On montre aisément que $\mathbf{R}^2$ et la partie vide de $\mathbf{R}^2$ sont des ouverts, que l'intersection d'une famille finie d'ouverts est ouverte, et que la réunion d'une famille quelconque d'ouverts est ouverte.

Par passage aux complémentaires, on voit que $\mathbf{R}^2$ et la partie vide de $\mathbf{R}^2$ sont des fermés, que la réunion d'une famille finie de fermés est fermée, et que l'intersection d'une famille quelconque de fermés est fermée.

Soit P une partie de $\mathbf{R}^2$. On dit qu'un point (x_0, y_0) de $\mathbf{R}^2$ est *intérieur à* P s'il existe un disque ouvert de centre (x_0, y_0) contenu dans P. On dit que (x_0, y_0) est *adhérent à* P si tout disque ouvert de centre (x_0, y_0) rencontre P.

EXEMPLES

1. Tout point d'un ouvert P est intérieur à P.

2. Prenons pour P le disque ouvert (x_0, y_0) et de rayon α. Les points adhérents à P sont les points du disque fermé de centre (x_0, y_0) et de rayon α.

1.3 Limite d'une fonction en un point. Considérons une fonction f définie sur une partie P de $\mathbf{R}^2$ et un point (x_0, y_0) de $\mathbf{R}^2$ adhérent à P. On dit que $f(x, y)$ admet pour limite un nombre l lorsque (x, y) tend vers (x_0, y_0) si, pour tout nombre réel strictement positif ε, il existe un nombre réel strictement positif η tel que, pour tout point (x, y) autre que (x_0, y_0) de l'intersection de P et du disque fermé de centre (x_0, y_0) et de rayon η, la valeur absolue de $f(x, y) - l$ soit inférieure à ε.

En abrégé, $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \leqslant \eta \Rightarrow |f(x, y) - l| \leqslant \varepsilon$, étant bien entendu que (x, y) appartient à l'ensemble de définition P sans être égal à (x_0, y_0).

Comme au chapitre 1 du tome 2, on montre qu'un tel nombre réel l (s'il existe) est unique; on l'appelle la *limite* de $f(x, y)$ lorsque (x, y) tend vers (x_0, y_0).

Les théorèmes sur les limites d'une somme, d'un produit, d'un quotient restent valables pour les fonctions de deux variables.

1.4 Fonction continue en un point. La définition des fonctions continues en un point est encore calquée sur le cas d'une variable :

Considérons une fonction f définie sur une partie P de $\mathbf{R}^2$. On dit que f est *continue* en un point (x_0, y_0) si

a) la fonction f est définie en ce point, c'est-à-dire si $(x_0, y_0) \in P$;
b) la fonction f admet pour limite $f(x_0, y_0)$ au point (x_0, y_0).

Remarque. La restriction de f à la droite d'équation $y = y_0$ est une fonction d'une seule variable. Si cette nouvelle fonction a une limite au point x_0, on dit que f est continue par rapport à x. De même, si la restriction de f à la droite d'équation $x = x_0$ a une limite au point y_0, on dit que f est continue par rapport à y.

Il est immédiat que si f est continue au point (x_0, y_0), f est continue par rapport à chaque variable. On notera que la réciproque est fausse : la fonction f peut être continue par rapport à chaque variable sans être continue au point (x_0, y_0).

Il peut même arriver que la restriction de f à toute droite D passant par le point (x_0, y_0) soit continue en ce point sans que f le soit, ainsi que nous allons le voir.

EXEMPLE. *La fonction numérique f définie sur $\mathbf{R}^2$ par les formules*

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

$$f(0, 0) = 0$$

n'est pas continue au point $(0, 0)$.

Supposons en effet que f soit continue en ce point. Alors, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existerait un disque fermé de centre (0, 0) de rayon non nul tel que la restriction de f à ce disque soit en valeur absolue inférieure à ε. Or, un tel disque contient des points de la forme (x, x^2), $x \neq 0$, où f prend la valeur 1/2.

Cependant, la restriction f_D de f à toute droite D est continue au point (0, 0).

Soit en effet (α, β) un vecteur directeur de D. Supposons d'abord $\alpha \neq 0$; alors, pour tout point (x, y) de D,

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x,$$

et, si $x \neq 0$,

$$f_D(x, y) = \frac{\alpha\beta x^3}{\alpha^2 x^4 + \beta^2 x^2} = \frac{\alpha\beta x}{\alpha^2 x^2 + \beta^2}.$$

Il est clair que f_D admet 0 pour limite au point (0, 0).

Supposons maintenant que $\alpha = 0$; la restriction de f à D est alors nulle, et sa limite est encore 0.

Pour montrer qu'une fonction f n'est pas continue en un point, il *suffit* de trouver une droite D passant par ce point telle que la restriction f_D de f à D ne soit pas continue en ce point. On essaiera de préférence une parallèle à un axe de coordonnées.

Exemple. Soit f la fonction définie par les formules

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

$$f(0, 0) = 0.$$

La restriction f_D de f à la droite D d'équation $y = x$ prend la valeur 1/2 en tout point (x, x) différent de (0, 0); elle admet donc pour limite 1/2 à l'origine. Comme $1/2 \neq 0$, la fonction f n'est pas continue au point (0, 0).

Pour montrer qu'une fonction f est continue à l'origine, on fait souvent appel aux coordonnées polaires (voir tome 5).

Exemple. Soit f la fonction définie par les formules

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

$$f(0, 0) = 0.$$

Nous pouvons écrire x et y sous la forme

$$x = \rho \cos\theta \qquad \text{et} \qquad y = \rho \sin\theta,$$

en prenant $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. Alors

$$f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) = \frac{\rho^2 \cos^2\theta\rho \sin\theta}{\rho^2} = \rho \cos^2\theta \sin\theta .$$

Donc

$$|f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)| \leqslant \rho .$$

Pour tout nombre réel strictement positif ε, la relation $|\rho| \leqslant \varepsilon$ implique

$$|f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)| \leqslant \varepsilon .$$

Autrement dit, pour tout point (x, y) du disque fermé de centre $(0, 0)$ et de rayon ε,

$$|f(x, y)| \leqslant \varepsilon .$$

La fonction f est donc continue au point $(0, 0)$.

1.5 Continuité sur une partie. On dit qu'une fonction f est continue sur une partie P de $\mathbf{R}^2$ si elle est continue en tout point de P.

EXEMPLES.

1. Soit g une fonction numérique continue sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. Alors la fonction f définie sur $I \times \mathbf{R}$ par la formule

$$f(x, y) = g(x)$$

est continue sur $I \times \mathbf{R}$.

2. Soient g et h deux fonctions numériques continues sur des intervalles I et J de $\mathbf{R}$. Alors la fonction f définie sur $I \times J$ par la formule

$$f(x, y) = g(x)\, h(y)$$

est continue sur $I \times J$.

3. Formes linéaires. Soient l et m deux nombres réels. Alors la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par la formule

$$f(x, y) = lx+my$$

est continue sur $\mathbf{R}^2$.

Les théorèmes sur la continuité de la somme, du produit, du quotient de deux fonctions continues restent valables dans le cas des fonctions de deux variables.

De même, soient f une fonction continue sur une partie P de $\mathbf{R}^2$ et g une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ contenant $f(P)$; alors la fonction composée $h = g \circ f$ est continue sur P.

EXEMPLE. La fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbf{R}$; il en découle que la fonction $(x, y) \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbf{R}^2$. De même, la fonction $(x, y) \mapsto y^2$ est continue sur $\mathbf{R}^2$.

La somme de ces fonctions, à savoir la fonction $f: (x, y) \mapsto x^2+y^2$, est continue sur $\mathbf{R}^2$.

La fonction $g : u \mapsto \sin u$ est continue sur $\mathbf{R}$. La fonction $h = g \circ f$, c'est-à-dire la fonction $h : (x, y) \mapsto \sin(x^2+y^2)$, est continue sur $\mathbf{R}^2$.

Les parties de $\mathbf{R}^2$ correspondant aux intervalles de $\mathbf{R}$ sont les parties *connexes*, c'est-à-dire les parties « d'un seul tenant ». Par exemple, les droites et les disques (ouverts ou fermés) de $\mathbf{R}^2$ sont connexes. En revanche, la réunion de deux disques disjoints n'est pas connexe.

Nous pouvons alors étendre le théorème des valeurs intermédiaires énoncé au chapitre 1 du tome 2 :

Théorème des valeurs intermédiaires. *Soit f une fonction numérique continue sur une partie connexe P de $\mathbf{R}^2$. Alors l'image $f(P)$ de P par f est un intervalle de $\mathbf{R}$.*

D'après la définition des intervalles, cet énoncé équivaut au suivant :

Soient (a, b) et (c, d) *deux points quelconques de P, et k un point de l'intervalle fermé* $[f(a, b), f(c, d)]$. *Il existe alors un point (x_0, y_0) de P tel que*

$$f(x_0, y_0) = k .$$

De même, le théorème sur l'image continue d'un intervalle fermé borné devient :

Image continue d'une partie fermée bornée. *Soit f une fonction numérique continue sur une partie P de $\mathbf{R}^2$. Si P est fermée bornée, alors l'image $f(P)$ de P par f est encore fermée bornée.*

Ce résultat s'applique par exemple au cas où P est un disque fermé.

En combinant les deux théorèmes précédents, on voit que l'image par une fonction continue f d'une partie connexe et fermée bornée P est un intervalle fermé borné de $\mathbf{R}$. Comme dans le cas d'une variable, on en déduit que f atteint ses bornes.

DÉRIVÉES PARTIELLES

1.6 Dérivées partielles. La notion de dérivée n'a plus de sens pour une fonction f de deux variables x et y. Cependant, si l'on fixe la variable y en lui attribuant une valeur y_0, on obtient une fonction g de la seule variable x, définie par la formule

$$g(x) = f(x, y_0) .$$

Si la fonction g admet une dérivée $g'(x_0)$ au point x_0, on dit que cette dérivée est la *dérivée partielle* de f par rapport à x au point (x_0, y_0), et on la note $f'_x(x_0, y_0)$ (ce qu'on lit « f prime indice x de x_0, y_0 »). On emploie aussi la notation $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ (ce qu'on lit « d rond f sur d rond x de x_0, y_0 »).

Ainsi, par définition,

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} .$$

On définit de même la dérivée partielle de f par rapport à y au point (x_0, y_0), et on la note $f'_y(x_0, y_0)$, ou encore $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Par définition,

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

L'existence et le calcul des dérivées partielles d'une somme, d'un produit, d'un quotient de fonctions numériques se déduisent aussitôt des résultats établis au chapitre 2 du tome 2.

Supposons maintenant que f admette des dérivées partielles par rapport à x et à y en tout point de l'ensemble de définition P. Les fonctions numériques définies sur P par les formules

$$(x, y) \mapsto f'_x(x, y) \qquad \text{et} \qquad (x, y) \mapsto f'_y(x, y)$$

sont appelées respectivement dérivées partielles de f par rapport à x et à y, et notées f'_x et f'_y, ou encore $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

EXEMPLES.

1. La fonction f définie par la formule

$$f(x, y) = 3x^2 y - \frac{\sin y}{x}$$

a pour dérivées partielles

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6xy + \frac{\sin y}{x^2}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 - \frac{\cos y}{x}.$$

2. La fonction f définie par la formule

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{x/y}$$

a pour dérivées partielles

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y}\,\mathrm{e}^{x/y}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{x}{y^2}\,\mathrm{e}^{x/y}.$$

1.7 Dérivée d'une fonction composée. Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, u et v deux fonctions numériques définies sur I et f une fonction numérique définie sur une partie P de $\mathbf{R}^2$ contenant $u(I)\times v(I)$. La fonction numérique F d'une variable définie sur I par la formule

$$F(x) = f[u(x), v(x)]$$

est appelée *fonction composée.*

Par exemple, $f(u, v)$ peut être de l'une des formes suivantes : $u+v$, uv, u/v, u^v, etc.

Si u et v sont dérivables et si f admet des dérivées partielles continues sur P, alors F est dérivable sur I, et sa dérivée est définie par la formule

$$F'(x) = f'_u[u(x), v(x)]\; u'(x) + f'_v[u(x), v(x)]\; v'(x).$$

Donnons en effet à x un accroissement Δx; il en résulte pour $u(x)$, $v(x)$ et $f[u(x), v(x)]$ les accroissements Δu, Δv *et* ΔF. On peut écrire

$$\Delta F = f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v).$$

Ajoutons et retranchons $f(u, v+\Delta v)$:

$$\Delta F = [f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v+\Delta v)] + [f(u, v+\Delta v) - f(u, v)].$$

Appliquons à chaque crochet la formule des accroissements finis

$$\Delta F = \Delta u\, f'_u(u+\theta\, \Delta u, v+\Delta v) + \Delta v\, f'_v(u, v+\theta'\, \Delta v)$$

où

$$0<\theta<1 \qquad \text{et} \qquad 0<\theta'<1.$$

Divisons par Δx :

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} f'_u(u+\theta\, \Delta u, v+\Delta v) + \frac{\Delta v}{\Delta x} f'_v(u, v+\theta'\, \Delta v).$$

Quand Δx tend vers zéro, $\Delta u/\Delta x$, $\Delta v/\Delta x$ tendent vers u' et v'; $\theta\, \Delta u$ et $\theta'\, \Delta v$ tendent vers zéro, et comme f'_u et f'_v sont supposés continus, le second membre tend vers

$$u'(x)\, f'_u(u, v) + v'(x)\, f'_v(u, v).$$

Donc

$$F'(x) = u'(x)\, f'_u(u, v) + v'(x)\, f'_v(u, v),$$

ce qu'il fallait démontrer.

EXEMPLES.

1. Supposons que $f(u, v) = uv$. Alors $f'_u = v$, $f'_v = u$ et

$$(uv)' = u'v + v'u.$$

On retrouve ainsi la formule bien connue de la dérivée d'un produit.

2. Lorsque $f(u, v) = u/v$, nous obtenons $f'_u = 1/v$, $f'_v = -u/v^2$ et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = u' \frac{1}{v} - v' \frac{u}{v^2}.$$

Nous retrouvons donc la formule de la dérivée d'un quotient.

3. Supposons maintenant que u est à valeurs strictement positives. Alors la fonction F définie par la formule

$$F(x) = u(x)^{v(x)}$$

est dérivable sur I, et sa dérivée est définie par la formule

$$F'(x) = v(x)\, u(x)^{v(x)-1}\, u'(x) + [\ln u(x)]\, u(x)^{v(x)}\, v'(x)\,.$$

(On retrouvera ce résultat en écrivant $F(x)$ sous la forme $e^{v(x) \ln u(x)}$.)

Ainsi, pour calculer la dérivée de $(\sin x)^x$, on peut commencer par écrire

$$f'_u = x(\sin x)^{x-1}$$

(c'est la dérivée d'une fonction puissance), et

$$f'_v = (\sin x)^x \ln \sin x$$

(c'est la dérivée d'une fonction exponentielle). D'où

$$((\sin x)^x)' = (\sin x)^x \left(\frac{x \cos x}{\sin x} + \ln \sin x\right).$$

De même,

$$(x^{\sin x})' = x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \ln x\right).$$

Généralisation. Soient u, v et w trois fonctions dérivables et f une fonction de trois variables admettant des dérivées partielles continues. On montre comme dans le cas précédent que la fonction

$$F : x \mapsto f[u(x), v(x), w(x)]$$

est dérivable et que

$$F'(x) = f'_u[u(x), v(x), w(x)]\, u'(x) + f'_v[u(x), v(x), w(x)]\, v'(x) + \\ + f'_w[u(x), v(x), w(x)]\, w'(x)\,.$$

Différentielle d'une fonction composée. Nous avons vu au chapitre 3 du tome 2 que toute formule relative à la dérivée d'une fonction d'une variable peut encore s'écrire avec la notation différentielle.

Ainsi, la relation

$$F'(x) = f'_u u' + f'_v v'$$

devient

$$dF = f'_u u' \, dx + f'_v v' \, dx.$$

Or, $u' \, dx = du$ et $v' \, dx = dv$; finalement :

$$dF = f'_u \, du + f'_v \, dv.$$

De même, dans le cas de trois variables,

$$dF = f'_u \, du + f'_v \, dv + f'_w \, dw.$$

EXEMPLES.

1. Si $F(x) = (\sin x)^x$, nous obtenons

$$dF = x(\sin x)^{x-1} (\cos x \, dx) + (\sin x)^x \ln \sin x \, dx.$$

2. Si $F(x) = (1/x)^{\operatorname{tg} x}$, il vient facilement

$$dF = \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x - 1} \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx + \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} \ln \frac{1}{x} \left(\frac{dx}{\cos^2 x}\right).$$

1.8 Dérivées partielles successives. Soit f une fonction numérique admettant une dérivée partielle f'_x par rapport à x. Supposons que f'_x admette aussi une dérivée partielle par rapport à x, soit $(f'_x)'_x$; on note celle-ci plus simplement f''_{x^2} (ce qu'on lit « f seconde indice x deux »). De même, si f'_x admet une dérivée partielle $(f'_x)'_y$ par rapport à y, on note celle-ci f''_{xy} (ce qu'on lit « f seconde indice xy »).

Utilisons maintenant la notation avec des d ronds. La dérivée partielle f'_x se notant $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, la dérivée partielle seconde f''_{x^2} devient $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$, ou plus simplement $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (ce qu'on lit d rond deux f sur d rond x deux »). On remarquera la position décalée des deux exposants 2, à comparer avec la notation $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ employée pour représenter une dérivée seconde. De même, la dérivée seconde f''_{xy} devient $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$, ou plus simplement $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (ce qu'on lit « d rond deux f sur d rond y d rond x »).

On définirait de même la fonction f''_{yx} ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ qui est la dérivée partielle de f'_y par rapport à x et la fonction f''_{y^2} ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ qui représente la dérivée partielle de f'_y par rapport à y.

EXEMPLES.

1. Considérons la fonction f définie par la formule

$$f(x, y) = e^{xy}.$$

Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\, e^{xy} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x\, e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y\, e^{xy}) = y^2\, e^{xy} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x(x\, e^{xy}) = x^2\, e^{xy}.$$

Prenons la dérivée par rapport à y de $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(y\, e^{xy}) = e^{xy} + xy\, e^{xy} = (1+xy)\, e^{xy}.$$

Prenons la dérivée par rapport à x de $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x\, e^{xy}) = e^{xy} + yx\, e^{xy} = (1+xy)\, e^{xy}.$$

Remarquons que les dérivées partielles secondes f''_{xy} et f''_{yx} sont égales.

2. Étudions de même le cas où

$$f(x, y) = \text{Arc tg}\, \frac{x}{y}.$$

Il vient aussitôt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}\, \frac{1}{1+x^2/y^2} = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\, \frac{1}{1+x^2/y^2} = -\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Prenons la dérivée par rapport à x de $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Prenons la dérivée par rapport à y de $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Prenons maintenant la dérivée par rapport à y de $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{(x^2+y^2).1 - y.2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Prenons enfin la dérivée par rapport à x de $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right) = \frac{(x^2+y^2)(-1)+x.2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Ces deux dernières dérivées sont égales.

1.9 Théorème de Schwarz. L'égalité des dérivées partielles « croisées » f''_{xy} et f''_{yx}, que nous venons de constater sur deux exemples, ne résulte pas d'un hasard. En effet, sous des hypothèses assez larges, il est possible d'intervertir l'ordre des dérivations, comme l'a établi Karl Hermann Amandus Schwarz :

Soit f une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles premières continues et des dérivées partielles secondes f''_{xy} et f''_{yx}. Si ces deux dernières dérivées sont continues en un point (x_0, y_0), elles prennent la même valeur en ce point :

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Considérons l'expression

$$\Delta = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0).$$

1° Posons

$$\varphi(x) = f(x, y_0+k) - f(x, y_0).$$

Dans ces conditions

$$\Delta = \varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)$$

et d'après la formule des accroissements finis

$$\Delta = (x_0+h-x_0)\,\varphi'(x_0+\theta h) \qquad 0<\theta<1$$

$$\Delta = h\varphi'(x_0+\theta h)$$

soit

$$\Delta = h[f'_x(x_0+\theta h, y_0+k) - f'_x(x_0+\theta h, y_0)].$$

En développant le crochet par la formule des accroissements finis, on obtient :

$$\Delta = hk[f''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta_1 k)] \qquad 0<\theta_1<1. \tag{1}$$

2° Évaluons différemment Δ en introduisant la fonction

$$\psi(y) = f(x_0+h, y) - f(x_0, y).$$

Dans ces conditions

$$\Delta = \psi(y_0+k) - \psi(y_0) = k\psi'(y_0+\theta_2 k) \qquad 0<\theta_2<1.$$

Soit

$$\Delta = k[f'_y(x_0+h, y_0+\theta_2 k) - f'_y(x_0, y_0+\theta_2 k)].$$

En développant le crochet par la formule des accroissements finis, on obtient :

$$\Delta = hk[f''_{yx}(x_0+\theta_3 h,\ y_0+\theta_2 k)] \qquad 0 < \theta_3 < 1 . \qquad (2)$$

La comparaison des résultats (1) et (2) montre que

$$f''_{xy}(x_0+\theta h,\ y_0+\theta_1 k) = f''_{yx}(x_0+\theta_3 h,\ y_0+\theta_2 k) .$$

Si h et k tendent vers zéro, il résulte de l'hypothèse de la continuité des fonctions f''_{xy} et f''_{yx} que

$$f''_{xy}(x_0\,,\ y_0) = f''_{yx}(x_0\,,\ y_0) ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. A titre d'exercice, nous allons voir sur un exemple célèbre, dû à Giuseppe Peano, qu'il n'est pas toujours possible d'intervertir l'ordre des dérivations (ce qui implique que f''_{xy} et f''_{yx} ne sont pas continues). Cet exemple a l'avantage de faire réfléchir sur la définition même des dérivées partielles.

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par les formules

$$f(x, y) = xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x, y) \neq (0,0)$$

$$f(0,0) = 0 .$$

Nous nous proposons de calculer $f''_{xy}(0, 0)$ et $f''_{yx}(0, 0)$. Par définition,

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f'_x(0, y) - f'_x(0,0)}{y} .$$

Or,

$$f'_x(0, y) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x} \quad \text{et} \quad f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} .$$

Comme $\dfrac{f(x, y) - f(0, y)}{x} = y\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ et que $\dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$, nous obtenons aussitôt

$$f'_x(0, y) = -y \qquad f'_x(0,0) = 0 .$$

Ainsi,

$$f''_{xy}(0,0) = -1 .$$

Un calcul analogue conduit à

$$f''_{yx}(0,0) = 1 ,$$

ce qui montre que, dans le cas présent, $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$.

De telles singularités apparaissent souvent en physique, lorsqu'on applique un théorème mathématique ... sans vérifier qu'on a le droit de l'appliquer !

FONCTIONS HOMOGÈNES

1.10 Fonctions homogènes. Nous allons examiner une classe très importante de fonctions de plusieurs variables.

Soit P un *secteur angulaire* de $\mathbf{R}^2$, c'est-à-dire une partie telle que, pour tout point (x, y) de P et pour tout nombre réel strictement positif t, le point (tx, ty) appartienne à P (Fig. 1.3).
On remarquera que $\mathbf{R}^2$ tout entier est un secteur angulaire; il en est de même de $\mathbf{R}^2$ privé du point (0, 0).

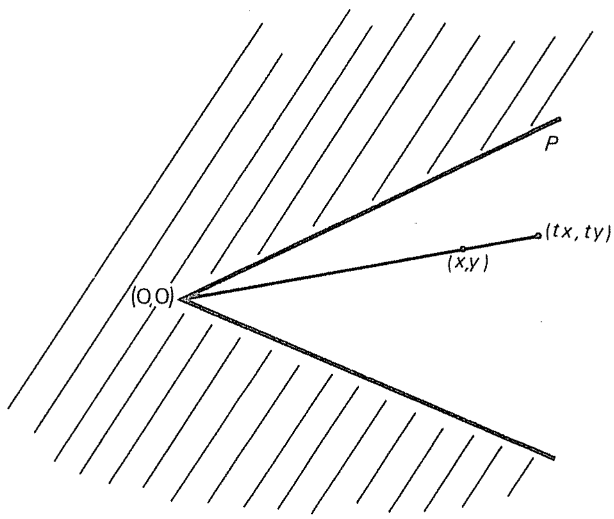


FIG. 1.3

Soit maintenant α un nombre réel. On dit qu'une fonction numérique f définie sur P est *homogène de degré* α si, pour tout point (x, y) de P et pour tout nombre réel strictement positif t,

$$f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)\,. \tag{1}$$

(On remarquera que si f est non nulle, un tel nombre réel α est unique.)

EXEMPLES.

1. La fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par la formule

$$f(x, y) = 3x^2y + \sqrt{2}xy^2 - y^3 \tag{2}$$

est homogène de degré 3.

2. La fonction f définie sur $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ par la formule

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} \tag{3}$$

est homogène de degré $-2/3$.

3. La fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par la formule

$$f(x, y) = x^2+y^3 \tag{4}$$

n'est pas homogène.

Supposons en effet qu'il existe un nombre réel α tel que, pour tout couple (x, y) de nombres réels et pour tout nombre réel strictement positif t,

$$(tx)^2 + (ty)^3 = t^\alpha(x^2+y^3).$$

En prenant $y=0$ et $x=1$, nous voyons que α devrait être égal à 2; de même, en prenant $x=0$ et $y=1$, nous voyons que α devrait être égal à 3, ce qui est contradictoire.

1.11 Dérivées partielles d'une fonction homogène. Soit f une fonction homogène de degré α. Si f admet des dérivées partielles, celles-ci sont homogènes de degré $\alpha-1$.

En effet, dérivons les deux membres de (1) *par rapport à x* :

$$t\,\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^\alpha\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

Nous pouvons simplifier par t, car t n'est pas nul :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^{\alpha-1}\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

De même,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = t^{\alpha-1}\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

EXEMPLES.

1. Reprenons la fonction f définie par la formule (2). Les dérivées partielles de f, à savoir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6xy + \sqrt{2}\,y^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 + 2\sqrt{2}\,xy-3y^2,$$

sont homogènes de degré $3-1=2$.

2. Reprenons la fonction f définie par la formule (3). Les dérivées partielles,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{2}{3}\,\frac{x}{(x^2+y^2)^{4/3}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{2}{3}\,\frac{y}{(x^2+y^2)^{4/3}},$$

sont homogènes de degré $1-8/3=-5/3=-2/3-1$.

1.12 Égalité d'Euler. Voici une caractérisation commode des fonctions homogènes :

Soient f une fonction numérique admettant des dérivées partielles continues sur un secteur angulaire ouvert P et α un nombre réel. Pour que f soit homogène de degré α, *il faut et il suffit que, pour tout point (x, y) de P,*

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = \alpha f(x, y). \tag{5}$$

C'est l'*égalité d'Euler*; elle présente l'avantage sur la relation (1) de ne pas faire intervenir la variable auxilaire t.

Supposons d'abord que f soit homogène de degré α. Dérivons alors les deux membres de (1) *par rapport à t*, en appliquant la formule de dérivation des fonctions composées :

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = \alpha t^{\alpha - 1} f(x, y).$$

Il suffit de remplacer t par 1 pour obtenir l'égalité (5).

Réciproquement, supposons que la relation (5) soit vérifiée en tout point (x, y) de de P, et montrons que la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par

$$g(t) = \frac{f(tx, ty)}{t^\alpha}$$

est constante. Calculons à cet effet la dérivée de g :

$$g'(t) = \frac{t^\alpha [xf'_x(tx, ty) + yf'_y(tx, ty)] - \alpha t^{\alpha - 1} f(tx, ty)}{t^{2\alpha}}$$

$$= \frac{txf'_x(tx, ty) + tyf'_y(tx, ty) - \alpha f(tx, ty)}{t^{\alpha + 1}}.$$

Le numérateur est égal à la différence des deux membres de (5) au point (tx, ty) ; il est donc nul. Par suite, la fonction g est constante, et égale à $g(1) = f(x, y)$. Ainsi,

$$\frac{f(tx, ty)}{t^\alpha} = f(x, y),$$

ce qui signifie que f est homogène de degré α.

EXEMPLES.

1. Lorsque f est définie par la formule (2),

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = x(6xy + \sqrt{2}y^2) + y(3x^2 + 2\sqrt{2}xy - 3y^2)$$
$$= 9x^2y + 3\sqrt{2}xy^2 - 3y^3 = 3f(x, y).$$

2. Lorsque f est définie par la formule (3),

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = -\frac{2}{3}\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{4/3}} - \frac{2}{3}\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{4/3}} = -\frac{2}{3}\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{4/3}}$$
$$= -\tfrac{2}{3} f(x, y).$$

3. Dans le cas de la fonction f définie par la formule (4),

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = x(2x) + y(3y^2) = 2x^2 + 3y^3,$$

expression non proportionnelle à $f(x, y) = x^2+y^3$. Nous retrouvons ainsi le fait que f n'est pas homogène.

Nous verrons une application de l'égalité d'Euler à l'étude des formes différentielles exactes au tome 5.

FONCTIONS IMPLICITES

1.13 Fonctions implicites. Soient f une fonction numérique définie sur une partie P de $\mathbf{R}^2$, I et J deux intervalles de $\mathbf{R}$. On suppose que, pour tout point x de I, il existe un point y et un seul de J tel que (x, y) appartienne à P et que

$$f(x, y) = 0 . \tag{1}$$

La fonction numérique $\varphi : x \mapsto y$ ainsi définie satisfait donc pour tout point x de I à la relation

$$f(x, \varphi(x)) = 0 .$$

On l'appelle *fonction implicite* définie par l'équation (1). On dit encore que y est fonction implicite de x.

Dans certains cas, on peut *expliciter* une fonction définie implicitement, c'est-à-dire exprimer cette fonction à l'aide des fonctions élementaires.

Exemple. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbf{R}^2$ par la formule

$$(x, y) \mapsto x^2+y^2-1 .$$

Prenons $I = [-1, 1]$, $J = [0, +\infty[$. L'équation

$$x^2+y^2-1 = 0 \tag{1'}$$

définit y implicitement en fonction de x. Nous pouvons expliciter la fonction φ, puisque

$$\varphi(x) = \sqrt{1-x^2} .$$

On ne peut prolonger φ, puisque, dès que $|x| > 1$, l'équation (1') n'a pas de racine réelle.

Si on remplace J par $]-\infty, 0[$, on définit une deuxième fonction implicite. Mais si on remplace J par $\mathbf{R}$, l'équation (1') admet deux solutions distinctes lorsque $|x| < 1$; elle ne définit plus y implicitement en fonction de x.

Le théorème suivant, que nous admettrons, garantit l'existence, la continuité et la dérivabilité des fonctions implicites sous certaines hypothèses. Il fournit même une expression explicite de la dérivée d'une fonction définie implicitement.

Théorème des fonctions implicites. *Soient f une fonction numérique définie sur un ouvert P de $\mathbf{R}^2$, et (x_0, y_0) un point de P tel que*

$$f(x_0, y_0) = 0 .$$

Si la fonction f admet des dérivées partielles par rapport à x et à y continues sur P et si

$$f'_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

il existe un intervalle ouvert I de centre x_0 et un intervalle ouvert J de centre y_0 tels que l'équation

$$f(x, y) = 0$$

définisse une fonction implicite φ sur I à valeurs dans J.

De plus, la fonction implicite φ ainsi définie est continûment dérivable sur I, et sa dérivée est donnée par la formule

$$\varphi'(x) = -\frac{f'_x(x, \varphi(x))}{f'_y(x, \varphi(x))}. \tag{2}$$

1.14 Calculs de dérivées de fonctions implicites

1. Considérons encore la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par la formule

$$f(x, y) = x^2+y^2-1 .$$

Remarquons que

$$f(0, 1) = 0 ,$$

et que f admet des dérivées partielles par rapport à x et à y, à savoir

$$(x, y) \mapsto 2x \qquad \text{et} \qquad (x, y) \mapsto 2y ,$$

continues sur $\mathbf{R}^2$.

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un intervalle ouvert I de centre 0 et un intervalle ouvert J de centre 1 tels que l'équation

$$x^2+y^2-1 = 0$$

définisse implicitement une fonction φ continûment dérivable sur I, à valeur dans J.

La dérivée de φ est donnée par la formule

$$\varphi'(x) = -\frac{2x}{2\varphi(x)} = -\frac{x}{\varphi(x)}.$$

Nous pouvons calculer directement cette dérivée, puisque

$$\varphi(x) = \sqrt{1-x^2} ;$$

d'où

$$\varphi'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. L'équation

$$f(x, y) = x^y-y^x = 0$$

définit implicitement y en fonction de x lorsque x est au voisinage de $x_0 = 1$ et que y est au voisinage de $y_0 = 1$. En effet,

$$f(1, 1) = 0$$

et

$$f_y'(x, y) = x^y \ln x - xy^{x-1} \qquad f_y'(1, 1) = -1 \neq 0.$$

Calculons la dérivée de y par rapport à x :

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x'}{f_y'} = -\frac{yx^{y-1} - y^x \ln y}{x^y \ln x - xy^{x-1}}.$$

Nous pouvons simplifier cette expression en divisant numérateur et dénominateur par $x^y = y^x$; il reste

$$y' = -\frac{\dfrac{y}{x} - \ln y}{\ln x - \dfrac{x}{y}} = \frac{y}{x} \cdot \frac{y - x \ln y}{x - y \ln x}.$$

Il faut toujours simplifier ces expressions qui paraissent de formes compliquées; on arrive souvent à des expressions simples, comme ci-dessus.

3. *Soit f la fonction définie sur* $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ *par la formule*

$$f(x, y) = \frac{y}{x} - \ln \frac{y}{x} - 3.$$

Montrer que l'équation $f(x, y) = 0$ définit implicitement y en fonction de x, et calculer la dérivée de cette fonction implicite.

La fonction f est continue, et

$$f_y'(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}.$$

Cette expression s'annule lorsque $y = x$; mais dans ce cas $f(x, y) = -2 \neq 0$. Les conditions d'existence de la fonction implicite φ sont donc vérifiées.

La fonction f est différentiable, car ses deux dérivées partielles sont continues; la fonction φ est dérivable, et

$$\varphi'(x) = -\frac{-\dfrac{y}{x^2} + \dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}} = \frac{y}{x}.$$

4. La simplicité du résultat précédent tient au fait que f est une *fonction homogène de degré* 0. Soit en effet f une fonction homogène de degré 0. Supposons que

l'équation $f(x, y) = 0$ définisse implicitement y en fonction de x. D'après l'égalité d'Euler,

$$xf'_x + yf'_y = 0.f = 0.$$

Donc

$$\varphi'(x) = -\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{y}{x}.$$

L'interprétation géométrique est évidente : si le point (x_0, y_0) vérifie l'équation $f(x, y) = 0$, il en est de même de tous les points de la droite d'équation

$$\frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0},$$

et la pente de cette droite est égale à y_0/x_0.

1.15 Dérivée seconde d'une fonction implicite. La relation

$$f(x, \varphi(x)) = 0$$

nous a conduit à

$$f'_x(x, \varphi(x)) + \varphi'(x) f'_y(x, \varphi(x)) = 0. \tag{3}$$

Supposons que φ admette une dérivée seconde. Dérivons les deux membres de la relation (3), grâce à la formule de dérivation des fonctions composées :

$$f''_{x^2}(x, \varphi(x)) + 2\varphi'(x) f''_{xy}(x, \varphi(x)) + [\varphi'(x)]^2 f''_{y^2}(x, \varphi(x)) + \varphi''(x) f'_y(x, \varphi(x)) = 0.$$

Comme $f'_y(x, \varphi(x))$ est supposé non nul, cette dernière relation permet de calculer φ'' :

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{(f''_{x^2} + f''_{xy} \cdot y') f'_y - f'_x (f''_{yx} + f''_{y^2} y')}{(f'_y)^2}.$$

Remplaçons y' par sa valeur $-\dfrac{f'_x}{f'_y}$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{f''_{x^2}(f'_y)^2 - 2 f'_x f'_y f''_{xy} + (f'_x)^2 f''_{y^2}}{(f'_y)^3}.$$

EXEMPLES.

1. L'équation d'une ellipse peut s'écrire sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ou encore

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0.$$

En dérivant les deux membres par rapport à x (y étant considéré comme une fonction implicite de x), nous obtenons la pente de la tangente à l'ellipse en un point :

$$2b^2x+2a^2yy' = 0\,, \tag{4}$$

soit

$$y' = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Dérivons maintenant la relation (4) :

$$2(b^2+a^2y'^2+a^2yy'') = 0\,.$$

D'où

$$y'' = -\frac{b^2+a^2y'^2}{a^2y} = -\frac{b^2+\dfrac{b^4x^2}{a^2y^2}}{a^2y} = -\frac{b^2(a^2y^2+b^2x^2)}{a^4y^3},$$

ce qui se simplifie, puisque, d'après l'équation initiale :

$$a^2y^2+b^2x^2 = a^2b^2;$$

d'où

$$y'' = -\frac{b^2(a^2b^2)}{a^4y^3} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

2. Le théorème des fonctions implicites permet de retrouver la dérivée d'une fonction réciproque.

Soient en effet g une fonction numérique continûment dérivable sur un intervalle J de $\mathbf{R}$, et y_0 un point de J tel que

$$g'(y_0) \neq 0\,.$$

L'équation

$$g(y)-x = 0$$

définit implicitement y en fonction de x. La fonction φ n'est autre que la fonction réciproque de g. La formule (2) se réduit à

$$\varphi'(x) = \frac{1}{g'(y)} \tag{5}$$

(ce que nous savions déjà). Cette relation montre que si g' est dérivable, φ' est dérivable; de plus,

$$[\varphi'(x)]^2\,g''(y)+\varphi''(x)\,g'(y) = 0\,,$$

soit

$$\varphi''(x) = -\frac{g''(y)}{[g'(y)]^3}. \tag{6}$$

De même, si g est trois fois dérivable,

$$[\varphi'(x)]^3 g'''(y) + 3\varphi'(x)\,\varphi''(x)\,g''(y) + \varphi'''(x)\,g'(y) = 0\,,$$

d'où

$$\varphi'''(x) = \frac{3[g''(y)]^2 - g'(y)\,g'''(y)}{[g'(y)]^5}\,,$$

et ainsi de suite.

Remarque. Pour obtenir la formule (6), on peut aussi dériver les deux membres de (5). Mais il ne faut pas perdre de vue que l'on dérive les deux membres *par rapport à x*. La dérivée de $1/g'(y)$ par rapport à x est égale au produit de $-g''(y)/[g'(y)]^2$ par la dérivée de y par rapport à x, soit $1/g'(y)$.

FONCTIONS DÉFINIES PAR DES INTÉGRALES

1.16 Fonctions définies par des intégrales. Nous venons de voir que l'on peut dériver une fonction de deux variables par rapport à l'une d'entre elles, l'autre variable étant considérée comme une constante. De même, on peut intégrer une fonction de deux variables par rapport à l'une d'entre elles; *l'intégrale ainsi obtenue est alors une fonction de l'autre variable.* Nous avons déjà vu un exemple important au tome 3, à propos de la transformation de Fourier; nous verrons un autre exemple important dans le présent tome, à propos de la transformation de Laplace. Nous allons examiner maintenant le cas où l'intervalle d'intégration est fermé borné.

Plus précisément, soit f une fonction numérique continue sur le produit $[a, b] \times I$ d'un intervalle fermé $[a, b]$ et d'un intervalle I. Pour tout élément y de I, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est continue sur $[a, b]$, et donc intégrable sur cet intervalle. Notons F la fonction définie sur I par la formule

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\,. \tag{1}$$

Nous admettrons le théorème suivant :

La fonction F est continue sur I. Si, de plus, la fonction f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ continue sur $[a, b] \times I$, la fonction F est continûment dérivable sur I et, pour tout point y_0 de I,

$$F'(y_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\,\mathrm{d}x\,. \tag{2}$$

Autrement dit, pour dériver F, on peut dériver sous le signe de l'intégrale.

Enfin, si I est de la forme $[c, d]$,

$$\int_c^d F(y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\,. \tag{3}$$

Autrement dit, on peut intervertir l'ordre des intégrations.

La formule (3) s'écrit traditionnellement sous la forme

$$\int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x, y)\, \mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y)\, \mathrm{d}y .$$

(Il est bien entendu qu'il s'agit d'intégrales *successives*, et non du produit de deux intégrales.) Cette propriété nous sera utile au tome 5 pour calculer des intégrales doubles.

1.17 Application à des calculs d'intégrales. Nous allons voir que la dérivation sous le signe de l'intégrale permet de calculer certaines intégrales plus rapidement que par la recherche directe d'une primitive ... surtout lorsqu'on ne connaît pas de primitive!

EXEMPLES.

1. Soit y un nombre réel strictement positif. Pour calculer

$$G(y) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^2},$$

nous pouvons poser

$$F(y) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+y^2}.$$

D'où

$$F'(y) = -2y \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^2} = -2y\, G(y).$$

Or,

$$F(y) = \frac{1}{y}\left[\operatorname{Arc tg} \frac{x}{y}\right]_0^1 = \frac{1}{y} \operatorname{Arc tg} \frac{1}{y}.$$

Donc

$$G(y) = \frac{1}{2y^3}\left(\operatorname{Arc tg} \frac{1}{y} + \frac{y}{1+y^2}\right).$$

De même, en calculant $G'(y)$, nous obtiendrions la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^3}.$$

2. Considérons l'intégrale

$$F(y) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1-2y\cos x+y^2)\, \mathrm{d}x,$$

où y appartient à l'intervalle $I =]-1, 1[$. La dérivée de F est

$$F'(y) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2(y-\cos x)}{1-2y\cos x+y^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Posons $t = \operatorname{tg} x/2$; nous obtenons aisément

$$F'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\left(y-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)}{1-2y\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+y^2}\,\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = 4\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2(1+y)+y-1}{[t^2(1+y)^2+(1-y)^2]\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

Or,

$$\frac{(1+y)\,X+y-1}{[(1+y)^2\,X+(1-y)^2]\,(X+1)} = \frac{1}{2y}\,\frac{1}{X+1} + \frac{y-1}{2y(1+y)}\,\frac{1}{X+\left(\dfrac{1-y}{1+y}\right)^2}\,.$$

Donc

$$F'(y) = \frac{2}{y}\,[\operatorname{Arc\,tg} t]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{2(y-1)}{y(1+y)}\,\frac{1+y}{1-y}\left[\operatorname{Arc\,tg}\frac{1+y}{1-y}\,t\right]_{-\infty}^{+\infty} = \pi\left(\frac{2}{y}-\frac{2}{y}\right) = 0\,.$$

Par suite, la fonction F est constante, et égale à

$$F(0) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln 1\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Ce calcul peut paraître compliqué ... mais il n'est pas possible de calculer directement $F(y)$.

1.18 La fonction gamma. Nous allons voir un exemple de fonction définie par une intégrale, introduit par le mathématicien suisse Leonhard Euler au XVIII^e^ siècle (le siècle « des lumières »). Cet exemple est d'un emploi fréquent en mathématiques et en physique; nous l'utiliserons en particulier au tome 6, lors de l'étude d'une loi de probabilité.

L'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

a un sens si et seulement si le nombre réel x est strictement positif.

En effet,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1} &\sim t^{x-1} && \text{au voisinage de } 0 \\ \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1} &= o(1/t^2) && \text{au voisinage de } +\infty. \end{aligned}$$

La règle de Riemann montre que l'intégrale de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}$ sur $[1, +\infty[$ converge quel que soit x, et que l'intégrale de cette même fonction sur $]0, 1]$ converge si et seulement si x est strictement positif.

1.23 $f(x, y) = \text{Arc tg}\,\dfrac{x}{y}$

1.24 $f(x, y) = \text{Arc tg}\,\dfrac{1-x}{1-y}$

1.25 $f(x, y) = \ln\dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}$

1.26 $f(x, y) = \text{Arc sin}\,\sqrt{\dfrac{x-y}{y}}$

1.27 $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{\ln x}{e^y}}$

1.28 $f(x, y) = \ln\dfrac{x^2}{y^3}$

1.29 $f(x, y) = \text{Arc tg}\, x^2y^3$

1.30 $f(x, y) = \displaystyle\int_x^y e^t \ln t \, dt$.

Calculer les dérivées partielles du troisième ordre des fonctions suivantes :

1.31 $f(x, y) = x^3y^4$

1.32 $f(x, y) = e^{xy}$.

Relations entre dérivées partielles

1.33 Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$. Montrer que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\,.$$

1.34 Même question pour la fonction f définie par $f(x, y) = e^x \cos y$.

1.35 Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \cos(x+y)-\cos(x-y)$.
Montrer que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\,.$$

1.36 Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \dfrac{x^2-3xy-y^2}{x+y}$. Montrer que

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y} = f\,.$$

1.37 Soient u et v deux fonctions d'une variable, supposées deux fois dérivables. Montrer que la fonction f définie par

$$f(x, y) = xu(y/x)+v(y/x)$$

satisfait à la relation

$$rx^2+2sxy+ty^2 = 0\,.$$

Dérivées des fonctions composées

En appliquant le théorème de dérivation des fonctions composées, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1.38 $y = x^{1/\sin x}$

1.39 $y = (\sin x)^x$

1.40 $y = x^{\cos x}$

1.41 $y = (\operatorname{Arc\,tg} x)^{\operatorname{tg} x}$

1.42 $y = x^{\operatorname{Arc\,tg} x}$

1.43 $y = (\sqrt{x^2+1})^{\operatorname{Arc\,tg} x}$

Dérivées des fonctions implicites

Calculer les dérivées des fonctions définies implicitement de la manière suivante :

1.44 $x^2y^2+y = 4$

1.45 $y^2(4-x) = x^2(4+x)$

1.46 $y^3+3x^2y = x^2-y^2$

1.47 $x^2+3xy+5y^2 = 1$

1.48 $x^2y^2 = 1+y^2$

1.49 $x^3-xy^2 = 3xy-1$

1.50 $x^2 \sin y - y^2 \sin x = 1$

1.51 $\sqrt{1-x}-\sqrt{1-y} = 1$

1.52 $\dfrac{\ln\sqrt{x}-\ln\sqrt{y}}{x-y} = 2$

1.53 $x^2 \ln y - y^2 \ln x = 0$

1.54 $\operatorname{tg}(x^2+y^2) = x^2-y^2$

1.55 $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{Arc\,tg}\dfrac{y}{x}$

1.56 $\sqrt{x^2+y^2} = \ln\sqrt{x^2-y^2}$

1.57 $x^2-y^2 \ln xy = 0$

1.58 $x^{1/3}+y^{1/2}x^{1/2} = 0$

1.59 $y^3(x-2)-(x+2) = 0$

1.60 $e^{xy}-x = 0$

1.61 $x^3+y^3-3axy = 0$

1.62 $(x+y)^{2/3}+(x-y)^{2/3} = a^{2/3}$

1.63 $\sin\dfrac{y}{x}+\cos\dfrac{x}{y} = 0$

1.64 $\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\operatorname{Arc\,tg}\dfrac{y}{x} = 0$

1.65 $\operatorname{Arc\,tg}\dfrac{y}{x} = \pi/4$

1.66 $e^{x/y}-\dfrac{x}{y} = 1$

1.67 $\ln\sin\dfrac{x}{y} = 1$

1.68 $xy = (x+y)^2$

1.69 $x^4-3x^2y^2+y^4 = 0\,.$

Calculer les dérivées premières et secondes des fonctions définies implicitement de la manière suivante :

1.70 $x^2+xy+y^2 = 1$

1.71 $xy^2 = x+y$

1.72 $x^2+2y^2-2xy-1 = 0$

1.73 $x+\cos(x+y) = 0\,.$

CHAPITRE 2

DIFFÉRENTIELLE D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES

2.1 Fonctions différentiables. Rappelons qu'une forme linéaire f sur $\mathbf{R}^2$ est une application linéaire de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}$ (voir tome 1); une telle application s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme

$$f(x, y) = lx+my ,$$

où l et m sont deux nombres réels. Pour tout point (x_0, y_0) de $\mathbf{R}^2$ et pour tout couple (h, k) de nombres réels,

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + lh+mk .$$

Nous nous proposons de voir dans quelle mesure on peut approcher une fonction par une forme linéaire (c'est-à-dire remplacer l'accroissement de la fonction entre deux points par l'accroissement d'une forme linéaire).

Soient f une fonction définie sur une partie P de $\mathbf{R}^2$ et (x_0, y_0) un point intérieur à P. On dit que f est différentiable en ce point s'il existe un couple (l, m) de nombres réels et une fonction numérique φ définie sur P tels que, pour tout point (x_0+h, y_0+k) de P,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + lh + mk + \sqrt{h^2 + k^2}\, \varphi(x_0 + h, y_0 + k)$$

et que φ ait pour limite 0 au point (x_0, y_0).

La fonction φ est alors définie pour tout point (x_0+h, y_0+k) de P autre que (x_0, y_0) par la formule

$$\varphi(x_0+h, y_0+k) = \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - lh - mk}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Si on impose la condition

$$\varphi(x_0, y_0) = 0 ,$$

la fonction φ est définie de manière unique à partir de f, de l et de m. Nous allons voir que le couple (l, m) est aussi unique. Plus précisément :

Si f est différentiable au point (x_0, y_0), alors f admet des dérivées partielles en ce point par rapport à x et à y, et

$$l = f'_x(x_0, y_0) \qquad m = f'_y(x_0, y_0).$$

De plus, f est continue au point (x_0, y_0).

En effet, la restriction g de f à la droite d'équation $y = y_0$ vérifie la relation

$$g(x_0+h) = f(x_0, y_0) + lh + |h|\, \varphi(x_0+h) .$$

Il s'ensuit que g est différentiable au point x_0, et que $l = f'_x(x_0, y_0)$. De même, $m = f'_y(x_0, y_0)$. Enfin, f est continue au point (x_0, y_0), car c'est la somme de fonctions continues en ce point.

Mais nous ne pouvons pas énoncer ici une réciproque : l'existence de dérivées partielles au point (x_0, y_0) n'entraîne pas la différentiabilité de f.

EXEMPLE. Considérons encore la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par les formules

$$(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x, y) \neq (0,0)$$

$$f(0,0) = 0.$$

Les deux dérivées partielles de f au point (0, 0) sont nulles; si f était différentiable au point (0, 0) la fonction φ définie par la formule

$$\varphi(x, y) = \frac{\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

aurait pour limite 0 au point (0, 0). Or, tout disque ouvert de centre (0, 0) contient des points de la forme (x, x), $x > 0$, où φ prend la valeur $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Nous admettrons le résultat suivant :

Si la fonction f admet des dérivées partielles sur un voisinage du point (x_0, y_0), et si les applications f'_x et f'_y sont continues en ce point, alors f est différentiable au point (x_0, y_0).

En résumé, l'existence de dérivées partielles continues entraîne la différentiabilité, laquelle entraîne l'existence de dérivées partielles; mais on ne peut caractériser la différentiabilité à l'aide des dérivées partielles.

Soit maintenant f une fonction numérique définie sur un ouvert P de $\mathbf{R}^2$. On dit que f est *différentiable* sur P si f est différentiable en tout point de P.

Le théorème précédent a pour corollaire :

Si la fonction f admet des dérivées partielles en tout point de P et si les fonctions f'_x et f'_y sont continues sur P, alors f est différentiable sur P.

2.2. Différentielle d'une fonction. Soit f une fonction différentiable; la forme linéaire

$$(h, k) \mapsto hf'_x(x_0, y_0) + kf'_y(x_0, y_0)$$

s'appelle *différentielle*, ou encore *différentielle totale*, de la fonction f au point (x_0, y_0), et se note $\mathrm{d}_{x_0, y_0} f$. Ainsi, par définition, pour tout couple (h, k) de nombres réels,

$$\mathrm{d}_{x_0, y_0} f(h, k) = hf'_x(x_0, y_0) + kf'_y(x_0, y_0).$$

On omet souvent les indices x_0 et y_0. Suivant l'usage, notons $\mathrm{d}x$ la différentielle de l'application $(h, k) \mapsto h$ et $\mathrm{d}y$ celle de l'application $(h, k) \mapsto k$. Alors $\mathrm{d}f$ s'écrit sous la forme

$$df = f'_x(x_0, y_0)\,dx + f'_y(x_0, y_0)\,dy.$$

Comme d'habitude, l'extension à trois variables est immédiate.

EXEMPLES.

1. Calculons la différentielle de la fonction f définie par la formule

$$f(x, y) = 3x^2 y - \frac{\sin y}{x}.$$

On trouve facilement

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy + \frac{\sin y}{x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - \frac{\cos y}{x};$$

donc

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = \left(6xy + \frac{\sin y}{x^2}\right)dx + \left(3x^2 - \frac{\cos y}{x}\right)dy.$$

2. Calculons la différentielle de la fonction de trois variables définie par la formule

$$f(x, y, z) = e^{x^2+y^2}\cos z.$$

Nous obtenons aussitôt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2+y^2}\,2x\cos z \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2+y^2}\,2y\cos z \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -e^{x^2+y^2}\sin z,$$

donc

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz \\ &= e^{x^2+y^2}(2x\cos z\,dx + 2y\cos z\,dy - \sin z\,dz). \end{aligned}$$

3. On sait que l'induction B du champ magnétique produit par une bobine est, dans l'air :

$$B = \frac{4\pi\,10^{-7} NI}{l}.$$

Donc

$$dB = \frac{\partial B}{\partial N}\,dN + \frac{\partial B}{\partial I}\,dI + \frac{\partial B}{\partial l}\,dl = \frac{4\pi}{10^7 l}\left(I\,dN + N\,dI - \frac{NI}{l}\,dl\right).$$

2.3 Applications des différentielles aux calculs approchés. La différentielle réalise une première approximation de la fonction

$$(h, k) \mapsto f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) .$$

En physique, on remplace l'accroissement Δf de la fonction f par l'expression approchée

$$\Delta f \approx f'_x(x_0, y_0)\, \Delta x + f'_y(x_0, y_0)\, \Delta y .$$

EXEMPLES.

1. L'aire d'un rectangle est

$$S = bh .$$

Donc

$$\mathrm{d}S = \frac{\partial S}{\partial b}\, \mathrm{d}b + \frac{\partial S}{\partial h}\, \mathrm{d}h = h\, \mathrm{d}b + b\, \mathrm{d}h .$$

L'accroissement ΔS de l'aire lié à un accroissement Δb de la base et à un accroissement Δh de la hauteur est, en première approximation,

$$\Delta S \approx h\, \Delta b + b\, \Delta h .$$

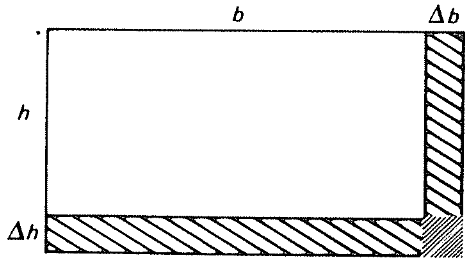


FIG. 2.1

On remarque sur la figure 2.1 que $h\, \Delta b$ est l'aire du rectangle de droite et $b\, \Delta h$ celle du rectangle inférieur. L'aire ΔS n'est pas exactement la somme des deux précédentes : il manque encore l'aire $\Delta b \Delta h$ du petit rectangle en bas à droite.

Par exemple, si $h = 10$ m, $b = 2$ m, $\Delta h = 0{,}1$ m et $\Delta b = 0{,}01$ m,

$$\Delta S \approx 10 \times 0{,}01 + 2 \times 0{,}1 = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3 \text{ m}^2 .$$

(En toute rigueur, $\Delta S = 10{,}1 \times 2{,}01 - 10 \times 2 = 0{,}301$ m^2.)

2. Soit V la d.d.p. entre les bornes d'une résistance R. L'intensité I est

$$I = V/R .$$

D'où

$$\mathrm{d}I = \frac{\partial I}{\partial V}\,\mathrm{d}V + \frac{\partial V}{\partial R}\,\mathrm{d}R = \frac{1}{R}\,\mathrm{d}V - \frac{V}{R^2}\,\mathrm{d}R\,.$$

Ainsi, lorsque $V = 100$ volts, $R = 100$ ohms, $\Delta V = 1$ volt et $\Delta R = 2$ ohms,

$$\Delta I \approx \frac{1}{100} \times 1 - \frac{100}{100^2} \times 2 = \frac{1}{100} - \frac{2}{100} = -0{,}01 \text{ ampère}.$$

L'intensité diminue de 0,01 ampère.

3. La capacité C d'un condensateur est

$$C = kS/e\,.$$

D'où

$$\mathrm{d}C = \frac{\partial C}{\partial S}\,\mathrm{d}S + \frac{\partial C}{\partial e}\,\mathrm{d}e = \frac{k}{e}\,\mathrm{d}S + kS\left(-\frac{1}{e^2}\right)\mathrm{d}e = \frac{k}{e}\left(\mathrm{d}S - \frac{S}{e}\,\mathrm{d}e\right).$$

Pour que C ne varie pas, il faut que $\mathrm{d}C$ soit nul, ce qui impose

$$\mathrm{d}S - \frac{S}{e}\,\mathrm{d}e = 0$$

ou

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = \frac{\mathrm{d}e}{e},$$

c'est-à-dire que les variations relatives de S et de e doivent être égales.

4. Un cylindre a 10 m de haut et 5 m de rayon. On accroît h de 10 cm et R de 1 cm. Calculer la variation de volume.

Le volume est

$$V = \pi R^2 h\,.$$

D'où

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial R}\,\mathrm{d}R + \frac{\partial V}{\partial h}\,\mathrm{d}h = 2\pi Rh\,\mathrm{d}R + \pi R^2\,\mathrm{d}h\,.$$

Exprimons les accroissements en mètres : $\Delta R = 0{,}01$, $\Delta h = 0{,}1$ et

$$\Delta V \approx \pi R(2h\Delta R + R\Delta h) = 5\pi(2 \times 10 \times 0{,}01 + 5 \times 0{,}1) = 11 \text{ m}^3.$$

5. La hauteur d'un cône de fumée est de 100 m et décroît à raison de 10 m par seconde. Le rayon de la base est de 50 m et croît à raison de 5 m/s. Comment le volume varie-t-il et avec quelle vitesse ?

Le volume d'un cône est

$$V = \tfrac{1}{3}\pi R^2 h\,.$$

D'où

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial R}\,\mathrm{d}R + \frac{\partial V}{\partial h}\,\mathrm{d}h = \tfrac{2}{3}\pi Rh\,\mathrm{d}R + \tfrac{1}{3}\pi R^2\,\mathrm{d}h\,.$$

Mais il faut maintenant faire intervenir les vitesses de variation, exprimées en mètres par seconde :

la vitesse de variation de la hauteur est $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t = -10$ (le signe $-$ indique que h décroît),
la vitesse de variation du rayon est $\mathrm{d}R/\mathrm{d}t = +5$ (le signe $+$ indique que R croît),
la vitesse de variation du volume est $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$, en mètres cubes par seconde.

Divisons donc l'expression de $\mathrm{d}V$ par $\mathrm{d}t$:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \tfrac{2}{3}\pi Rh\,\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} + \tfrac{1}{3}\pi R^2\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \tfrac{2}{3}\pi\ 50 \times 100 \times 5 - \tfrac{1}{3}\pi\ 50^2 \times 10 = 26\,180\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}\,.$$

Cette dérivée est positive, ce qui montre que le volume augmente à l'instant considéré.

2.4 Applications radioélectriques.

1. Nous allons montrer comment l'on peut trouver l'*équation de la lampe triode*, utilisée en radio. C'est l'équation qui donne la valeur du courant plaque i_p en fonction de la tension grille v_g et de la tension plaque v_p.

On sait que, dans une triode, et à chauffage constant, le courant plaque est fonction de v_g et de v_p, qui sont deux variables indépendantes :

$$i_p = f(v_g, v_p)\,. \tag{1}$$

Appelons K le coefficient d'amplification de la lampe, ρ sa résistance interne et S la pente de la lampe (en milliampères par volt). On démontre d'ailleurs en radio que

$$S = K/\rho\,.$$

La différentielle de i_p est

$$\mathrm{d}i_p = \frac{\partial i_p}{\partial v_g}\,\mathrm{d}v_g + \frac{\partial i_p}{\partial v_p}\,\mathrm{d}v_p\,.$$

Or, on sait que

$$\frac{\partial i_p}{\partial v_g} = S$$

et

$$\frac{\partial i_p}{\partial v_p} = \frac{1}{\rho},$$

d'où

$$\mathrm{d}i_p = S\,\mathrm{d}v_g + \frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}v_p = \frac{K}{\rho}\,\mathrm{d}v_g + \frac{\mathrm{d}v_p}{\rho}$$

ou enfin

$$\rho\,\mathrm{d}i_p = K\,\mathrm{d}v_g + \mathrm{d}v_p\,. \qquad (2)$$

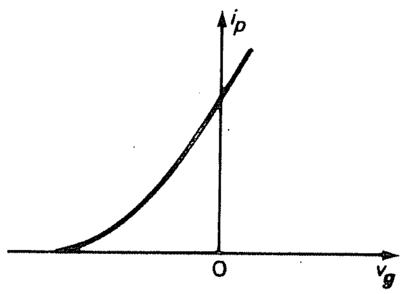


FIG. 2.2

C'est l'équation de la lampe triode; *elle montre que la lampe amplifie K fois* (Fig. 2.2), car pour avoir le même Δi_p il suffit d'agir sur la tension grille *K fois moins* que sur la tension plaque.

Ce calcul est très intéressant et... très curieux, car en partant de l'équation (1), assez générale, on arrive à l'équation (2) tout à fait précise et concrète.

2. Soit un circuit électrique comprenant une bobine dont le coefficient d'inductance est L et la résistance ohmique est R, en série avec un condensateur de capacité C, la différence de potentiel étant alternative et la pulsation de la source étant $\omega = 2\pi f$, où f est la fréquence. On suppose que C et f sont seules variables.

Plaçons-nous à la résonance, où l'intensité du courant est maximale, on sait que : $LC\omega^2 = 1$.

Si f varie de Δf, le courant diminue d'une certaine valeur, on peut alors se demander quelle serait la variation ΔC du condensateur qui produirait le même affaiblissement, f restant constant.

Nous avons une fonction de deux variables

$$LC\omega^2 = 1 = g(C, \omega)\,.$$

Prenons-en sa différentielle, qui sera nulle puisque cette fonction est constante, et égale à 1 :

$$\mathrm{d}g = 0 = \frac{\partial g}{\partial C}\,\mathrm{d}C + \frac{\partial g}{\partial \omega}\,\mathrm{d}\omega$$

ou

$$L\omega^2\,\mathrm{d}C + 2LC\omega\,\mathrm{d}\omega = 0 \qquad \omega\,\mathrm{d}C = -2C\,\mathrm{d}\omega$$

ou

$$\frac{\mathrm{d}C}{C} = -2\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega} = -2\frac{2\pi\,\mathrm{d}f}{2\pi f}$$

et enfin

$$\frac{\mathrm{d}C}{C} = -2\frac{\mathrm{d}f}{f},$$

d'où l'on tire ΔC. On voit que la variation relative de C est égale à deux fois la variation relative sur f, et changée de signe.

Cette formule s'utilise souvent en radio.

Dans le dernier chapitre du présent tome, nous verrons d'autres applications des différentielles, à propos des calculs d'incertitudes.

2.5 Formes différentielles. Soit P une partie ouverte de $\mathbf{R}^2$. On appelle *forme différentielle* une application ω qui à tout point (x, y) de P associe, non pas un nombre, mais une *forme linéaire* sur $\mathbf{R}^2$. L'application ω peut s'écrire d'une manière et d'une seule sous la forme

$$\omega = M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y\,,$$

où M et N sont deux fonctions numériques définies sur P.

Nous avons déjà rencontré un exemple fondamental : la différentielle $\mathrm{d}f$ d'une fonction différentiable f (c'est-à-dire l'application qui à tout point (x, y) associe la différentielle $\mathrm{d}_{x,y}f$ de f en ce point) est une forme différentielle. Dans ce cas,

$$M = f'_x \qquad \text{et} \qquad N = f'_y.$$

On dit qu'une forme différentielle ω est *exacte* si elle est du type précédent, c'est-à-dire s'il existe une fonction différentiable f dont elle soit la différentielle :

$$\omega = \mathrm{d}f\,.$$

En général, une forme différentielle ω n'est pas exacte. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que M et N soient respectivement les dérivées partielles par rapport à x et à y d'une fonction f :

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad N = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Or, d'après le théorème d'interversion des dérivées partielles secondes,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Nous renvoyons au tome 5 pour la détermination pratique de f à partir de la forme différentielle ω. Nous nous bornons pour le moment à voir sur quelques exemples si l'égalité des dérivées partielles croisées est satisfaite, en admettant que cette condition nécessaire est aussi suffisante.

EXEMPLES.

1. *La forme différentielle*

$$\omega = x(y^2-3)\,\mathrm{d}x+y(1+x^2)\,\mathrm{d}y$$

est-elle exacte ?

Ici,

$$M = x(y^2-3) \qquad \text{et} \qquad N = y(1+x^2)\,.$$

Vérifions si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}\,.$$

Or,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2yx \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy\,;$$

ces dérivées étant égales, l'expression étudiée est bien une forme différentielle exacte.

2. *Même question pour*

$$\omega = y \sin 2x\,\mathrm{d}x+\sin^2 x\,\mathrm{d}y\,.$$

Cette fois,

$$M = y \sin 2x \qquad \text{et} \qquad N = \sin^2 x\,.$$

D'où

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \sin 2x \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2 \sin x \cos x = \sin 2x\,;$$

ces expressions étant égales, la forme différentielle ω est encore exacte.

3. *Même question pour*

$$\omega = \sin 2x \cos^2 y\,\mathrm{d}x + \sin^2 x \sin 2y\,\mathrm{d}y\,.$$

On obtient aussitôt

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2 \sin 2x \sin y \cos y = -\sin 2x \sin 2y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2 \sin x \cos x \sin 2y = \sin 2x \sin 2y\,.$$

Ces deux quantités n'étant pas égales (à cause du signe $-$), la forme différentielle ω n'est pas exacte.

Remarque. Les différentielles exactes interviennent en thermodynamique, dans l'étude des gaz et des moteurs thermiques, ainsi qu'en différents problèmes de mécanique et d'électricité.

EXERCICES

Calcul des différentielles

Calculer les différentielles des fonctions suivantes :

2.1 $f(x, y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

2.2 $f(x, y) = \dfrac{x+y}{xy}$

2.3 $f(x, y) = y \sin x + \cos(y-x)$

2.4 $f(x, y) = \mathrm{tg}^2\, y/x$

2.5 $f(x, y) = \mathrm{Arc\ tg}\, y/x$

2.6 $f(x, y) = \mathrm{Arc\ tg}\, \dfrac{x+y}{1-xy}$

2.7 $f(x, y) = \mathrm{Arc\ cos}(1+x^2+y^2)$

2.8 $f(x, y) = \mathrm{Arc\ cos}\, \dfrac{2x+y}{x-y}$

2.9 $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}$

2.10 $f(x, y) = \dfrac{xy}{(1+x^2+y^2)^{1/2}}$

2.11 $f(x, y) = \dfrac{x}{y} + \sqrt{xy}$

2.12 $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$

2.13 $f(x, y) = \ln(1-xy)$

2.14 $f(x, y) = \ln(y^x)$

2.15 $f(x, y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$

2.16 $f(x, y) = \mathrm{e}^{xy^2}$

2.17 $f(x, y) = \ln \sin \dfrac{x}{y}$

2.18 $f(x, y) = \mathrm{e}^{2x} \sin 3y.$

Formes différentielles exactes

Parmi les formes différentielles suivantes, reconnaître celles qui sont exactes :

2.19 $\omega = \dfrac{(x+2y)\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$

2.20 $\omega = \dfrac{y^2\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$

2.21 $\omega = \dfrac{(3x^2+y^2)\,y\,\mathrm{d}x - 2x^3\,\mathrm{d}y}{y^3}$

2.22 $\omega = (\cos^2 x - y \sin x)\,\mathrm{d}x + \cos x\,\mathrm{d}y$

2.23 $\omega = \left(y + \dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + \left(x + \dfrac{1}{y}\right)\mathrm{d}y$

2.24 $\omega = \dfrac{y^3\,\mathrm{d}x + x^3\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

2.25 $\omega = (y^3 - 2xy)\,\mathrm{d}x + (3xy^2 - x^2)\,\mathrm{d}y$

2.26 $\omega = \dfrac{2xy\,\mathrm{d}x + (1-x^2)\,\mathrm{d}y}{y^2}$

2.27 $\omega = \dfrac{2x(1-\mathrm{e}^y)}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\mathrm{e}^y}{1+x^2}\,\mathrm{d}y$

2.28 $\omega = \mathrm{Arc\ sin}\, \dfrac{x}{y}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\sqrt{y^2-x^2}}{y}\,\mathrm{d}y$

2.29 $\omega = \dfrac{y}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \dfrac{x}{y^2+1}\,\mathrm{d}y$

2.30 $\omega = \left(x+y+\dfrac{1}{y}-\dfrac{y}{x^2}\right)\mathrm{d}x + \left(y+x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y\,.$

Déterminer les valeurs du nombre réel a pour lesquelles les formes différentielles suivantes sont exactes :

2.31 $\omega = \dfrac{(x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^a}$

2.32 $\omega = \dfrac{(x+ay)\,\mathrm{d}x + (ax+y)\,\mathrm{d}y}{(x-y)^3}\,.$

Problèmes sur les différentielles

2.33 Le volume d'un parallélépipède rectangle est $V = blh$. On donne $b = 1$ m, $l = 2$ m et $h = 3$ m. Calculer la variation ΔV du volume si b varie de $\Delta b = 0{,}01$ m, l de $\Delta l = -0{,}02$ m et h de $\Delta h = 0{,}03$ m.

2.34 On considère un tronc de cône métallique dont la base a pour rayon $R = 0{,}1$ m et dont la hauteur est $h = 0{,}2$ m. Lorsqu'on chauffe le cône, R augmente de 1 mm et h de 2 mm. Calculer la variation du volume.

2.35 Un générateur électrique de f.é.m. E et de résistance r débite sur une résistance extérieure R. On donne $E = 100$ V, $r = 10\ \Omega$ et $R = 40\ \Omega$. Si R varie de $\Delta R = 1\ \Omega$ et E de $\Delta E = -2$ V, calculer la variation ΔI du courant.

2.36 Un condensateur électrique de capacité $C = 20\ \mu$F est branché sur une d.d.p. continue $V = 100$ volts. Si C varie de $\Delta C = 0{,}1\ \mu$F et si V varie de $\Delta V = 2$ volts, calculer la variation ΔW de l'énergie emmagasinée.

2.37 Un condensateur électrique de capacité $C = 10\ \mu$F est branché sur une tension alternative de fréquence $f = 50$ Hz. Si C varie de $0{,}1\ \mu$F et si f varie de -2 Hz, calculer la variation de son impédance $Z = 1/C\omega$.

2.38 Un fil de cuivre a une longueur $l = 100$ m et un diamètre $D = 1$ cm. Sous l'action de la chaleur, l augmente de 0,1 m et D de 0,1 mm. Calculer la variation de la résistance électrique R, sachant que $\rho = 1{,}6\ \mu\Omega\mathrm{cm}^2/\mathrm{cm}$.

2.39 En radio, la longueur d'onde d'un circuit oscillant est

$\lambda = 1\,885\sqrt{LC}\,,$

où λ est mesuré en mètres, L en microhenrys et C en microfarads. On donne $L = 1\,000\ \mu$H, $C = 10^{-3}\ \mu$F. Si L varie de $10\ \mu$H et C de -20 picofarads, calculer la variation de la longueur d'onde.

CHAPITRE 3

MAXIMUMS ET MINIMUMS DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

3.1 Maximums et minimums. Les maximums et les minimums se définissent comme dans le cas des fonctions d'une variable (voir tome 2, chapitre 4) :

Considérons une fonction f définie sur une partie P de $\mathbf{R}^2$. On dit que f admet un *maximum* si l'ensemble $f(P)$ admet un plus grand élément M, un *minimum* si $f(P)$ admet un plus petit élément m. Soit (x_0, y_0) un point de P; on dit que f atteint son maximum en (x_0, y_0) si $f(x_0, y_0) = M$. On dit que f atteint un maximum *local* au point (x_0, y_0) s'il existe un disque ouvert D de centre (x_0, y_0) tel que la restriction de f à $D \cap P$ admette un maximum en ce point. On définit de même les fonctions atteignant un minimum, ou un minimum local, au point (x_0, y_0).

Comme dans le cas d'une variable, si f atteint un maximum au point (x_0, y_0), f admet évidemment un maximum local en ce point. Bien entendu, la réciproque est fausse.

Nous allons établir une condition nécessaire pour qu'une fonction f admette un maximum local ou un minimum local en un point (x_0, y_0) :

Soient f une fonction numérique définie sur une partie P de $\mathbf{R}^2$, et (x_0, y_0) un point intérieur à P. Si la fonction f admet un maximum ou un minimum local au point (x_0, y_0), et si f a des dérivées partielles en ce point, alors

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0\,.$$

En effet, si la fonction f admet un maximum ou un minimum local au point (x_0, y_0), il en est de même de la fonction $g : x \mapsto f(x, y_0)$ au point x_0. La dérivée de g au point x_0 est donc nulle. Or, par définition même, cette dérivée est la dérivée partielle de f par rapport à x. Ainsi,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) = 0\,.$$

Le cas de $f'_y(x_0, y_0)$ se traite de même.

Mais si les dérivées partielles de f s'annulent au point (x_0, y_0), il ne s'ensuit pas que f admette un maximum ou un minimum local en ce point.

Prenons par exemple pour f la fonction définie par

$$f(x, y) = x^2 - y^2\,.$$

Les dérivées partielles $f'_x = 2x$, $f'_y = -2y$ prennent la valeur 0 au point (0, 0).

La fonction f s'annule à l'origine; mais dans tout disque ouvert de centre (0, 0) et de rayon α, il existe des points (tels que $(\alpha/2, 0)$) où f prend une valeur strictement positive, et des points (tels que $(0, \alpha/2)$) où f prend des valeurs strictement négatives. La fonction f n'admet donc ni maximum local ni minimum local à l'origine.

Considérons maintenant une fonction continue sur une partie fermée bornée P. D'après ce que nous avons vu au n° 1.5, $f(P)$ a un plus grand élément M et un plus petit élément m; autrement dit, f atteint un maximum M en un point (x_1, y_1), et un minimum m en un point (x_2, y_2). Il se peut toutefois que f n'admette pas de dérivées partielles en ces points. Il peut aussi arriver que f admette des dérivées partielles en ces points, et que ces dérivées ne s'annulent pas. En effet, rien ne permet d'affirmer que les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont *intérieurs* à P.

EXEMPLE. La fonction f définie sur le disque fermé de centre (0, 0) et de rayon 1 par la formule

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$$

admet un maximum au point $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$, et un minimum au point $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, sans que ses dérivées partielles s'annulent en ces points.

3.2 Formule des accroissements finis. Pour évaluer l'accroissement d'une fonction de deux variables, nous allons étendre la formule des accroissements finis et, plus généralement, celle de Taylor-Lagrange.

Soient f une fonction admettant des dérivées partielles continues par rapport à x et à y sur une partie P de $\mathbf{R}^2$, (a, b) et $(a+h, b+k)$ deux points de P tels que le segment joignant ces points soit contenu dans P (Fig. 3.1). Il existe alors un élément θ de l'intervalle $]0, 1[$ tel que

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + hf'_x(a+\theta h, b+\theta k) + kf'_y(a+\theta h, b+\theta k).$$

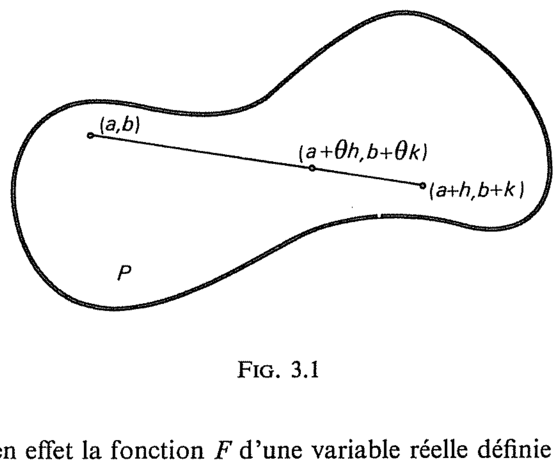


FIG. 3.1

Considérons en effet la fonction F d'une variable réelle définie sur [0, 1] par la formule

$$F(t) = f(a+th, b+tk).$$

Il est clair que $F(0) = f(a, b)$ et que $F(1) = f(a+h, b+k)$. Le théorème de dérivation des fonctions composées (n° 1.7) montre que F est dérivable et que

$$F'(t) = hf'_x(a+th, b+tk) + kf'_y(a+th, b+tk).$$

Appliquons donc la formule des accroissements finis à la fonction F : il existe un élément θ de $]0, 1[$ tel que

$$F(1) = F(0) + (1-0)\,F'(\theta) = F(0) + F'(\theta)\,.$$

La formule annoncée en résulte aussitôt.

Supposons maintenant que, pour tout couple de points de P, le segment joignant ces points soit contenu dans P. Il découle de la formule des accroissements finis que si les dérivées partielles de f sont nulles sur P, la fonction f est constante.

En effet,

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + 0.h + 0.k = f(a, b)\,.$$

Enfin, la formule des accroissements finis permet de majorer l'accroissement d'une fonction. Supposons en effet que f'_x et f'_y sont majorés en valeur absolue par des nombres réels positifs M et N. Alors

$$|f(a+h, b+k) - f(a, b)| \leqslant M|h| + N|k|\,.$$

On remarquera que la formule

$$\Delta f \approx f'_x\ \Delta x + f'_y\ \Delta y$$

fournit une première approximation de Δf, mais non une *majoration*.

3.3 Formule de Taylor-Lagrange. Conservons les notations précédentes, et supposons que f admette des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre $n+1$, où n est un entier naturel.

La relation

$$F'(t) = hf'_x(a+th, b+tk) + kf'_y(a+th, b+tk)$$

peut encore s'écrire sous la forme

$$DF = Hf,$$

où D est l'application $F \mapsto F'$ et H l'application $f \mapsto hf'_x + kf'_y$. Par suite,

$$F'' = DF' = D(DF) = H(Hf) = H^2 f\,.$$

De même, on vérifie par récurrence que, pour tout entier naturel non nul p,

$$F^{(p)} = D^p F = D(D^{p-1}F) = H(H^{p-1}f) = H^p f\,.$$

La fonction F est $n+1$ fois dérivable sur $[0, 1]$. D'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe un élément θ de $]0, 1[$ tel que

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \dots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\,.$$

En revenant à f, *nous obtenons la formule de Taylor-Lagrange pour les fonctions de deux variables* :

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + (Hf)(a,b) + \frac{(H^2 f)(a,b)}{2!} + \ldots + \\ + \frac{(H^n f)(a,b)}{n!} + \frac{(H^{n+1}f)(a+\theta h, b+\theta k)}{(n+1)!}.$$

(Le cas où $n = 0$ est celui de la formule des accroissements finis.)

En pratique, il reste à calculer les puissances successives de l'application H. Écrivons à cet effet H sous la forme

$$H = h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}$$

(c'est-à-dire que $Hf = h(\partial f/\partial x) + k(\partial f/\partial y)$). Comme les dérivées partielles successives de f sont continues, le théorème de Schwarz s'applique et montre que $\partial/\partial x$ et $\partial/\partial y$ commutent. Par suite, nous pouvons employer la formule du binôme de Newton pour calculer les puissances successives de H :

$$H^2 = h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$H^3 = h^3\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3h^2k\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y} + 3hk^2\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2} + k^3\frac{\partial^3}{\partial y^3},$$

etc. Par exemple,

$$H^2 f = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Examinons le cas où f est de la forme

$$f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F.$$

Nous obtenons aisément

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2Ax + 2By + 2D$$

$$f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 2Bx + 2Cy + 2E$$

$$f''_{x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2A \qquad f''_{xy} = 2B \qquad f''_{y^2} = 2C.$$

Les dérivées d'ordre trois sont nulles. Donc

$$f(x+h,\ y+k) = f(x,y) + 2h(Ax+By+D) \\ + 2k(Bx+Cy+E) + Ah^2+2Bhk+Ck^2\ .$$

3.4 Application à la recherche des maximums et des minimums. Nous avons vu que, pour chercher les maximums et les minimums d'une fonction f en un point intérieur à l'ensemble de définition, on résout le système suivant :

$$\begin{cases} f(x,y) &= 0 \\ f'_x(x,y) &= 0 \\ f'_y(x,y) &= 0\,. \end{cases}$$

Il reste encore à s'assurer que la différence $f(x,y)-f(x_0,y_0)$ conserve un signe constant au voisinage de (x_0,y_0). Utilisons à cet effet la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2. Pour alléger l'écriture, employons les *notations de Monge* :

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y} \qquad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Ici, $p(x_0,y_0) = q(x_0,y_0) = 0$. Posons

$$r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \qquad s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \qquad t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0).$$

La formule de Taylor-Lagrange se réduit à

$$f(x_0+h,y_0+k) = f(x_0,y_0) + \tfrac{1}{2}(h^2r_0+2hks_0+k^2t_0) + \tfrac{1}{6}(H^3f)(x_0+\theta h,y_0+\theta k).$$

Passons en coordonnées polaires, en posant

$$h = \rho\cos\theta \qquad k = \rho\sin\theta\,.$$

Alors

$$h^2r_0 + 2hks_0 + k^2t_0 = \rho^2(r_0\cos^2\theta + 2s_0\cos\theta\sin\theta + t_0\sin^2\theta)$$

et H^3f est de la forme $H^3f = \rho^3 g$. Lorsque ρ est suffisamment petit, le terme en ρ^3 est négligeable devant le terme en ρ^2 (à moins que le coefficient de ρ^2 s'annule). Le signe de $f(x_0+h,\ y_0+k) - f(x_0,y_0)$ est alors celui de

$$P(h,k) = h^2r_0+2hks_0+k^2t_0,$$

pourvu que $P(h,k)$ soit différent de zéro.

a) Si $s_0^2 - r_0t_0 < 0$, r_0 est évidemment non nul. Dans ce cas, $P(h,k)$ a un signe constant, à savoir celui de r_0.

En effet,

$$r_0\,P(h,k) = r_0^2h^2 + 2r_0s_0hk + r_0t_0k^2 = (r_0h+s_0k)^2 + (r_0t_0-s_0^2)\,k^2\,.$$

Cette expression, somme de deux termes positifs, est positive, et ne s'annule que si $h = k = 0$. Donc si $r_0 > 0, f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$ est positif; autrement dit, f admet un minimum local au point (x_0, y_0). De même, si $r_0 < 0$, f admet un maximum local en ce point.

b) Si $s_0^2 - r_0 t_0 > 0$, $r_0 \neq 0$, $r_0 P(h, k)$ prend des valeurs strictement positives, par exemple si $k = 0$, et des valeurs strictement négatives, par exemple si $r_0 h + s_0 k = 0$. La fonction f n'admet donc ni maximum local ni minimum local au point (x_0, y_0). Le cas où $r_0 = 0$ mais $t_0 \neq 0$ est analogue. Le cas où $r_0 = t_0 = 0$ est évident, puisque $P(h, k) = 2s_0 hk$ prend des valeurs opposées si $h = k$ ou si $h = -k$.

c) Si $s_0^2 - r_0 t_0 = 0$, il n'est pas possible de conclure, car on ne peut rien affirmer quant au signe de g lorsque $P(h, k)$ s'annule. Il faudrait recommencer l'étude en utilisant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 ... ou à un ordre encore plus grand!

3.5 Exemples de recherche de maximums et de minimums.

1. *Déterminons les points où la fonction f définie sur* $\mathbf{R}^2$ *par la formule*

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$$

admet un maximum local ou un minimum local.

Si f admet un maximum ou un minimum local en un point, les dérivées partielles de f s'annulent en ce point; d'où

$$\begin{cases} 3x^2 - 9y = 0 \\ 3y^2 - 9x = 0. \end{cases}$$

Nous en déduisons que $y = x^2/3$, et donc que

$$\frac{x^4}{3} - 9x = 0.$$

D'où

$$x = y = 0 \qquad \text{ou} \qquad x = y = 3.$$

La fonction f n'admet ni maximum local ni minimum local au point $(0, 0)$; en effet, la restriction de f à la droite $y = 0$ prend des valeurs strictement supérieures à 27 si $x > 0$, et des valeurs strictement inférieures à 27 si $x < 0$.

Pour étudier f au voisinage du point $(3, 3)$, calculons les dérivées partielles secondes :

$$r = 6x \qquad s = -9 \qquad t = 6y.$$

D'où

$$s_0^2 - r_0 t_0 = 81 - 324 = -243 < 0.$$

Comme $r_0 = 18 > 0$, f atteint un minimum local au point $(3, 3)$.

2. Reprenons la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par la formule

$$f(x, y) = x^2 - y^2 .$$

Dans ce cas,

$$r = 2 \qquad s = 0 \qquad t = -2 .$$

A l'origine, $s_0^2 - r_0 t_0 = 4 > 0$. On retrouve ainsi le fait que f n'admet ni maximum local ni minimum local en ce point.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par la formule

$$f(x, y) = x^4 + y^4 .$$

On trouve aussitôt

$$p = 4x^3 \qquad q = 4y^3$$
$$r = 12x^2 \qquad s = 0 \qquad t = 12y^2.$$

Les dérivées partielles p et q ne s'annulent simultanément qu'au point $(0, 0)$. En ce point, r, s et t sont nuls, ainsi que $s^2 - rt$. La méthode générale ne permet pas de conclure. Cependant, il est immédiat que f admet un minimum.

De même, la fonction $-f$ admet un maximum au point $(0, 0)$, alors que $p = q = s^2 - rt = 0$.

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par la formule

$$f(x, y) = y^2 - 3x^2 y + 2x^4 ,$$

ou encore

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2) .$$

Nous obtenons facilement

$$p = -6xy + 8x^3 \qquad q = 2y - 3x^2 .$$

Pour que q s'annule, il faut que $y = 3x^2/2$, d'où $p = -x^3$. La condition $p = 0$ implique alors $x = y = 0$.

Calculons maintenant $s^2 - rt$:

$$r = -6y + 24x^2 \qquad s = -6x \qquad t = 2 ,$$

d'où $s^2 - rt = 12(y - x^2)$. A l'origine, $s_0^2 - r_0 t_0 = 0$. On ne peut donc conclure sans une étude directe.

Remarquons que f s'annule sur les deux paraboles d'équations $y = x^2$ et $y = 2x^2$; de plus, f prend des valeurs strictement négatives entre ces paraboles, et des valeurs strictement positives à l'extérieur de ces paraboles (Fig. 3.2).
Ainsi, dans tout disque ouvert de centre $(0, 0)$, il existe des points de la forme $(x, 3x^2)$ où f prend une valeur strictement positive et des points de la forme $(x, 3x^2/2)$ où f prend une valeur strictement négative. La fonction f n'a donc ni minimum ni maximum local.

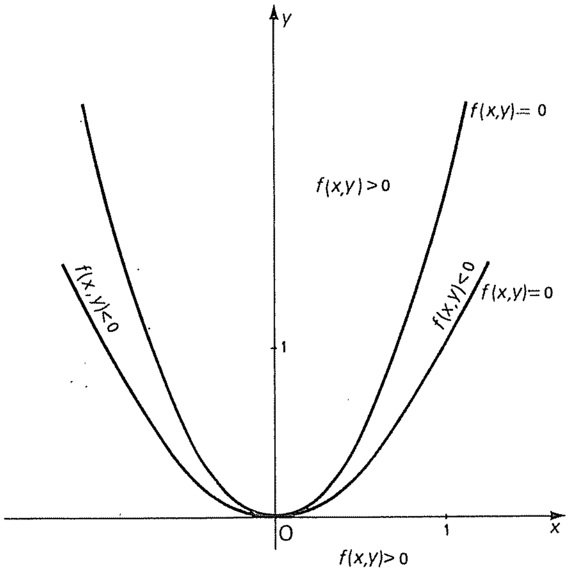


FIG. 3.2

5. *Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère le point A de coordonnées (a, b). Un point M d'abscisse x parcourt Ox et un point N d'ordonnée y parcourt Oy (Fig. 3.3). Déterminons les maximums et les minimums de la somme* $AM^2+AN^2+MN^2$.

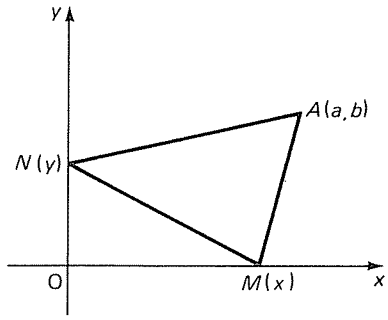


FIG 3.3

Cette somme est évidemment égale à

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x-a)^2+b^2+a^2+(y-b)^2+x^2+y^2 \\ &= 2(x^2+y^2-ax-by+a^2+b^2) . \end{aligned}$$

Calculons les dérivées partielles :

$$p = 4x - 2a \qquad q = 4y - 2b\,.$$

Ces dérivées partielles s'annulent toutes deux lorsque $x = a/2$ et $y = b/2$.

Pour voir si f atteint un maximum ou un minimum local au point $(a/2,\ b/2)$, calculons les dérivées partielles secondes :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4\,.$$

Donc

$$s^2 - rt = -16 < 0\,.$$

Comme $r > 0$, f passe par un minimum. La valeur de ce minimum est

$$f\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = 2\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} + a^2 + b^2\right) = \tfrac{3}{2}(a^2 + b^2)\,.$$

6. *Cherchons les dimensions d'un wagon rectangulaire non couvert* (*ou d'une caisse sans couvercle*) *telles que, pour un volume donné V, la somme des aires des côtés et du plancher soit minimale, de façon que l'on ait le minimum de dépense* (*Fig.* 3.4).

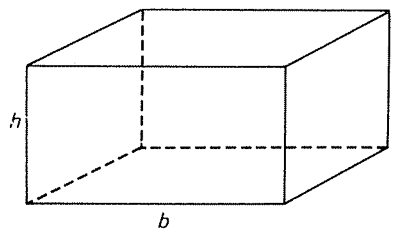


FIG. 3.4

Soient b la base, h la hauteur et l la largeur. Le volume est

$$V = bhl\,,$$

d'où l'on tire $h = V/bl$. L'aire est

$$S = bl + 2lh + 2bh$$

ou

$$S = bl + 2l\left(\frac{V}{bl}\right) + 2b\left(\frac{V}{bl}\right) = bl + \frac{2V}{b} + \frac{2V}{l}\,.$$

Calculons donc les deux dérivées premières :

$$\frac{\partial S}{\partial b} = l - \frac{2V}{b^2} \qquad \frac{\partial S}{\partial l} = b - \frac{2V}{l^2}\,.$$

Ces dérivées partielles s'annulent si

$$b^2 l = bl^2 = 2V.$$

Comme b et l sont non nuls, nous en tirons $b = l$; de plus, la valeur commune de b et de l est égale à $\sqrt[3]{2V}$. Dans ces conditions,

$$S = \sqrt[3]{4V^2} + \frac{4V}{\sqrt[3]{2V}} = 3\sqrt[3]{4V^2}.$$

Pour savoir s'il s'agit effectivement d'un minimum, calculons les dérivées partielles secondes :

$$r = \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = \frac{4V}{b^3} \qquad s = \frac{\partial^2 S}{\partial b \partial l} = 1 \qquad t = \frac{\partial^2 S}{\partial l^2} = \frac{4V}{l^3}.$$

D'où

$$s_0^2 - r_0 t_0 = 1 - 4 = -3 < 0.$$

Puisque $r_0 > 0$, il s'agit bien d'un minimum.

EXERCICES

Déterminer les maximums et les minimums des fonctions suivantes :

3.1 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3y$.

3.2 $f(x, y) = x^2y^3 + 3x^3y^3 + 2x^2y^4$.

3.3 $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

3.4 $f(x, y) = x^3 - 3ax^2 - 4ay^2 + 1$ $\quad a \in \mathbf{R}_+^*$.

3.5 $f(x, y) = (x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) + 4$ $\quad a \in \mathbf{R}_+^*$.

3.6 $f(x, y) = x^3 - 6xy + y^3 + 3x + 3y$.

3.7 $f(x, y) = (x-y)^2\,(x^2+y^2-1)$.

3.8 $f(x, y) = (a \cos x + b \cos y)^2 + (a \sin x + b \sin y)^2$ $\quad a, b \in \mathbf{R}$.

3.9 $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$.

3.10 $f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$.

3.11 Montrer que le produit de trois nombres réels strictement positifs dont la somme est donnée est maximal quand ces nombres sont égaux.

3.12 Montrer que la somme de trois nombres réels strictement positifs dont le produit est donné est minimale quand ces nombres sont égaux.

3.13 Trouver les extrémums de
$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$
sachant que $xyz = a^3$, où $a \in \mathbf{R}_+^*$.

3.14 Déterminer les parallélépipèdes rectangles de volume donné et d'aire maximale.

3.15 Déterminer les triangles d'aire maximale parmi les triangles de périmètre donné.

CHAPITRE 4

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

4.1 Généralités. Les équations différentielles constituent l'un des chapitres les plus importants de l'analyse, car elles ont d'innombrables applications. Nous en étudierons un grand nombre, en mettant chaque fois le problème en équation.

Une équation différentielle est une relation entre la variable x, une fonction inconnue $y = \varphi(x)$ et ses dérivées $y' = \varphi'(x)$, $y'' = \varphi''(x), \ldots, y^{(n)} = \varphi^{(n)}(x)$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) . \tag{1}$$

L'entier n s'appelle *ordre* de l'équation différentielle (1).

Intégrer l'équation différentielle (1), *c'est trouver toutes les fonctions* φ *qui vérifient cette relation.*

Une telle fonction φ s'appelle solution, ou intégrale, de l'équation (1).

Le graphe de la fonction φ est appelé courbe intégrale de l'équation différentielle (1). Intégrer l'équation (1) revient à trouver toutes les courbes intégrales.

4.2 Classification des équations différentielles du premier ordre. Une équation différentielle du premier ordre est de la forme :

$$y' = f(x, y) .$$

Il y a trois classes principales d'équations différentielles du premier ordre :

1° *Equations dont on peut séparer les variables*;
2° *Equations homogènes* (où y' ne dépend que du rapport y/x);
3° *Equations linéaires* (où y et y' sont au premier degré).

Ces dernières peuvent être à coefficients constants ou non, sans second membre ou avec second membre. Ce sont les équations différentielles de loin les plus utiles, car on les rencontre constamment dans toutes les branches de la physique (mécanique, thermodynamique, électricité, etc.).

On remarquera que les équations homogènes et les équations linéaires se ramènent aux équations dont on peut séparer les variables.

En dehors de ces types généraux d'équations différentielles du premier ordre, il y a un certain nombre d'équations de types spéciaux : équations de Bernoulli, de Riccati, de Lagrange, de Clairaut, etc. Dans l'état actuel de l'enseignement des mathématiques supérieures, ces équations font figure de curiosités historiques.

4.3 Premier type : Équations à variables séparables. On met tous les termes en x dans un membre, tous les termes en y dans l'autre, et l'on obtient une expression de la forme

$$f(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\,\mathrm{d}y ,$$

où $f(x)$ n'est fonction que de x seul et où $g(y)$ n'est fonction que de y seul. Puis on intègre les deux membres, sans oublier la constante d'intégration C. Enfin, on s'efforce de donner les solutions sous la forme explicite $y = \varphi(x)$.

EXEMPLES.

1. *Soit l'équation différentielle du premier ordre*

$$x + yy' = 0 .$$

On l'écrit sous la forme

$$x \, \mathrm{d}x = -y \, \mathrm{d}y .$$

Il vient en intégrant

$$\int x \, \mathrm{d}x = -\int y \, \mathrm{d}y + C ,$$

soit

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C ,$$

ou encore

$$x^2 + y^2 = 2C .$$

(C'est l'équation d'une famille de cercles concentriques, réels si la constante arbitraire C est positive.)

2. *Soit l'équation*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{1-y}{1+x} = 0 .$$

Séparons les variables :

$$\frac{\mathrm{d}y}{1-y} = \frac{\mathrm{d}x}{1+x} .$$

Nous pourrions intégrer les deux membres, ce qui introduirait des logarithmes et des valeurs absolues. Il est plus adroit de remarquer que *deux fonctions ayant la même différentielle logarithmique sont proportionnelles* (voir tome 2, chapitre 8). Or, le premier membre est la différentielle logarithmique de $1/(1-y)$, et le second membre, celle de $1+x$. Il existe donc un nombre réel non nul k tel que

$$\frac{1}{1-y} = k(1+x) .$$

Soit :

$$y = 1 - \frac{1}{k(1+x)} ,$$

ou encore, si l'on pose $k' = 1/k$,

$$y = \frac{x+1-k'}{x+1}.$$

4.4 Deuxième type : Équations homogènes. Une équation différentielle est dite *homogène* lorsqu'on peut la mettre sous la forme

$$y' = f(y/x).$$

Une telle équation ne change pas lorsqu'on remplace x par kx et y par ky, où k est un nombre réel non nul.

Ainsi, les équations différentielles suivantes sont homogènes :

$$y^2 \, \mathrm{d}x + (x^2 - xy) \, \mathrm{d}y = 0$$

$$x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x = \sqrt{x^2+y^2} \, \mathrm{d}x.$$

En effet, elles peuvent s'écrire respectivement sous les formes suivantes :

$$y' = \frac{y^2}{xy - x^2} = \frac{y^2/x^2}{y/x - 1}$$

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + y^2/x^2}.$$

Résolution : On pose

$$t = y/x,$$

soit $y = tx$, où t est une nouvelle fonction inconnue. On en tire

$$\mathrm{d}y = x \, \mathrm{d}t + t \, \mathrm{d}x.$$

On reporte ces expressions dans l'équation différentielle initiale (et l'on vérifie que y a disparu). On obtient alors une équation différentielle dont on peut séparer les variables :

$$x \, \mathrm{d}t/\mathrm{d}x + t = f(t),$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}t}{f(t) - t} = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Il vient en intégrant les deux membres

$$\ln \frac{x}{C} = \int \frac{\mathrm{d}t}{f(t) - t} \qquad \text{avec} \qquad x/C > 0.$$

On en déduit enfin y sans nouvelle intégration, grâce à la relation de départ $y = tx$. On obtient ainsi une *représentation paramétrique* des courbes intégrales (voir tome 5); dans certains cas, on peut éliminer t et trouver explicitement y en fonction de x.

EXEMPLES.

1. *Soit de nouveau l'équation*

$$x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Posons $y = tx$, d'où $\mathrm{d}y = x\,\mathrm{d}t + t\,\mathrm{d}x$. L'équation devient

$$x(x\,\mathrm{d}t + t\,\mathrm{d}x) - tx\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}x\,,$$

ou, en divisant par x et en supposant x strictement positif, pour fixer les idées,

$$x\,\mathrm{d}t + t\,\mathrm{d}x - t\,\mathrm{d}x = \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}x\,,$$

soit encore

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}\,.$$

Nous vérifions que y ne figure plus dans cette équation. Nous reconnaissons au premier membre la différentielle logarithmique de x, et au second membre celle de $t + \sqrt{1+t^2}$. (On reverra avec profit le tableau des primitives.) Donc

$$x = C(t + \sqrt{1+t^2})\,.$$

D'où

$$\sqrt{1+t^2} = \frac{x}{C} - t\,;$$

élevons les deux membres au carré, pour exprimer t en fonction de x :

$$1+t^2 = \frac{x^2}{C^2} - 2t\,\frac{x}{C} + t^2\,.$$

Les termes en t^2 se simplifient, et il reste

$$t = \frac{x^2 - C^2}{2Cx}\,.$$

Puisque $y = tx$, nous trouvons finalement :

$$y = \frac{x^2 - C^2}{2C}\,.$$

(C'est l'équation d'une famille de paraboles.)

2. *Soit l'équation*

$$(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x - xy\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

Il s'agit bien d'une équation différentielle homogène, car elle ne change pas lorsqu'on remplace x par kx et y par ky.

Posons $y = tx$, d'où $\mathrm{d}y = x\,\mathrm{d}t + t\,\mathrm{d}x$. Portons dans l'équation :

$$x^2(1+t^2)\,\mathrm{d}x - tx^2(x\,\mathrm{d}t + t\,\mathrm{d}x) = 0\,.$$

Simplifions; il reste

$$\mathrm{d}x - tx\,\mathrm{d}t = 0\,,$$

soit encore, en séparant les variables,

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = t\,\mathrm{d}t\,.$$

Intégrons, en introduisant la constante d'intégration sous le logarithme :

$$\ln\frac{x}{C} = \frac{t^2}{2} = \frac{y^2}{2x^2} \qquad \text{avec} \qquad x/C > 0\,.$$

D'où

$$y = \pm\, x\sqrt{2\ln x/C}\,.$$

4.5 Troisième type : Équations linéaires. Ces équations sont de loin les plus importantes, car on les rencontre constamment en physique. Nous allons une fois encore voir l'intérêt de la linéarité, et appliquer les méthodes de l'algèbre linéaire (voir tome 1).

Une équation différentielle *linéaire* du premier ordre est une équation de la forme

$$y' + a(x)\,y = b(x)\,, \tag{2}$$

où a et b sont deux fonctions continues de la variable x.

Lorsque le second membre $b(x)$ est nul, on dit que l'équation différentielle linéaire (2) est *sans second membre*.

Nous allons d'abord étudier le cas des équations sans second membre; le cas général s'y ramène.

4.6 Premier cas : Équation linéaire sans second membre. Considérons l'équation

$$y' + a(x)\,y = 0\,. \tag{3}$$

La résolution est très simple, car on se ramène au premier type d'équation du premier ordre : on peut en effet séparer les variables, et l'intégration est immédiate.

soit

$$dC = x\,dx\,.$$

Intégrons :

$$C = x^2/2+k\,. \tag{1}$$

Portons maintenant dans y :

$$y = Cx = (x^2/2+k)\,x$$
$$y = x^3/2+kx\,.$$

Le lecteur peut vérifier, en dérivant et en calculant la différence $y'-y/x$, que celle-ci donne bien x^2.

On voit que l'on perdrait des solutions si l'on oubliait la constante d'intégration k dans la relation (1).

2. *Soit l'équation*

$$y' \cos x+y \sin x = 1\,.$$

C'est bien une équation linéaire du premier ordre avec second membre.

Résolvons d'abord l'équation sans second membre :

$$\frac{dy}{y} = -\frac{\sin x\, dx}{\cos x}.$$

Intégrons :

$$y = C \cos x\,.$$

Considérons maintenant C comme une fonction inconnue de x, et dérivons :

$$y' = C' \cos x - C \sin x\,.$$

Portons dans l'équation complète, en remplaçant y par sa valeur :

$$(C' \cos x - C \sin x) \cos x + C \cos x \sin x = 1\,,$$

soit

$$C' \cos^2 x = 1\,,$$

ou encore

$$dC = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

D'où en intégrant :

$$C = \operatorname{tg} x+k\,.$$

Portons dans y :

$$y = C \cos x = (\operatorname{tg} x+k) \cos x = \sin x+k \cos x\,.$$

Remarque. Dans toutes les applications pratiques, la constante d'intégration se détermine dans chaque cas particulier par les conditions initiales ou finales, ainsi que nous le verrons ci-dessous dans les exemples d'applications.

4.8 Cas particulier important : Équation linéaire à coefficients constants et avec second membre constant

$$y'+ay = b\,,$$

où a et b sont deux nombres réels (et non plus des fonctions quelconques).

On peut dans ce cas séparer les variables, *en conservant le second membre* :

$$\frac{\mathrm{d}y}{b-ay} = \mathrm{d}x\,.$$

Intégrons :

$$-\frac{1}{a}\ln\frac{b-ay}{C} = x\,.$$

On en tire facilement y.

(Cela revient à se ramener à une équation sans second membre, grâce au changement de fonction $z = y-b/a$, d'où $z' = y'$.)

EXEMPLE. *Soit l'équation*

$$y'-4y = 2\,.$$

On peut écrire successivement

$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 4y+2$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{4y+2} = \mathrm{d}x, \qquad \ln\frac{2+4y}{C} = 4x\,,$$

d'où

$$2+4y = C\,\mathrm{e}^{4x}$$

et enfin

$$y = \frac{C}{4}\,\mathrm{e}^{4x}-\tfrac{1}{2} \qquad \text{ou} \qquad y = k\,\mathrm{e}^{4x}-1/2\,.$$

EXERCICES

Équations incomplètes

4.1 $y' = 1+\mathrm{tg}^2\,x$

4.2 $y' = 2x^2-1$

4.3 $y' = \mathrm{e}^x \cos x$

4.4 $y' = y^2-1$

4.5 $y' = 2y-7$

4.6 $y = \ln y'$

4.7 $\ln x = \ln y'+2y'$

4.8 $y^2(y'-1) = (y'-2)^2$

4.9 $(y+y')^3 = (y-y')^2$.

Équations à variables séparables

4.10 $(1+x^2)\,y'+3xy = 0$

4.11 $y' \sin x = y$

4.12 $y' = xy$

4.13 $xy' = y+xy$

4.14 $x^2yy' = \sqrt{1-y^2}$

4.15 $(x^2-4)\,y' = y$

4.16 $y'\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+y^2}$

4.17 $y'(x^2y^2-9y^2) = x^2y^2-4x^2$

4.18 $(1+x^2)\,y' = 1+y^2$.

Équations homogènes

4.19 $2x^2y'-y^2 = 4xy$

4.20 $2xyy'+4x^2 = y^2$

4.21 $2xyy' = x^2-y^2$

4.22 $xyy' = y^2-\sqrt{x^2+y^2}$

4.23 $x^2-y^2 = (xy'-y)^2$

4.24 $y-xy'+x\cos\dfrac{y}{x} = 0$

4.25 $(x^2+y^2)\,y' = 2xy$

4.26 $y^3y'+3xy^2+2x^3 = 0$

4.27 $xyy'-y^2 = (x+y)^2\exp(-y/x)$

4.28 $(y'^2-1)\,x^2y^2+y'(x^4-y^4) = 0$

4.29 $xy'-y = \dfrac{y^2-x^2}{ax^2+2bxy+cy^2}$ $\qquad a, b, c \in \mathbf{R}.$

Équations linéaires

4.30 $(1-x^2)\,y'+xy = ax$ $\qquad a \in \mathbf{C}$

4.31 $y'+y = x^2$

4.32 $xy'-2y = \dfrac{1}{2}x^3$

4.33 $y'+2xy = x^3$

4.34 $y'-\dfrac{y}{x} = x \operatorname{Arc\,tg} x$

4.35 $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$

4.36 $y' \sin x + y = \sin x + \cos 2x$

4.37 $(1-x^2)\,y'+2y = x+2$

4.38 $(1-x^2)\,y'+xy = 1-x^2$

4.39 $(x^2+1)\,y'-xy = x^2$

4.40 $x(x+2)\,y' + (x+1)\,y = 1$

4.41 $2x(1+x)\,y' - (3x+4)\,y + 2x\sqrt{1+x} = 0$

4.42 $2x(1-x)\,y' + (1-x)\,y = 1$

4.43 $xy'-y = \ln x$

4.44 $y'-y = \operatorname{ch} x$

4.45 $y'-ay = x^4$ $\qquad a \in \mathbf{R}^*$

4.46 $y' - \dfrac{2y}{1-x^2} = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$

4.47 $y'\sqrt{1-x^2} - ay = x\sqrt{1-x^2}$ $\qquad a \in \mathbf{R}^*$

4.48 $y'\sqrt{1+x^2} - y = \sqrt{1+x^2}$

4.49 $xyy'-y^2 = x^\alpha$ $\qquad \alpha \in \mathbf{R}$

4.50 $y'-a\,\dfrac{y}{x} = x^a\, e^x$ $\qquad a \in \mathbf{R}$

4.51 $2xy'+y = \dfrac{1}{1-x}$

4.52 $(1-x^2)\,y'+xy = \dfrac{1}{x} + x\ln x - x$

4.53 $|x|\,y'+y = x^2$

4.54 $y'(y+y') - xy - x^2 = 0\,.$

CHAPITRE 5

APPLICATIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

Nous allons étudier dans ce chapitre des applications élémentaires des équations différentielles du premier ordre à de nombreuses questions concrètes (croissance d'une population, problèmes de mécanique, d'optique, de thermodynamique, d'électricité).

Le chapitre suivant sera consacré à des applications plus particulières (étude des circuits électriques en régime quelconque).

CROISSANCE D'UNE POPULATION

5.1 Loi de l'intérêt composé. Considérons une quantité y qui croît avec le temps de la façon suivante : *son augmentation à chaque instant est proportionnelle à sa valeur à cet instant.* C'est ainsi que croissent les colonies bactériennes (en supposant que les microbes restent tous vivants), et il en est de même de la population d'un pays, en première approximation (loi de Malthus).

Pendant un temps Δt, y varie de Δy; sa variation instantanée est $\Delta y/\Delta t$. On peut donc écrire, d'après l'énoncé :

$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = ky\,.$$

Séparons les variables :

$$\mathrm{d}y/y = k\,\mathrm{d}t\,.$$

Intégrons, en mettant comme d'habitude la constante d'intégration sous le logarithme :

$$\ln y/C = kt \qquad \text{avec} \qquad y/C > 0\,.$$

Enfin,

$$y = C\,\mathrm{e}^{kt}\,.$$

C'est donc une croissance exponentielle; c'est ce qui arrive pour une somme d'argent placée à intérêts composés.

Soit a le capital que l'on possède au bout d'un temps t, et soit r l'intérêt annuel (exprimé en pourcentage, par exemple 3 %, 8 %, etc.). Supposons (ce qui d'ailleurs n'est pas tout à fait le cas) que cet intérêt soit payé de manière continue à chaque instant, et placé aussitôt avec le capital, avec le même taux d'intérêt. Au bout du temps $t+\Delta t$, on possède $a+\Delta a$ francs; ainsi, Δa est l'intérêt de a francs pendant Δt années à r %. On peut donc écrire

$$\mathrm{d}a = a\,\frac{r}{100}\,\mathrm{d}t\,.$$

D'où

$$\mathrm{d}a/a = k\,\mathrm{d}t$$

et, comme plus haut,

$$a = C\,\mathrm{e}^{kt}.$$

Calculons C. Pour $t = 0$, a est le capital initial a_0, d'où $C = a_0$ et

$$a = a_0\,\mathrm{e}^{kt} \qquad \text{avec} \qquad k = r/100\,.$$

Applications numériques :

1. *Au bout de combien de temps un capital placé à 2,5 % est-il doublé, en supposant que l'intérêt composé soit payé à chaque instant (et non pas à la fin de l'année) ?*

Ici

$$a = 2a_0,$$

d'où

$$\mathrm{e}^{kt} = 2\,,$$

et

$$kt = \ln 2 \approx 2{,}3 \log_{10} 2 \approx 2{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}69\,.$$

Enfin,

$$t = 0{,}69 \times 100/2{,}5 = 69/2{,}5 = 27{,}6\,.$$

Le temps de doublement est donc 27 ans 7 mois.

2. *Si la population d'un pays est doublée en 50 ans, dans combien de temps sera-t-elle triplée, sachant que la vitesse d'accroissement est proportionnelle au nombre d'habitants ?*

Assimilons l'effectif n de la population à une fonction dérivable du temps t. La croissance de n en fonction de t est encore exponentielle, de la forme

$$n = n_0\,\mathrm{e}^{kt},$$

où n_0 est la valeur au temps $t = 0$.

Pour $t = 50$, on a $n = 2n_0$, ce qui donne

$$2n_0 = n_0\,\mathrm{e}^{50k} \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{e}^{50k} = 2\,.$$

D'autre part, au bout d'un temps t, on doit avoir $n = 3n_0$; donc

$$\mathrm{e}^{kt} = 3\,.$$

Ainsi,

$$3^{50} = \mathrm{e}^{50kt} = (\mathrm{e}^{50k})^t = 2^t\,;$$

d'où

$$50 \log_{10} 3 = t \log_{10} 2,$$

soit

$$t = 50\,\frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} = 50\,\frac{0{,}476}{0{,}3} = 79\,.$$

Le temps cherché est égal à 79 ans.

3. *Dans une culture de microbes qui prolifèrent, la vitesse d'accroissement est proportionnelle à la quantité actuelle de microbes.*

On constate que le nombre de microbes a doublé en 5 heures ; combien y en aura-t-il à la fin de la dixième heure ?

S'il y en a 10^4 *au bout de* 3 *heures et* 4×10^4 *au bout de* 5 *heures, combien y en avait-il au début ?*

La loi est encore

$$n = n_0\, e^{kt}\,.$$

Pour $t = 5$, on a $n = 2n_0$, donc :

$$2n_0 = n_0\, e^{5k} \qquad \text{et} \qquad e^{5k} = 2\,.$$

D'autre part, pour $t = 10$,

$$n = n_0\, e^{10k} = n_0\,(e^{5k})^2 = 2^2 n_0 = 4n_0\,,$$

soit 4 fois la valeur intiale.

Calculons maintenant n_0. Pour $t = 3$, $n = 10^4$, ce qui donne

$$n_0\, e^{3k} = 10^4\,.$$

De même, pour $t = 5$, $n = 4 \times 10^4$, soit

$$n_0\, e^{5k} = 4 \times 10^4\,.$$

Eliminons n_0 entre ces deux relations :

$$n_0 = 10^4/e^{3k} = 4 \times 10^4/e^{5k}\,;$$

d'où

$$e^{2k} = 4$$

et

$$e^k = 2\,.$$

Enfin,

$$n_0 = 10^4/e^{3k} = 10^4/(e^k)^3 = 10^4/2^3 = 10^4/8 = 1250\,.$$

Il y a donc 1250 microbes à l'instant initial.

5.2 Croissance d'une population. L'expérience montre que dans l'équation différentielle

$$\frac{dn}{dt} = kn\,,$$

il vaut mieux supposer que k est une fonction affine de n, de la forme

$$k = a(b-n),$$

où a et b sont deux nombres réels strictement positifs. (L'accroissement de la population dépend de la quantité de nourriture disponible pour chaque individu. La quantité totale de nourriture étant sensiblement constante, k dépend de n. Le modèle le plus simple est une fonction affine, que l'expérience conduit à choisir décroissante. C'est la loi de Verhulst.)

L'effectif n est donc solution de l'équation différentielle

$$n' = an(b-n).$$

En écartant les solutions constantes $n=0$ et $n=b$, nous pouvons écrire cette équation sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}n}{n(b-n)} = a\,\mathrm{d}t,$$

ou encore

$$\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-b}\right)\mathrm{d}n = ab\,\mathrm{d}t.$$

Nous en déduisons que

$$\ln\left|\frac{n}{n-b}\right| = ab(t-t_0).$$

Supposons $n<b$; il vient

$$\frac{n}{n-b} = -\,\mathrm{e}^{ab(t-t_0)},$$

soit

$$n = \frac{b}{1+\mathrm{e}^{-ab(t-t_0)}}.$$

Les théorèmes généraux sur les fonctions monotones montrent que n est une fonction croissante du temps. En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, nous trouvons que n tend vers 0 lorsque t tend vers $-\infty$ et vers b lorsque t tend vers $+\infty$. D'où le tableau de variation :

t	$-\infty$		$+\infty$
n	0	$\nearrow$	b

On vérifie que le graphe admet le point $(t_0, b/2)$ pour centre de symétrie (Fig. 5.1).

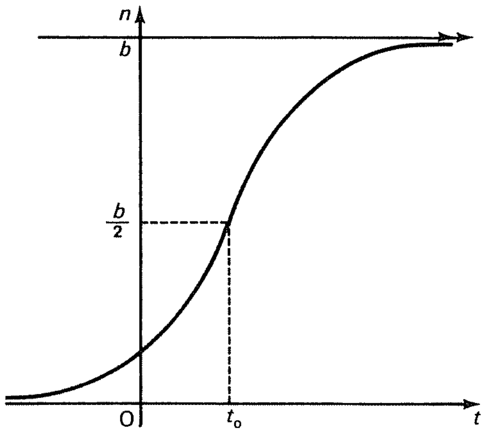


FIG. 5.1

La loi de Verhulst est satisfaite par les colonies bactériennes. Pour la population d'un pays, elle ne donne que des indications valables à court terme. Sans parler de causes artificielles (immigration) et des épidémies ou des guerres, il faut noter que les coefficients a et b sont très mal déterminés par l'expérience.

APPLICATIONS À LA MÉCANIQUE

5.3 Profil d'un solide d'égale résistance. On appelle *solide d'égale résistance* (à la traction, ou à la compression) un solide où chaque unité d'aire est soumise au même effort, quelle que soit la section considérée.

Soit par exemple un câble de mine ou d'ascenseur : lorsqu'il est déroulé, le métal, en haut du câble, subit un effort beaucoup plus grand qu'au milieu du câble et surtout qu'à l'extrémité inférieure où est amarrée la cage de l'ascenseur, et *ceci à cause du poids du câble.* On conçoit donc que, le métal travaillant à la traction, la section du câble, ou du solide qui supporte un poids, doive augmenter depuis le bas jusqu'en haut.

Calculons donc l'équation de la courbe donnant le profil de ce solide pour que chaque unité d'aire d'une section de ce solide soit soumise au même effort, quelle que soit la section et quel que soit l'endroit choisi dans cette section. Supposons le solide de révolution. Soient P le poids à supporter et a le poids de l'unité de volume du métal.

Considérons une section AB d'aire S à la distance x de la base A_1B_1 (Fig. 5.2) et d'épaisseur Δx. Le poids de cette tranche, assimilée à un cylindre de révolution, est

$$\Delta p = a\,\Delta V = a\,S\Delta x\,.$$

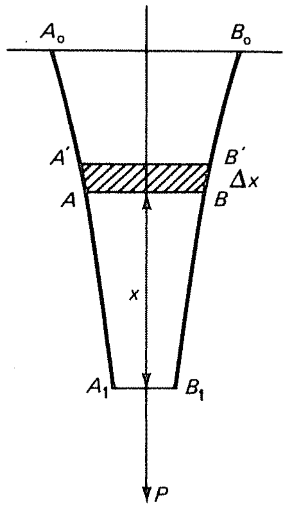


FIG. 5.2

La pression dans la section AB est $(P+aV)/S$. Soit R le taux de travail du métal, c'est-à-dire la pression à laquelle il doit être soumis; on doit réaliser l'égalité

$$\frac{P+aV}{S} = R.$$

Différentions :

$$a\,\mathrm{d}V = R\,\mathrm{d}S,$$

soit

$$aS\,\mathrm{d}x = R\,\mathrm{d}S$$

ou encore

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = \frac{a}{R}\,\mathrm{d}x.$$

Intégrons :

$$S = k\,\mathrm{e}^{ax/R}.$$

Or, lorsque $x=0$, $S=S_0$. Ainsi, $k=S_0$ et

$$S = S_0\,\mathrm{e}^{ax/R}.$$

Le profil est donc exponentiel. La section S_0 est déterminée par la valeur à laquelle doit travailler le métal :

$$S_0 = P/R.$$

On aurait évidemment le même profil pour un solide d'égale résistance à la compression. En particulier, on voit ainsi pourquoi le profil de la tour Eiffel est exponentiel.

5.4 Surface d'équilibre d'un liquide en rotation. *Soit un tube vertical contenant un liquide (eau, huile, mercure, etc.) et tournant rapidement autour de son axe avec une vitesse angulaire constante ω. Trouver l'équation de l'intersection de la surface liquide avec un plan contenant l'axe (Fig. 5.3).*

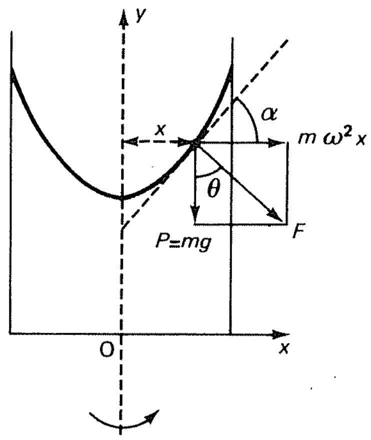


FIG. 5.3

On sait que le liquide se creuse au milieu et tend à s'élever le long des parois, sous l'action de l'inertie. Considérons une petite masse m de liquide, à la distance x de l'axe; elle est soumise a deux forces :

a) son poids $P = mg$, vertical;
b) la force centrifuge $m\omega^2 x$, horizontale.

Or, puisque la vitesse de rotation est constante, la surface du liquide est stable, et la force $\boldsymbol{F}$ résultante des deux précédentes doit être perpendiculaire au plan tangent à la surface au point considéré. Dans un plan contenant l'axe, on obtient une courbe d'équilibre.

(En effet, pour une vitesse donnée, la résultante $\boldsymbol{F}$ des forces agissantes ne peut pas être oblique par rapport à la tangente à la courbe car, s'il en était ainsi, on pourrait la décomposer en deux : une composante tangentielle et une composante normale. La composante tangentielle aurait pour effet de déplacer la masse m suivant la tangente, ce qui est contraire à l'hypothèse... et à la réalité.)

Menons la tangente à la courbe. Il résulte des considérations précédentes que les angles α et θ sont égaux :

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \theta ,$$

soit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m\omega^2 x}{mg}.$$

Séparons les variables :

$$dy = \frac{\omega^2 x}{g} dx = kx \, dx.$$

Intégrons :

$$y = \frac{kx^2}{2} + C.$$

C'est l'équation d'une parabole d'axe vertical. On détermine la constante C en écrivant que le volume du liquide est resté inchangé.

5.5 Détermination d'une trajectoire. *Un point se déplace le long d'une courbe avec une vitesse de norme constante, de telle sorte que la projection de cette vitesse sur une droite donnée soit proportionnelle au temps. Déterminer une représentation paramétrique de cette courbe.*

Prenons pour axe des abscisses la droite en question, et pour axe des ordonnées la perpendiculaire à Ox issue de la position initiale du mobile.

Par hypothèse,

$$dx/dt = kt,$$

d'où

$$x = kt^2/2 + C.$$

Le choix de Oy montre que $C = 0$. Donc $x = kt^2/2$.

D'autre part, la vitesse v vérifie la relation

$$v^2 = (dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 = a^2.$$

D'où

$$(dy/dt)^2 = a^2 - k^2 t^2.$$

Nous pouvons séparer les variables, ou encore poser $kt = a \cos \varphi$. Alors

$$dt = -\frac{a}{k} \sin \varphi \, d\varphi ;$$

d'où

$$dy^2 = (a^2 - a^2 \cos^2 \varphi) \left(-\frac{a}{k} \sin \varphi \, d\varphi \right)^2$$

$$= \frac{a^4}{k^2} \sin^4 \varphi \, d\varphi^2.$$

Supposons par exemple $dy/d\varphi \geqslant 0$; alors

$$dy = \frac{a^2}{k}\sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{a^2}{2k}(1-\cos 2\varphi)\, d\varphi .$$

Intégrons :

$$y = \frac{a^2}{4k}(2\varphi - \sin 2\varphi) + C' .$$

Or, pour $t = 0$, $\varphi = \pi/2$ et $y = 0$; donc $C' = -\pi a^2/4k$ et, finalement,

$$y = \frac{a^2}{4k}(2\varphi - \sin 2\varphi) - \frac{\pi a^2}{4k} .$$

Remplaçons t en fonction de φ dans l'expression de x :

$$x = \frac{k}{2}\frac{a^2}{k^2}\cos^2\varphi = \frac{a^2}{2k}\cos^2\varphi = \frac{a^2}{4k}(1+\cos 2\varphi) .$$

(Ce sont les équations d'une cycloïde droite.)

5.6 Chute d'un corps dans l'air. Cherchons la variation de la vitesse v dans le mouvement rectiligne descendant d'un point matériel soumis à l'accélération g de la pesanteur et à la résistance de l'air. Nous distinguerons deux cas (le premier correspondant aux faibles vitesses).

Premier cas. La résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse. Soient v la vitesse et R la force retardatrice. Alors

$$R = kv ,$$

où k est un coefficient ne dépendant que de la forme du corps.

L'équation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$mg - kv = m\, dv/dt .$$

Posons $k' = k/m$; alors

$$dv/dt + k'v = g ,$$

équation différentielle linéaire à coefficients constants et à second membre constant. Séparons les variables :

$$\frac{dv}{g-k'v} = dt .$$

Intégrons :

$$-\frac{1}{k'}\ln\frac{g-k'v}{C} = t .$$

Si nous supposons que le mobile est lâché sans vitesse à l'instant $t = 0$, nous voyons que $C = g$; donc

$$1 - \frac{k'}{g} v = \mathrm{e}^{-k't},$$

soit

$$v = \frac{g}{k'}(1 - \mathrm{e}^{-k't}).$$

Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exponentielle tend vers 0, et v tend vers sa valeur limite g/k'.

Exprimons maintenant l'espace parcouru x en fonction du temps :

$$\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}t,$$

d'où

$$x = \int v\,\mathrm{d}t + C = \int \frac{g}{k'}(1 - \mathrm{e}^{-k't})\,\mathrm{d}t + C,$$

soit encore

$$x = \frac{g}{k'}\left(t + \frac{1}{k'}\mathrm{e}^{-k't}\right) + C.$$

Si nous supposons que l'origine des abscisses est la position initiale, nous voyons que

$$C = -g/k'^2.$$

Finalement,

$$x = \frac{g}{k'}t - \frac{g}{k'^2}(1 - \mathrm{e}^{-k't}).$$

Lorsque t est au voisinage de $+\infty$, $x \sim (g/k')\,t$; le mouvement tend à devenir uniforme, de vitesse g/k'.

Second cas. La résistance de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse : nous écrivons

$$R = kgv^2,$$

de façon à pouvoir simplifier l'écriture des calculs qui suivent.

L'équation du mouvement est cette fois

$$mg - kgv^2 = m\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}t.$$

Posons $\alpha^2 = k/m$. Alors

$$\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = g(1 - \alpha^2 v^2).$$

Séparons les variables :

$$\frac{\mathrm{d}v}{1-\alpha^2 v^2} = g\ \mathrm{d}t\,.$$

D'après le tableau des primitives,

$$\frac{1}{2\alpha}\ \ln\left|\frac{1+\alpha v}{1-\alpha v}\right| = gt+C\,.$$

La constante d'intégration C est nulle. D'où

$$v = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\mathrm{e}^{2\alpha g t}-1}{\mathrm{e}^{2\alpha g t}+1} = \frac{1}{\alpha}\ \mathrm{th}\,\alpha g t\,.$$

On en déduit x par une nouvelle intégration :

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\ \mathrm{th}\,\alpha g t\ \mathrm{d}t$$

et

$$x = \frac{1}{\alpha^2 g}\ \ln(\mathrm{ch}\,\alpha g t) + C\,.$$

Le choix de l'origine des coordonnées montre que $C=0$. Donc

$$x = \frac{1}{\alpha^2 g}\ \ln(\mathrm{ch}\,\alpha g t) = \frac{m}{kg}\ \ln\left(\mathrm{ch}\ g\sqrt{\frac{k}{m}}\ t\right),$$

ce qui est la formule cherchée.

5.7 Portée d'un projectile dans l'air. Cherchons la loi de déplacement d'un projectile dans l'air, en admettant que la résistance de l'air soit proportionnelle à la vitesse.

Dans le plan Oxy où évolue le projectile, Ox et Oy représentent l'horizontale et la verticale ascendante du point O. Désignons par x et y les coordonnées du point M, image du projectile. Les forces qui s'exercent sur M sont la pesanteur $\boldsymbol{P}$ et la résistance de l'air $\boldsymbol{R}$. Le principe fondamental de la dynamique se traduit par l'égalité vectorielle :

$$m\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{P}+\boldsymbol{R},$$

dans laquelle $\boldsymbol{\Gamma}$ est l'accélération de M. Projetons cette relation sur Ox et désignons par v la composante horizontale de la vitesse et γ l'accélération horizontale :

$$m\gamma = R\,, \qquad \text{avec} \qquad \gamma = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t\,.$$

Supposons que R soit proportionnelle à v et à la section du projectile (c'est-à-dire au carré du diamètre D); on peut écrire :

$$R = KvD^2$$

Comme $m = P/g$ et que $\boldsymbol{R}$ est une force retardatrice, on obtient :

$$P/g \; \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = -KvD^2 .$$

Séparons les variables :

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{KD^2 g}{P} \mathrm{d}t = -A \,\mathrm{d}t .$$

Intégrons :

$$\ln v/C = -At .$$

Pour $t = 0$, $v = v_0$, d'où $C = v_0$ et

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = v = v_0 \,\mathrm{e}^{-At} .$$

Donc

$$x = \int v_0 \,\mathrm{e}^{-At} \,\mathrm{d}t + C' = -\frac{v_0}{A}\mathrm{e}^{-At} + C' .$$

Pour $t = 0$, $x = 0$, d'où $C' = v_0/A$ et

$$x = \frac{v_0}{A} - \frac{v_0}{A}\mathrm{e}^{-At} = \frac{v_0}{A}(1 - \mathrm{e}^{-At}),$$

relation donnant la portée du tir.

APPLICATION À L'OPTIQUE

5.8 Miroir parabolique. *Déterminer la méridienne C d'un réflecteur de révolution tel que les rayons lumineux issus d'une source ponctuelle donnée O soient réfléchis sous la forme d'un faisceau parallèle de direction donnée* (*Fig.* 5.4).

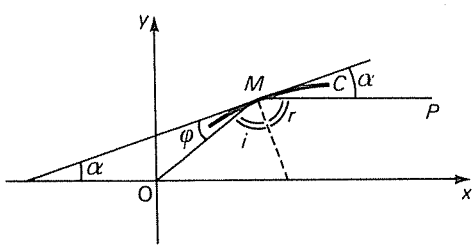


FIG. 5.4

Prenons O pour origine des coordonnées, et la direction des rayons réfléchis pour la direction de l'axe Ox. Soit M un point de la courbe C, de coordonnées x et y. Menons la tangente en M à C. Considérons un rayon lumineux OM issu de O et réfléchi suivant MP. L'égalité de l'angle d'incidence i et de l'angle de réflexion r se traduit par $\varphi = \alpha$. Il en découle que

$$\operatorname{tg} xOM = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} .$$

D'autre part,

$$\operatorname{tg} xOM = y/x \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \alpha = y' .$$

Nous obtenons ainsi l'équation différentielle

$$\frac{y}{x} = \frac{2y'}{1 - y'^2} .$$

C'est une équation différentielle homogène, qui n'est pas facile à intégrer en tant que telle. Nous y parviendrons grâce à l'artifice suivant, dû à Lagrange : prenons pour paramètre auxiliaire $m = y'$. Alors

$$y = x \frac{2m}{1 - m^2} \tag{1}$$

et

$$\mathrm{d}y = m \,\mathrm{d}x = \frac{2m}{1 - m^2} \mathrm{d}x + 2x \frac{1 + m^2}{(1 - m^2)^2} \mathrm{d}m .$$

Nous pouvons séparer les variables x et m :

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = 2 \frac{\mathrm{d}m}{m(m^2 - 1)} .$$

La décomposition en éléments simples de la fraction rationelle $\dfrac{2}{X(X^2 - 1)}$ est

$$-\frac{2}{X} + \frac{1}{X - 1} + \frac{1}{X + 1} .$$

Il en découle aussitôt que

$$x = k \frac{m^2 - 1}{m^2} . \tag{2}$$

La relation (1) montre alors que

$$y = -2k/m . \tag{3}$$

Éliminons m entre les relations (2) et (3) :

$$m = -2k/y$$

et

$$x = k(1-y^2/4k^2),$$

soit encore

$$y^2 = 4k(k-x).$$

On reconnaît l'équation d'une famille de paraboles d'axe Ox et de foyer commun O (Fig. 5.5).

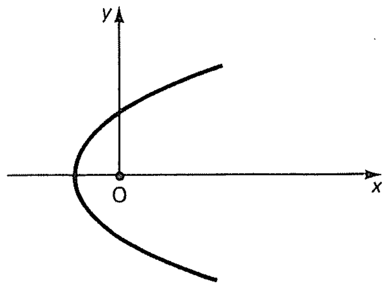


FIG. 5.5

Le miroir argenté est donc la surface interne d'un paraboloïde de révolution.

APPLICATIONS À LA THERMODYNAMIQUE

5.9 Détente isotherme d'un gaz parfait. Considérons un gaz parfait à température constante, suivant donc la loi de Mariotte

$$pv = K,$$

où p est la pression et v le volume.

Soit un piston d'aire S se déplaçant dans un cylindre. Le travail fourni par le gaz dans un déplacement Δx est

$$\Delta W = F\,\Delta x = pS\,\Delta x = p\,\Delta v,$$

soit :

$$\mathrm{d}W = p\,\mathrm{d}v.$$

Comme $\mathrm{d}p/p+\mathrm{d}v/v=0$, nous voyons que

$$\mathrm{d}W = -v\,\mathrm{d}p = -K\,\mathrm{d}p/p.$$

Le travail fourni dans la détente de p_1 à p_2 est donc :

$$W = -K\int_{p_1}^{p_2}\mathrm{d}p/p = -K\ln p_2/p_1 = K\ln p_1/p_2.$$

Application. *Un réservoir a une capacité de* 0,2 m^3 *et contient de l'air à une pression de* 10^7 *pascals. On détend cet air à température constante, jusqu'à la pression de* 10^5 *pascals, dans une machine sans frottement. Calculer le travail fourni par cette détente, et la durée de celle-ci sachant qu'elle sert à alimenter un moteur consommant* 1 500 *watts.*

Ici, $p_1/p_2 = 100$; comme $K = p_1 v_1 = 10^7 \times 0{,}2 = 2 \times 10^6$, nous voyons que

$$W = 2 \times 10^6 \ln 100 = 2 \times 10^6 \times 2 \times 2{,}3$$

soit :

$$W = 9{,}2 \times 10^6 \text{ J}.$$

Le moteur consommant 1 500 watts, soit 1 500 J/s, la détente précédente pourra l'alimenter pendant

$$\frac{9{,}2 \times 10^6}{1\,500} \approx 6\,130 \text{ s},$$

soit environ 1 h 42 mn.

5.10 Équation des courbes adiabatiques des gaz parfaits. On dit qu'une transformation est *adiabatique* lorsque la quantité de chaleur échangée avec l'extérieur est nulle; autrement dit, c'est une transformation où $\mathrm{d}Q = 0$.

Considérons une mole de gaz parfait, suivant la loi de Mariotte-Gay-Lussac

$$pv = RT, \tag{1}$$

où p est la pression, v le volume, T la température absolue et R une constante.

Plaçons-la dans un récipient parfaitement calorifugé. Réalisons une variation Δv de volume à pression constante. Si ΔT_1 est la variation de température correspondante et C la chaleur massique à pression constante, le gaz dégage (pour une masse égale à l'unité) une quantité de chaleur

$$\Delta Q_1 = C \, \Delta T_1 .$$

Effectuons ensuite une variation Δp de pression à volume constant; soit ΔT_2 la variation de température correspondante. Appelons c la chaleur massique à volume constant; la quantité de chaleur dégagée est

$$\Delta Q_2 = c \, \Delta T_2 .$$

D'où

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}Q_1 + \mathrm{d}Q_2 = C \, \mathrm{d}T_1 + c \, \mathrm{d}T_2 = 0 .$$

Or, la relation (1) devient, par différentiation,

$$p \, \mathrm{d}v = R \, \mathrm{d}T_1 ,$$

puis

$$v \, \mathrm{d}p = R \, \mathrm{d}T_2 .$$

Ainsi,

$$dQ = C\frac{p\,dv}{R} + c\frac{v\,dp}{R} = \frac{1}{R}(Cp\,dv + cv\,dp) = 0\,.$$

Divisons par cpv/R :

$$\frac{C}{c}\frac{dv}{v} + dp/p = 0\,.$$

Supposons que le rapport $\gamma = C/c$ soit indépendant de la température, et séparons les variables :

$$dp/p = -\gamma\,dv/v\,.$$

Donc

$$p = K/v^\gamma\,,$$

ce qu'on écrit traditionnellement sous la forme

$$pv^\gamma = K\,, \tag{2}$$

équation des courbes adiabatiques.

Applications numériques. Appelons p_1 et v_1 les valeurs correspondant à une température T_1 ; alors

$$pv^\gamma = p_1 v_1^\gamma\,.$$

D'autre part,

$$\frac{pv}{p_1 v_1} = \frac{RT}{RT_1} = \frac{T}{T_1}\,.$$

On en déduit

$$T/T_1 = (v_1/v)^{\gamma-1} = (p/p_1)^{1-1/\gamma}\,.$$

Pour l'air, $\gamma \approx 1{,}4$; d'où

$$1-\gamma \approx -2/5 \qquad \text{et} \qquad 1-1/\gamma \approx 2/7\,.$$

Considérons un briquet à air dans lequel on comprime brusquement de l'air, pris par exemple à 0 °C, en supposant le gaz réduit à 1/10 de son volume par compression adiabatique. Alors, puisque $T_1 = 273\,°\mathrm{K}$,

$$T/273 = (v_1/v)^{2/5} = 10^{0{,}4}\,,$$

soit

$$T = 273 \times 10^{0{,}4}\,.$$

Calculons T par l'intermédiaire de son logarithme décimal :

$$\log_{10} T = \log_{10} 273 + 0{,}4 = 2{,}836\,16\,;$$
$$T \approx 686\,°\mathrm{K}\,,$$

ce qui correspond à 413 °C, température suffisante pour enflammer un morceau d'amadou attaché au piston.

Calculons maintenant le refroidissement produit par une détente adiabatique. Soit une masse d'air à 0 °C sous une pression p_1 que nous détendons jusqu'au 1/100 de cette valeur. Alors

$$T/273 = (p/p_1)^{2/7} = (1/100)^{2/7};$$

d'où

$$\log_{10} T = \log_{10} 273 + \tfrac{2}{7} \log_{10} 0{,}01 = 2{,}436\,16 - 4/7 = 1{,}864\,73.$$

Enfin,

$$T \approx 73\,°\mathrm{K},$$

soit -200 °C. On voit ainsi pourquoi on peut produire de la neige carbonique en détendant du bioxyde de carbone fortement comprimé.

(Les valeurs précédentes ne sont qu'approximatives, car les deux transformations précédentes ne sont pas rigoureusement adiabatiques.)

Travail dans une détente adiabatique. Calculons les différentielles logarithmiques des deux membres de la formule (2) :

$$\mathrm{d}p/p + \gamma\, \mathrm{d}v/v = 0.$$

La différentielle $\mathrm{d}W = p\, \mathrm{d}v$ s'exprime en fonction de p seul par la relation :

$$\mathrm{d}W = -\frac{1}{\gamma}\, v\, \mathrm{d}p = -\frac{1}{\gamma} K^{1/\gamma} \frac{\mathrm{d}p}{p^{1/\gamma}}.$$

D'où

$$W = \int_{p_1}^{p_2} -\frac{1}{\gamma} K^{1/\gamma} \frac{\mathrm{d}p}{p^{1/\gamma}} = \frac{K^{1/\gamma}}{\gamma - 1} \left(p_1^{1-1/\gamma} - p_2^{1-1/\gamma}\right),$$

ou encore :

$$W = \frac{p_1 v_1 - p_2 v_2}{\gamma - 1}.$$

5.11 Variation de la pression atmosphérique avec l'altitude. Soit p la pression de l'air à l'altitude h (comptée au dessus du niveau de la mer). L'équation fondamentale de l'hydrostatique permet d'écrire

$$\mathrm{d}p + \rho g\, \mathrm{d}h = 0$$

(ρ est la masse volumique de l'air à la pression p et à la température absolue T, et g l'accélération de la pesanteur, supposée constante). Considérons l'air comme un gaz parfait; alors

$$pv = nRT \tag{1}$$

(où n est le nombre de moles d'air occupant le volume v, et R une constante). D'où

$$\rho = m/v = Mp/RT,$$

où M est la masse molaire de l'air.

Premier cas. Supposons que la température soit constante. Nous pouvons alors écrire

$$\mathrm{d}p/\mathrm{d}h = -Mpg/RT = -kp\,.$$

Séparons les variables :

$$\mathrm{d}p/p = -k\,\mathrm{d}h\,.$$

Intégrons :

$$\ln p/C = -kh\,.$$

La constante d'intégration C s'interprète évidemment comme la pression p_0 au niveau de la mer. Donc

$$p = P_0\,\mathrm{e}^{-kh}.$$

Deuxième cas. Supposons que l'air suive la loi $pv^\gamma = K$ (équation des courbes adiabatiques). La température n'est plus constante.

D'après la relation (1)

$$RT = pv/n\,,$$

ou encore, d'après l'équation des courbes adiabatiques,

$$RT = \frac{p}{n}\left(\frac{K}{p}\right)^{1/\gamma}.$$

D'où

$$\mathrm{d}p/\mathrm{d}h = -pg/RT = k'p^{1/\gamma}\,.$$

Séparons les variables :

$$p^{-1/\gamma}\,\mathrm{d}p = k'\,\mathrm{d}h\,.$$

Intégrons :

$$\frac{p^{-1/\gamma+1} - p_0^{-1/\gamma+1}}{-1/\gamma+1} = -k'h\,,$$

où p_0 désigne encore la pression au niveau de la mer.

On peut encore exprimer h en fonction du rapport p/p_0 :

$$k'h = \frac{\gamma}{\gamma-1}\,(p_0^{1-1/\gamma} - p^{1-1/\gamma}) = \frac{\gamma}{\gamma-1}\,p_0^{1-1/\gamma}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1-1/\gamma}\right].$$

Enfin, on obtient une expression plus simple en fonction des températures : en effet,

$$T/T_0 = pv/p_0v_0 = (p/p_0)^{1-1/\gamma}\,;$$

donc

$$k'h = \frac{\gamma}{\gamma-1}\,p_0^{1-1/\gamma}\left(1 - \frac{T}{T_0}\right).$$

APPLICATIONS À L'ÉLECTRICITÉ

5.12 Décharge d'un condensateur dans une résistance. Nous allons étudier en détail la décharge d'un condensateur dans une résistance, et nous donnerons quelques compléments au point de vue électrique, étant donnée l'importance d'un tel circuit d'un usage courant en radio, en télévision, dans les radars, etc. Enfin, c'est un magnifique exemple de mise en équation d'un problème électrique et de sa résolution par une équation différentielle.

Étudions la décharge d'un condensateur de capacité C dans une résistance R; autrement dit, cherchons la variation du courant i et de la d.d.p. v en fonction du temps t (Fig. 5.6). Suivant l'usage, nous utilisons les minuscules pour désigner les quantités variables, réservant les majuscules pour les constantes.

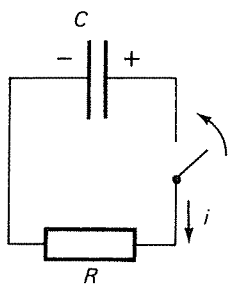


FIG. 5.6

Soient V la d.d.p. aux bornes à l'instant initial et Q la charge contenue dans le condensateur. Nous savons que

$$Q = CV.$$

Plaçons-nous au bout du temps t après la fermeture de l'interrupteur. A ce moment, la charge qui *reste* dans le condensateur est q (le condensateur a déjà perdu une partie de sa charge), et la d.d.p. aux bornes (qui varie de V à 0) est devenue v, et

$$q = Cv.$$

Plaçons-nous maintenant au temps $t+\Delta t$. Pendant le temps Δt, le condensateur libère une charge Δq, et

$$\Delta q \approx -i\,\Delta t,$$

avec le signe $-$, *car la charge diminue.*

D'autre part, aux bornes de R, il y a une différence de potentiel v, et la loi d'Ohm nous donne

$$i = v/R$$

ou

$$-\mathrm{d}q/\mathrm{d}t = q/CR\,.$$

Pour calculer q en fonction de t, il faudra intégrer, mais auparavant séparons les variables :

$$\mathrm{d}q/q = -\mathrm{d}t/CR\,.$$

Nous en déduisons comme d'habitude

$$q = k\,\mathrm{e}^{-t/CR}\,.$$

Pour déterminer la constante k, remarquons que si $t = 0$, alors $q = Q$. Donc $k = Q$ et

$$q = Q\,\mathrm{e}^{-t/CR}\,.$$

Enfin,

$$i = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -Q\,\mathrm{e}^{-t/CR}\left(-\frac{1}{CR}\right).$$

Or, $Q = CV$; donc $Q/CR = V/R$, et la valeur commune des deux membres n'est autre que le courant initial I_0. Donc

$$i = I_0\,\mathrm{e}^{-t/CR}\,.$$

C'est une fonction exponentielle décroissante (Fig. 5.7).

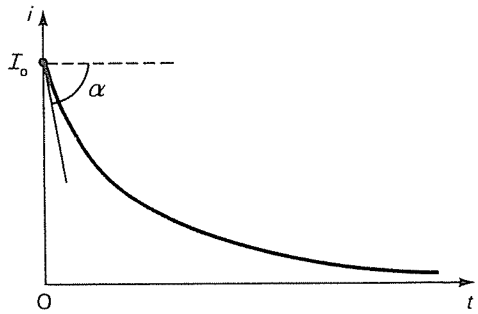


FIG. 5.7

Le produit CR s'appelle *constante de temps* du circuit et se note θ. Ce nombre caractérise la vitesse de la décharge.

Le temps θ est celui au bout duquel l'intensité initiale I_0 est divisée par e ; en effet, lorsque $t = \theta$,

$$i = I_0\,\mathrm{e}^{-CR/CR} = I_0\,\mathrm{e}^{-1} = I_0/\mathrm{e}\,.$$

La dérivée est

$$i' = I_0\,\mathrm{e}^{-t/CR}\left(-\frac{1}{CR}\right) = -\frac{I_0}{\theta}\,\mathrm{e}^{-t/CR}.$$

Lorsque $t = 0$, $i' = -I_0/\theta$. Soit α l'angle de la tangente au point $(0, I_0)$ avec Ox; par définition, $\operatorname{tg}\alpha = -I_0/\theta$, et l'on voit que

si θ est grand, l'angle α est petit, i diminue lentement,

si θ est petit, l'angle α est grand, i diminue rapidement.

La d.d.p. v est donné par

$$v = q/C = V\,\mathrm{e}^{-t/CR};$$

son graphe a la même forme que celui de i en fonction du temps t.

Nous allons chercher le temps au bout duquel le courant i et la d.d.p. v sont égaux au centième de leurs valeurs initiales (temps au bout duquel on considère que la décharge est pratiquement terminée). Ce temps t est défini par l'équation

$$i = I_0/100 = I_0\,\mathrm{e}^{-t/\theta},$$

soit

$$\mathrm{e}^{t/\theta} = 100,$$

ou encore

$$t/\theta = \ln 100 = 2{,}3 \log 100 \approx 4{,}6\,.$$

Le temps cherché est environ 5θ. (C'est le même temps pour la d.d.p. v.)

Application numérique. Supposons que

$$C = 10\,\mu\mathrm{F}\,, \qquad V = 10\,000\ \mathrm{V}\,, \qquad R = 1\ \mathrm{M\Omega}\,.$$

Alors

$$I_0 = V/R = 10^4/10^6 = 0{,}01\ \mathrm{A} \qquad \text{ou} \qquad 10\ \mathrm{mA}\,,$$
$$\theta = CR = (10\times 10^{-6})\,10^6 = 10\ \mathrm{s}\,.$$

Au bout de 10 secondes, le courant sera encore égal à $10/\mathrm{e} = 3{,}7$ milliampères et la d.d.p. sera $10\,000/2{,}7 = 3\,700$

Enfin, au bout de $5\,\theta$ soit 50 secondes (près d'une minute), le courant sera $10\ \mathrm{mA}/100 = 0{,}1\ \mathrm{mA}$ et la d.d.p. $10\,000/100 = 100$ volts.

On voit ainsi combien ce condensateur est long à se décharger.

Rappelons que nous avons calculé la quantité de chaleur dégagée durant la décharge au tome 2 (n° 7.20), en passant par l'intégrale

$$W = -\frac{1}{C}\int_Q^0 q\,\mathrm{d}q = -\frac{1}{C}\left[\frac{q^2}{2}\right]_Q^0 = \tfrac{1}{2}CV^2.$$

Nous pouvons retrouver ce résultat en prenant le temps pour variable d'intégration; mais nous devons faire intervenir une intégrale généralisée, car le condensateur met théoriquement un temps infini pour se décharger complètement. Il vient

$$W = \int_0^{+\infty} RI_0^2 \, e^{-2t/CR} \, dt = RI_0^2 \int_0^{+\infty} e^{-2t/CR} \, dt$$

$$= -RI_0^2 \frac{CR}{2} [e^{-2t/CR}]_0^{+\infty} = \frac{CR^2 I_0^2}{2}.$$

On obtient la formule annoncée en remplaçant RI_0 par sa valeur V.

5.13 Charge d'un condensateur à travers une résistance. Étudions cette fois la charge d'un condensateur à travers une résistance (Fig. 5.8). Soient C la capacité du condensateur, R la valeur de la résistance et E la f.é.m. de la source continue.

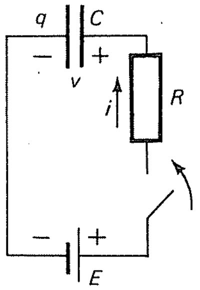


FIG. 5.8

Le condensateur ne se charge pas immédiatement car, dès qu'il a reçu une charge, si petite soit-elle, il apparaît à ses bornes une d.d.p. $v = q/C$ qui agit comme une f.c.é.m., et il se charge de moins en moins vite, puisque v augmente progressivement, de 0 jusqu'à E.

Plaçons-nous au bout d'un temps t après la fermeture de l'interrupteur. A cet instant, le courant est i, la charge du condensateur est Q et la d.d.p. aux bornes est v. D'après la loi de Kirchhoff,

$$i = \frac{E-v}{R},$$

soit

$$E = Ri+v = Ri+q/C.$$

Or,

$$dq = i \, dt.$$

Il en découle que

$$R \, dq/dt+q/C = E.$$

Nous reconnaissons une équation différentielle linéaire du premier ordre, à coefficients constants et avec second membre constant.

Séparons les variables :

$$\frac{\mathrm{d}q}{E-q/C} = \frac{\mathrm{d}t}{R}.$$

La charge q étant nulle lorsque $t=0$, nous obtenons par intégration :

$$\ln(1-q/CE) = -t/CR,$$

soit encore

$$q = CE(1-\mathrm{e}^{-t/CR}).$$

Si nous notons Q la charge finale CE,

$$q = Q(1-\mathrm{e}^{-t/CR}).$$

On en déduit la d.d.p. aux bornes du condensateur :

$$v = q/C = E(1-\mathrm{e}^{-t/CR});$$

et enfin l'intensité :

$$I = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t = -CE\,\mathrm{e}^{-t/CR}(-1/CR) = \frac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/CR}.$$

Notons I_0 la valeur de l'intensité à l'instant initial; alors

$$I = I_0\,\mathrm{e}^{-t/CR}:$$

c'est une exponentielle décroissante bien connue (Fig. 5.9).

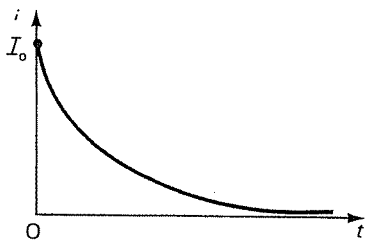


FIG 5.9

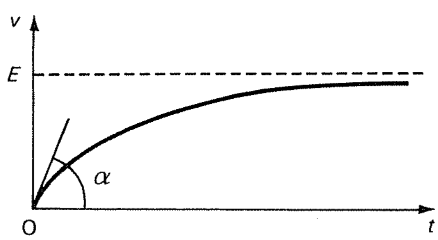


FIG. 5.10

Traçons maintenant la courbe de V en fonction du temps. L'exponentielle étant strictement monotone, il en est de même de V; donc V n'a ni maximum ni minimum. Lorsque $t=0$, $V=0$; lorsque t tend vers $+\infty$, V tend vers E. D'où le tableau de variation :

t	0		$+\infty$
V	0	$\nearrow$	E

Notons α l'angle de la tangente à l'origine avec l'axe Ox (Fig. 5.10) :

$$\operatorname{tg} \alpha = E/CR .$$

Le produit $CR = \theta$ s'appelle encore constante de temps du circuit; il régit cette fois la rapidité avec laquelle la capacité se charge. Ainsi,

$$\operatorname{tg} \alpha = E/\theta .$$

Au bout du temps $t = \theta$,

$$V = E(1-1/e) \approx \tfrac{2}{3}E.$$

Enfin, cherchons au bout de combien de temps la d.d.p. est le 99/100 de E (moment où la capacité est pratiquement chargée) :

$$\frac{99}{100}\,E = E(1-\mathrm{e}^{-t/CR}),$$

d'où

$$\mathrm{e}^{t/CR} = 100$$

et

$$t/CR = \ln 100 \approx 2{,}3 \log_{10} 100 = 4{,}6 .$$

Ainsi,

$$t = 4{,}6\; CR \approx 5\theta .$$

Remarque. En réalité, quand on calcule la constante de temps θ, on doit englober dans R la résistance interne de la source et la résistance des connexions.

Application numérique. Soient $E = 10\,000$ V, $R = 10^6\ \Omega$ et $C = 10\ \mu$F. Alors

$$I_0 = E/R = 10^4/10^6 = 10^{-2} ,$$

soit $I_0 = 10$ mA. De plus,

$$\theta = CR = 10^{-5} \times 10^6 = 10 \text{ s} .$$

Donc, au bout de 10 secondes, la d.d.p. sera $\frac{2}{3}\,10^4 \approx 6\,600$ volts, et au bout de 50 secondes (presque une minute!), elle sera de $\frac{99}{100}\,10^4$, soit 9 900 volts.

Calcul de l'effet Joule pendant la charge. Calculons la quantité de chaleur (exprimée en Joules) qui apparaît dans la résistance pendant toute la durée de la charge :

$$W = \int_0^{+\infty} RI^2 \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} RI_0^2\, \mathrm{e}^{-2t/CR}\,\mathrm{d}t .$$

Soit

$$W = [-\tfrac{1}{2}CR^2 I_0^2\, \mathrm{e}^{-2t/CR}]_0^{+\infty} = \frac{CR^2 I_0^2}{2} = \tfrac{1}{2}CE^2 .$$

Ainsi, résultat curieux, cette quantité de chaleur est égale à l'énergie électrostatique $\frac{1}{2}CE^2$ qui sera emmagasinée dans C. L'énergie de la source se divise donc en deux parties égales, l'une emmagasinée, l'autre dépensée en effet Joule. C'est pourquoi l'on dit que *le rendement d'un condensateur est égal à* 1/2.

5.14 Disparition du courant électrique dans une bobine d'inductance. Soit une bobine en série avec un générateur d'électricité, par exemple un accumulateur. Fermons l'interrupteur placé aux bornes de la bobine (Fig. 5.11). Le courant I_0 dans la bobine ne disparaît pas aussitôt : en effet, le flux magnétique Φ disparaissant, il y a production, dans la bobine, d'une force électromotrice d'induction e dont la valeur instantanée est donnée par la formule bien connue de l'électricité

$$e = -L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t\,,$$

et à ce moment le générateur n'agit plus.

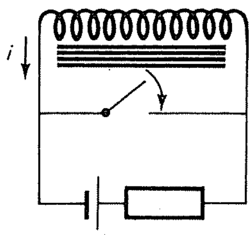


FIG. 5.11

Étudions donc la variation du courant i en fonction du temps t. Soient R la résistance de la bobine et L son inductance. Appliquons la loi d'Ohm :

$$i = e/R = -L\,\mathrm{d}i/R\,\mathrm{d}t$$

ou

$$\mathrm{d}i/i = -R/L\,\mathrm{d}t\,.$$

Intégrons :

$$i = k\,\mathrm{e}^{-Rt/L}.$$

Lorsque $t = 0$, $i = I_0$; donc $k = I_0$ et

$$i = I_0\,\mathrm{e}^{-Rt/L}.$$

C'est donc une exponentielle décroissante. Le graphe est le même que dans le cas de la décharge d'un condensateur à travers une résistance (Fig. 5.9). Le quotient L/R, jouant le même rôle que le produit CR dans le cas des condensateurs, s'appelle constante de temps de la bobine, et se note encore θ.

Application numérique. Supposons que

$$L = 100\ \mathrm{H} \qquad R = 100\ \Omega \qquad I_0 = 100\ \mathrm{mA}\,.$$

La constante de temps est

$$\theta = L/R = 100/100 = 1\ \mathrm{s}\,.$$

5.15 Établissement du courant dans une bobine d'inductance. Examinons maintenant la manière dont s'établit le courant lorsqu'on branche une bobine sur un générateur de courant continu. C'est encore un excellent exercice de mise en équation d'un problème électrique et de sa résolution par une équation différentielle.

Soient donc une bobine de résistance R et d'inductance L, et une source de f.é.m. E (Fig. 5.12).

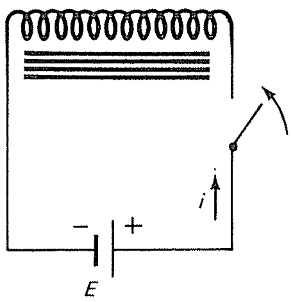


FIG. 5.12

Le courant i ne s'établit pas instantanément, et n'atteint sa valeur finale $I_0 = E/R$ que de manière asymptotique. En effet, dès qu'il apparaît un courant dans la bobine, il se crée un flux, et l'apparition de ce flux I produit une f.c.é.m. égale à $-L\, \mathrm{d}i/\mathrm{d}t$. Donc

$$E - L\, \mathrm{d}i/\mathrm{d}t = Ri\,.$$

Séparons les variables :

$$\frac{\mathrm{d}i}{E - Ri} = \frac{\mathrm{d}t}{L}.$$

Intégrons, en tenant compte du fait que l'intensité part de 0 :

$$\ln\left(1 - \frac{Ri}{E}\right) = -\frac{R}{L}\,t\,;$$

d'où

$$1 - \frac{Ri}{E} = \mathrm{e}^{-Rt/L}$$

et

$$i = \frac{E}{R}(1 - \mathrm{e}^{-Rt/L}) = I_0(1 - \mathrm{e}^{-Rt/L}).$$

La courbe représentative a donc la même forme que la courbe de l'exemple 5.13, définissant v en fonction du temps t (Fig. 5.10).

Le quotient $\theta = L/R$ s'appelle toujours constante de temps de la bobine.

Calculons maintenant l'énergie fournie par la source. La relation

$$E = Ri + L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$$

conduit à la suivante :

$$E\,\mathrm{d}q = \mathrm{d}W = Ei\,\mathrm{d}t = Ri^2\,\mathrm{d}t + Li\,\mathrm{d}i\,;$$

d'où

$$EQ = \int_0^{+\infty} Ri^2\,\mathrm{d}t + \int_0^{I_0} Li\,\mathrm{d}i\,.$$

Ainsi, l'énergie totale se divise en deux parties : d'une part, des calories dans la résistance et, d'autre part, une énergie $\frac{1}{2}LI_0^2$ qui sera emmagasinée sous forme potentielle dans le flux magnétique.

Donc, pour créer un flux magnétique, il faut dépenser l'énergie $\frac{1}{2}LI_0^2$; celle-ci sera d'ailleurs restituée sous forme de chaleur lorsqu'on coupera le courant : c'est le courant de rupture.

5.16 Transformation de l'énergie électrique en chaleur. *Quand de l'énergie électrique se transforme en chaleur, une partie de celle-ci élève la température du corps chauffé, et l'autre se dissipe dans l'air ambiant. Cherchons comment varie la température du corps chauffé, en fonction du temps.*

Notons :

W la puissance électrique (en watts);
m la masse du corps (en grammes);
θ l'élévation de température du corps par rapport à l'air ambiant;
t le temps (en secondes);
c la chaleur massique (égale à la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1 °C un gramme du corps);
S la surface totale de refroidissement, en contact avec l'air ambiant;
α le coefficient de rayonnement (égal à la quantité de chaleur rayonnée par 1 cm^2 en une seconde pour une élévation de température de 1 °C).

Appliquons le principe de conservation de l'énergie en écrivant que, pendant un temps Δt, l'énergie électrique a été utilisée en deux parties :

a) La première a servi à élever de $\Delta\theta$ les m grammes du corps, soit $mc\,\Delta\theta$;

b) La seconde a été rayonnée vers l'extérieur. Or, 1 cm^2 rayonne α calories par degré et par seconde; pour une élévation de θ °C, la quantité de calories rayonnées pendant le temps Δt sera $\alpha S\theta\,\Delta t$.

D'où

$$W\,\mathrm{d}t/4{,}18 = mc\,\mathrm{d}\theta + \alpha S\theta\,\mathrm{d}t\,,$$

ou encore

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha S}{mc}\,\theta = \frac{W}{4{,}18\,mc}\,.$$

Posons $B = \alpha S/mc$ et $D = W/4,18mc$; nous obtenons l'équation différentielle

$$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t + B\theta = D,$$

de la même forme que celles des deux exemples précédents. Séparons les variables :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{D - B\theta} = \mathrm{d}t.$$

Intégrons :

$$\ln \frac{D - B\theta}{C} = -Bt,$$

soit

$$D - B\theta = C\,\mathrm{e}^{-Bt},$$

ou encore

$$\theta = D/B + k\,\mathrm{e}^{-Bt} = \frac{W}{4{,}18\,\alpha S} + k\,\mathrm{e}^{-Bt}, \tag{1}$$

avec $k = -C/B$.

Nous allons déterminer la constante k par les conditions initiales ou finales, dans trois cas particuliers. En effet, on peut avoir à résoudre les trois problèmes suivants:

1. *Déterminer la température atteinte en régime continu.* Il suffit de chercher la limite de θ lorsque t tend vers $+\infty$; d'où

$$\theta = \frac{W}{4{,}18\,\alpha S}.$$

2. *Déterminer l'augmentation de température au bout d'un temps t sachant que, pour $t = 0$, le corps possède une température supérieure à la température ambiante θ_0.*

A l'instant initial,

$$\theta_0 = \frac{W}{4{,}18\,\alpha S} + k,$$

soit

$$k = \theta_0 - \frac{W}{4{,}18\,\alpha S}.$$

Portons dans la relation (1) :

$$\theta = \frac{W}{4{,}18\,\alpha S}(1 - \mathrm{e}^{-Bt}) + \theta_0\,\mathrm{e}^{-Bt}.$$

3. *Comment varie la température si on coupe le courant?*
Il suffit de remplacer W par 0; il vient alors

$$\theta = \theta_0 \, e^{-Bt}.$$

C'est donc une exponentielle décroissante, et la température décroît de la même façon que diminue le courant, ou la d.d.p., aux bornes d'un condensateur qui se décharge dans une résistance.

5.17 Formule fondamentale du courant alternatif. *On considère un circuit qui est le siège d'une* f.é.m. *E due à une variation de flux, et comprenant en série une résistance R et une bobine dont l'inductance propre est L. On cherche la relation entre le courant, la* f.é.m. *et les constantes du circuit.*

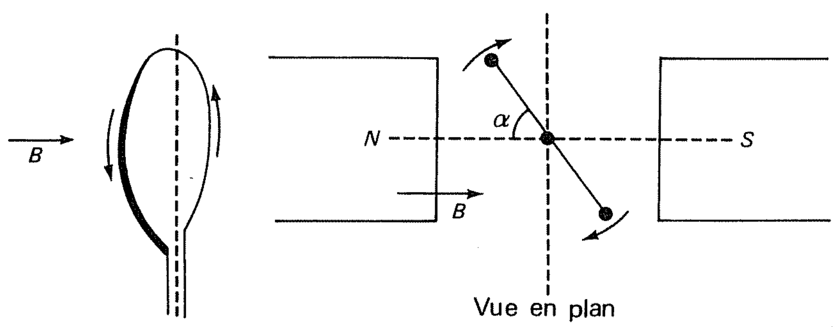


FIG. 5.13

Mise en équation.

Soit donc un cadre, comportant n spires, d'aire S, tournant dans un champ magnétique d'induction B et fermé sur un circuit extérieur (Fig. 5.13). Ce cadre tourne régulièrement en décrivant des angles α proportionnels au temps t :

$$\alpha = \omega t,$$

où ω est la vitesse angulaire (c'est-à-dire l'angle parcouru pendant une unité de temps).

Nous savons que la f.é.m. induite dans le cadre est l'opposé de la dérivée par rapport au temps du flux Φ capté par ce cadre :

$$E = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t.$$

Le courant instantané est $i = E/R$.

Or, le flux capté se décompose en deux :

a) le flux provenant du pôle Nord

$$\Phi_1 = nBs \sin \omega t,$$

qui crée une f.é.m. $E_1 = -\,\mathrm{d}\Phi_1/\mathrm{d}t$;

b) le flux engendré par le cadre qui est parcouru par le courant i, et qui est égal à

$$\Phi_2 = Li,$$

qui crée une f.é.m. $E_2 = -\,\mathrm{d}\Phi_2/\mathrm{d}t$.

Ainsi,

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = nBS \sin \omega t + Li \,;$$

d'où

$$\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t = nBS\, \omega \cos \omega t + L\, \mathrm{d}i/\mathrm{d}t \,.$$

La f.é.m. induite est donc

$$E = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t = -nBS\, \omega \cos \omega t - L\, \mathrm{d}i/\mathrm{d}t \,,$$

ce qui donne un courant

$$i = \frac{E}{R} = -\frac{nBS}{R} \omega \cos \omega t - \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t},$$

soit encore

$$L\, \mathrm{d}i/\mathrm{d}t + Ri = -nBS\, \omega \cos \omega t \,.$$

Or, Ri représente des volts, ainsi que $L\, \mathrm{d}i/\mathrm{d}t$; donc $nBS\, \omega$ représente également des volts, c'est la f.é.m. maximale E_0 ; en reculant l'origine des temps de $\pi/2\omega$, on obtient l'équation différentielle fondamentale

$$\boxed{L\, \mathrm{d}i/\mathrm{d}t + Ri = E_0 \sin \omega t}$$

qui donnera après résolution i en fonction du temps.

Résolution

Nous reconnaissons une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants et à second membre variable.

Employons la méthode de variation des constantes, en résolvant d'abord l'équation sans second membre :

$$L\, \mathrm{d}i/\mathrm{d}t + Ri = 0 \,.$$

Séparons les variables :

$$\frac{\mathrm{d}i}{i} = -\frac{R}{L}\, \mathrm{d}t \,.$$

Intégrons :

$$\ln \frac{i}{C} = -\frac{R}{L}\, t \,,$$

soit

$$i = C \exp\left(-\frac{R}{L}\, t\right).$$

Considérons maintenant C comme une fonction de t, et dérivons ce produit :

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) + C\left(-\frac{R}{L}\right) \exp\left(-\frac{R}{L}t\right).$$

Reportons cette expression dans l'équation avec second membre :

$$L\left[\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) - C\frac{R}{L} \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right] + RC \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) = E_0 \sin\omega t.$$

Les deuxième et troisième termes se détruisent, comme il se doit, et il reste :

$$L\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) = E_0 \sin\omega t.$$

C'est une équation différentielle dont on peut séparer les variables :

$$\mathrm{d}C = \frac{E_0}{L} \exp\left(\frac{R}{L}t\right) \sin\omega t \,\mathrm{d}t\,;$$

d'où

$$C = \frac{E_0}{L}\int \exp\left(\frac{R}{L}t\right) \sin\omega t \,\mathrm{d}t.$$

Nous avons déjà calculé cette primitive au tome 3; rappelons qu'il suffit de considérer $\sin \omega t$ comme la partie imaginaire de $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$. Ainsi,

$$C = \frac{E_0}{L}\,\mathrm{Im}(\textstyle\int \mathrm{e}^{(R/L+\mathrm{j}\omega)t}\,\mathrm{d}t),$$

ce qui donne

$$C = \frac{E_0}{L}\,\mathrm{Im}\left(\frac{1}{R/L+\mathrm{j}\omega}\,\mathrm{e}^{(R/L+\mathrm{j}\omega)t}\right) + k.$$

Or,

$$\mathrm{e}^{(R/L+\mathrm{j}\omega)t} = \mathrm{e}^{R/L\,t}\,(\cos\omega t + \mathrm{j}\sin\omega t).$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire, on obtient enfin :

$$C = \frac{E_0}{R^2+L^2\omega^2} \exp\left(\frac{R}{L}t\right)(R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t) + k.$$

Reportons cette valeur dans l'expression de i :

$$i = C\exp\left(-\frac{R}{L}t\right) = \frac{E_0}{R^2+L^2\omega^2}(R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t) + k\exp\left(-\frac{R}{L}t\right).$$

Interprétation

Le terme $k \exp(-(R/L)\,t)$ est un terme transitoire qui est pratiquement négligeable au bout de quelques périodes, et il ne reste que

$$i = \frac{E_0}{R^2+L^2\omega^2}(R \sin \omega t - L\omega \cos \omega t).$$

Ce courant est donc la somme de deux courants, à savoir

$$\begin{cases} i_1 = \dfrac{E_0 R}{R^2+L^2\omega^2} \sin \omega t & \text{en phase avec } E_1 \\[2ex] i_2 = -\dfrac{E_0 L\omega}{R^2+L^2\omega^2} \cos \omega t = \dfrac{E_0 L\omega}{R^2+L^2\omega^2} \sin\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right) & \text{en quadrature arrière sur } E_1. \end{cases}$$

C'est ce qu'exprime la figure 5.14, où les vecteurs représentent les valeurs maximales $\dfrac{E_0 R}{R^2+L^2\omega^2}$ et $\dfrac{E_0 L\omega}{R^2+L^2\omega^2}$.

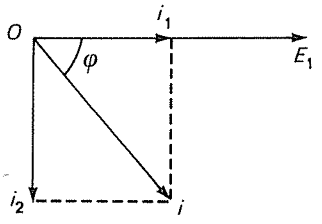


FIG. 5.14

Le courant i_1 est dit *watté*; il produit la puissance et l'effet Joule. Le courant i_2 est dit *déwatté*; il produit le flux magnétique et l'inductance.

Le courant résultant est la somme géométrique de ces deux courants :

$$i = \sqrt{i_1^2+i_2^2} = \sqrt{\frac{E_0^2(R^2+L^2\omega^2)}{(R^2+L^2\omega^2)^2}},$$

$$\boxed{i = \frac{E_0}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} = \frac{E_0}{Z}},$$

où Z est l'impédance du circuit; il est décalé en arrière sur E_1 d'un angle φ tel que

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi = i_2/i_1 = L\omega/R}.$$

On remarque que les composantes i_1 et i_2 du courant i sont des courants sinusoïdaux dont la pulsation est ω, c'est-à-dire égale à la vitesse angulaire du cadre. Donc

$$\omega = 2\pi/T \qquad \text{et} \qquad T = 2\pi/\omega = 1/f\,.$$

Tous ces résultats sont fort intéressants, étant donné le point de départ : un cadre tournant régulièrement dans un champ magnétique, *sans aucune autre hypothèse sur la nature du courant*.

Cette étude est un bel exemple d'application des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants et à second membre variable.

CHAPITRE 6

APPLICATIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE AUX CIRCUITS ÉLECTRIQUES

Nous abordons maintenant l'étude de problèmes plus généraux dans l'étude des circuits électriques en régime quelconque.

6.1 Problème I. *On considère le circuit linéaire de la figure* 6.1, *attaqué par une perturbation u fonction donnée du temps t.*

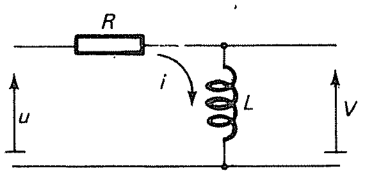


FIG. 6.1

a) *Chercher les réponses en courant et en tension.*

b) *Expliciter les calculs lorsque* $u(t) = \alpha t$, *où* α *est un nombre réel. Construire les graphes de* v *et de* $v_R = v - u$. *Calculer l'énergie dissipée dans la résistance.*

c) *Déterminer la tension de sortie lorsque* $u(t) = U \sin \omega t$.

a) La loi des mailles donne

$$u = Ri + Li'.$$

Posons $\theta = L/R$. L'équation différentielle devient

$$i' + \frac{i}{\theta} = \frac{u}{L}.$$

Nous reconnaissons une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre variable.

La solution générale sans second membre est

$$i = C\,\mathrm{e}^{-t/\theta}.$$

En faisant varier la constante, nous obtenons

$$i(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t/\theta}}{L}\left(\int_0^t u(x)\,\mathrm{e}^{x/\theta}\,\mathrm{d}x + k\right).$$

Pour obtenir la tension de sortie v, il suffit d'écrire que la tension aux bornes d'une inductance est $L\ \mathrm{d}i/\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\begin{aligned} v(t) &= u(t) - \frac{L}{\theta}\, i(t) = u(t) - Ri(t) \\ &= u(t) - \frac{1}{\theta}\, \mathrm{e}^{-t/\theta} \left(\int_0^t u(x)\, \mathrm{e}^{x/\theta}\, \mathrm{d}x + k \right). \end{aligned}$$

Une intégration par parties montre que

$$v(t) = \mathrm{e}^{-t/\theta} \left(\int_0^t u'(x)\, \mathrm{e}^{x/\theta}\, \mathrm{d}x + k' \right), \qquad \text{où} \qquad k' = u(0) - k/\theta .$$

b) Lorsque $u(t) = \alpha t$, il est possible de calculer les intégrales précédentes. Il vient

$$i(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t/\theta}}{L} \left(\int_0^t \alpha x\, \mathrm{e}^{x/\theta}\, \mathrm{d}x + k \right).$$

Or,

$$\int \alpha x\, \mathrm{e}^{x/\theta}\, \mathrm{d}x = \alpha\theta(x-\theta)\, \mathrm{e}^{x/\theta} .$$

La constante d'intégration est déterminée par le fait que $i(0) = 0$. On trouve ainsi

$$i = \frac{\alpha}{R}\, (\theta\, \mathrm{e}^{-t/\theta} + t - \theta) .$$

Par dérivation, on obtient

$$v = \alpha\theta(1 - \mathrm{e}^{-t/\theta}) .$$

Le graphe de la fonction v s'obtient sans difficulté à partir de celui d'une exponentielle décroissante (Fig. 6.2). On comparera cette étude à celle de la charge d'un condensateur à travers une résistance (n° 5.13).

La fonction v_R est définie par

$$v_R = \alpha t - \alpha\theta(1 - \mathrm{e}^{-t/\theta}) .$$

La dérivée est

$$v_R' = \alpha(1 - \mathrm{e}^{-t/\theta}) ;$$

elle est positive, et elle s'annule uniquement lorsque $t = 0$. La fonction v_R est donc croissante. Le graphe admet la droite d'équation $v = \alpha(t - \theta)$ pour asymptote (Fig. 6.2).

L'énergie dissipée est

$$W = \int_0^\theta Ri^2\, \mathrm{d}t = R \int_0^\theta \frac{\alpha^2}{R^2}\, (\theta\, \mathrm{e}^{-t/\theta} + t - \theta)^2\, \mathrm{d}t .$$

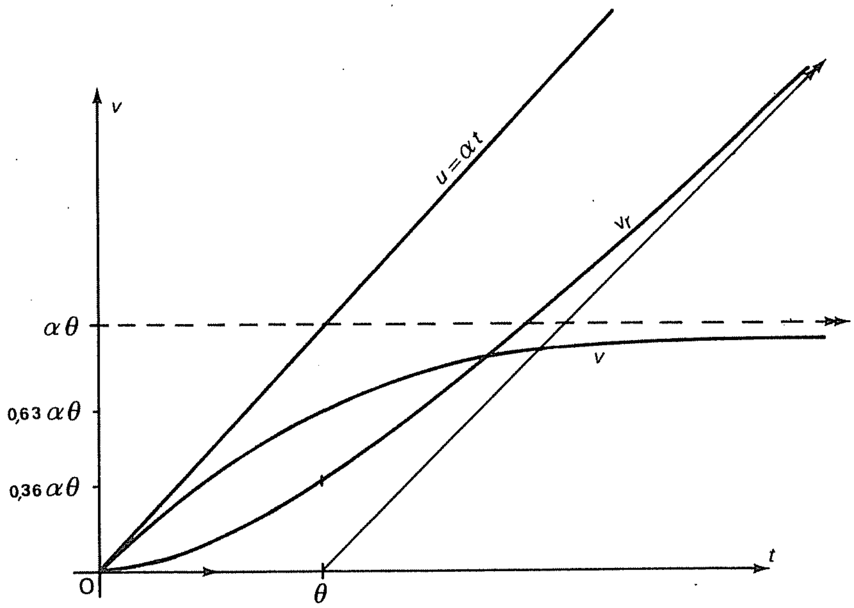


FIG. 6.2

Un calcul élémentaire, mais assez long, conduit à

$$W = \frac{\alpha^2\theta^3}{R}\left(\frac{5}{6} - \frac{2}{\mathrm{e}} - \frac{1}{2\mathrm{e}^2}\right) \approx 0{,}03\,\frac{\alpha^2\theta^3}{R}.$$

c) Lorsque $u(t) = U \sin \omega t$,

$$v = U\,\mathrm{e}^{-t/\theta}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{x/\theta}\cos\omega x\,\mathrm{d}x + k\right).$$

Le calcul a été effectué au tome 3; on trouve

$$v = U\omega\theta\,\mathrm{e}^{-t/\theta}\,[\mathrm{e}^{t/\theta}(\omega\theta\sin\omega t + \cos\omega t) - 1 + k/\theta]\,.$$

En régime permanent, le terme d'amortissement peut être négligé, et il reste

$$v = U\omega\theta(\omega\theta\sin\omega t + \cos\omega t)\,.$$

Le signal de sortie est donc de la forme

$$v = V\sin(\omega t + \varphi), \qquad \text{où} \quad V = \frac{U\omega\theta}{\sqrt{1+\omega^2\theta^2}} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\omega\theta}.$$

Ainsi, la tension de sortie est atténuée (car la cellule est passive), et déphasée.

Nous pouvons retrouver ce résultat très rapidement en écrivant que

$$v = u\,\frac{\mathrm{j}L\omega}{R+\mathrm{j}L\omega} = u\,\frac{\mathrm{j}\omega\theta}{1+\mathrm{j}\omega\theta}.$$

6.2 Problème II. *On considère le circuit de la figure* 6.3, *attaqué par une perturbation u.*

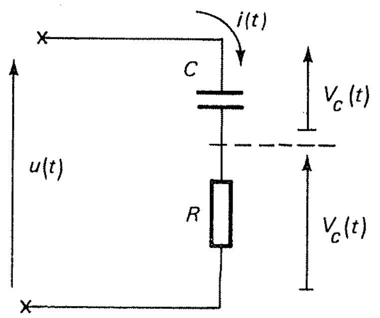


FIG. 6.3

a) *Chercher les réponses en courant i et en tension v_R et v_C.*
b) *Expliciter le cas où $u(t) = \alpha t$.*
c) *Comparer les résultats avec ceux du n° 6.1.*

a) Les lois de l'électricité montrent que

$$u = \frac{1}{C}\int_0^t i(x)\,\mathrm{d}x + Ri \tag{1}$$

$$i = Cv_C' = \frac{v_R}{R}. \tag{2}$$

En dérivant la relation (1), nous obtenons l'équation différentielle

$$Ri' + \frac{i}{C} = u'.$$

On en déduit comme au n° 6.1

$$i = \frac{\mathrm{e}^{-t/\theta}}{R}\left(\int_0^t u'(x)\,\mathrm{e}^{x/\theta}\,\mathrm{d}x + k\right).$$

La relation (2) donne alors

$$v_R = \mathrm{e}^{-t/\theta}\left(\int_0^t u'(x)\,\mathrm{e}^{x/\theta}\,\mathrm{d}x + k\right).$$

Enfin,

$$\begin{aligned} v_C &= u - v_R = u - \mathrm{e}^{-t/\theta}\left(\int_0^t u'(x)\,\mathrm{e}^{x/\theta}\,\mathrm{d}x + k\right) \\ &= \frac{1}{\theta}\,\mathrm{e}^{-t/\theta}\left(\int_0^t u(x)\,\mathrm{e}^{x/\theta}\,\mathrm{d}x + k'\right), \qquad \text{où} \qquad k' = \theta[u(0)-k]. \end{aligned}$$

b) Lorsque $u = \alpha t$, la relation $i(0) = 0$ montre que $k = \theta$. On obtient alors

$$i = \frac{\alpha\theta}{R}\,(1-\mathrm{e}^{-t/\theta})$$

$$v_R = \alpha\theta\,(1-\mathrm{e}^{-t/\theta}).$$

Enfin,

$$v_C = \alpha t - \alpha\theta(1-\mathrm{e}^{-t/\theta}).$$

Nous retrouvons bien les mêmes allures de courbes que dans le problème précédent (Fig. 6.4).

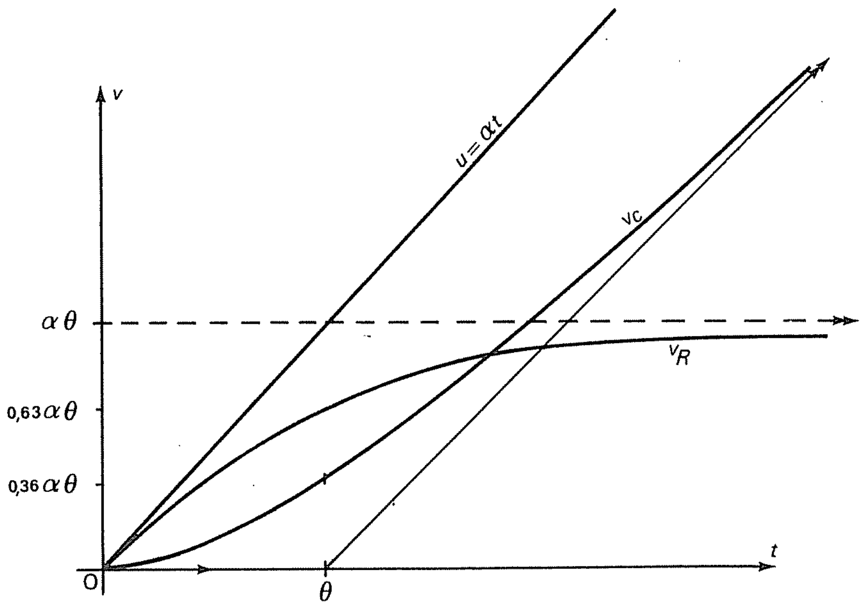


FIG. 6.4

Ces courbes sont toutefois inversées, en ce sens que l'allure de v_R du problème précédent est identique à celle de v_C de notre problème, tandis que v_L prend la forme de v_C. Ceci est légitime, étant donnée la correspondance duale entre les réponses des éléments L et C. Cette propriété est souvent exprimée sous la forme : une inductance répond en courant comme une capacité répond en tension.

c) La comparaison entre les résultats de ce problème et ceux du problème précédent s'explique par les équivalences des circuits de la figure 6.5.

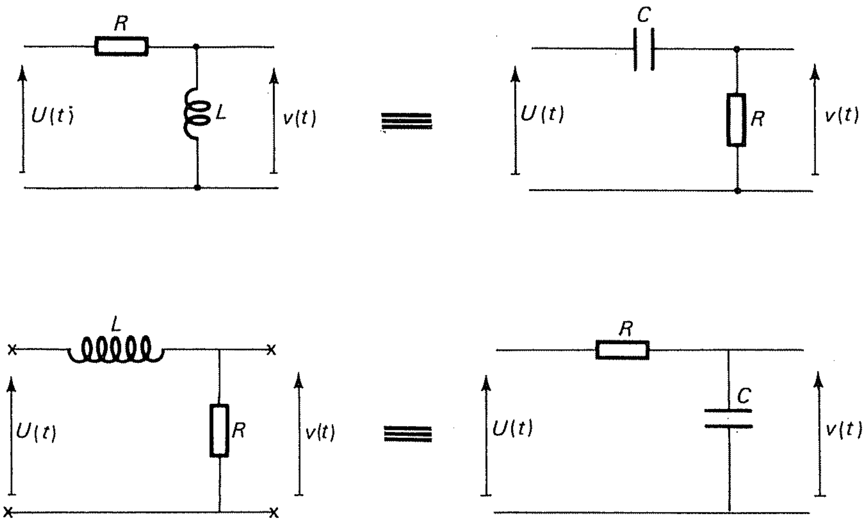


FIG. 6.5

6.3 Problème III. *On considère le circuit de la figure* 6.6.

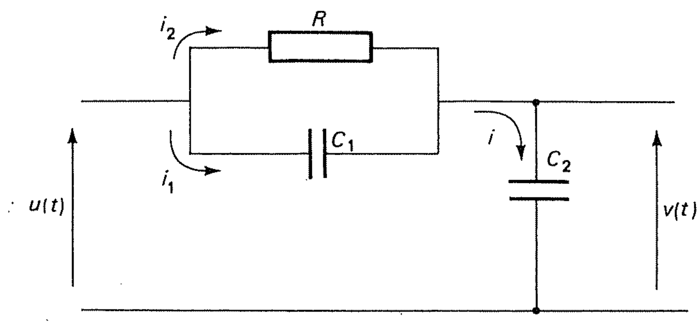


FIG. 6.6

a) *Déterminer la tension de sortie en fonction de la perturbation u.*
b) *Expliciter les calculs lorsque* $C_1 = C_2 = C$ *et que u est un échelon de tension*

$$u(t) = E \qquad si \qquad t \geqslant 0 \,.$$

Tracer les graphes de v, v_1, i_1, i_2 *et* i. *Calculer les énergies emmagasinées dans* C_1 *et dans* C_2, *et l'énergie dissipée dans la résistance.*

a) Soient v et v_1 les tensions aux bornes de C_2 et de C_1. Alors

$$u = v_1 + v\,.$$

Par suite,

$$i_2 = \frac{v_1}{R} = \frac{u-v}{R} \qquad \text{et} \qquad i_1 = C_1\,\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = C_1\,\frac{\mathrm{d}(u-v)}{\mathrm{d}t}.$$

Puisque $i_1 + i_2 = i$,

$$i = C_1(u'-v') + \frac{u-v}{R}.$$

Comme $i = C_2\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$, il vient

$$C_2 v' = C_1(u'-v') + \frac{u-v}{R}.$$

Séparons les fonctions connues et les fonctions inconnues :

$$v'(RC_2 + RC_1) + v = RC_1 u' + u\,.$$

Posons $\theta_1 = RC_1$ et $\theta_2 = RC_2$; alors

$$(\theta_1+\theta_2)\,v' + v = \theta_1 u' + u\,.$$

La solution générale sans second membre est de la forme

$$v = \lambda\,\mathrm{e}^{-\alpha t}, \qquad \text{où} \qquad \alpha = \frac{1}{\theta_1+\theta_2}.$$

En faisant varier la constante, nous obtenons

$$\lambda' = \alpha\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,\varphi(t)\,, \qquad \text{où} \qquad \varphi = \theta_1\,u' + u\,.$$

Finalement,

$$v(t) = \alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\int_0^t \varphi(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x + k\right).$$

b) Lorsque $C_1 = C_2$, nous obtenons $\alpha = 1/2\theta$. Puisque u est constant, $u' = 0$ et

$$v = E\,\frac{\mathrm{e}^{-t/2\theta}}{2\theta}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{x/2\theta}\,\mathrm{d}x + k\right).$$

Or, à l'instant initial, le circuit se comporte comme un diviseur capacitif; comme $C_1 = C_2$, $v(0) = E/2$. Donc $k = \theta$ et

$$v(t) = \frac{E}{2}\,(2-\mathrm{e}^{-t/2\theta})\,.$$

La dérivée de v,

$$v'(t) = \frac{E}{4\theta}\, \mathrm{e}^{-t/2\theta},$$

est toujours positive. La fonction v est donc croissante.

La droite $v = E$ est asymptote à la courbe. La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation

$$y = \frac{E}{4\theta}\, t + \frac{E}{2}.$$

En outre,

$$v(\theta) = \frac{E}{2}\,(2 - \mathrm{e}^{-1/2}) \approx 0{,}696\, E.$$

Puisque $v_1 = u - v$, nous obtenons

$$v_1 = \frac{E}{2}\, \mathrm{e}^{-t/2\theta}.$$

Les graphes de v et de v_1 sont représentés figure 6.7.

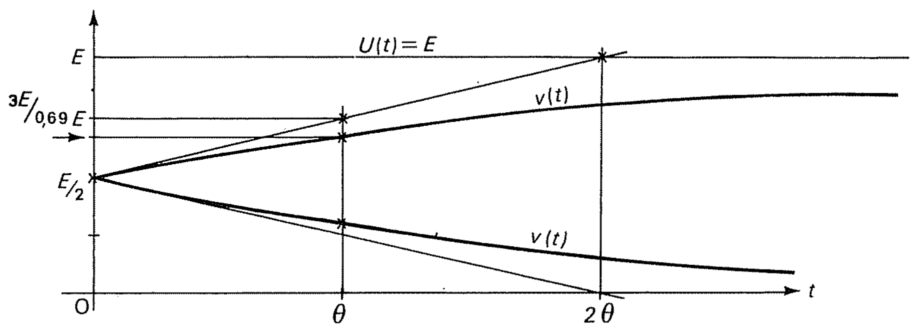


FIG. 6.7

L'intensité i_1 est donnée par

$$i_1 = Cv_1' = C\,\frac{E}{2}\left(-\frac{1}{2\theta}\, \mathrm{e}^{-t/2\theta}\right) = -\frac{E}{4R}\, \mathrm{e}^{-t/2\theta}.$$

De même,

$$i_2 = \frac{v_1}{R} = \frac{E}{2R}\, \mathrm{e}^{-t/2\theta},$$

et enfin

$$i = i_1 + i_2 = \frac{E}{4R}\,\mathrm{e}^{-t/2\theta}.$$

D'où les graphes de la figure 6.8.

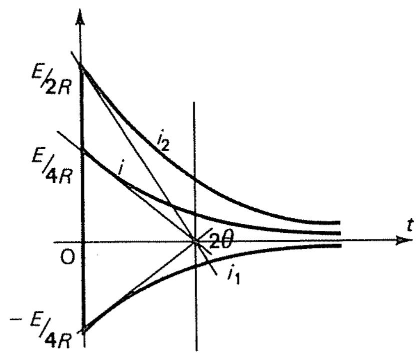


FIG. 6.8

L'énergie dans C_1 au bout d'un temps infini est

$$W_1 = \int_0^{+\infty} v_1\, i_1\, \mathrm{d}t = -\frac{E^2}{8R}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t/\theta}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{E^2}{8R}\theta\,\mathrm{e}^{-t/\theta}\right]_0^{+\infty} = -\frac{CE^2}{8}.$$

Le signe $-$ montre qu'il y a disparition d'énergie dans C_1.

De même, l'énergie dans C_2 est

$$W_2 = \int_0^{+\infty} vi\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{E}{2}\,(2-\mathrm{e}^{-t/2\theta})\,\frac{E}{4R}\,\mathrm{e}^{-t/2\theta}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{E^2}{8R}\,[-4\theta\,\mathrm{e}^{-t/2\theta} + \theta\,\mathrm{e}^{-t/\theta}]_0^{+\infty} = \tfrac{3}{8}CE^2.$$

Enfin, l'énergie dissipée dans R est

$$W_R = R\int_0^{+\infty} i_2^2\,\mathrm{d}t = R\int_0^{+\infty} \frac{E^2}{4R^2}\,\mathrm{e}^{-t/\theta}\,\mathrm{d}t = -\frac{E^2\theta}{4R}\,[\mathrm{e}^{-t/\theta}]_0^{+\infty} = \frac{CE^2}{4}.$$

6.4 Problème IV. *On considère le circuit passif linéaire de la figure* 6.9, *dans lequel on admet qu'il n'existe pas de couplage magnétique entre les deux inductances.*

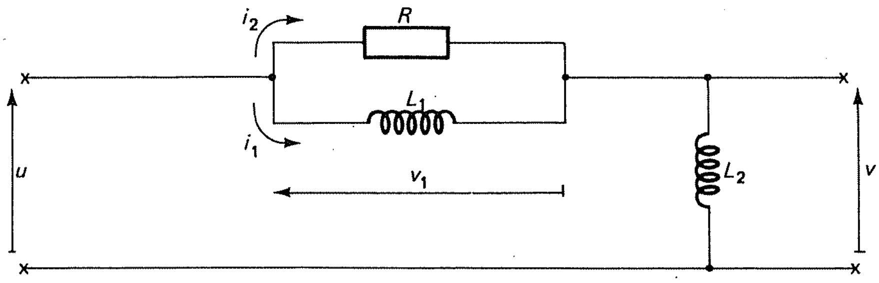


FIG. 6.9

a) *Déterminer la tension de sortie en fonction de la perturbation u.*
b) *Expliciter les calculs dans les cas suivants :*
1) *échelon d'amplitude E;*
2) $u = -E\,e^{-\alpha t}$ *si* $t \geqslant 0$;
3) $u = U \cos \omega t$ *avec* $L_1 = L_2$ (*régime sinusoïdal établi*).

Dans les deux premiers cas, tracer le graphe de v.

a) Un raisonnement calqué sur celui du n° 6.3 montre que

$$\left(\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}\right) v + v' = \frac{1}{\theta_1}\, u + u', \qquad \text{où} \qquad \theta_1 = L_1/R \quad \text{et} \quad \theta_2 = L_2/R\,.$$

Posons $\alpha = 1/\theta_1 + 1/\theta_2$; nous obtenons

$$v(t) = e^{-\alpha t}\left[\int_0^t \left(\frac{u(x)}{\theta_1} + u'(x)\right) e^{\alpha x}\, dx + k\right].$$

b) 1) Si $u(t) = E$, alors $u' = 0$. De plus, $v(0) = E$. Donc

$$v(t) = \frac{E}{\alpha\theta_1}\,[1 + e^{-\alpha t}(\alpha\theta_1 - 1)]\,.$$

Cette fonction est strictement décroissante, car $\alpha\theta_1 - 1 > 0$. Le graphe admet pour asymptote horizontale la droite d'ordonnée $E/\alpha\theta_1$ (Fig. 6.10). La tangente au point d'abscisse nulle a pour équation

$$y = -E\left(\alpha - \frac{1}{\theta_1}\right) t + E\,.$$

2) Si $u = -E\,e^{-\alpha t}$, alors $u' = \alpha E\,e^{-\alpha t}$. De plus, $v(0) = -E$. Donc

$$v(t) = E\,e^{-\alpha t}\left[\left(\alpha - \frac{1}{\theta_1}\right) t - 1\right].$$

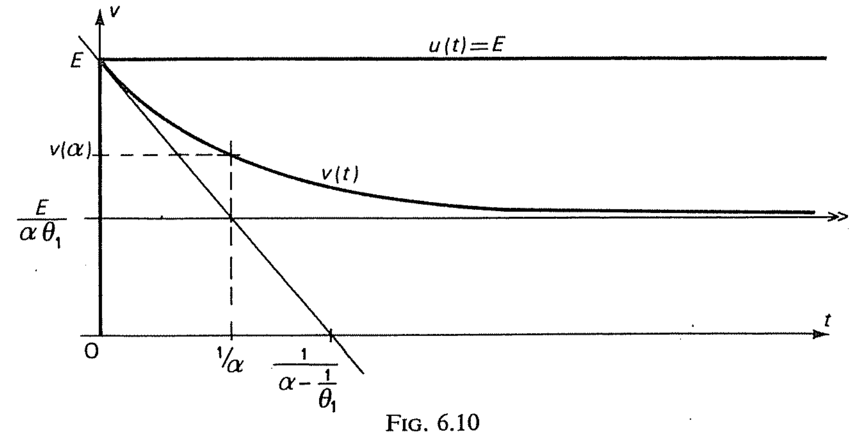


FIG. 6.10

La dérivée est donnée par

$$v'(t) = \frac{E}{\theta_1}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}[2\alpha\theta_1 - 1 + (1-\alpha\theta_1)\,\alpha t]\,.$$

Cette dérivée s'annule lorsque

$$2\alpha\theta_1 - 1 + (1-\alpha\theta_1)\,\alpha t = 0\,,$$

soit lorsque

$$t = t_2 = \frac{1-2\alpha\theta_1}{\alpha(1-\alpha\theta_1)}\,.$$

La fonction passe alors par un maximum.

La dérivée seconde,

$$v''(t) = \frac{E\alpha}{\theta_1}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}[2-3\alpha\theta_1 - \alpha t(1-\alpha\theta_1)]\,,$$

s'annule pour

$$t = t_3 = \frac{2-3\alpha\theta_1}{\alpha(1-\alpha\theta_1)}\,,$$

abscisse d'un point d'inflexion.

Enfin, le maximum est

$$v(t_2) = \frac{E}{\alpha\theta_1}\,\mathrm{e}^{-\alpha t_2}(\alpha\theta_1 - 1) > 0\,.$$

Il existe donc une valeur t_1 de t strictement inférieure à t_2 annulant v :

$$t_1 = \frac{\theta_1}{\alpha\theta_1 - 1}.$$

La tangente au point d'abscisse nulle a pour équation

$$y = \frac{E}{\theta_1}(2\alpha\theta_1 - 1)\, t - E\,;$$

elle rencontre l'axe des abscisses au point d'abscisse

$$t_0 = \frac{\theta_1}{2\alpha\theta_1 - 1}.$$

D'où l'allure du graphe (Fig. 6.11).

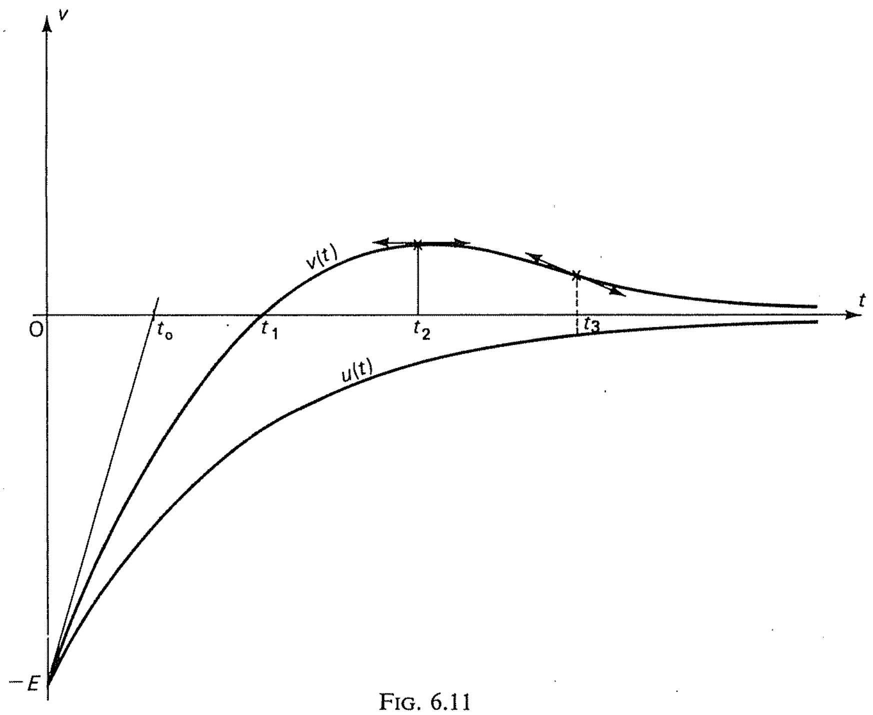


FIG. 6.11

Lorsque $L_1 = L_2$, les valeurs se simplifient. En effet, si l'on pose $\theta = \theta_1 = \theta_2$, on obtient

$$t_0 = \theta/3 \qquad t_1 = \theta \qquad t_2 = 3\theta/2 \qquad v(t_2) = \frac{E}{2}\,e^{-3} \qquad t_3 = 2\theta\,.$$

3) On peut obtenir la valeur de v en cherchant l'impédance complexe du circuit :

$$Z = \mathrm{j}\,\frac{RL}{1+\mathrm{j}L}.$$

Utilisons encore l'équation différentielle; il vient

$$v = \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\frac{U}{\theta}\int_0^t \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\omega x\,\mathrm{d}x - \omega U\int_0^t \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\omega x\,\mathrm{d}x + k\right).$$

Rappelons que les primitives intervenant dans ce calcul ont été déterminées une fois pour toutes. Négligeons encore les constantes d'intégration, correspondant à des régimes transitoires. Il reste

$$v = \frac{U}{\theta}\,\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}\,(\alpha\cos\omega t + \omega\sin\omega t) - \frac{U}{\alpha^2+\omega^2}\,(\alpha\sin\omega t - \omega\cos\omega t).$$

6.5 Problème V. *On considère le quadripôle linéaire passif de la figure* 6.12.

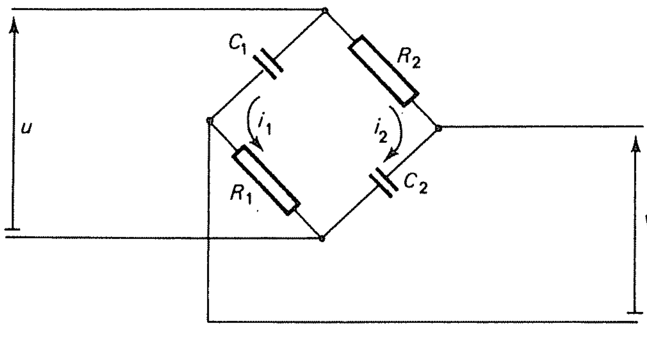


FIG. 6.12

a) *Déterminer i_1, i_2 et v en fonction de la perturbation d'entrée u.*

b) *Lorsque u est un échelon E, calculer la tension v et construire son graphe.*

a) Les lois de l'électricité nous permettent d'écrire

$$C_1 u' = \theta_1 i_1' + i_1, \quad \text{où} \quad \theta_1 = C_1 R_1$$

$$C_2 u' = \theta_2 i_2' + i_2, \quad \text{où} \quad \theta_2 = C_2 R_2.$$

On trouve aisément

$$i_1(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t/\theta_1}}{R_1}\left(\int_0^t u'(x)\,\mathrm{e}^{x/\theta_1}\,\mathrm{d}x + k_1\right).$$

De même,

$$i_2(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t/\theta_2}}{R_2}\left(\int_0^t u'(x)\,\mathrm{e}^{x/\theta_2}\,\mathrm{d}x + k_2\right).$$

Enfin,

$$v = v_{C_1} - v_{R_2} = u - v_{R_1} - v_{R_2} = u - R_1 i_1 - R_2 i_2 .$$

b) Dans le cas d'un échelon,

$$i_1(t) = \frac{k_1}{R_1} e^{-t/\theta_1} \qquad i_2(t) = \frac{k_2}{R_2} e^{-t/\theta_2} .$$

Or, à l'instant initial, le circuit est équivalent à celui de la figure 6.13. La tension de sortie est alors $v(0) = -E$. Les courants ont pour valeurs $i_1(0) = E/R_1$ et $_2(0) = E/R_2$.

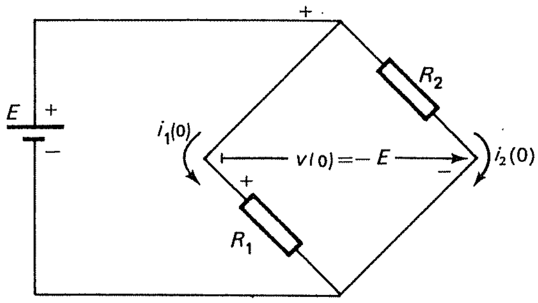


FIG. 6.13

Donc $k_1 = k_2 = E$ et

$$i_1(t) = \frac{E}{R_1} e^{-t/\theta_1} \qquad i_2(t) = \frac{E}{R_2} e^{-t/\theta_2} .$$

(Ces résultats étaient prévisibles, puisqu'il s'agit de la charge de deux capacités à travers deux résistances, branchées aux bornes de la même source E.)

La tension de sortie est alors

$$v(t) = E(1 - e^{-t/\theta_1} - e^{-t/\theta_2}).$$

Cette fonction est évidemment croissante; le graphe admet pour asymptote la droite d'ordonnée E (Fig. 6.14).

La tangente au point d'abscisse nulle a pour équation

$$y = E[(1/\theta_1 + 1/\theta_2)\, t - 1] .$$

6.6 Problème VI. *On considère le circuit linéaire de la figure* 6.15.

a) *Déterminer la réponse en tension à une perturbation u.*

b) *Expliciter le cas où u est un échelon E. Calculer l'énergie W_L dans l'inductance et construire les graphes de v et de W_L.*

c) *Dans le cas particulier où $r = \rho = R$ et où le signal d'entrée est une rampe d'équation $u = \alpha t$, calculer v, v_L, et v_ϱ.*

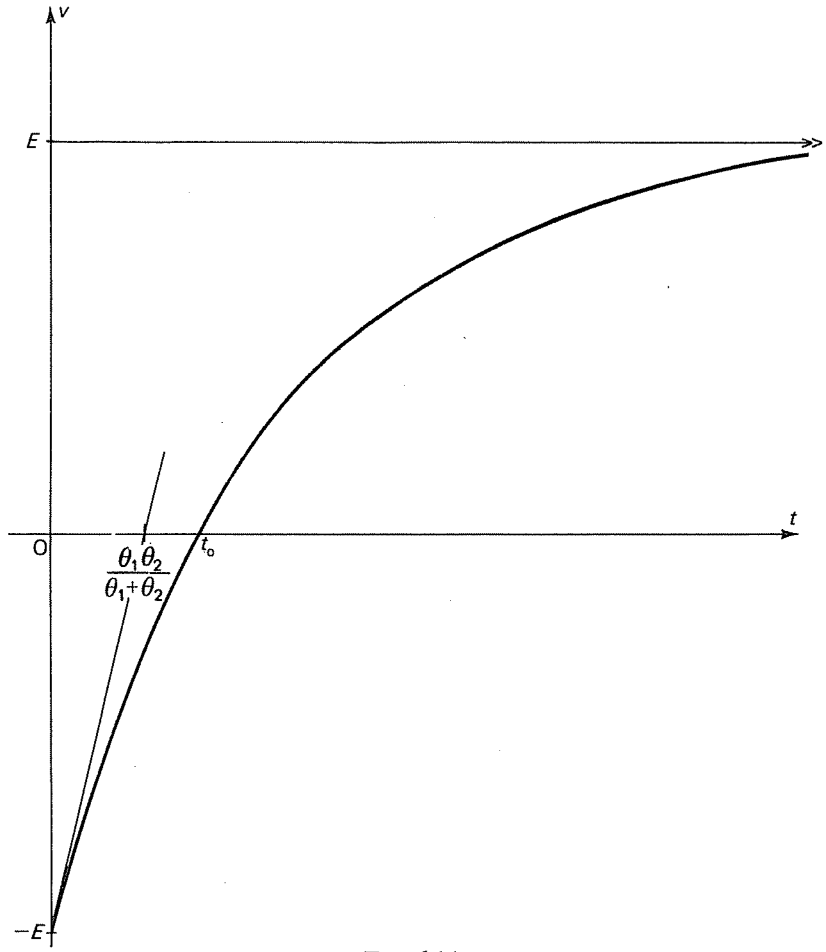


FIG. 6.14

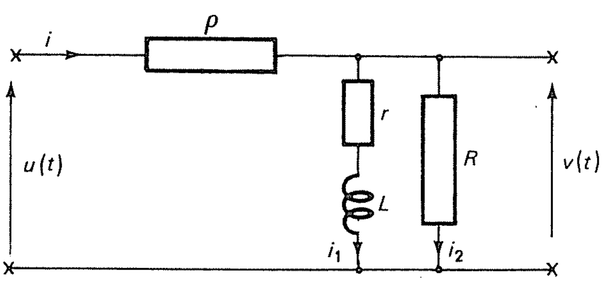


FIG. 6.15

a) Les lois de l'électricité fournissent les relations suivantes :

$$i = i_1 + i_2 \qquad u = u_\rho + v\,.$$

D'où

$$i = \frac{u-v}{\rho} \qquad i_2 = v/R$$

et

$$i_1 = i - i_2 = \frac{u-v}{\rho} - \frac{v}{R} = \frac{u}{\rho} - v\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{R}\right).$$

D'autre part, la considération de la branche contenant r et L conduit à la relation

$$v = ri_1 + L\,\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t\,.$$

En éliminant i_1 entre les deux dernières relations, nous obtenons

$$v = r\left[\frac{u}{\rho} - v\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{R}\right)\right] + L\left[\frac{u'}{\rho} - v'\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{R}\right)\right],$$

soit

$$\left(\frac{L}{\rho} + \frac{L}{R}\right)v' + \left(1 + \frac{r}{\rho} + \frac{r}{R}\right)v = \frac{L}{\rho}\,u' + \frac{r}{\rho}\,u\,.$$

En posant

$$\theta = L(1/\rho + 1/R) \qquad \text{et} \qquad a = 1 + r/\rho + r/R\,,$$

nous obtenons l'équation différentielle

$$\theta v' + av = \frac{L}{\rho}\,u' + \frac{r}{\rho}\,u\,. \tag{1}$$

Posons aussi $\beta = a/\theta$. La solution sans second membre est

$$v = \mathrm{e}^{-\beta t}$$

Faisons varier la constante :

$$v(t) = \frac{\mathrm{e}^{-\beta t}}{\theta}\left[\int_0^t \left(\frac{L}{\rho}\,u'(x) + \frac{r}{\rho}\,u(x)\right)\mathrm{e}^{\beta x}\,\mathrm{d}x + k\right].$$

b) Lorsque $u = E$, $u' = 0$. De plus, $v(0) = ER/(\rho + R)$. Il en découle que

$$k = \theta\,\frac{ER}{\rho + R}.$$

Ainsi,

$$v = \frac{r}{\rho}\,\frac{E}{\beta\theta} + \frac{\mathrm{e}^{-\beta t}}{\theta}\left(\theta\,\frac{ER}{\rho + R} - \frac{rE}{\rho\beta}\right).$$

Nous obtenons après simplifications

$$v = \frac{rRE}{rR+r\rho+R\rho}\left[1+\frac{R\rho}{r(\rho+R)}\,\mathrm{e}^{-\beta t}\right].$$

Le graphe s'obtient par translation à partir de celui d'une exponentielle décroissante (Fig. 6.16).

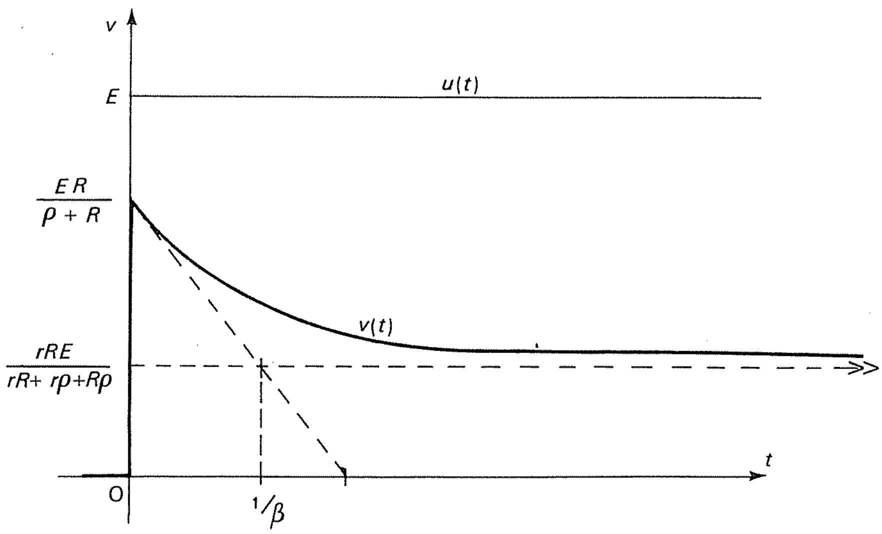


FIG. 6.16

L'énergie W_L est

$$W_L = \tfrac{1}{2}Li_1^2(t) - \tfrac{1}{2}Li_1^2(0).$$

Or, $i_1(0) = 0$. Il reste donc à calculer i_1 en fonction du temps t. Remarquons à cet effet que i_1 vérifie l'équation différentielle

$$Li_1' + ri_1 = v. \tag{2}$$

D'où

$$i_1 = \frac{\mathrm{e}^{-t/\theta_1}}{L}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{x/\theta_1}v(x)\,\mathrm{d}x + k'\right), \qquad \text{où} \qquad \theta_1 = L/r.$$

Puisque $i_1(0) = 0$, la constante d'intégration est nulle. Compte tenu de la valeur trouvée pour v, nous obtenons

$$i_1(t) = \frac{rRE}{rR+r\rho+R\rho}\,\frac{\mathrm{e}^{-t/\theta_1}}{L}\left(\theta_1\,\mathrm{e}^{t/\theta_1} - \frac{\theta\rho R}{r(\rho+R)}\,\mathrm{e}^{-t/\beta}\right)$$

$$= \frac{RE}{rR+r\rho+R\rho}\,(1-\mathrm{e}^{-\beta t}).$$

Finalement,

$$W_L = A(1-\mathrm{e}^{-\beta t})^2, \qquad \text{où} \qquad A = \tfrac{1}{2}L\left(\frac{RE}{rR+r\rho+R\rho}\right)^2.$$

Pour étudier la variation de W_L, calculons la dérivée :

$$W_L' = 2\beta A\,\mathrm{e}^{-\beta t}\,(1-\mathrm{e}^{-\beta t}),$$

quantité toujours positive. De plus, la dérivée seconde est

$$W_L'' = 2A\,\mathrm{e}^{-\beta t}\,(2\,\mathrm{e}^{-\beta t}-1);$$

elle s'annule lorsque

$$t = \frac{\ln 2}{\beta} \approx \frac{0{,}69}{\beta}.$$

D'où l'allure du graphe (Fig. 6.17).

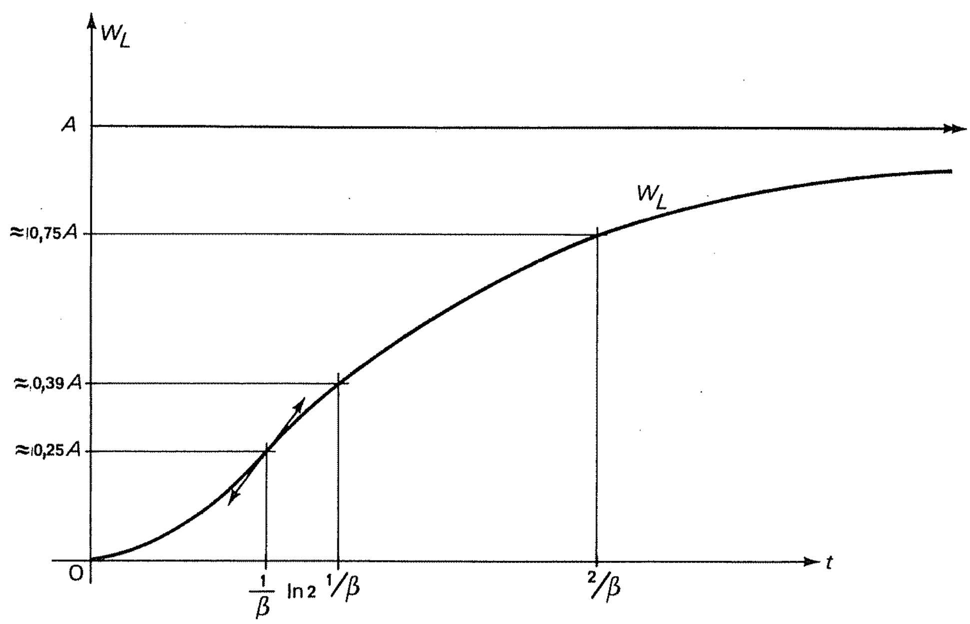


FIG. 6.17

c) Lorsque $r = \rho = R$, l'expression de v se simplifie :

$$v(t) = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\beta t}\left[\int_0^t \left(u'(x) + \frac{R}{L}\,u(x)\right)\mathrm{e}^{\beta x}\,\mathrm{d}x + k_1\right].$$

Si le signal d'entrée est une rampe d'équation $u = \alpha t$, le signal de sortie est

$$v(t) = \frac{\alpha}{6\beta}\,(1 + 2\beta t - \mathrm{e}^{-\beta t})\,.$$

On en déduit

$$v_\rho = u - v = \frac{\alpha}{6\beta}(\mathrm{e}^{-\beta t} + 4\beta t - 1)\,.$$

Le calcul de v_L nécessite la connaissance de i_1. L'intégration de l'équation différentielle (2) conduit à

$$i_1 = \frac{\alpha}{3\beta R}\,(\beta t - 1 + \mathrm{e}^{-\beta t})\,.$$

D'où

$$v_L = Li_1' = \frac{\alpha}{2\beta}\,(1 - \mathrm{e}^{-\beta t})\,.$$

6.7 Problème VII. *On considère le quadripôle linéaire de la figure* 6.18.

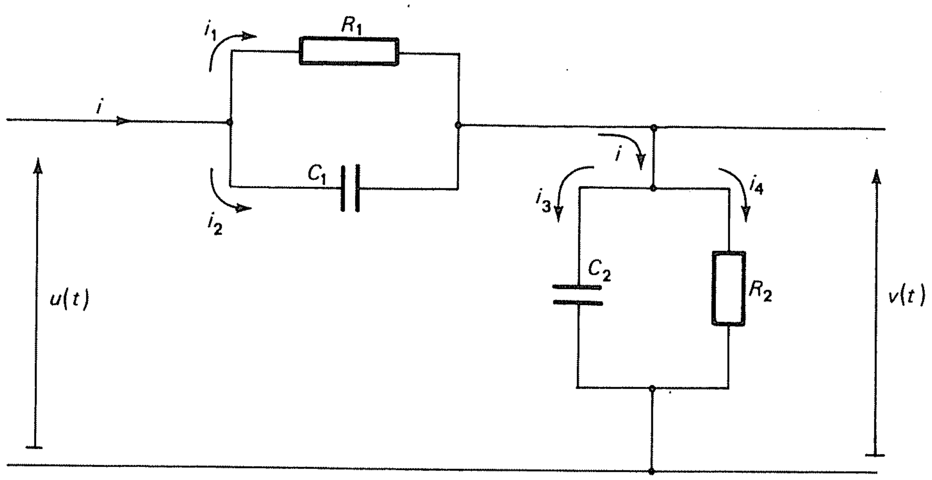


FIG. 6.18

a) *Calculer la réponse en tension v à une perturbation u.*

b) *Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la tension soit atténuée sans déformation.*

c) *Reprendre les mêmes calculs pour le quadripôle de la figure* 6.19.

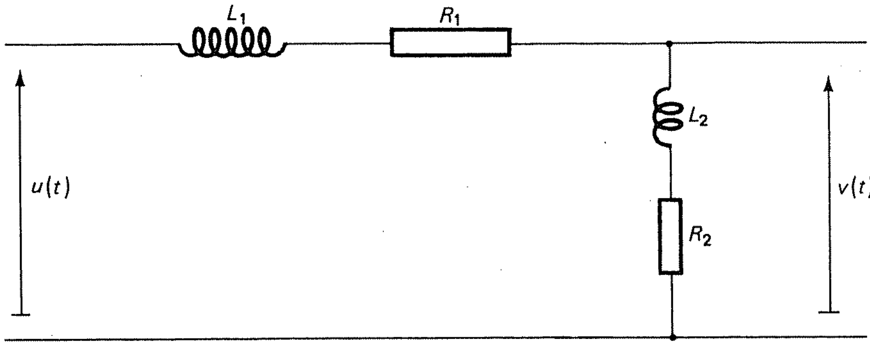


FIG. 6.19

Comparer les résultats trouvés.

d) *Appliquer les propriétés de ces montages au cas d'un échelon E.*

a) Les lois de l'électricité permettent d'écrire

$$i = i_1 + i_2 = i_3 + i_4 ,$$

soit

$$\frac{u-v}{R_1} + C_1(u'-v') = C_2 v' + \frac{v}{R_2},$$

ou encore

$$(C_1 R_1 + C_2 R_1)\, v' + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) v = u + C_1 R_1 u' .$$

Posons

$$\theta_1 = C_1 R_1 , \qquad \theta_2 = C_2 R_2 \qquad \text{et} \qquad a = 1 + R_1/R_2 .$$

L'équation différentielle devient

$$(\theta_1 + C_2 R_1)\, v' + av = u + \theta_1 u'. \tag{1}$$

Un calcul fait à maintes reprises conduit à

$$v(t) = \frac{e^{-\beta t}}{\theta_1 + C_2 R_1} \left(\int_0^t \,[\theta_1 u'(x) + u(x)]\, e^{\beta x}\, dx + k \right), \tag{2}$$

où $\beta = \dfrac{R_1 + R_2}{R_1 \theta_2 + R_2 \theta_1}$.

b) Cherchons à réaliser

$$v(t) = Ku(t), \qquad \text{où} \qquad K \in]0, 1[\,.$$

La relation (2) se traduit par

$$Kbu\,\mathrm{e}^{\beta t} = \int_0^t [\theta_1 u'(x) + u(x)]\,\mathrm{e}^{\beta x}\,\mathrm{d}x + k, \qquad \text{où} \qquad b = \theta_1 + C_2 R_1\,.$$

En dérivant les deux membres, nous obtenons la condition nécessaire :

$$Kb(u'\,\mathrm{e}^{\beta t} + \beta u\,\mathrm{e}^{\beta t}) = (\theta_1 u' + u)\,\mathrm{e}^{\beta t}\,.$$

Comme une exponentielle ne s'annule jamais, nous pouvons simplifier par $\mathrm{e}^{\beta t}$; il reste

$$Kb(u' + \beta u) = \theta_1 u' + u\,,$$

soit

$$u'(Kb - \theta_1) = u(1 - Kb\beta)\,.$$

En prenant pour u un échelon puis une rampe, nous obtenons les conditions nécessaires

$$Kb\beta = 1 \qquad \text{et} \qquad Kb = \theta_1\,.$$

D'où, en éliminant K,

$$\beta = \frac{1}{\theta_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1\theta_1 + R_2\theta_2},$$

soit encore

$$R_1\theta_1 + R_2\theta_2 = R_1\theta_1 + R_2\theta_1\,,$$

ou enfin

$$\theta_1 = \theta_2\,,$$

c'est-à-dire

$$C_1 R_1 = C_2 R_2\,.$$

Réciproquement, en remontant les calculs, on vérifie que cette condition nécessaire est aussi suffisante.

c) On obtient de même l'équation différentielle

$$(L_1 + L_2)\,i' + (R_1 + R_2)\,i = u\,.$$

D'où

$$i(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t/\theta}}{L}\left(\int_0^t u(x)\,\mathrm{e}^{x/\theta}\,\mathrm{d}x + k\right),$$

où $L = L_1 + L_2$, $R = R_1 + R_2$ et $\theta = L/R$.

La tension de sortie est

$$v = L_2 i' + R_2 i = \frac{L_2}{L_1+L_2} u + \left(R_2 - \frac{R_1+R_2}{L_1+L_2}\right) i$$

$$= \frac{L_2}{L_1+L_2} u + \frac{R_1+R_2}{L_1+L_2}\left(\frac{R_2}{R_1+R_2} - \frac{L_2}{L_1+L_2}\right) \times$$

$$\times\, \mathrm{e}^{-t/\theta}\left(\int_0^t u(x)\, \mathrm{e}^{x/\theta}\, \mathrm{d}x + k\right).$$

On obtient la condition d'atténuation sans déformation en annulant le coefficient de l'intégrale, soit

$$L_1/R_1 = L_2/R_2 .$$

Alors

$$v = \frac{L_2}{L_1+L_2} u = \frac{R_2}{R_1+R_2} u .$$

Les propriétés des deux circuits se déduisent les unes des autres par dualité. Cependant, le circuit inductif n'est pas utilisé en pratique, car on ne sait pas fabriquer des inductances parfaites, alors que les condensateurs actuels ont des réponses très proches de la théorie, et ce dans des gammes de fréquences de plus en plus étendues.

d) Cherchons la réponse du premier circuit à un échelon E. A l'instant initial, le circuit se comporte comme un diviseur capacitif, et

$$v(0) = E \frac{C_1}{C_1+C_2}.$$

On en déduit que

$$v = E \frac{R_2}{R_1+R_2}\left(1 + \frac{\theta_1-\theta_2}{\theta_2+C_1R_2}\, \mathrm{e}^{-\beta t}\right).$$

Pour tracer les graphes (Fig. 6.20), on doit distinguer trois cas suivant que $\theta_1 < \theta_2$, $\theta_1 > \theta_2$ ou $\theta_1 = \theta_2$. Dans ce dernier cas, v est constant, ce qui était prévisible puisque $v = Ku$.

Passons au second circuit. On trouve cette fois

$$v = E \frac{R_2}{R_1+R_2} + E\left(\frac{L_2}{L_1+L_2} - \frac{R_2}{R_1+R_2}\right) \mathrm{e}^{-t/\theta}, \text{ avec } \theta = \frac{L}{R} = \frac{L_1+L_2}{R_1+R_2},$$

ou encore

$$v = E \frac{R_2}{R_1+R_2}\left(1 + \frac{\theta_2-\theta_1}{\theta_1 + \dfrac{L_2}{R_1}}\, \mathrm{e}^{-\beta t}\right).$$

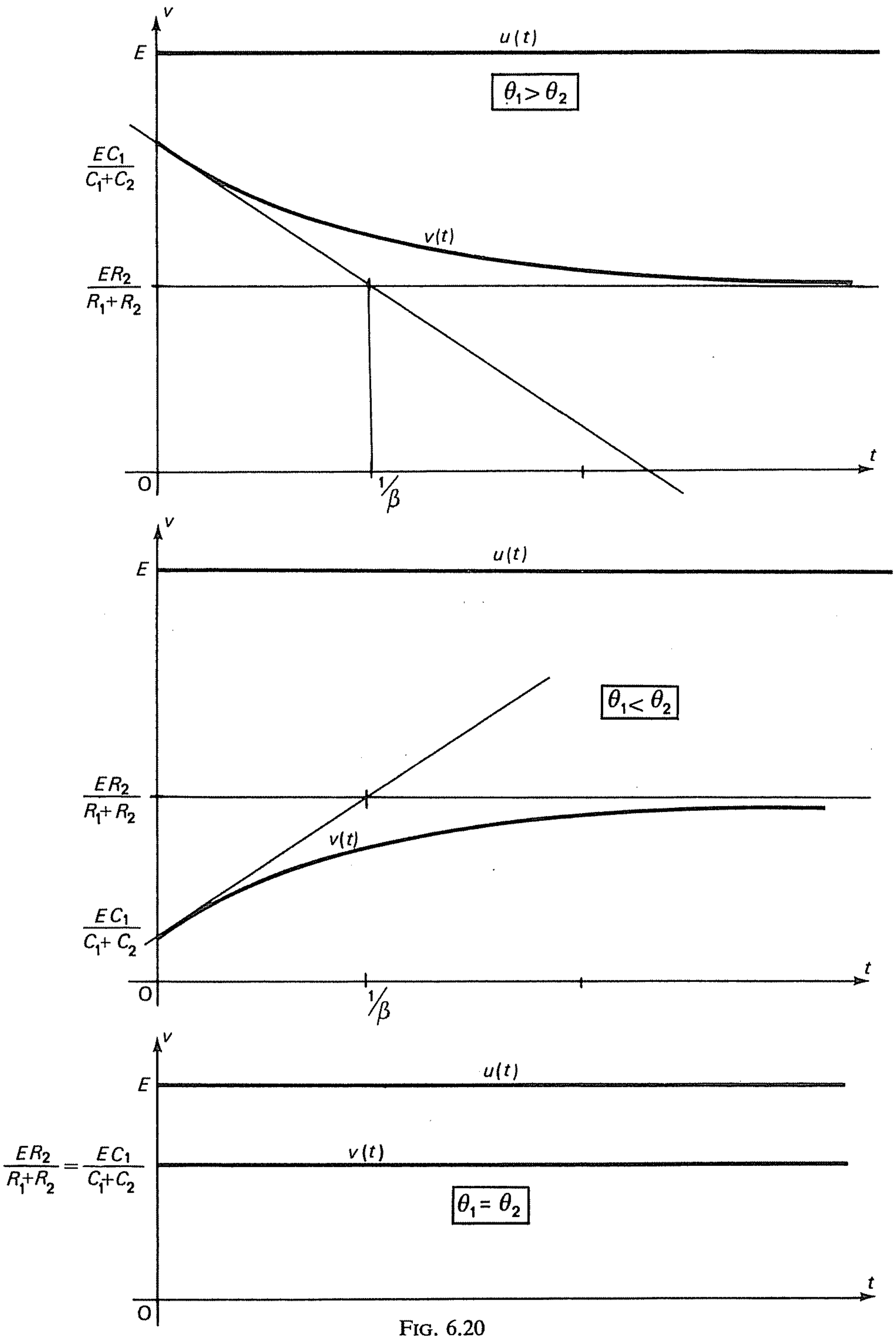

v
E
u(t)
θ1 > θ2
EC1 / (C1+C2)
v(t)
ER2 / (R1+R2)
O
1/β
t
v
E
u(t)
θ1 < θ2
ER2 / (R1+R2)
v(t)
EC1 / (C1+C2)
O
1/β
t
v
E
u(t)
ER2 / (R1+R2) = EC1 / (C1+C2)
v(t)
θ1 = θ2
O
t

Fig. 6.20

On retrouve les mêmes formes de courbes, mais v est croissant si $\theta_1 > \theta_2$, et décroissant si $\theta_1 < \theta_2$.

6.8 Problème VIII. *On considère un quadripôle linéaire Q (Fig. 6.21).*

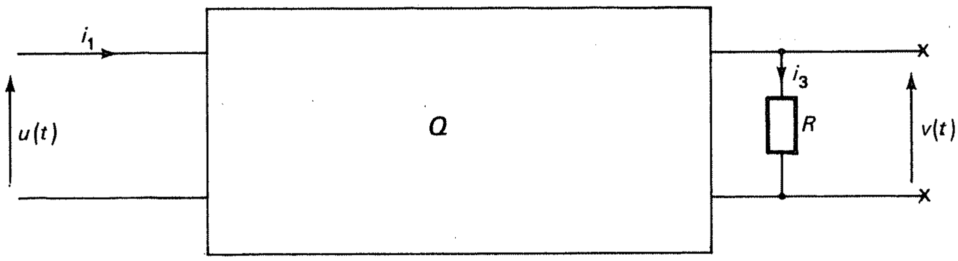


FIG. 6.21

a) *Sa réponse en tension à un échelon E est*

$$v = E/2 + k\,e^{-\beta t}, \qquad \text{où} \qquad \beta \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Déterminer une équation différentielle du premier ordre vérifiée par v. Construire le graphe de v si $v(0) = E/3$.

b) *On suppose que*

$$i_1 = \frac{E}{2R}\left(1 + \tfrac{1}{3}e^{-\beta t}\right) + k_1\,e^{-3\beta t/2}, \tag{2}$$

où R représente une résistance appartenant au quadripôle. Déterminer une équation différentielle du premier ordre vérifiée par i_1. Construire les graphes de i_1 et de i_3 sachant que $i_1(0) = 2E/3R$.

c) *On suppose qu'il existe à l'intérieur du quadripôle un courant i_2 défini par*

$$i_2 = \frac{E}{3R}\,e^{-\beta t} + k_2\,e^{-3\beta t/2}. \tag{3}$$

Déterminer une équation différentielle du premier ordre vérifiée par i_2. Construire le graphe de i_2 si $i_2(0) = E/3R$.

d) *On suppose que $\beta = 2/3RC$. Déduire de ce qui précède un schéma équivalent au quadripôle Q.*

a) La relation (1) s'écrit

$$e^{\beta t}\,v - e^{\beta t}\,E/2 = k\,.$$

Pour éliminer la constante k, il suffit de dériver :

$$v'\,e^{\beta t} + \beta\,e^{\beta t}(v - E/2) = 0\,,$$

soit

$$v' + \beta v = \beta E/2\,.$$

Si $v(0) = E/3$, nous voyons que $k = -E/6$. D'où

$$v(t) = \frac{E}{2}\,(1 - \tfrac{1}{3}\,e^{-\beta t}).$$

Le graphe s'en déduit aussitôt (Fig. 6.22).

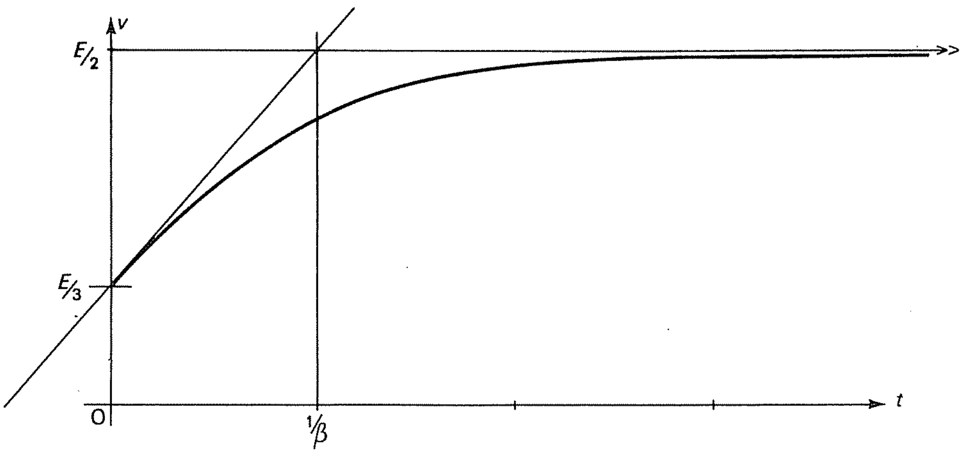


FIG. 6.22

b) Le même procédé fournit

$$i_1' + \frac{3\beta}{2}\,i_1 = \frac{3\beta E}{4R}\,(1 + \tfrac{1}{9}\,e^{-\beta t}).$$

La condition $i_1(0) = \dfrac{2E}{3R}$ conduit à $k_1 = 0$ et à

$$i_1(t) = \frac{E}{2R}\,(1 + \tfrac{1}{3}\,e^{-\beta t}).$$

D'autre part,

$$i_3 = \frac{v}{R} = \frac{E}{2R}\,(1 - \tfrac{1}{3}\,e^{-\beta t}).$$

Les graphes de i_1 et i_3 sont symétriques par rapport à l'asymptote commune (Fig. 6.23).

c) On obtient cette fois

$$i_2' + \frac{3\beta}{2}\,i_2 = \frac{\beta E}{6R}\,e^{-\beta t}.$$

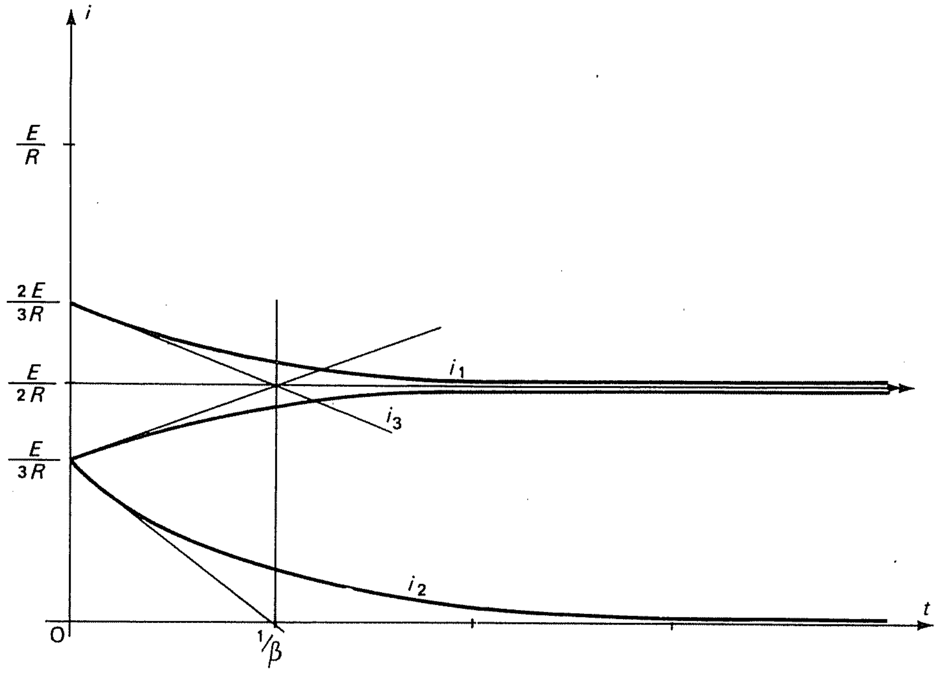


FIG. 6.23

La condition initiale donne $k_2 = 0$. D'où

$$i_2 = \frac{E}{3R}\,\mathrm{e}^{-\beta t}.$$

Le graphe a été construit sur la figure 6.23.

d) Il est clair que

$$i_1 = i_2 + i_3 .$$

L'examen de i_2 conduit au schéma partiel de la figure 6.24.

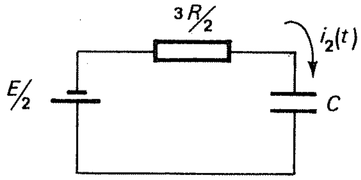


FIG. 6.24

L'examen de i_1 permet de vérifier que

$$i_1 = (E-v)/R.$$

Comme $i_3 = v/R$, le quadripôle correspond au montage de la figure 6.25.

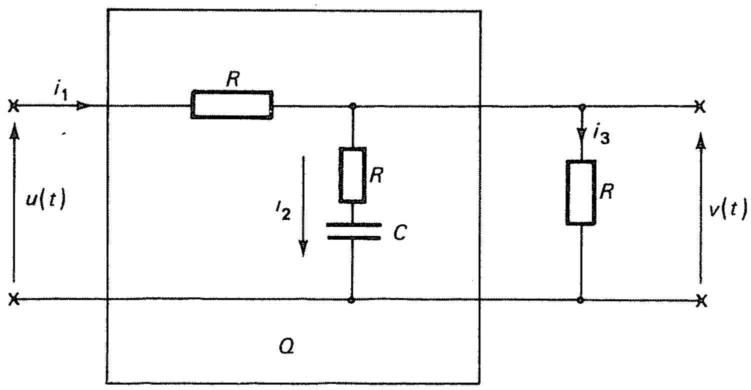


FIG. 6.25

CHAPITRE 7

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU DEUXIÈME ORDRE

7.1 Classification des équations différentielles du deuxième ordre. Une équation différentielle du deuxième ordre est de la forme :

$$y'' = f(x, y, y') .$$

Il y a deux classes principales d'équations différentielles du deuxième ordre :

1. *Équations incomplètes* (se ramenant au premier ordre);
2. *Équations linéaires* (où y, y' et y'' sont au premier degré).

Ces dernières peuvent être à coefficients constants ou non, sans second membre ou avec second membre.

Les équations incomplètes jouent un grand rôle en cinématique (car le temps n'intervient que par ses dérivées). Les équations linéaires, comme dans le cas du premier ordre, se rencontrent dans toutes les branches de la physique.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU DEUXIÈME ORDRE INCOMPLÈTES

7.2 Équations où la fonction n'apparaît que par ses dérivées. Ce sont les équations de la forme

$$y'' = f(x, y') .$$

On se ramène aussitôt au premier ordre en posant $z = y'$; alors

$$z' = f(x, z) .$$

La fonction z étant déterminée, il reste à en calculer les primitives pour obtenir y.

EXEMPLES.

1. *Intégrer l'équation différentielle*

$$ay'' = \sqrt{1+y'^2}, \qquad \textit{où} \qquad a \in \mathbf{R}^* .$$

Posons $z = y'$; alors

$$az' = \sqrt{1+z^2},$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{\mathrm{d}x}{a}.$$

On en déduit

$$\operatorname{Arg\,sh} z = \frac{x-x_0}{a},$$

soit encore

$$y' = z = \operatorname{sh} \frac{x - x_0}{a}.$$

Séparons les variables :

$$\mathrm{d}y = \operatorname{sh} \frac{x - x_0}{a} \, \mathrm{d}x.$$

Il vient enfin

$$y - y_0 = a \operatorname{ch} \frac{x - x_0}{a}.$$

(C'est l'équation d'une chaînette.)

2. *Intégrer l'équation différentielle*

$$(1 + x^2)\, y'' + x y' = a x, \qquad \text{où} \qquad a \in \mathbf{R}.$$

On obtient de même

$$(1 + x^2)\, z' + x z = a x.$$

Les variables se séparent :

$$\frac{\mathrm{d}z}{z - a} = -\frac{x}{1 + x^2} \, \mathrm{d}x.$$

D'où

$$y' - a = z - a = \frac{C}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Ainsi,

$$\mathrm{d}y = \left(a + \frac{C}{\sqrt{1 + x^2}} \right) \mathrm{d}x$$

et enfin

$$y - y_0 = a x + C \operatorname{Arg.sh} x.$$

3. *Intégrer l'équation différentielle*

$$(1 + y'^2)^3 = y''^2.$$

Posons toujours $z = y'$. Alors

$$(1 + z^2)^3 = z'^2$$

et

$$\frac{\mathrm{d}z}{(1 + z^2)^{3/2}} = \pm \, \mathrm{d}x.$$

Effectuons maintenant le changement de fonction $z = \operatorname{tg} \varphi$; alors $d\varphi = dz/(1+z^2)$ et

$$dx = \cos \varphi \; d\varphi .$$

Ainsi,

$$x = x_0 + \sin \varphi .$$

Enfin, $dy = z \; dx = \operatorname{tg} \varphi \; dx = \sin \varphi \; d\varphi$

et

$$y = y_0 - \cos \varphi .$$

Nous reconnaissons une représentation paramétrique d'un cercle de rayon 1. Nous renvoyons au tome 5 pour une méthode plus élégante, reposant sur la notion de rayon de courbure.

7.3 Équations où la fonction n'intervient que par sa dérivée seconde. C'est le cas particulier où

$$y'' = f(x) .$$

On obtient y' en calculant les primitives de f, puis y en calculant les primitives de y'.

Nous rencontrerons le cas où la fonction f est constante au chapitre 8, lors de l'étude de la chute des corps.

EXEMPLES.

1. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y'' - 4x = 0 ,$$

c'est-à-dire $y'' = 4x$.

Il vient dans un premier temps

$$y' = 2x^2 + a ,$$

puis

$$y = 2x^3/3 + ax + b .$$

2. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y'' = x \, e^x .$$

D'après une étude faite au tome 3, nous savons que y' est de la forme

$$y' = (ax+b) \, e^x + k .$$

Par suite, y est de la forme

$$y = (Ax+B) \, e^x + kx + k_1 .$$

Il suffit de dériver deux fois cette expression de y et de reporter dans l'équation différentielle initiale :

$$y'' = (Ax + 2A + B) \, e^x .$$

D'où

$$Ax+2A+B = x\,.$$

Nous en déduisons les relations

$$A = 1 \qquad \text{et} \qquad B = -2A\,.$$

Finalement,

$$y = (x-2)\,e^x+kx+k_1\,.$$

7.4 Équations où la variable n'apparaît pas explicitement. Ce sont les équations de la forme

$$f(y, y', y'') = 0\,.$$

On se ramène au premier ordre grâce à l'artifice suivant : on pose

$$p = y'\;;$$

on considère y comme la variable et p comme une fonction inconnue de y. Alors

$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}.$$

L'équation différentielle devient :

$$f\left(y, p, p\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right) = 0.$$

On obtient ainsi $p = y'$ en fonction de y, ce qui fournit une nouvelle équation différentielle du premier ordre. On obtient cette fois une relation entre y et x.

Remarques.

1. En pratique, on trouve souvent x en fonction de y. Par exemple, en cinématique, la variable est le temps t; la loi horaire du mouvement d'un point donne généralement l'instant où le mobile passe par une position donnée, et non la position du mobile à un instant donné. Il suffit de consulter un horaire des chemins de fer pour comprendre l'intérêt de ce point de vue.

2. Dans de nombreux cas, la dérivée y' n'intervient que par son carré y'^2. Par exemple, en cinématique, la vitesse intervient presque toujours par son carré. On a alors intérêt à poser $q = y'^2$. Dans ces conditions,

$$2y'y'' = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y}.$$

En résumé, on retiendra les *deux* groupes de formules :

$$\begin{cases} y' = p \\ y'' = p\,\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} y'^2 = q \\ y'' = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y}. \end{cases}$$

3. Nous verrons plus loin les équations différentielles de la forme

$$y''+ay'+by = 0\,,$$

où a et b sont deux nombres réels ou complexes donnés.

Dans ce cas, il ne faudra surtout pas utiliser la méthode précédente, beaucoup trop générale !

7.5 Exemples.

1. Intégrer l'équation différentielle

$$yy'' = 1+y'^2\,.$$

Comme y' n'intervient que par son carré, posons $q = y'^2$. Alors $y'' = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}q/\mathrm{d}y$ et

$$\tfrac{1}{2}y\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y} = 1+q\,.$$

Séparons les variables :

$$\frac{\mathrm{d}q}{1+q} = 2\,\frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

Il vient aussitôt

$$1+q = ky^2\,.$$

D'où

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm\sqrt{ky^2-1}$$

Il est clair que k doit être strictement positif. Nous obtenons une solution évidente :

$$y = \pm\, 1/\sqrt{k}\,.$$

En dehors du cas où y est constante, nous pouvons séparer les variables :

$$\mathrm{d}x = \pm\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{ky^2-1}}.$$

D'où

$$x-x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{k}}\,\mathrm{Arg\,ch}\, y\sqrt{k}$$

et finalement

$$y = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\mathrm{ch}\,\sqrt{k}(x-x_0)\,.$$

(C'est l'équation d'une chaînette.)

2. Trouver la solution de l'équation différentielle

$$y'' = e^{2y}$$

telle que $y(0) = y'(0) = 0$.

Posons encore $y'^2 = q$. L'équation devient

$$\frac{1}{2}\frac{dq}{dy} = e^{2y}.$$

Séparons les variables :

$$dq = 2\,e^{2y}\,dy.$$

D'où

$$q = e^{2y}+k.$$

La condition initiale impose $k = -1$. Il vient alors

$$y' = \pm\sqrt{e^{2y}-1}.$$

Écartons la solution constante $y = 0$; nous pouvons séparer les variables :

$$dx = \pm\frac{dy}{\sqrt{e^{2y}-1}} = \pm\frac{e^{-y}\,dy}{\sqrt{1-e^{-2y}}}.$$

Posons $t = e^{-y}$; alors

$$dx = \pm\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

et

$$x-x_0 = \pm\ \text{Arc}\cos t.$$

(Nous préférons mettre Arc cosinus plutôt que Arc sinus, car cela permet de faire disparaître le double signe.) D'où

$$e^{-y} = t = \cos(x-x_0).$$

La condition initiale impose cette fois

$$\cos x_0 = 1.$$

Nous pouvons prendre $x_0 = 0$. Nous obtenons enfin

$$y = -\ln\cos x.$$

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU DEUXIÈME ORDRE

7.6 Équations différentielles linéaires à coefficients constants sans second membre. Nous étudierons surtout les équations linéaires à coefficients constants, c'est-à-dire de la forme

$$ay''+by'+cy = f(x)\,, \tag{1}$$

où a, b et c sont trois nombres réels et f une fonction donnée. Ce sont les équations différentielles de beaucoup les plus utiles et les plus fréquentes dans les applications pratiques.

Nous commençons par le cas des équations différentielles sans second membre, c'est-à-dire en fait les équations différentielles dont le second membre est la fonction nulle :

$$ay''+by'+cy = 0\,. \tag{2}$$

Si a et b sont tous deux nuls, il ne s'agit plus d'une équation différentielle.

Si $a=0$ et $b \neq 0$, nous retombons sur le premier ordre :

$$by'+cy = 0\,.$$

D'où la solution

$$y = k\,\mathrm{e}^{rx}\,, \qquad \text{où} \qquad r = -c/b\,.$$

Par analogie avec ce cas, nous allons chercher une solution de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{rx}$, où r est un nombre complexe, même lorsque a n'est pas nul ; la meilleure justification de ce procédé est ... que ça marche !

En effet, si $y=\mathrm{e}^{rx}$, nous voyons que $y' = r\,\mathrm{e}^{rx}$ et $y'' = r^2\,\mathrm{e}^{rx}$. Donc

$$ay''+by'+cy = ar^2\,\mathrm{e}^{rx}+br\,\mathrm{e}^{rx}+c\,\mathrm{e}^{rx} = \mathrm{e}^{rx}\,(ar^2+br+c)\,.$$

Comme e^{rx} ne s'annule jamais, il faut et il suffit que

$$ar^2+br+c = 0\,.$$

Autrement dit, r doit être une racine du polynôme

$$P = aX^2+bX+c\,.$$

Ce polynôme est dit *caractéristique*. Nous savons qu'il admet toujours au moins une racine, sur le corps des nombres complexes. Distinguons trois cas, suivant que P admet deux racines réelles distinctes, une racine double (automatiquement réelle) ou deux racines complexes conjuguées.

7.7 Le polynôme caractéristique a deux racines réelles distinctes. Les solutions de l'équation différentielle (2) sont de la forme

$$\varphi(x) = k_1\,\mathrm{e}^{r_1 x}+k_2\,\mathrm{e}^{r_2 x}\,, \tag{3}$$

où r_1 et r_2 sont les racines de P et k_1 et k_2 deux nombres complexes.

En effet, nous savons que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{r_1 x}$ est solution de (2). Comme cette fonction ne s'annule pas, nous pouvons poser

$$z = \mathrm{e}^{-r_1 x}\,y, \ \ \text{soit}\, y = \mathrm{e}^{r_1 x}\,z\,.$$

D'où

$$y' = e^{r_1 x}(r_1 z + z')$$

$$y'' = e^{r_1 x}(r_1^2 z + 2r_1 z' + z'').$$

Il vient en reportant dans (2) :

$$az'' + (2ar_1 + b)\, z' = 0\,.$$

Or, $r_1 + r_2 = -b/a$; donc

$$2ar_1 + b = a\left(2r_1 + \frac{b}{a}\right) = a[2r_1 - (r_1 + r_2)] = a(r_1 - r_2)\,,$$

et

$$z'' + (r_1 - r_2)\, z' = 0\,.$$

Par suite,

$$z' = k\, e^{(r_2 - r_1)x}, \quad \text{où} \quad k \in \mathbf{C}\,.$$

Enfin, puisque $r_2 - r_1 \neq 0$,

$$z = k_1 + k_2\, e^{(r_2 - r_1)x}, \qquad \text{où} \qquad k_1 \in \mathbf{C} \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{k}{r_2 - r_1}\,.$$

La formule (3) s'en déduit aussitôt.

Remarque. Les solutions de l'équation (2) constituent un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions deux fois dérivables sur **R**. D'autre part, les fonctions $x \mapsto e^{r_1 x}$ et $x \mapsto e^{r_2 x}$ sont des solutions de (2). Nous aurions donc pu prévoir que les fonctions de la forme (3) sont solutions de (2). Mais le vrai problème était de savoir que l'on obtient ainsi *toutes* les solutions de (2).

EXEMPLE. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y'' - 5y' + 6y = 0\,.$$

Le polynôme caractéristique, à savoir $P = X^2 - 5X + 6$, admet comme racines les nombres 2 et 3. Les solutions sont donc de la forme

$$\varphi(x) = k_1\, e^{2x} + k_2\, e^{3x}.$$

7.8 Le polynôme caractéristique a une racine double. *Soit r cette racine. Les solutions de* (2) *sont de la forme*

$$\varphi(x) = e^{rx}(mx + p), \tag{4}$$

où m et p sont deux nombres complexes.

Reprenons en effet le calcul du n° 7.7 :

$$y = e^{rx} z \qquad y' = e^{rx}(rz + z') \qquad y'' = e^{rx}(r^2 z + 2rz' + z'')\,.$$

D'où, en simplifiant encore par e^{rx},

$$az'' + (2ar+b)\, z' = 0\,.$$

Mais cette fois $2ar+b = 0$, *car r est racine double de P.* Il reste

$$z'' = 0\,.$$

Donc $z' = m$ et $z = mx+p$, où m et p sont des constantes.

EXEMPLE. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y''-6y'+9y = 0\,.$$

Le polynôme caractéristique est $P = X^2-6X+9 = (X-3)^2$; il admet 3 pour racine double. La solution est donc

$$\varphi(x) = e^{3x}(mx+p)\,.$$

7.9 Le polynôme caractéristique a deux racines complexes conjuguées. C'est le cas où

$$\Delta = b^2-4ac < 0\,.$$

Les racines sont

$$r_1 = \frac{-b+j\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b-j\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

(voir tome 1). En reprenant les calculs du n° 7.7, on verrait que les solutions sont encore données par la formule (3) :

$$\varphi(x) = k_1\, e^{r_1 x}+k_2\, e^{r_2 x}.$$

Cependant, on préfère n'employer que des fonctions à valeurs réelles. On y arrive, grâce aux formules d'Euler. Posons à cet effet

$$\alpha = -b/2a \qquad \beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}.$$

Alors

$$e^{r_1 x} = e^{(\alpha+j\beta)x} = e^{\alpha x}\, e^{j\beta x} = e^{\alpha x}\,(\cos\beta x+j\,\sin\beta x)\,.$$

De même,

$$e^{r_2 x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x-j\,\sin\beta x)\,.$$

La formule (3) s'écrit alors

$$\varphi(x) = e^{\alpha x}[(k_1+k_2)\cos\beta x+j(k_1-k_2)\sin\beta x]\,.$$

Posons

$$K_1 = k_1+k_2 \qquad K_2 = j(k_1-k_2)\,.$$

Nous obtenons l'expression

$$\varphi(x) = e^{\alpha x}(K_1 \cos \beta x + K_2 \sin \beta x) \tag{5}$$

ou encore, d'après une équivalence trigonométrique bien connue,

$$\varphi(x) = M\, e^{\alpha x} \sin(\beta x - \gamma)\,. \tag{6}$$

Réciproquement, on vérifie facilement que toute fonction de la forme (5), ou de la forme (6), est effectivement solution de l'équation différentielle (2).

EXEMPLES.

1. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y'' - 4y' + 13y = 0\,.$$

Le polynôme caractéristique est $P = X^2 - 4X + 13$. D'où $\Delta' = 4 - 13 = -9$ et

$$r_1 = 2 + 3\mathrm{j} \qquad r_2 = 2 - 3\mathrm{j}\,.$$

La solution générale est donc

$$\varphi(x) = e^{2x}(K_1 \cos 3x + K_2 \sin 3x)\,,$$

ou encore

$$\varphi(x) = M\, e^{2x} \sin(3x - \gamma)\,,$$

les constantes K_1 et K_2, ou M et γ, étant déterminées dans chaque cas particulier par les conditions intiales ou finales.

2. Intégrer l'équation différentielle

$$y'' + y' + y = 0.$$

Les racines du polynôme caractéristique sont cette fois $\dfrac{-1+\mathrm{j}\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-1-\mathrm{j}\sqrt{3}}{2}$.

D'où

$$\varphi(x) = e^{-x/2}(K_1 \cos \sqrt{3}\, x/2 + K_2 \sin \sqrt{3}\, x/2)\,.$$

3. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y'' + y = 0\,.$$

Cette équation intervient souvent en physique; elle est connue sous le nom *d'équation du pendule* (voir chapitre 8). La formule générale s'écrit

$$y = k_1 \sin x + k_2 \cos x\,.$$

4. *Déterminer les solutions φ de l'équation différentielle*

$$y'' + 4y = 0$$

telles que $\varphi(0) = 3$, $\varphi'(0) = -1$.

La solution générale est

$$\varphi(x) = K_1 \cos 2x + K_2 \sin 2x\,.$$

D'où
$$\varphi'(x) = -2K_1 \sin 2x + 2K_2 \cos 2x$$
et
$$\varphi(0) = K_1 \qquad \varphi'(0) = 2K_2 .$$
Les conditions imposées conduisent donc à
$$\varphi(x) = 3 \cos 2x - \tfrac{1}{2} \sin 2x .$$

Remarque. Si $\alpha = 0$, c'est-à-dire si $b = 0$, il n'y a pas de terme en y' dans l'équation différentielle, et il reste
$$\varphi(x) = M \sin(\beta x - \gamma) .$$
C'est une fonction sinusoïdale. Mais dans le cas général, lorsque α n'est pas nul, φ ressemble à une fonction sinusoïdale, dont l'amplitude serait variable.

1° *Si* $\alpha < 0$, les amplitudes décroissent exponentiellement; c'est le cas, en électricité, de la décharge oscillante d'un condensateur dans une inductance, que nous étudierons *en détail* au chapitre 8. On dit que φ est une sinusoïde amortie.

C'est encore le cas du cadre mobile d'un appareil de mesure électrique, qui oscille avec de l'amortissement. Enfin, c'est le cas général de tout système vibrant (ressorts, etc.) dans lequel il y a un freinage ou amortissement dû à une cause quelconque (air, frottements, etc.).

2° *Si* $\alpha > 0$, les amplitudes sinusoïdales croissent exponentiellement, c'est le cas en radio du montage amplificateur à *super-réaction*, qui, de ce fait, donne un pouvoir amplificateur considérable.

Dans tous ces phénomènes la variable x représente ou bien un angle θ ou bien le temps t.

7.10 Équations linéaires avec second membre. Comme dans le cas des équations différentielles linéaires du premier ordre et, plus généralement, de toutes les équations linéaires, *on obtient les solutions de l'équation* (1) *en ajoutant à la solution générale de l'équation* (2) *une solution particulière de l'équation* (1).

Posons en effet $z = y - \psi$. Alors
$$z' = y' - \psi' , \qquad z'' = y'' - \psi'' ,$$
et l'équation (1) équivaut à
$$az'' + bz' + cz = 0 ,$$
ce qui montre que toute solution de (1) s'obtient en ajoutant à ψ une solution quelconque de l'équation (2).

Nous allons étudier le cas où le second membre de (1) est de la forme
$$f(x) = Q(x)\,\mathrm{e}^{sx} ;$$
où Q est un polynôme et s un nombre complexe.

Il existe alors une solution de (1) *de la forme* $x \mapsto \mathrm{e}^{sx} R(x)$, *où* R *est un polynôme.*

Plus précisément,
— *si s n'est pas racine de* $P = X^2+\alpha X+\beta$, $d^0(R) = d^0(Q)$;
— *si s est racine simple de P,* $d^0(R) = 1+d^0(Q)$;
— *si s est racine double de P,* $d^0(R) = 2+d^0(Q)$.
(Cette règle, évitant de nombreux calculs, doit être apprise par cœur.)
Cherchons en effet une solution particulière sous la forme

$$\psi(x) = e^{sx}\, R(x)\,.$$

Alors

$$\psi'(x) = e^{sx}[sR(x) + R'(x)]$$
$$\psi''(x) = e^{sx}[s^2\, R(x) + 2sR'(x) + R''(x)]\,.$$

Reportons dans l'équation (1) :

$$e^{sx}[aR'' + (2as+b)\, R' + (as^2+bs+c)\, R] = e^{sx}\, Q\,.$$

Nous pouvons simplifier les deux membres par e^{sx}. D'autre part,

$$as^2+bs+c = P(s) \qquad \text{et} \qquad 2as+b = P'(s)\,.$$

Il reste

$$aR''+P'(s)\, R' + P(s)\, R = Q\,.$$

Si s n'est pas racine de P, le premier membre est une fonction polynomiale de même degré que R, d'où $d^0(R) = d^0(Q)$.

Si s est racine simple de P, le premier membre est une fonction polynomiale de même degré que R', d'où $d^0(R) = 1+d^0(Q)$.

Si s est racine double de P, le premier membre est une fonction polynomiale de même degré que R'', d'où $d^0(R) = 2+d^0(Q)$.

Une fois le degré de Q déterminé, on obtient les coefficients de Q par identification.

Remarque. Ce cas, qui peut sembler trop particulier, se rencontre en fait très fréquemment. Il contient en effet les sous-cas suivants :
— le second membre est constant (prendre $s = 0$ et $d^0(Q) = 0$);
— le second membre est une fonction polynomiale (prendre $s = 0$);
— le second membre est une exponentielle (prendre $d^0(Q) = 0$);
— le second membre est une fonction sinus ou cosinus (on se ramène aux exponentielles grâce aux formules d'Euler);
— le second membre est le produit d'une fonction sinus ou cosinus par une fonction polynomiale.

7.11 Exemples.

1. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y''-4y'+2y = 4\,.$$

L'équation sans second membre associée est

$$y''-4y'+2y = 0\,.$$

Le polynôme caractéristique, $P=X^2-4X+2$, admet pour racines $2+\sqrt{2}$ et $2-\sqrt{2}$. La solution générale sans second membre est

$$\varphi(x) = k_1 \, e^{(2+\sqrt{2})x} + k_2 \, e^{(2-\sqrt{2})x}.$$

Le second membre étant constant, on cherchera une solution particulière ψ constante. On trouve aussitôt la solution $\psi=2$. Finalement,

$$\varphi(x) = k_1 \, e^{(2+\sqrt{2})x} + k_2 \, e^{(2-\sqrt{2})x} + 2.$$

2. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y''-3y'+2y = 2x^2-5x+3.$$

L'équation sans second membre,

$$y''-3y'+2y = 0,$$

a pour polynôme caractéristique

$$P = X^2-3X+2.$$

Les racines sont $r_1=1$ et $r_2=2$. La solution générale est donc

$$\varphi(x) = k_1 \, e^x + k_2 \, e^{2x}.$$

Le second membre étant une fonction polynomiale de degré 2, cherchons une solution particulière de la forme $\psi(x)=Ax^2+Bx+C$. D'où

$$\psi'(x) = 2Ax+B, \qquad \psi''(x) = 2A.$$

Portons dans l'équation différentielle donnée (avec second membre) :

$$2A-3(2Ax+B)+2(Ax^2+Bx+C) = 2x^2-5x+3.$$

Il vient en identifiant

$$\begin{cases} 2A = 2 \\ -6A+2B = -5 \\ 2A-3B+2C = 3 \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{aligned} A &= 1 \\ B &= 1/2 \\ C &= 5/4. \end{aligned}$$

Finalement, la solution générale est

$$\varphi(x) = k_1 \, e^x + k_2 \, e^{2x} + x^2 + x/2 + 5/4.$$

3. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y''-4y' = x^2-2x.$$

L'équation sans second membre a pour polynôme caractéristique $P=X^2-4X$, dont les racines sont $r_1=0$ et $r_2=4$. D'où la solution

$$\varphi(x) = k_1 + k_2 \, e^{4x}.$$

Le second membre est le produit d'une fonction polynomiale de degré 2 par *une exponentielle d'exposant nul.* Comme 0 est racine simple de P, on cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction polynomiale de degré 3 (soit $2+1$, sous-entendu multipliée par une exponentielle d'exposant nul). Ainsi,

$$\psi(x) = Ax^3+Bx^2+Cx+D\,.$$

Nous pouvons prévoir qu'il sera impossible de déterminer D, car D est solution de l'équation sans second membre. Dérivons ψ :

$$\psi'(x) = 3Ax^2+2Bx+C\,, \qquad \psi''(x) = 6Ax+2B\,.$$

D'où

$$(6Ax+2B)-4(3Ax^2+2Bx+C) = x^2-2x\,.$$

On obtient par identification

$$\begin{cases} -12A = 1 \\ 6A-8B = -2 \\ 2B-4C = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{aligned} A &= -1/12 \\ B &= 3/16 \\ C &= 3/32\,. \end{aligned}$$

Finalement, la solution générale avec second membre est

$$\varphi(x) = k_1+k_2\,\mathrm{e}^{4x}-x^3/12+3x^2/16+3x/32\,.$$

4. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y''-5y'+6y = 3\,\mathrm{e}^{4x}\,.$$

Nous avons déjà trouvé les solutions de l'équation sans second membre :

$$\varphi(x) = k_1\,\mathrm{e}^{2x}+k_2\,\mathrm{e}^{3x}\,.$$

Comme 4 n'est pas racine du polynôme caractéristique, on peut chercher une solution particulière de la forme $\psi(x) = A\,\mathrm{e}^{4x}$. D'où

$$\psi'(x) = 4A\,\mathrm{e}^{4x}\,, \qquad \psi''(x) = 16A\,\mathrm{e}^{4x}$$

et

$$16A\,\mathrm{e}^{4x}-20A\,\mathrm{e}^{4x}+6A\,\mathrm{e}^{4x} = 3\,\mathrm{e}^{4x}.$$

Donc $A=3/2$ et

$$\varphi(x) = k_1\,\mathrm{e}^{2x}+k_2\,\mathrm{e}^{3x}+\frac{3}{2}\,e^{4x}.$$

5. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y''-5y'+6y = 5\,\mathrm{e}^{2x}\,.$$

Cette fois, le coefficient 2 est racine simple du polynôme caractéristique. On cherchera donc une solution particulière sous la forme

$$\psi(x) = (Ax+B)\,\mathrm{e}^{2x}\,,$$

c'est-à-dire le produit de e^{2x} par une fonction polynomiale de degré $1=0+1$.

Le terme en $B\,e^{2x}$ s'éliminera des calculs, car il s'agit d'une solution de l'équation sans second membre. Prenons donc $\psi(x) = Ax\,e^{2x}$; d'où

$$\psi'(x) = A(2x+1)\,e^{2x}, \qquad \psi''(x) = A(4x+4)\,e^{2x}.$$

Portons dans l'équation différentielle; après simplification par e^{2x}, il reste

$$A(4x+4) - 5A(2x+1) + 6Ax = 5.$$

On remarque que les termes en x disparaissent, comme il se doit puisqu'il n'y en a pas dans le membre de droite. Il reste

$$A = -5.$$

(Si on avait cherché une solution de la forme $A\,e^{2x}$, il aurait été impossible d'identifier. Dans ce genre de calcul, les erreurs... ne pardonnent pas.)

On obtient ainsi pour la solution générale

$$\varphi(x) = (-5x+k_1)\,e^{2x} + k_2\,e^{3x}.$$

6. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y''-6y'+9y = 5\,e^{3x}.$$

Nous savons que le polynôme caractéristique admet 3 pour racine double. On doit donc chercher une solution particulière de la forme

$$\psi(x) = (Ax^2+Bx+C)\,e^{3x}.$$

Mais $\varphi(x) = (Bx+C)\,e^{3x}$ est solution de l'équation sans second membre. Les termes en B et C s'élimineront des calculs. Il suffit de prendre

$$\psi(x) = Ax^2\,e^{3x}.$$

D'où

$$\psi'(x) = A(3x^2+2x)\,e^{3x}, \qquad \psi''(x) = A(9x^2+12x+2)\,e^{3x}.$$

Il vient en identifiant

$$A[(9x^2+12x+2) - 6(3x^2+2x) + 9x^2] = 5,$$

soit $A = 5/2$. En résumé,

$$\varphi(x) = e^{3x}(5x^2/2+mx+p).$$

7. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y''-4y'+3y = (3x^2+1)\,e^{3x}.$$

Le polynôme caractéristique P ayant pour racines 1 et 3, nous prendrons pour solution particulière de l'équation avec second membre

$$\psi(x) = (Ax^3+Bx^2+Cx+D)\,e^{3x}.$$

(Le degré 3 est celui du polynôme figurant au second membre, augmenté d'une unité car 3 est racine simple de P.) Comme d'habitude, on peut se débarrasser des termes figurant dans la solution générale de l'équation sans second membre, et ne conserver que

$$\psi(x) = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)\,\mathrm{e}^{3x}\,.$$

D'où

$$\psi'(x) = [3Ax^3 + 3(A+B)\,x^2 + 2Bx + 3C]\,\mathrm{e}^{3x}$$
$$\psi''(x) = [9Ax^3 + 9(2A+B)\,x^2 + 6(A+2B)\,x + 2B + 9C]\,\mathrm{e}^{3x}\,.$$

Reportons, simplifions par e^{3x} et identifions :

$$\begin{cases} 6A = 3 & \text{d'où} \quad A = 1/2 \\ 6A + 4B = 0 & \qquad\quad B = -3/4 \\ 2B + 9C = 1 & \qquad\quad C = 5/18\,. \end{cases}$$

Finalement,

$$\psi(x) = k_1\,\mathrm{e}^x + \left(\frac{x^3}{2} - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{18}x + k_2\right)\mathrm{e}^{3x}\,.$$

8. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y'' - 6y' + 9y = (x+1)\,\mathrm{e}^{3x}\,.$$

Remarquons que 3 est racine *double* du polynôme caractéristique. Il convient donc de chercher une solution de la forme

$$\psi(x) = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\,\mathrm{e}^{3x}\,.$$

Puisque $(Cx+D)\,\mathrm{e}^{3x}$ est solution de l'équation sans second membre, on peut se limiter à

$$\psi(x) = (Ax^3 + Bx^2)\,\mathrm{e}^{3x}\,.$$

D'où

$$\psi'(x) = [3Ax^3 + 3(A+B)\,x^2 + 2Bx]\,\mathrm{e}^{3x}$$
$$\psi''(x) = [9Ax^3 + 9(2A+B)\,x^2 + 6(A+2B)\,x + 2B]\,\mathrm{e}^{3x}\,.$$

On trouve aisément $A = 1/6$, $B = 1/2$. La solution générale est

$$\varphi(x) = (mx+p)\,\mathrm{e}^{3x} + \psi(x) = (x^3/6 + x^2/2 + mx + p)\,\mathrm{e}^{3x}\,.$$

9. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y'' - 2y' + 3y/4 = \sin x\,.$$

Le polynôme caractéristique est $\varphi = X^2 - 2X + 3/4$; ses racines sont 1/2 et 3/2. La solution générale sans second membre est

$$\varphi(x) = k_1\,\mathrm{e}^{x/2} + k_2\,\mathrm{e}^{3x/2}\,.$$

Pour trouver une solution particulière avec second membre, écrivons que

$$\sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}}{2\mathrm{j}}\,.$$

Il suffit donc d'ajouter des solutions particulières relatives aux seconds membres membres $e^{jx}/2j$ et $-e^{-jx}/2j$. Remarquons que ni j ni $-j$ ne sont racines du polynôme caractéristique. On cherchera donc des solutions des formes suivantes :

$$\psi_1(x) = A\,e^{jx} \qquad \text{et} \qquad \psi_2(x) = B\,e^{-jx}.$$

Pour ne pas manipuler de fonctions à valeurs complexes, on peut regrouper ψ_1 et ψ_2, et chercher une solution de l'équation initiale (avec $\sin x$ pour second membre) sous forme d'une combinaison linéaire de sinus et de cosinus :

$$\psi(x) = C \sin x + D \cos x.$$

D'où

$$\psi'(x) = C \cos x - D \sin x, \qquad \psi''(x) = -C \sin x - D \cos x$$

et

$$(-C/4 + 2D) \sin x - (D/4 + 2C) \cos x = \sin x.$$

Il vient par identification

$$\begin{cases} -C/4 + 2D = 1 \\ 2C + D/4 = 0. \end{cases}$$

D'où $C = -4/65$, $D = 32/65$ et

$$\varphi(x) = -\frac{4}{65} \sin x + \frac{32}{65} \cos x + k_1\,e^{x/2} + k_2\,e^{3x/2}.$$

10. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y'' + y = \sin x.$$

Cet exemple se traite comme le précédent. Mais j et $-j$ sont racines simples du polynôme caractéristique. Il faudrait donc chercher des solutions

$$\psi_1(x) = (Ax + B)\,e^{jx} \qquad \text{et} \qquad \psi_2(x) = (Cx + D)\,e^{-jx},$$

correspondant aux seconds membres $e^{jx}/2j$ et $-e^{-jx}/2j$. On peut encore chercher une solution sous la forme

$$\psi(x) = (\alpha x + \beta) \sin x + (\gamma x + \delta) \cos x.$$

Les termes en $\beta \sin x$ et $\delta \cos x$ vont s'éliminer des calculs, car ils vérifient l'équation sans second membre.

On peut simplifier les calculs en remarquant que les fonctions paires et les fonctions impaires constituent deux sous-espaces vectoriels supplémentaires. Or, le second membre, $\sin x$, est impair. D'autre part, la fonction $x \mapsto \alpha x \sin x$ est paire, ainsi que sa dérivée seconde, tandis que la fonction $x \mapsto \gamma x \cos x$ est impaire, ainsi que sa dérivée seconde. Le terme en $\alpha x \sin x$ s'élimera donc des calculs, et l'on peut prendre

$$\psi(x) = \gamma x \cos x.$$

Par suite, $\psi''(x) = \gamma(-2 \sin x - x \cos x)$ et

$$-2\gamma \sin x = \sin x ,$$

soit $\gamma = -1/2$. Finalement,

$$\varphi(x) = k_1 \sin x + (-x/2 + k_2) \cos x .$$

11. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y'' - 4y' + 4y = e^x + (3x-1)\, e^{2x} + x - 2 .$$

Pour trouver une solution particulière avec second membre, nous commencerons par décomposer celui-ci en trois, vu la linéarité, quitte à ajouter les trois solutions particulières ainsi obtenues.

Commençons par e^x. Comme 1 n'est pas racine du polynôme caractéristique, on peut chercher une solution de la forme $\psi_1(x) = A\, e^x$. On trouve aisément $A = 1$.

La fonction polynomiale $x-2$ peut être considérée comme le produit d'elle-même par une exponentielle d'exposant nul. Comme 0 n'est pas racine du polynôme caractéristique, on prendra ψ_2 de la forme $\psi_2(x) = Bx + C$. On obtient aussitôt $B = 1/4$ et $C = -1/4$.

Enfin, 2 est racine double du polynôme caractéristique. On prendra ψ_3 de la forme

$$\psi_3(x) = (Dx^3 + Ex^2 + Fx + G)\, e^{2x} .$$

Les termes en F et en G s'éliminent des calculs; on peut seulement déterminer D et E, à savoir $D = 1/2$ et $E = -1/2$.

Finalement,

$$\varphi(x) = e^x + \tfrac{1}{4}(x-1) + (\tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + mx + p)\, e^{2x} .$$

7.12 Équations différentielles linéaires à coefficients non constants sans second membre. Considérons une équation différentielle de la forme

$$a(x)\, y'' + b(x)\, y' + c(x)\, y = f(x) , \tag{6}$$

où a, b, c et f sont des fonctions données. L'équation sans second membre associée est

$$a(x)\, y'' + b(x)\, y' + c(x)\, y = 0 . \tag{7}$$

Lorsque a, b et c sont des constantes, la discussion des n^os^ 7.7 à 7.9 montre que les solutions constituent un espace vectoriel de dimension 2 sur **C**. Nous admettrons que ce résultat reste valable dans le cas général des équations différentielles linéaires sans second membre. Tout revient alors à trouver deux solutions linéairement indépendantes.

La connaissance d'une solution particulière φ_1 ne s'annulant pas permet de se ramener à une équation différentielle du premier ordre. Posons en effet $y = \varphi_1 z$, d'où $y' = \varphi_1' z + \varphi_1 z'$ et $y'' = \varphi_1'' z + 2\varphi_1' z' + \varphi_1 z''$. Il vient en reportant :

$$a\varphi_1 z'' + (2a\varphi_1' + b\varphi_1)\, z' + (a\varphi_1'' + b\varphi_1' + c\varphi_1)\, z = 0 .$$

Le coefficient de z est nul, puisque φ_1 est une solution de l'équation différentielle considérée. Il reste donc

$$a\varphi_1 z'' + (2a\varphi'_1 + b\varphi_1)\, z' = 0,$$

ce qui est une équation différentielle du premier ordre par rapport à z'. On sait intégrer cette dernière équation différentielle, car elle est à variables séparables :

$$\frac{z''}{z'} = -2\,\frac{\varphi'_1}{\varphi_1} - \frac{b}{a}.$$

On en tire z', puis z par un calcul de primitive.

EXEMPLE. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y''\ \mathrm{tg}\, x + y'(\mathrm{tg}^2\, x - 2) + 2y\ \mathrm{cot}\, x = 0,$$

où x appartient à l'intervalle $]0, \pi/2[$, *sachant que* $\varphi_1(x) = \sin x$ *en est solution.*

Posons $y = z \sin x$, d'où $y' = z' \sin x + z \cos x$ et $y'' = z'' \sin x + 2z' \cos x - z \sin x$. En reportant ces expressions dans l'équation donnée, nous nous ramenons à l'équation différentielle du premier ordre

$$z'' + z'\ \mathrm{tg}\, x = 0.$$

(Le fait que les termes en z aient disparu permet de vérifier que φ_1 est effectivement solution.) D'où

$$z' = k_1 \cos x \qquad \text{et} \qquad z = k_1 \sin x + k_2.$$

Finalement,

$$\varphi(x) = k_1 \sin^2 x + k_2 \sin x.$$

7.13 Intégration à l'aide des séries entières. Nous venons de voir que tout le problème est d'obtenir au moins une solution particulière. Voici une méthode valable dans le cas fréquent où les coefficients sont des fonctions polynomiales.

Supposons qu'il existe une série entière dont la somme φ soit solution de l'équation différentielle sur l'intervalle de convergence $]-R, R[$. Alors

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \\ \varphi'(x) &= a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots \\ \varphi''(x) &= 2a_2 + \ldots + n(n-1)\, a_n x^{n-2} + \ldots \end{aligned}$$

Si nous reportons ces développements dans le premier membre de l'équation donnée, nous devons trouver le développement en série entière de la fonction nulle, dont tous les coefficients sont nuls. On obtiendra ainsi des relations de récurrence entre les coefficients a_n. Il reste à déterminer le rayon de convergence de la série entière et, si possible, à en calculer la somme.

EXEMPLE. *Intégrer l'équation différentielle*

$$4xy'' + 2y' - y = 0.$$

La méthode précédente conduit à la relation de récurrence

$$(2n+2)\,(2n+1)\,a_{n+1} = a_n\,.$$

On en déduit aussitôt

$$a_n = \frac{a_0}{(2n)!}.$$

Le coefficient a_0 reste arbitraire. Nous avons donc trouvé un sous-espace vectoriel de dimension 1 de l'espace vectoriel des solutions.

Notons que le rayon de convergence R est infini; il n'y a donc pas de problème de convergence.

Pour calculer la somme de la série entière, distinguons deux cas :

Si $x > 0$, posons $x = t^2$. La somme de la série de terme général $t^{2n}/(2n)!$ est ch t. La somme de la série entière considérée est donc a_0 ch $\sqrt{x}$.

Si $x < 0$, posons $x = -t^2$. On trouve de même pour somme $a_0 \cos \sqrt{-x}$.

Connaissant une solution particulière, nous pouvons chercher toutes les solutions. Traitons par exemple le cas où $x > 0$. Posons $y = z \operatorname{ch} \sqrt{x}$. On trouve facilement que z est solution de l'équation différentielle

$$\frac{z''}{z'} = -\frac{1}{2x} - \frac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}\operatorname{ch}\sqrt{x}}.$$

D'où

$$z' = \frac{k}{\sqrt{x}\,(\operatorname{ch}\sqrt{x})^2}.$$

En posant de nouveau $x = t^2$, nous trouvons

$$z = 2k \operatorname{th}\sqrt{x} + k_2$$

et donc

$$y = k_1 \operatorname{sh}\sqrt{x} + k_2 \operatorname{ch}\sqrt{x}, \qquad \text{où} \quad k_1 = 2k.$$

7.13 Équations différentielles linéaires avec second membre quelconque. Revenons à l'équation (6). La méthode de variation des constantes, déjà rencontrée dans le cas du premier ordre, permet de trouver une solution de l'équation avec second membre lorsqu'on connaît deux solutions linéairement indépendantes φ_1 et φ_2 de l'équation sans second membre (7).

Écrivons en effet

$$y = u\varphi_1 + v\varphi_2\,,$$

où u et v sont deux fonctions inconnues. La dérivée de y est

$$y' = u'\varphi_1 + v'\varphi_2 + u\varphi_1' + v\varphi_2'\,.$$

Si nous n'imposons pas de condition supplémentaire, le calcul de y'' montre que l'on est ramené à une équation du second ordre, mais avec deux fonctions inconnues au lieu d'une! Imposons donc la condition

$$u'\varphi_1+v'\varphi_2 = 0\,. \tag{8}$$

Alors

$$y'' = u'\varphi_1'+v'\varphi_2'+u''\varphi_1+v''\varphi_2\,.$$

Il vient en reportant

$$a(u'\varphi_1'+v'\varphi_2') = f,$$

équation à laquelle il faut adjoindre la condition (8). Le système ainsi obtenu,

$$\begin{cases} a(u'\varphi_1'+v'\varphi_2') = f \\ u'\varphi_1+v'\varphi_2 = 0\,, \end{cases}$$

permet de calculer u' et v', puis u et v par des calculs de primitives.

Remarque. Cette méthode s'applique bien entendu aux équations différentielles linéaires à coefficients constants. Cependant, si $f(x)$ est de la forme $e^{sx}\,Q(x)$, la méthode du n° 7.10 est plus directe. Si $f(x)$ n'est pas de cette forme, il n'y a plus de choix... car le procédé du n° 7.10 ne s'applique pas!

EXEMPLE. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y''-y = 1/\mathrm{ch}^3\,x\,.$$

L'équation sans second membre associée, $y''-y=0$, admet pour solutions ch x et sh x, solutions linéairement indépendantes. Posons

$$y = u\,\mathrm{ch}\,x+v\,\mathrm{sh}\,x\,.$$

Nous sommes conduits à résoudre le système

$$\begin{cases} u'\,\mathrm{ch}\,x+v'\,\mathrm{sh}\,x = 0 \\ u'\,\mathrm{sh}\,x+v'\,\mathrm{ch}\,x = 1/\mathrm{ch}^3\,x\,. \end{cases}$$

D'où $u' = -\mathrm{sh}\,x/\mathrm{ch}^3\,x$, $v' = 1/\mathrm{ch}^2\,x$, puis

$$u = \frac{1}{2\,\mathrm{ch}^2 x} + k_1\,, \qquad v = \mathrm{th}\,x+k_2\,.$$

Finalement,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\,\mathrm{ch}\,x} + \mathrm{th}\,x\;\mathrm{sh}\,x+k_1\;\mathrm{ch}\,x+k_2\;\mathrm{sh}\,x\,.$$

EXERCICES

Équations incomplètes

7.1 $(1-x^2)\, y''-xy' = 0$

7.2 $y'' = \dfrac{1}{y^3}$

7.3 $yy''-y'^2-1 = 0$

7.4 $yy''+y'^2-2ay^2 = 0$ $\qquad a\in\mathbf{R}$

7.5 $y''\cos y+2y'^2\sin y+\sin y\cos^2 y = 0$

7.6 $y'' = \exp(x+y)$

7.7 $y'' = \operatorname{tg} y+\operatorname{tg}^3 y$ avec la condition initiale $y = \pi/4$ et $y'=1$ si $x=\pi/4$

7.8 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{d^2x}{dy^2} = 1$.

Équations linéaires à coefficients constants

7.9 $2y''-5y'-3y = 0$

7.10 $y''-10y'+26y = 0$

7.11 $y''-y = 1+x^2$

7.12 $2y''-y'-y = 3\cos 2x-\sin 2x$

7.13 $y''-9y = 6\cos 3x$

7.14 $y''-4y'+4y = e^{2x}$

7.15 $y''+3y'+2y = \operatorname{sh} 2x$

7.16 $y''-2y'+y = \operatorname{ch} x$

7.17 $y''+y = x\sin x$

7.18 $y''-2y'\cos\alpha+y = e^{x/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ $\qquad \alpha\in[0,\pi]$

7.19 $y''+y = \operatorname{tg} x$

7.20 $y''+y = |x|+1$.

Équations linéaires à coefficients non constants

7.21 $x^2y''-2xy'+2y = 2+2x^3\sin 2x$ (chercher des solutions de la forme $y = x^n$)

7.22 $x^2y''+4xy'+2y = \ln(1+x)$ (même indication)

7.23 $(1+x)^2\, y''+(1+x)\, y'-4y = 0$ (poser $t=1+x$)

7.24 $(x^2-1)\, y''-2xy'-(x^2-2x-1)\, y=0$ (chercher une solution exponentielle)

7.25 $x(x^2+1)\, y''-2(x^2+1)\, y'+2xy = 0$ (chercher une solution polynomiale)

7.26 $(1+x)\, y''-2y'+(1-x)\, y = x\,e^{-x}$ (chercher une solution exponentielle).

CHAPITRE 8

APPLICATIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU DEUXIÈME ORDRE

Nous allons passer en revue de nombreuses applications à la physique des équations différentielles du deuxième ordre. On remarquera que l'on fait appel dans presque tous les problèmes aux mêmes équations : équation du mouvement d'un pendule et, plus généralement, équation du mouvement du cadre d'un galvanomètre.

CHUTE DES CORPS

8.1 Loi de la chute des corps (accélération constante). *Trouver la loi de la chute des corps sachant que l'accélération est constante et égale à g. On négligera la résistance de l'air.*

Supposons que l'on abandonne le solide avec une vitesse initiale verticale à l'instant $t=0$. Nous savons que le mouvement est rectiligne. Prenons l'axe Ox suivant une verticale ascendante. Par définition de l'accélération,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\,.$$

D'où

$$v = \frac{dx}{dt} = -gt+v_0$$

et

$$x = -\tfrac{1}{2}gt^2+v_0t+x_0\,.$$

En particulier, si x_0 et v_0 sont nuls,

$$x = -\tfrac{1}{2}gt^2 \qquad \text{et} \qquad v = -gt\,.$$

L'espace parcouru en chute libre est proportionnel au carré du temps. En éliminant t entre les deux dernières relations, on obtient la vitesse en chute libre

$$v = -\sqrt{-2gx}\,.$$

8.2 Trajectoire d'un projectile. *Déterminer la trajectoire d'un projectile lancé sous un angle α, en négligeant la résistance de l'air.*

Prenons pour origine O la position initiale du projectile et pour plan xOy le plan vertical issu de O contenant la vitesse initiale V_0 (Fig. 8.1). Nous savons que ce plan contient la trajectoire.

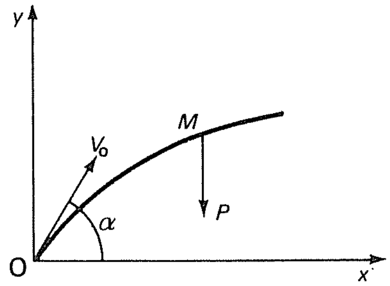


FIG. 8.1

La seule force appliquée au point M est son poids $\boldsymbol{P}$. La loi fondamentale de la dynamique s'écrit, en projection sur les deux axes de coordonnées,

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad m\,\frac{d^2y}{dt^2} = -mg\,.$$

Ainsi,

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha \qquad\qquad x = v_0 t \cos\alpha$$

$$\frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha \qquad\qquad y = -\tfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha\,.$$

Donc $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$ et

$$y = -\frac{1}{2}\,\frac{gx^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + x \operatorname{tg}\alpha\,.$$

La trajectoire est un arc de parabole d'axe vertical. Rappelons que le calcul de la portée a été effectué au tome 2.

8.3 Loi de la chute des corps (attraction newtonnienne). *Un point pesant M est abandonné sans vitesse initiale à une hauteur au-dessus du sol égale au rayon terrestre R. Déterminer le temps nécessaire pour atteindre le sol, et calculer la vitesse de M à cet instant. On négligera la résistance de l'air.*

On sait que, suivant la loi de Newton, la Terre attire les corps avec une force inversement proportionnelle au carré de la distance au centre de la Terre. D'ailleurs, à la surface du sol, cette force est tout simplement le poids mg du corps.

Plaçons-nous à la distance x du centre de la Terre, x variant de $2R$ au début à R à la fin. La force est

$$F = -k/x^2\,,$$

avec le signe moins, puisque x est compté en sens inverse de la force. La loi fondamentale de la dynamique s'écrit

$$-\frac{k}{x^2} = m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}. \tag{1}$$

Lorsque $x = R$,

$$F = -mg = -\frac{k}{R^2},$$

d'où

$$k = mgR^2\,.$$

L'équation (1) devient

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{gR^2}{x^2},$$

ce qui est une équation différentielle incomplète du deuxième ordre.

Posons $q = v^2$. Alors

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x} = -\frac{gR^2}{x^2}, \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{d}q = -2gR^2\,\frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

Il en découle que

$$q = 2gR^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2R}\right),$$

puisque la vitesse est nulle lorsque $x = 2R$. Donc

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{gR}\,\sqrt{\frac{2R-x}{x}},$$

le signe moins provenant du fait que la vitesse est dirigée vers le centre de la Terre. Séparons les variables :

$$\mathrm{d}t = -\frac{1}{\sqrt{gR}}\sqrt{\frac{x}{2R-x}}\,\mathrm{d}x$$

et

$$t = -\frac{1}{\sqrt{gR}}\int_{2R}^{R}\sqrt{\frac{x}{2R-x}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Posons $x = 2R\sin^2 u$; alors $\sqrt{\dfrac{x}{2R-x}} = \operatorname{tg} u$, $\mathrm{d}x = 4R\sin u\cos u\,\mathrm{d}u$ et

$$t = 4\sqrt{\frac{R}{g}}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin^3 u\,\mathrm{d}u = 2\sqrt{\frac{R}{g}}\left[u+\frac{\sin 2u}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = 2\sqrt{\frac{R}{g}}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right).$$

Si $g = 9{,}81$ m/s^2 et $R = 6\,366$ km,

$$t \approx 2\,000 \text{ s} \qquad \text{et} \qquad v = -\sqrt{gR} \approx -8\,000 \text{ m/s}.$$

MOUVEMENT DU PENDULE

8.4 Calcul de la période d'un pendule simple. Considérons un pendule attaché par un fil à un point O, et que l'on a dévié de la verticale. Ce pendule va osciller, et ses oscillations vont s'amortir par suite de la résistance de l'air et des frottements sur l'axe.

Négligeons ces causes d'amortissement et calculons la période T des oscillations. Plaçons-nous à un instant quelconque, par exemple supposons le pendule en train de s'élever et soit θ l'angle que fait le fil avec la verticale (Fig. 8.2).

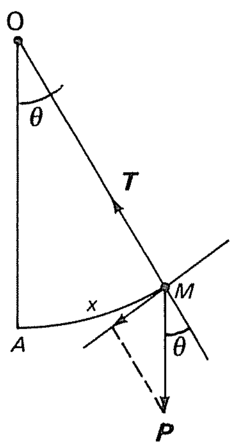


FIG. 8.2

Notons x l'arc AM. Les forces appliquées au point M sont :
— son poids $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$, force verticale dirigée vers le bas,
— la tension du fil $\boldsymbol{T}$ dirigée suivant la direction du fil de M vers O.

Projetons l'équation fondamentale $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{\Gamma}$ sur la tangente à la trajectoire; la projection de $\boldsymbol{T}$ étant nulle,

$$m\gamma = -mg \sin \theta$$

(le signe $-$ résulte de ce que la projection du poids et θ ont des signes contraires) soit :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -g \sin \theta .$$

Supposons θ suffisamment petit ($\theta < 10°$) pour que l'on puisse, en première approximation confondre le sinus et l'arc $x(x=l\theta)$:

$$\sin\theta \approx \theta = \frac{x}{l},$$

ce qui donne

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\,\frac{x}{l}.$$

Nous reconnaissons une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants. Posons $\omega = \sqrt{g/l}$; les solutions sont de la forme

$$\varphi(t) = k_1\, e^{j\omega t} + k_2\, e^{-j\omega t}$$

ou, si l'on préfère,

$$\varphi(t) = K_1 \cos\omega t + K_2 \sin\omega t = M \sin(\omega t + \varphi).$$

On a un *mouvement périodique sinusoïdal* : c'est le plus simple de tous les mouvements périodiques; on l'appelle encore *mouvement pendulaire* ou *mouvement harmonique.*

La quantité x s'appelle l'*élongation* ou *amplitude instantanée de la vibration,* M est l'amplitude maximale et φ est *la phase.*

L'élongation x varie donc sinusoïdalement, et le coefficient de t est la pulsation ω :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

La période est

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

On remarquera qu'elle est indépendante de la masse m.

A Paris où $g = 9{,}8098$ m/s^2, le pendule qui bat la seconde (soit $T = 2$ s) a une longueur

$$l = 0{,}99394 \text{ m},$$

en supposant négligeable le poids du fil.

8.5 Oscillations d'un solide autour d'un axe. Étudions plus généralement les oscillations d'un solide tournant autour d'un axe. (Le cas du n° 8.4 est celui d'un solide dont la masse est concentrée en un point, tournant autour d'un axe horizontal sous l'action de la pesanteur.)

Soient I le moment d'inertie et θ l'angle d'écart avec la position d'équilibre. Rappelons que le produit $I\, d^2\theta/dt^2$ est égal à la somme des moments des forces par rapport à l'axe. Plaçons-nous dans le cas où les forces appliquées au corps ont un moment résultant par rapport à l'axe qui tend à ramener le corps à sa position d'équilibre. Supposons que le moment résultant est proportionnel à θ ; l'équation du mouvement est

$$I\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = -C\theta, \qquad \text{où} \qquad C > 0.$$

Les calculs se poursuivent alors exactement comme dans le cas du pendule simple. On obtient

$$\theta = \theta_0 \sin \omega t,$$

où

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I}}.$$

La période est

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}.$$

Elle est indépendante de l'amplitude, et donc constante (dans la mesure où l'on peut confondre θ et $\sin\theta$).

Le mouvement précédent se rencontre lorsque le couple $C\theta$ est produit par la pesanteur, lorsque l'axe est horizontal, par la torsion d'un fil élastique, ou d'un ressort spiral ou à boudin, comme par exemple le balancier spiral d'une montre, ou le cadre mobile d'un appareil de mesures électriques, *lorsqu'on peut négliger les frottements.*

Cas du pendule simple. On retrouve le cas du pendule simple en écrivant que $I = ml^2$ et que le moment est $mgl \sin\theta \approx mgl\theta$. Ainsi,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Cas du ressort spiral. Soit un petit anneau métallique (de section rectangulaire), de rayons extérieur et intérieur R_1 et R_2, et d'épaisseur e (Fig. 8.3).

Un ressort spiral est fixé en un point P extérieur, et son autre extrémité est fixée rigidement à l'un des bras de ce volant. Soit $OA = a$. On fait tourner le volant d'un angle θ_0 à partir de sa position d'équilibre, le ressort exerce alors une force F perpendiculaire au bras du balancier, puis on abandonne le système à lui-même.

Si l'on néglige le poids des bras, le moment d'inertie de ce volant est

$$I = \rho\,\frac{\pi e}{2}\,(R_1^4 - R_2^4),$$

où ρ est la masse volumique du métal.

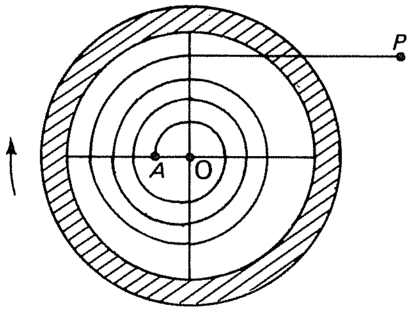


FIG. 8.3

Prenons la direction OA comme axe polaire et soit θ l'angle dont a tourné le volant au bout du temps t.

La période est

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I\theta_0}{Fa}} = 2\pi \sqrt{\frac{\rho\pi e(R_1^4 - R_2^4)\,\theta_0}{2Fa}}.$$

Telle est la période du balancier spiral d'une montre, et l'on voit aussitôt l'influence des divers facteurs : a, F, e, θ_0, ρ, R_1 et R_2 sur lesquels on peut agir.

Nous avons évidemment négligé les frottements des deux pivots, ainsi que la résistance de l'air.

Cas d'un aimant dans un champ magnétique. Soit un aimant allongé placé dans un champ magnétique d'induction B, dirigé suivant l'axe de l'aimant (Fig. 8.4). Si on le dévie d'un angle θ_0, l'aimant oscille autour de sa position d'équilibre.

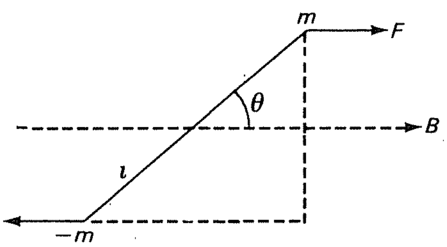


FIG. 8.4

La force F qui agit sur la masse magnétique m de chaque pôle est mB. Le moment du couple par rapport à l'axe est

$$-Fl \sin\theta = -mBl \sin\theta\,,$$

où l désigne la longueur totale de l'aimant. Le signe moins signifie qu'il s'agit d'un moment retardateur. En remplaçant sin θ par θ, on obtient $C = mBl$. D'où

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mBl}}.$$

8.6 Mouvement rectiligne d'un point attiré ou repoussé par un point fixe proportionnellement à la distance (Fig. 8.5).

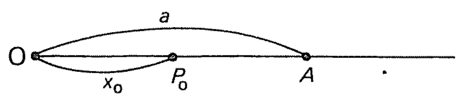


FIG. 8.5

Soient P_0 la position initiale d'abscisse x_0, v_0 la mesure de la vitesse initiale (portée par la droite OP_0) et m la masse du mobile P. La force qui agit sur P est

$$F = kx\,.$$

La loi fondamentale de la dynamique s'écrit

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = kx. \tag{1}$$

1. Cas de l'attraction. Alors k est strictement négatif, et nous pouvons poser $k = -m\omega^2$. L'équation (1) devient

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0\,.$$

Nous reconnaissons l'équation du mouvement d'un pendule. La solution générale est

$$x = K_1 \cos \omega t + K_2 \sin \omega t\,.$$

Si $t = 0$, alors $x = x_0$, d'où $K_1 = x_0$. De plus,

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -K_1\omega \sin\omega t + K_2\omega\cos\omega t\,.$$

Pour $t = 0$, $v = v_0$, d'où $K_2 = v_0/\omega$. Finalement,

$$x = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t = M\sin(\omega t + \varphi)$$

avec

$$M^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{x_0\omega}{v_0}.$$

Le coefficient de t est la pulsation ω, donc la période T est

$$T = \frac{2\pi}{\omega};$$

elle est indépendante des conditions initiales.

Application. Problème du ressort vertical. *Un point pesant P attiré par un point fixe A proportionnellement à la distance* (*Fig.* 8.6),

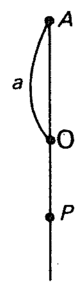


FIG. 8.6

est placé en O à une distance $OA = a$ au-dessous du point A, l'attraction de A sur le poids P est opposée au poids P. Trouver l'équation du mouvement du poids P en supposant qu'il soit abandonné sans vitesse initiale au point A. Quelle est la durée de l'oscillation du poids P et quelle est sa vitesse quand il arrive en O ? On néglige la résistance de l'air.

Application numérique : $a = 0{,}1$ m, $g = 9{,}80$ m/s^2.

Notons x la distance de P à l'origine A, à un instant quelconque et comptée positivement vers le bas. La force attractive est de la forme $-Kx$, dirigée en sens inverse du poids. L'équation fondamentale de la dynamique s'écrit donc

$$mg - Kx = m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

D'autre part, en prenant P en O, on voit que

$$mg = Ka.$$

D'où

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{mg}{a}x = mg$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{gx}{a} = g$$

équation différentielle du second ordre, incomplète, à coefficients constants et à second membre constant.

L'équation sans second membre n'est autre que l'équation du pendule; une solution évidente de l'équation avec second membre est $x = a$. Ainsi, la solution générale de l'équation avec second membre est

$$x = K_1 \cos \sqrt{\frac{g}{a}}\, t + K_2 \sin \sqrt{\frac{g}{a}}\, t + a .$$

Lorsque $t = 0$, $x = 0$ ainsi que $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, ce qui donne $K_1 = -a$ et $K_2 = 0$. Donc

$$x = a - a \cos \sqrt{\frac{g}{a}}\, t \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{ga} \sin \sqrt{\frac{g}{a}}\, t .$$

Le mouvement est sinusoïdal et la position de P oscille de 0 à $2a$. La période est

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{g}{a}}} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{10}{980}} = 0{,}63\,\mathrm{s} .$$

En O, $x = a$ et

$$t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{a}{g}} ;$$

d'où la vitesse

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{ag} = \sqrt{0{,}1 \times 9{,}8} = 0{,}99\ \mathrm{m/s} .$$

2. Cas de la répulsion. Cette fois k est strictement positif. Posons $k = m\omega^2$. L'équation (1) devient

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - \omega^2 x = 0 .$$

La solution générale est

$$x = k_1\, \mathrm{e}^{\omega t} + k_2\, \mathrm{e}^{-\omega t}$$

ou, ce qui est plus commode,

$$x = K_1 \operatorname{ch} \omega t + K_2 \operatorname{sh} \omega t .$$

Le calcul de K_1 et de K_2 s'effectue comme dans le cas précédent. On trouve

$$x = x_0 \operatorname{ch} \omega t + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sh} \omega t ,$$

expression qui ressemble étrangement à celle de l'attraction. (Il suffit en effet de changer ω en $\mathrm{j}\omega$.)

8.7 Mouvement plan d'un point attiré ou repoussé par un point fixe proportionnellement à la distance. On démontre que si un point P est attiré ou repoussé par un point fixe O (mouvement dit à accélération centrale), sa trajectoire est plane. Plus précisément, cette trajectoire est située dans le plan défini par O, la position initiale P_0 et la vitesse initiale V_0.

Dans le cas présent,

$$\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{OP}\,.$$

En projetant sur deux axes de coordonnées Ox et Oy, on se ramène deux fois au problème précédent :

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = kx \qquad m\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = ky\,.$$

Distinguons encore deux cas, suivant qu'il s'agit d'une attraction ou d'une répulsion.

1. Cas de l'attraction. Posons $k = -m\omega^2$. Alors

$$x = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \qquad y = y_0 \cos\omega t + \frac{w_0}{\omega}\sin\omega t\,,$$

où v_0 et w_0 sont les composantes du vecteur $\vec{V}_0$.

Pour déterminer la trajectoire, éliminons le temps t. Calculons à cet effet cos ωt et sin ωt, et écrivons que la somme de leurs carrés est 1 :

$$\cos\omega t = \frac{xw_0 - yv_0}{x_0 w_0 - y_0 v_0} \qquad \sin\omega t = \omega\,\frac{yx_0 - xy_0}{x_0 w_0 - y_0 v_0}$$

$$\left(\frac{xw_0 - yv_0}{x_0 w_0 - y_0 v_0}\right)^2 + \omega^2\left(\frac{yx_0 - xy_0}{x_0 w_0 - y_0 v_0}\right)^2 = 1\,.$$

On reconnaît l'équation d'une ellipse de centre O. Cette ellipse sera parcourue indéfiniment dans le même sens. La durée d'une révolution est $T = 2\pi/\omega$; elle ne dépend ni de la position initiale ni de la vitesse initiale.

Si y_0 et v_0 sont nuls, cette équation se simplifie :

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\omega\,\frac{y}{w_0}\right)^2 = 1\,.$$

2. Cas de la répulsion. Posons $k = m\omega^2$. Alors

$$x = x_0 \operatorname{ch}\omega t + \frac{v_0}{\omega}\operatorname{sh}\omega t \qquad y = y_0 \operatorname{ch}\omega t + \frac{w_0}{\omega}\operatorname{sh}\omega t\,.$$

On élimine t en écrivant que $\operatorname{ch}^2\omega t - \operatorname{sh}^2\omega t = 1$. On obtient l'équation d'une hyperbole de centre O.

Lorsque y_0 et w_0 sont nuls, il reste

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - \left(\omega\,\frac{y}{w_0}\right)^2 = 1\,.$$

8.8 Oscillations d'une colonne liquide (Fig. 8.7). Soit un tube en U de section S renfermant un liquide quelconque. Si on provoque une dénivellation x d'un côté vers le bas, le niveau s'élève de la même quantité x de l'autre côté. Le liquide va se mettre en mouvement sous l'action de la force motrice qui est le poids de la colonne de liquide de hauteur $2x$; et si δ est la masse volumique du liquide et g l'accélération due à la pesanteur, cette force est

$$F = S2x\delta g\,.$$

En négligeant les frottement et en appelant :

m la masse *totale* du liquide,
l la longueur du tube occupé par le liquide,

on a

$$m = lS\delta\,.$$

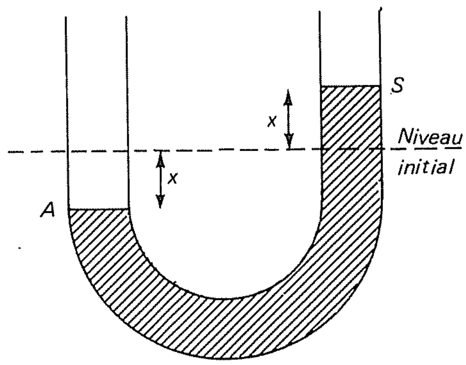


FIG. 8.7

L'équation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -\,S\,2x\delta g$$

avec le signe moins, car la force est dirigée en sens inverse du déplacement de x, puisque nous avons compté x *à partir de la ligne de niveau initial*. On aura donc l'équation du mouvement

$$lS\delta\,\frac{d^2x}{dt^2} = -\,S\,2x\delta g$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2g}{l}x = -\omega^2 x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

c'est un mouvement sinusoïdal, et l'on remarque, par rapport à l'équation que l'on avait trouvée lors du calcul de la période d'un pendule, que le liquide oscille comme un pendule de longueur $l/2$. L'élongation est

$$x = x_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

et la période T est

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}};$$

elle est indépendante de la section du tube et de δ, donc de la nature du liquide. Mais il n'en serait plus de même si on avait tenu compte de l'amortissement produit par le frottement du liquide dans le tube.

8.9 Calcul de la période d'un circuit oscillant. On sait qu'un circuit oscillant, ou circuit d'accord, est formé d'une bobine branchée sur un condensateur. Appelons C la capacité du condensateur et L l'inductance de la bobine. Le condensateur, ayant été chargé, se décharge dans la bobine (Fig. 8.8).

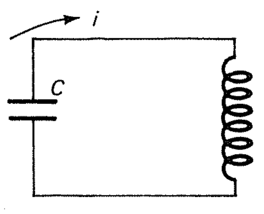


FIG. 8.8

Plaçons-nous à un instant quelconque de la décharge et soient :

i l'intensité du courant à ce moment,
q la charge électrique qui existe à ce moment dans le condensateur,
$v = q/C$ la différence de potentiel aux bornes du condensateur à cet instant.

Nous savons que la f.é.m. résultant de la variation de flux dans la bobine est

$$e = -L\frac{di}{dt}.$$

La loi de Kirchhoff nous donne alors

$$i = \frac{v+e}{R}\,.$$

On en tire

$$Ri = v - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

Comme $v = q/C$, $i = -\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t = -\mathrm{d}^2q/\mathrm{d}t^2$, nous obtenons l'équation différentielle

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = 0\,.$$

Nous ferons un peu plus loin une étude complète de cette équation, mais pour l'instant, faisons une étude simplifiée en supposant $R = 0$ (très souvent on peut, en effet, négliger R); il reste alors

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{q}{LC} = 0\,.$$

Le courant est donc sinusoïdal, et

$$T = 2\pi\sqrt{LC}\,;$$

c'est la célèbre formule de Thomson.

8.10 Propagation de la chaleur le long d'une barre. Soit B une barre, dans l'air, supposée très longue (théoriquement infinie) dont une extrémité est encastrée dans un milieu dont la température est plus élevée que celle de l'air ambiant (Fig. 8.9). On demande la distribution de la température le long de la barre lorsque le régime permanent est atteint.

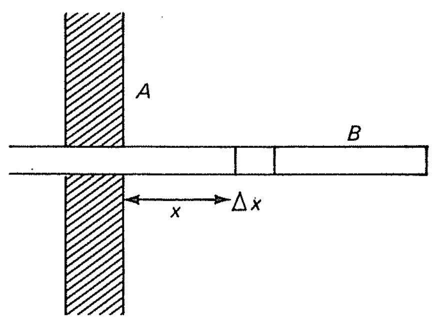


FIG. 8.9

Soit θ l'excès de la température au point d'abscisse x sur la température ambiante; nous nous proposons de déterminer θ en fonction de x.

La quantité de chaleur qui traverse la section S de la barre (par conduction) à la distance x est, pendant une seconde,

$$Q = -KS\frac{d\theta}{dx},$$

avec le signe moins car θ diminue si x augmente. Le coefficient K est la conductivité thermique du matériau.

A la distance $x+\Delta x$, cette quantité devient

$$Q-\Delta Q = -KS\left(\frac{d\theta}{dx}-\frac{d^2\theta}{dx^2}\Delta x\right),$$

et la différence

$$\Delta Q = -KS\frac{d^2\theta}{dx^2}\Delta x$$

est perdue par l'aire latérale (par convection) de la tranche Δx.

Calculons par ailleurs cette dernière quantité de chaleur perdue. Notons

p le périmètre de la tranche Δx;

α le coefficient de déperdition extérieure, qui dépend de l'état de rugosité de la surface extérieure, de sa nature et *aussi de sa couleur*.

La tranche Δx a une aire latérale égale à $p\,\Delta x$. La quantité de chaleur perdue en une seconde est

$$\Delta Q = -\alpha\theta p\,\Delta x\,.$$

En égalant ces deux valeurs de ΔQ, on obtient

$$-KS\frac{d^2\theta}{dx^2}\Delta x = -\alpha\theta p\,\Delta x\,.$$

Posons $m^2 = p\alpha/KS$; nous obtenons l'équation différentielle

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0\,.$$

La solution est

$$\theta = A\,e^{mx} + B\,e^{-mx}\,.$$

Supposons par exemple $m>0$. Puisque θ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, nous voyons que $A=0$. D'autre part, si $x=0$, $\theta=\theta_0$, d'où $B=\theta_0$. Ainsi,

$$\theta = \theta_0\,e^{-mx}\,.$$

La température décroît donc exponentiellement.

En pratique, en biologie par exemple, on prend une lame métallique mince que l'on replie en zig-zag (Fig. 8.10) et que l'on chauffe en A par une source de chaleur; on obtient ainsi, le long de cette lame, des températures constantes en chaque point, et variables en fonction de l'éloignement.

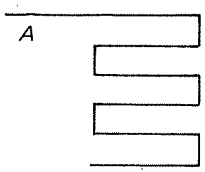


FIG. 8.10

MOUVEMENT DU CADRE D'UN GALVANOMÈTRE

8.11 Étude détaillée de la décharge d'un condensateur dans une bobine d'inductance. Cette étude est intéressante à plusieurs points de vue : d'abord au point de vue strictement mathématique, puis au point de vue radioélectrique, enfin elle se retrouve dans un grand nombre de phénomènes oscillatoires chaque fois qu'il y a de l'amortissement, par exemple le mouvement d'un cadre d'un galvanomètre, le le mouvement d'un navire, les vibrations d'un ressort, etc.

Ici, nous allons étudier en détail le fameux circuit oscillant qui est à la base de *tous* les circuits de la radio (Fig. 8.8). Considérons un condensateur de capacité C qui a été chargé sous une d.d.p. V; il possède une charge électrique

$$Q = CV$$

et une énergie potentielle

$$W = \tfrac{1}{2}CV^2$$

qui se manifestera par un dégagement de chaleur pendant la décharge.

Déchargeons ce condensateur dans une bobine dont la résistance est R et dont l'inductance sera désignée par L.

Nous avons déjà établi au n° 8.9 l'équation

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = 0. \tag{1}$$

Faisons plutôt intervenir la d.d.p. $v = q/C$; alors

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} = C\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}.$$

L'équation (1) devient

$$LC\,\frac{d^2v}{dt^2}+RC\,\frac{dv}{dt}+\frac{Cv}{C}=0$$

$$\boxed{\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{R}{L}\,\frac{dv}{dt}+\frac{v}{LC}=0}\,.$$

Posons pour simplifier l'écriture

$$\frac{R}{2L}=\alpha \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{LC}=\Omega^2\,;$$

nous obtenons l'équation fondamentale

$$\boxed{\frac{d^2v}{dt^2}+2\alpha\,\frac{dv}{dt}+\Omega^2\,v\;=\;0}\,.$$

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre. Le cas où $\alpha=0$ est celui de l'équation du pendule; nous n'y reviendrons plus.

Le polynôme caractéristique est

$$P=X^2+2\alpha X+\Omega^2.$$

Nous devons distinguer trois cas, suivant que le discriminant réduit,

$$\Delta'=\alpha^2-\Omega^2\,,$$

est strictement positif, nul ou strictement négatif.

Premier cas : $\alpha^2-\Omega^2>0$. C'est-à-dire $(R/2L)^2>1/LC$, ou encore

$$\boxed{R>2\,\sqrt{\frac{L}{C}}}\,.$$

Il y a deux racines réelles. Pour alléger l'écriture, posons $m=\sqrt{\alpha^2-\Omega^2}$. Les racines sont alors

$$r_1=-\alpha+m \qquad r_2=-\alpha-m\,.$$

La solution est donc

$$v=A\,e^{(m-\alpha)t}+B\,e^{-(m+\alpha)t}.$$

De plus,

$$i=-\frac{dq}{dt}=-C\,\frac{dv}{dt}=-C[A(m-\alpha)\,e^{(m-\alpha)t}-B(m+\alpha)\,e^{-(m+\alpha)t}]\,.$$

Calcul des constantes. Les conditions initiales sont, pour $t=0$,

$$v = V \qquad \text{et} \qquad i = 0\,.$$

Les constantes A et B sont donc données par le système

$$\begin{cases} A+B=V \\ A(m-\alpha) - B(m+\alpha)=0\,. \end{cases}$$

Les formules données au tome 1 conduisent aussitôt à

$$A = \frac{V(m+\alpha)}{2m} \qquad B = \frac{V(m-\alpha)}{2m}\,.$$

D'où

$$v = \frac{V}{2m}\,[(m+\alpha)\,\mathrm{e}^{(m-\alpha)t} + (m-\alpha)\,\mathrm{e}^{-(m+\alpha)t}]$$

et

$$\begin{aligned} i &= -\frac{V}{2m}\,C[(m+\alpha)(m-\alpha)\,\mathrm{e}^{(m-\alpha)t} - (m-\alpha)(m+\alpha)\,\mathrm{e}^{-(m+\alpha)t}] \\ &= \frac{VC\Omega^2}{2m}\,[\mathrm{e}^{(m-\alpha)t} - \mathrm{e}^{-(m+\alpha)t}] \end{aligned}$$

(compte-tenu du fait que $m^2-\alpha^2 = -\Omega^2$). *On remarquera que les coefficients* $m-\alpha$ *et* $-(m+\alpha)$ *sont tous deux strictement négatifs.*

Tracé des graphes. La fonction v, somme de deux exponentielles décroissantes, est elle-même décroissante. La dérivée est proportionnelle à $i(i = -C\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)$; elle s'annule donc lorque $t=0$, ce qui montre que la tangente au point d'arrêt est horizontale. Lorsque t tend vers $+\infty$, v tend vers 0; l'axe Ox est asymptote au graphe de v.

Pour étudier la variation de i, remarquons que

$$i = \frac{VC^2}{m}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{sh}\,mt\,.$$

Donc

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{VC^2}{m}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}(-\alpha\,\mathrm{sh}\,mt + m\,\mathrm{ch}\,mt)\,,$$

expression s'annulant si et seulement si $\mathrm{th}\,mt = m/\alpha$. Nous pouvons alors dresser le tableau de variation :

t	0		$\dfrac{1}{m}$ Arg th m/α		$+\infty$
i'		$+$	0	$-$	
i	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$\left(\text{Rappelons que Arg th}\,\dfrac{m}{\alpha} = \tfrac{1}{2}\ln\dfrac{\alpha+m}{\alpha-m}.\right)$

Ainsi, chose curieuse, v décroît lentement, et cependant i passe par un maximum, correspondant bien entendu au point d'inflexion de v, puisque v'' s'annule en même temps que i' (Fig. 8.11).

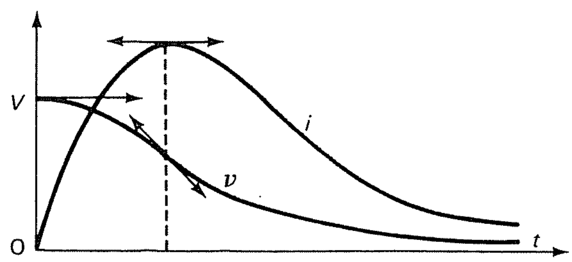


FIG. 8.11

Deuxième cas : $\alpha^2 - \Omega^2 = 0$. C'est-à-dire $(R/2L)^2 = 1/LC$, ou encore

$$\boxed{R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}}\,.$$

C'est la résistance critique, elle est toujours très grande en radio, supérieure à 1000 ohms. En effet, dans les bons circuits de radio le rapport L/C est toujours supérieur à 400 000, prenons même 10^6, d'où

$$R = 2\sqrt{10^6} = 2\,000 \text{ ohms}.$$

Il y a une racine double, à savoir $r = -\alpha$. La solution est donc

$$v = e^{rt}\,(A+Bt) = e^{-\alpha t}\,(A+Bt).$$

De plus,

$$i = -\frac{C\,dv}{dt} = -C[(A+Bt)\,(-\alpha)\,e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t}B].$$

Calcul des constantes. Un calcul analogue au précédent fournit aussitôt

$$\boxed{\begin{aligned} v &= V\,\mathrm{e}^{-\alpha t}(1+\alpha t) \\ i &= CV\alpha^2 t\,\mathrm{e}^{-\alpha t} \end{aligned}}$$

Tracé des graphes. Puisque $i = -C\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$, on voit que v est encore décroissante. D'autre part,

$$i' = CV\alpha^2\,\mathrm{e}^{-\alpha t}(1-\alpha t)\,.$$

Donc i passe par un maximum lorsque $t = 1/\alpha$, correspondant bien sûr à un point d'inflexion pour v. On peut remarquer que cette valeur $1/\alpha$ est strictement inférieure à celle que l'on a trouvée dans le premier cas; donc le deuxième cas correspond pratiquement à la décharge du condensateur dans le temps *minimal.*

Les graphes ont la même allure que dans le cas précédent (Fig. 8.11).

Troisième cas : $\alpha^2 - \Omega^2 < 0$. C'est-à-dire $(R/2L)^2 < 1/LC$, ou encore

$$\boxed{R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Il y a deux racines complexes conjuguées. Pour alléger l'écriture, posons $m = \sqrt{\Omega^2 - \alpha^2}$. Les racines sont alors

$$r_1 = -\alpha + \mathrm{j}\,m \qquad r^2 = -\alpha - \mathrm{j}m\,.$$

La solution est donc

$$v = \mathrm{e}^{-\alpha t}(M\cos mt + N\sin mt)\,.$$

De plus,

$$\begin{aligned} i &= -C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ &= -C[(M\cos mt + N\sin mt)\,(-\alpha)\,e^{-\alpha t} + \\ &\quad + \mathrm{e}^{-\alpha t}(-Mm\sin mt + Nm\cos mt)] \\ &= -C\,\mathrm{e}^{-\alpha t}[(Nm - M\alpha)\cos mt - (N\alpha + Mm)\sin mt]\,. \end{aligned}$$

Calcul des constantes. Les conditions initiales conduisent cette fois à

$$M = V \qquad M\alpha - Nm = 0\,.$$

D'où $N = M\alpha/m = V\alpha/m$ et

$$v = V\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\cos mt + \frac{\alpha}{m}\sin mt\right).$$

Si on pose tg $\varphi = m/\alpha$, on en déduit

$$\cos\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{m^2+\alpha^2}} = \frac{\alpha}{\Omega} \qquad \sin\varphi = \frac{m}{\sqrt{m^2+\alpha^2}} = \frac{m}{\Omega}\,;$$

d'où

$$v = V\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\frac{\sin\varphi\,\cos mt+\cos\varphi\,\sin mt}{\sin\varphi}\right) = V\,\frac{\Omega}{m}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(mt+\varphi)$$

$$i = \frac{CV\Omega^2}{m}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin mt\,.$$

Mais, en général, α^2 *est beaucoup plus petit que* Ω^2, aussi peut-on écrire

$$m^2 = \Omega^2-\alpha^2 \approx \Omega^2 \qquad \text{et} \qquad m \approx \Omega\,;$$

donc tg $\varphi = \Omega/\alpha$ est presque infinie et φ est égal environ à $\pi/2$, et comme

$$\cos mt = \sin\left(\frac{\pi}{2} - mt\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + mt\right),$$

on obtient finalement

$$\boxed{\begin{aligned} v &= V\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= V\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\Omega t\,, \\ i &= CV\Omega\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\Omega t \end{aligned}}\;;$$

ce sont les équations cherchées, qui montrent que l'on a *une décharge sinusoïdale amortie.*

La décharge est, dans ce cas, oscillante.

Tracé des graphes. On voit que v est décalé de $\pi/2$ sur i. Pour étudier la variation de i, calculons la dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{CV\Omega^2}{m}\,(-\alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin mt+\mathrm{e}^{-\alpha t}\,m\,\cos mt)\,.$$

Cette dérivée s'annule donc si

$$-\alpha\,\sin mt+m\,\cos mt = 0$$

soit tg $mt = m/\alpha \approx \Omega/\alpha$. Les abscisses des extrémums sont équidistantes, puisque la fonction $t \mapsto$ tg mt est périodique.

La période est

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}}} \, .$$

C'est la formule exacte trouvée par William Thomson.

En pratique, α^2 est très petit devant Ω^2, et il reste

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{LC}} \, .$$

La fréquence peut varier de quelques hertz à plusieurs dizaines de milliers de mégahertz (1 MHz = 1 000 kHz).

L'intensité s'annule lorsque $mt = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$, etc., tandis que les extrémums sont atteints lorsque $\operatorname{tg} mt = \Omega/\alpha$. Donc les maximums de *i ne sont pas au milieu de la demi-période, mais un peu avant.* Il faut d'ailleurs qu'il en soit ainsi pour que, ainsi qu'on va le voir, le graphe de *i* soit tangent à celui de l'exponentielle $CV\Omega\, e^{-\alpha t}$. On obtient ainsi la courbe de la figure 8.12.

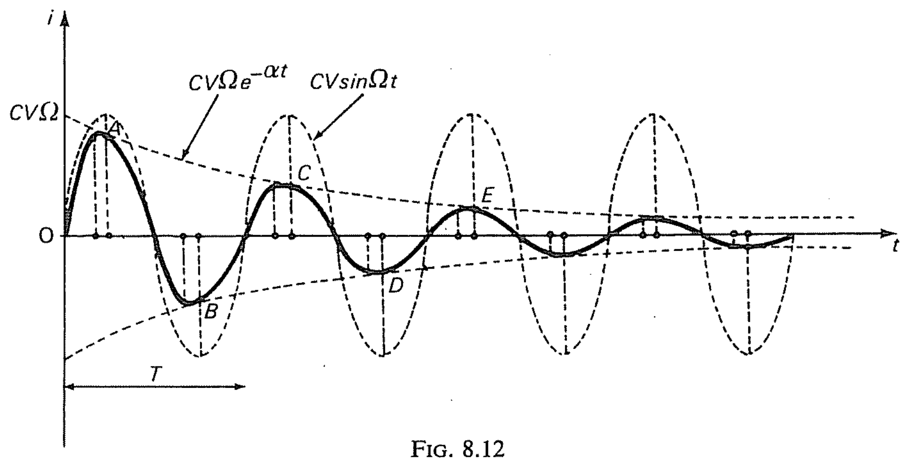


FIG. 8.12

Aux points A, B, C, D qui correspondent au milieu des arches de la sinusoïde $\sin \Omega t$, il est facile de voir que la courbe amortie du courant est tangente à l'exponentielle

$$I = CV\Omega\, e^{-\alpha t} \, .$$

En effet, la courbe amortie

$$i = CV\Omega\, e^{-\alpha t} \sin \Omega t$$

a même amplitude que I pour $\Omega t = \pi/2$.

La tangente en A, B, C, D, a pour valeur, pour la courbe du courant

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = CV\Omega[-\alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\Omega t+\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\Omega\cos\Omega t]$$

et pour $\Omega t=\pi/2$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = CV\Omega(-\alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha t}+0) = -\alpha CV\Omega\,\mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

Or, cette valeur est la même que celle de la tangente à la courbe de I; en effet,

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = CV\Omega(-\alpha)\,\mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

On voit enfin que les amplitudes décroissent d'autant plus vite que $\alpha = R/2L$ est plus grand, c'est pourquoi α est appelé *le coefficient d'amortissement* du circuit oscillant.

La quantité Ω qui est le coefficient de t dans le sinus est la pulsation propre du circuit oscillant

$$\boxed{\Omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{2\pi}{T}}$$

et *la fréquence propre* f du circuit oscillant est $f=1/T$.
On remarque que l'on a

$$\Omega^2 = \frac{1}{LC}$$

d'où

$$\boxed{LC\Omega^2 = 1},$$

formule qui *ressemble* à celle de la résonance des circuits de réception. Ici, en effet, il n'est pas question de résonance, puisque c'est un circuit qui oscille spontanément, c'est un *générateur* d'oscillations amorties.

On sait qu'un tel circuit, relié convenablement à une lampe amplificatrice, donnera des oscillations entretenues d'amplitude constante, que nous étudierons plus loin.

On peut remarquer que, dans la décharge amortie, l'amplitude maximale de la première oscillation est

$$I_{\max} = CV\Omega$$

et, comme V et Ω sont très grands, cette intensité peut atteindre, dans les postes d'émission de radio, plusieurs dizaines de milliers d'ampères.

Application numérique. Prenons

$$C = 7\ 10^{-7}\ \text{farad} \qquad L = \frac{1}{7\ 10^5}\ \text{henry} \qquad R = 0{,}05\ \text{ohm}.$$

Alors

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 17\,500$$

$$T = \frac{1}{150\,000}\,\text{s}.$$

Si $V = 80\,000$ volts, on trouve pour la première amplitude maximale

$$I = 56\,000\ \text{ampères!}$$

mais au bout de 115 oscillations (soit au bout de 1/1 300 de seconde) l'amplitude est réduite à 1/2 ampère, soit 1/100 000 de sa valeur initiale.

Amortissement des oscillations. Faisons le rapport de deux amplitudes distantes de une période

$$i_t = I\ \mathrm{e}^{-\alpha t} \sin \Omega t$$

et

$$i_{t+T} = I\ \mathrm{e}^{-\alpha(t+T)} \sin \Omega(t+T),$$

ce qui donne

$$\frac{i_t}{i_{t+T}} = \frac{I\ \mathrm{e}^{-\alpha t} \sin \Omega t}{I\ \mathrm{e}^{-\alpha(t+T)} \sin \Omega(t+T)};$$

or, les sinus sont égaux, et il reste

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{e}^{-\alpha T}} = e^{\alpha T}.$$

Donc les maximums successifs décroissent en progression géométrique, de raison $\mathrm{e}^{\alpha T}$.

Prenons-en le logarithme népérien :

$$\alpha T = \ln \frac{i_1}{i_2};$$

cette quantité s'appelle *décrément logarithmique* et se note δ

$$\boxed{\alpha T = \delta},$$

elle caractérise la rapidité de décroissance des oscillations.

On peut écrire

$$\delta = \alpha \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{R}{2L} \cdot \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{\pi}{L\Omega/R},$$

or, en pratique, les radio-techniciens désignent par Q la quantité $L\Omega/R$ (ou *coefficient de surtension*); on obtient ainsi la formule curieuse

$$\boxed{\delta = \frac{\pi}{Q}}\,.$$

Il faut remarquer que $\delta = \alpha T$ est un nombre pur, *sans dimension*; c'est un coefficient, qui est une caractéristique du circuit oscillant.

En pratique, Q varie de 100, pour les mauvais circuits, à 500 pour les très bons circuits de la radio. Cependant, avec des cavités résonnantes on arrive à $Q = 10\,000$ *et même plus*, ceci avec les ondes de très haute fréquence du radar où l'on utilise des fréquences allant jusqu'à 10 000 et même 30 000 mégacycles/s, ce qui correspond à des longueurs d'onde de 3 cm et même 1 cm, produites par des magnétrons à cavités résonnantes.

8.12 Analogie mécanique. Soit un corps de masse m attaché à un point fixe au moyen d'un ressort, le tout étant placé dans un milieu visqueux. Si on écarte le corps de sa position d'équilibre, il y revient après une série d'oscillations amorties ou périodiques. Appelons x l'élongation du mobile à un instant t quelconque, et supposons que la résistance due au fluide soit proportionnelle à la vitesse; c'est donc une force retardatrice de la forme $r\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, où r est le coefficient de frottement.

D'autre part, la force élastique due au ressort est évidemment proportionnelle au déplacement x, soit $F_1 = Kx$. On aura donc, en appliquant la formule fondamentale de la mécanique et en écrivant que la somme de toutes les forces est nulle, y compris la force d'inertie $m\,\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + r\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + Kx = 0\,.$$

En comparant à l'équation étudiée plus haut,

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = 0\,,$$

on voit qu'à la charge q correspond l'élongation x, au courant $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ correspond la vitesse $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, à la résistance ohmique R correspond le coefficient de frottement, à l'inductance L correspond la masse m du corps, et à la capacité C correspond $1/K$, où K est le coefficient d'élasticité.

Enfin, à l'énergie électromagnétique $1/2\,Li^2$ de la bobine correspond l'énergie cinétique $1/2\,mv^2$. Il y a analogie complète entre ces phénomènes électriques et mécaniques.

8.13 Mouvement du cadre mobile d'un appareil de mesures électriques. Nous pouvons aussi appliquer les considérations précédentes à l'étude du cadre d'un appareil de mesures électriques (balistique ou autre), suspendu à un fil de torsion ou placé sur deux pivots et muni de deux ressorts spiraux s'opposant à la rotation.

Appelons :

I le moment d'inertie de l'équipage mobile par rapport à l'axe,
θ l'angle de rotation au bout d'un temps t,
K une constante qui dépend de l'amortissement du cadre (celui-ci est dû à la résistance de l'air ainsi qu'à l'effet retardateur dû aux courants de Foucault),
C une constante qui dépend de la torsion du fil ou des ressorts spiraux.

Il y a deux causes qui s'opposent au mouvement :

1° le couple de torsion du fil ou des ressorts, et qui est proportionnel à l'angle θ, soit $C\theta$,

2° un amortissement dû à l'air, ou à une cause électrique, et qui est proportionnel à la vitesse de rotation $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ du cadre.

La formule fondamentale de la mécanique pour les corps tournant nous donne ici

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -K\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} - C\theta\,;$$

on obtient alors l'équation classique

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + K\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + C\theta = 0\,,$$

donnant la valeur de l'angle θ en fonction du temps t.

Si $4IC > K^2$, *la solution est sinusoïdale*, et en posant

$$\Omega^2 = \frac{C}{I} - \frac{K^2}{4I^2} \qquad \text{et} \qquad \alpha = \frac{K}{2I}$$

on obtient, comme solution de l'équation différentielle,

$$\theta = \mathrm{e}^{-\alpha t}(C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t)$$
$$\theta = \theta_0\,\mathrm{e}^{-\alpha t} \sin(\Omega t - \varphi)\,,$$

exactement comme pour la décharge oscillante d'un condensateur dans une bobine d'inductance.

Si $4IC < K^2$, on trouve une somme de deux exponentielles, le système n'est plus périodique, et le mouvement est monotone.

OSCILLATIONS FORCÉES

8.14 La résonance. Considérons un point de masse m, soumis à une force d'attraction proportionnelle à la distance x à un point fixe O, sans amortissement (voir n° 8.7). L'équation du mouvement est

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 .$$

La solution générale est

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t .$$

Supposons maintenant que ce système, qui est capable d'osciller avec la pulsation propre ω_0, soit soumis à une cause extérieure sinusoïdale de pulsation ω. L'équation du mouvement devient

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = a \sin \omega t .$$

Si $\omega \neq \omega_0$, la théorie générale (voir n° 7.10) conduit à chercher une solution de la forme

$$x = C \sin(\omega t + \varphi) , \qquad \text{où} \qquad C > 0 .$$

On trouve aussitôt

— si $\omega < \omega_0$, $\quad C = \dfrac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \varphi = 0 ;$

— si $\omega > \omega_0$, $\quad C = \dfrac{a}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad \varphi = \pi .$

Il en résulte que si $\omega < \omega_0$, le mouvement est en phase, et si $\omega > \omega_0$, le mouvement est en opposition de phase.

Si $\omega = \omega_0$, il convient de chercher une solution de la forme

$$x = (\alpha t + \beta) \sin \omega_0 t + (\gamma t + \delta) \cos \omega_0 t .$$

Un calcul analogue à celui du n° 7.11, exemple 10, conduit à

$$x = -\frac{a}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t ,$$

expression non bornée.

De plus, l'expression de C pour $\omega \neq \omega_0$ tend vers l'infini si ω tend vers ω_0. On dit qu'il y a *résonance* lorsque $\omega = \omega_0$. *L'amplitude du mouvement devient considérable, et il y a apparition de forces énormes.*

Ainsi, la résonance (ici mécanique) permet, avec de faibles forces, d'obtenir des effets intenses, et même violents.

On obtient en radio, avec des circuits oscillants, des effets analogues, ce qui permet d'obtenir des courants intenses et des tensions très élevées ou surtensions, très utiles pour les amplificateurs ou pour l'émission.

8.15 Cas de l'amortissement. Tenons compte cette fois de l'amortissement. L'équation des oscillations forcées devient

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\alpha \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \Omega^2 x = a \sin \omega t .$$

Si $\alpha \neq 0$, $\mathrm{j}\omega$ et $-\mathrm{j}\omega$ ne sont pas racines du polynôme caractéristique, on peut trouver une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme

$$x = A \sin \omega t + B \cos \omega t .$$

D'où

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -A\omega^2 \sin \omega t - B\omega^2 \cos \omega t ,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} a \sin \omega t &= (-A\omega^2 \sin \omega t - B\omega^2 \cos \omega t) + \\ &\quad + 2\alpha(A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t) + \Omega^2 (A \sin \omega t + B \sin \omega t) \\ &= (-A\omega^2 - 2\alpha\omega B + \Omega^2 A) \sin \omega t + (-\omega^2 B + 2\alpha\omega A + \Omega^2 B) \times \\ &\quad \times \cos \omega t . \end{aligned}$$

On en déduit par identification

$$\begin{cases} (\Omega^2 - \omega^2)\, A - 2\alpha\omega B = a \\ 2\alpha\omega A + (\Omega^2 - \omega^2)\, B = 0 . \end{cases}$$

La théorie des systèmes de Cramer (voir tome 1) conduit aussitôt à

$$A = a \frac{\Omega^2 - \omega^2}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2} \qquad B = -a \frac{2\alpha\omega}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2} .$$

On remarquera que $|B|$ est maximal (mais non infini) lorsque $\omega = \Omega$. Le phénomène de résonance est beaucoup moins marqué, du fait de l'amortissement.

Application numérique. Prenons $\alpha = 2$, $\Omega = 3$, $a = 3$ et $\omega = 2$. L'équation différentielle s'écrit alors

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 4 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 9x = 3 \sin 2t .$$

La solution est donc, pour l'amplitude instantanée de la vibration :

$$x = \frac{15}{89}\sin 2t - \frac{24}{89}\cos 2t$$

$$= \frac{3}{89}(5\sin 2t - 8\cos 2t),$$

ou bien

$$x = \frac{3}{\sqrt{89}}\sin(2t-\varphi)$$

avec tg $\varphi = 8/5$.

La période est :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ secondes}.$$

Remarquons que la solution générale de l'équation différentielle est :

$$x = M\,e^{-2t}\sin(\sqrt{5}t+\alpha) + \frac{3}{\sqrt{89}}\sin(2t-\varphi),$$

et, au bout de quelques périodes, on a bien :

$$x \approx \frac{3}{\sqrt{89}}\sin(2t-\varphi).$$

CHAPITRE 9

APPLICATIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU DEUXIÈME ORDRE AUX CIRCUITS ÉLECTRIQUES

Nous avons déjà étudié en détail au chapitre 8 l'exemple fondamental de la décharge d'un condensateur dans une inductance. Nous allons voir maintenant d'autres exemples faisant intervenir des équations différentielles linéaires du deuxième ordre.

9.1 Problème I. *On considère le circuit linéaire de la figure* 9.1 :

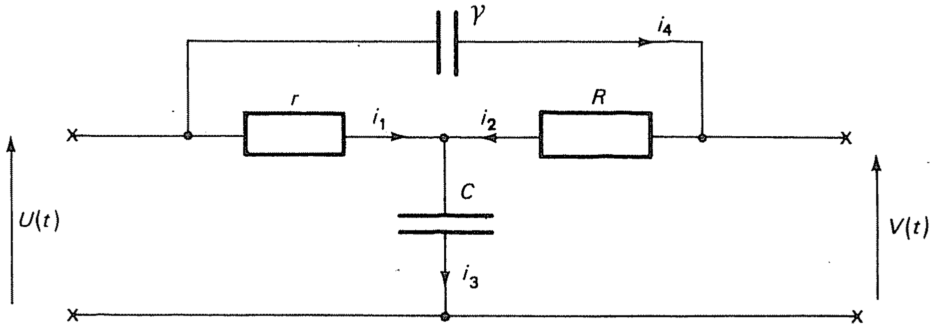


FIG. 9.1

a) *Former une équation différentielle vérifiée par la tension de sortie v, le signal d'entrée u étant supposé connu.*

b) *Le signal d'entrée étant un échelon d'amplitude E, déterminer la solution générale de l'équation différentielle précédente. Étudier la solution correspondant aux conditions initiales.*

c) *Déterminer la réponse à un signal sinusoïdal* $u(t) = U \sin \omega t$.

a) Les lois de l'électricité fournissent les relations suivantes :

$$i_1 = \frac{u - v_C}{r} \qquad (1) \qquad\qquad i_2 = \frac{v - v_C}{R} \qquad (2)$$

$$i_3 = Cv'_C \qquad (3) \qquad\qquad i_2 = i_4 = \gamma(u' - v') \qquad (4)$$

$$i_3 = i_1 + i_2 \qquad (5)$$

En éliminant i_1, i_2 et i_3 entre les relations (1), (2), (3) et (5), nous obtenons

$$Cv'_C = \frac{u - v_C}{r} + \frac{v - v_C}{R}. \qquad (6)$$

D'autre part, en éliminant i_2 entre (2) et (4), nous voyons que

$$v_C = v - R\gamma(u' - v').$$

D'où, par dérivation,

$$v'_C = v' - R\gamma(u'' - v'').$$

En reportant les valeurs de v_C et de v'_C dans la relation (6), nous obtenons finalement

$$v'' + \left(\frac{1}{R\gamma} + \frac{1}{rC} + \frac{1}{RC}\right) v' + \frac{1}{rRC\gamma}\, v = u'' + \left(\frac{1}{rC} + \frac{1}{RC}\right) u' + \frac{1}{rRC\gamma}\, u.$$

Posons

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R\gamma} + \frac{1}{rC} + \frac{1}{RC}\right), \qquad \Omega^2 = \frac{1}{rRC\gamma},$$

$$\varphi(t) = u'' + \left(\frac{1}{rC} + \frac{1}{RC}\right) u' + \Omega^2 u;$$

l'équation différentielle devient :

$$\boxed{v'' + 2\alpha v' + \Omega^2 v = \varphi(t)}\,.$$

Le polynôme caractéristique, $P = X^2 + 2\alpha X + \Omega^2$, a pour discriminant réduit

$$\Delta' = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{R\gamma} + \frac{1}{rC} + \frac{1}{RC}\right)^2 - \frac{1}{rRC\gamma} = \frac{(rC + R\gamma + r\gamma)^2 - 4RrC\gamma}{4(RrC\gamma)^2}.$$

or,

$$(rC + R\gamma + r\gamma)^2 - 4RrC\gamma > (rC - R\gamma)^2.$$

La solution générale de l'équation sans second membre est donc de la forme

$$v = e^{-\alpha t}(k_1\, e^{mt} + k_2\, e^{-mt}), \qquad \text{où} \qquad m = \sqrt{\Delta'}.$$

b) Dans le cas d'un échelon, pour tout instant $t > 0$, $u' = u'' = 0$ et $\varphi(t) = \Omega^2 E$. (On notera que u est seulement dérivable à droite à l'origine.) Il existe une solution évidente de l'équation avec second membre, à savoir $v = E$. La solution générale de l'équation avec second membre est donc

$$v = e^{-\alpha t}(k_1\, e^{mt} + k_2\, e^{-mt}) + E.$$

Déterminons les constantes en fonction des conditions initiales, en remarquant que le circuit est alors équivalent à celui de la figure 9.2a), ou encore à celui de la figure 9.2b).

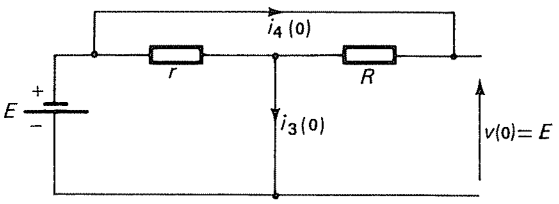


FIG. 9.2a

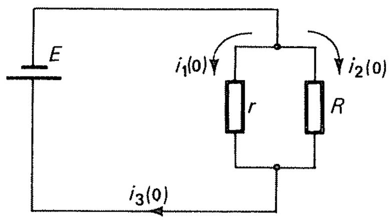


FIG. 9.2b

Nous voyons ainsi que $i_1(0) = E/r$, $i_2(0) = i_4(0) = E/R$. Il en découle que $v(0) = E$ et que $v'(0) = -E/\gamma R$ (le symbole $v'(0)$ désignant la dérivée à droite de v à l'origine). Les constantes k_1 et k_2 sont données par le système

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ r_1 k_1 + r_2 k_2 = -E/\gamma R . \end{cases}$$

D'où

$$k_2 = -k_1 = E/2R\gamma m$$

et

$$v = E\left(1 - \frac{e^{-\alpha t}}{R\gamma m} \operatorname{sh} mt\right).$$

L'étude est alors calquée sur celle de la décharge d'un condensateur dans une inductance (voir chapitre 8). La dérivée de v s'annule au point

$$\theta = \frac{1}{m} \operatorname{Arg\,th} \frac{m}{\alpha};$$

elle est négative avant, positive après. On vérifiera que la dérivée seconde s'annule lorsque

$$\operatorname{th} mt = \frac{2\alpha m}{\alpha^2 + m^2} = \frac{2 \operatorname{th} m\theta}{1 + \operatorname{th}^2 m\theta} = \operatorname{th} 2m\theta,$$

soit $t = 2\theta$. Le graphe est représenté figure 9.3.

c) Le second membre se présente sous la forme

$$\varphi(t) = [(\Omega^2 - \omega^2) \sin \omega t + 2\beta\omega \cos \omega t]\, U, \quad \text{où } \beta = \frac{1}{2C}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right).$$

Puisque $j\omega$ et $-j\omega$ ne sont pas racines de P, on peut chercher une solution particulière de la forme

$$v(t) = V \sin(\omega t + \psi) .$$

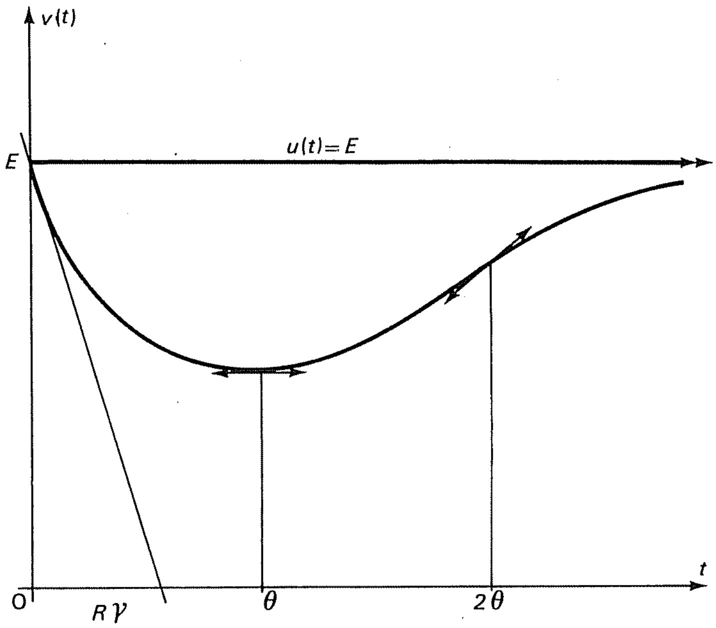


FIG. 9.3

On peut aussi adopter la notation complexe : on remplace v' par $j\omega v$, v'' par $j\omega v' = -\omega^2 v$, u' par $j\omega u$ et u'' par $-\omega^2 u$. Alors

$$[(\Omega^2-\omega^2)+2j\alpha\omega]\,v = [(\Omega^2-\omega^2)+2j\beta\omega]\,u\,,$$

d'où le coefficient de transfert T en notation complexe :

$$T = \frac{v}{u} = \frac{\Omega^2-\omega^2+2j\beta\omega}{\Omega^2-\omega^2+2j\alpha\omega}.$$

Le module d'un quotient étant le quotient des modules, et l'argument la différence des arguments, nous obtenons facilement

$$|T| = \sqrt{\frac{(\Omega^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}{(\Omega^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}}$$

et

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}(\psi_1-\psi_2) = \frac{\operatorname{tg}\psi_1-\operatorname{tg}\psi_2}{1+\operatorname{tg}\psi_1\operatorname{tg}\psi_2},$$

où

$$\operatorname{tg}\psi_1 = \frac{2\beta\omega}{\Omega^2-\omega^2}, \qquad \operatorname{tg}\psi_2 = \frac{2\alpha\omega}{\Omega^2-\omega^2}.$$

Ainsi,

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{2\beta\omega - 2\alpha\omega}{(\Omega^2-\omega^2)\left(1+\dfrac{4\alpha\beta\omega^2}{(\Omega^2-\omega^2)^2}\right)} = \frac{2\omega\,(\Omega^2-\omega^2)\,(\beta-\alpha)}{(\Omega^2-\omega^2)^2+4\alpha\beta\omega^2}$$

et, finalement,

$$v(t) = U|T|\,\sin(\omega t+\psi)\,.$$

9.2 Problème II. *On considère la cellule de la figure* 9.4.

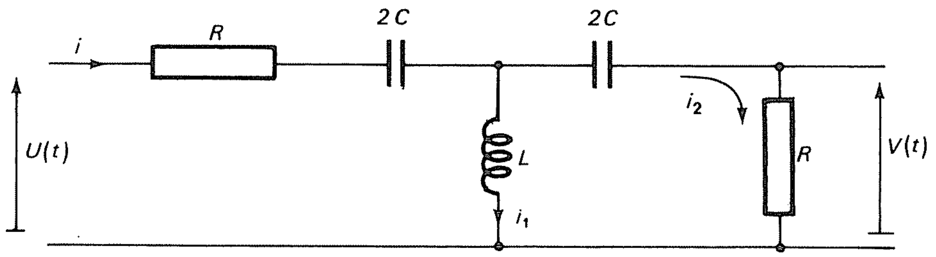


FIG. 9.4

a) *Établir les équations différentielles de ce circuit.*

b) *En déduire les expressions de i et de i_2 lorsque u est un échelon de tension E, sachant que les capacités ne comportent aucune charge à l'instant initial et que $R^2C=4L$.*

Représenter graphiquement les variations de i et de i_2 dans les mêmes axes de coordonnées.

a) Les équations du circuit s'écrivent

$$Ri' + \frac{i}{2C} + Li_1'' = u'$$

$$\frac{1}{2C}\,i_2 + Ri_2' = Li_1''\,.$$

Chacune de ces équations fait intervenir deux fonctions inconnues. Ajoutons et retranchons ces équations membre à membre :

$$R(i'+i_2') + \frac{i+i_2}{2C} = u' \tag{1}$$

$$R(i'-i_2') + (i-i_2)/2C = -2Li_1'' + u'\,. \tag{2}$$

Comme $i_1 = i - i_2$, cette équation s'écrit encore

$$R(i'-i_2') + (i-i_2)/2C = -2L(i''-i_2'') + u'\,. \tag{3}$$

Dans l'équation (1), il intervient seulement le groupement $x=i+i_2$; dans l'équation (3), il intervient seulement le groupement $y=i-i_2$. Grâce à ces changements de notations, on aboutit à

$$x'+x/2RC = u'/R \tag{4}$$

$$y''+2\alpha y'+\Omega^2 y = u'/2L\,, \tag{5}$$

où $2\alpha = R/2L$ et $\Omega^2 = 1/4LC$.

On en déduira x et y, puis

$$i = \tfrac{1}{2}(x+y) \qquad \text{et} \qquad i_2 = \tfrac{1}{2}(x-y)\,.$$

b) Dans le cas d'un échelon, $u' = 0$. L'équation (4) fournit

$$x = k\,\mathrm{e}^{-t/2RC}.$$

A l'instant initial, le circuit est équivalent à celui de la figure 9.5.

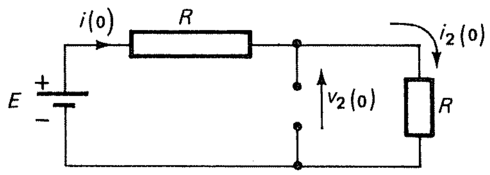


FIG. 9.5

Comme $i(0) = i_2(0) = E/2R$, nous voyons que $k = E/R$. Donc

$$i+i_2 = \frac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/2RC}\,.$$

Le polynôme caractéristique de (5) est

$$P = X^2 - \frac{R}{2L}\,X + \frac{1}{4LC}.$$

La condition imposée sur R et C signifie que $\Delta' = 0$. Le circuit travaille de ce fait en régime critique. La solution générale est de la forme

$$y = \mathrm{e}^{-\alpha t}(k_1 t + k_2)\,.$$

Les conditions initiales se traduisent par

$$y(0) = i(0)-i_2(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad v_L(0) = E/2 = Li_1'(0)\,.$$

Comme $i_1 = i-i_2$, nous voyons que

$$i_1'(0) = E/2L = i'(0)-i_2'(0) = y'(0)\,.$$

On en déduit que $k_2 = 0$, $k_1 = E/2L$ et donc que

$$y = \frac{E}{2L}\, t\, e^{-\alpha t}.$$

Finalement, compte tenu de la relation $R/2L = 2\alpha = 2\,\Omega$, nous obtenons

$$i = \frac{E}{2R}\,(e^{-\Omega t/2} + 2\,\Omega t\, e^{-\Omega t}) \qquad i_2 = \frac{E}{2R}\,(e^{-\Omega t/2} - 2\,\Omega t\, e^{-\Omega t}).$$

Posons pour simplifier $X = \Omega t$, $Y = 2Ri/E$ et $Y_2 = 2Ri_2/E$. L'étude des variations de i et de i_2 est ramenée à celles de

$$Y = e^{-X/2} + 2X\, e^{-X} \qquad Y_2 = e^{-X/2} - 2X\, e^{-X}.$$

Les dérivées sont

$$Y' = 2\,e^{-X}(1-X) - \tfrac{1}{2}e^{-X/2} \qquad Y_2' = 2\,e^{-X}(X-1) - \tfrac{1}{2}e^{-X/2}.$$

Il est impossible de calculer les valeurs qui annulent Y' et Y_2'. Mais la relation $Y' = 0$ équivaut à $1 - X - \frac{1}{4}\,e^{X/2} = 0$. Posons donc

$$Z = 1 - X - \tfrac{1}{4}\,e^{X/2};$$

alors

$$Z' = -1 - \tfrac{1}{8}\,e^{X/2},$$

expression à valeurs strictement négatives. Par suite, la fonction Z est strictement décroissante. Comme $Z(0) > 0$ et que $Z(1) < 0$, il existe une racine et une seule, comprise entre 0 et 1.

De même, la relation $Y_2' = 0$ équivaut à $1 - X + \frac{1}{4}\,e^{X/2} = 0$. Posons donc

$$Z_2 = 1 - X + \tfrac{1}{4}\,e^{X/2};$$

alors

$$Z_2' = -1 + \tfrac{1}{8}\,e^{X/2},$$

expression s'annulant pour $e^{X/2} = 8$, soit $X = 2 \ln 8 = 6 \ln 2 \approx 4{,}16$. D'où le tableau auxiliaire :

X	0		$6 \ln 2$		$+\infty$
Z_2'		$-$	0	$+$	
Z_2	$5/4$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+$

Le minimum m de Z_2, à savoir $3 - 6 \ln 2$, étant strictement négatif, la dérivée de Y_2 s'annule deux fois. D'où le tableau définitif :

X	0		X_1		X_2		$+\infty$
Y_2'		$-$	0	$+$	0	$-$	
Y_2	1	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0

Pour tracer le graphe de Y_2 (Fig. 9.6), on remarquera que Y_2 s'annule entre 0 et 1 et entre 4 et 5. L'axe OX est asymptote.

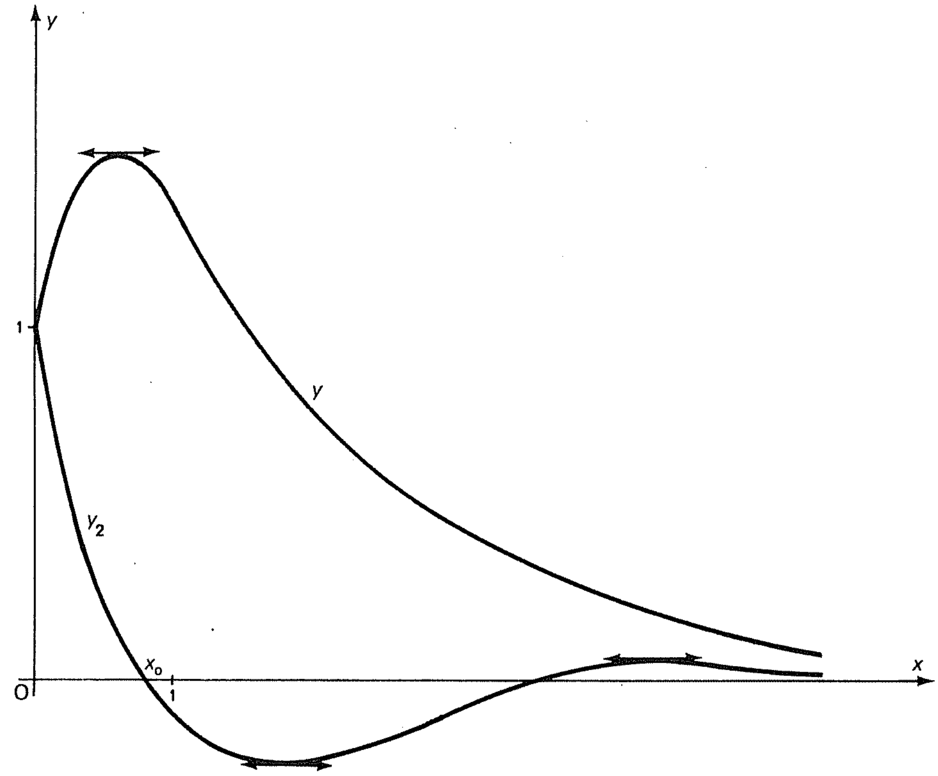


FIG. 9.6

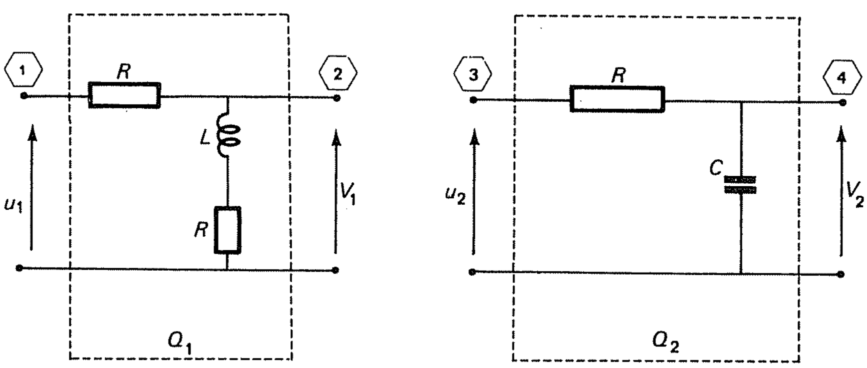


FIG. 9.7

9.3 Problème III. *On considère les deux quadripôles linéaires Q_1 et Q_2 de la figure* 9.7.
On branche les deux quadripôles suivant la figure 9.8, *et on charge le tout par une résistance R.*

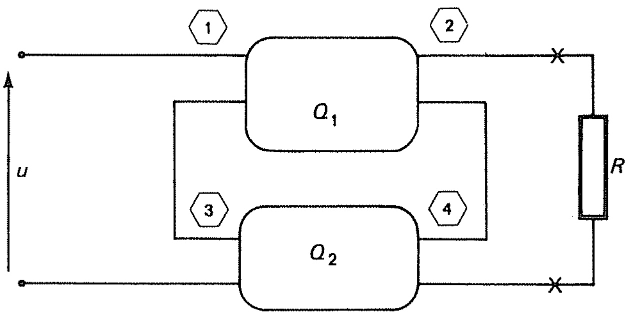


FIG. 9.8

Déterminer R en fonction de L et de C pour que l'amortissement soit critique. Dans ces conditions, déterminer l'énergie W emmagasinée dans le condensateur au bout du temps $t = 4L/3R$, *si l'on applique à ce montage un échelon d'amplitude E à l'instant* $t = 0$.

L'association série-série conduit aux schémas équivalents de la figure 9.9.

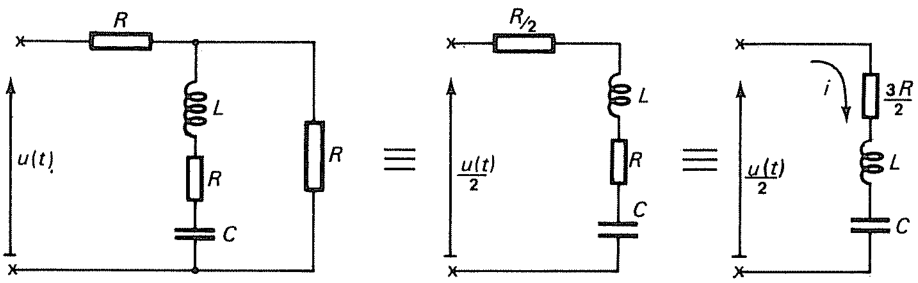


FIG. 9.9

L'intensité i dans le dernier circuit vérifie l'équation différentielle

$$i'' + \frac{3R}{2L}\, i' + \frac{i}{LC} = \frac{u'}{2L}\,.$$

Posons comme d'habitude $2\alpha = 3R/2L$ et $\Omega^2 = 1/LC$. L'équation différentielle devient

$$i'' + 2\alpha i' + \Omega^2 i = u'/2L\,.$$

Pour que l'amortissement soit critique, il faut et il suffit que $\alpha = \Omega$, c'est-à-dire

$$R = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Si u est un échelon, $u' = 0$, et la solution générale de l'équation différentielle est de la forme

$$i = \mathrm{e}^{-\alpha t}(k_1 t + k_2)\,.$$

Les conditions initiales se traduisent par

$$i(0) = 0 \qquad i'(0) = E/2L\,.$$

Donc $k_2 = 0$, $k_1 = E/2L$ et

$$i = \frac{E}{2L}\, t\, \mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

Pour calculer l'énergie emmagasinée, il faut connaître la tension v_C aux bornes du condensateur. Or,

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Une intégration par parties conduit aisément à

$$v_C(t) = \frac{E}{2}\,[1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}(\alpha t + 1)]\,.$$

Au bout du temps $\dfrac{4L}{3R} = \dfrac{1}{\alpha}$,

$$W = \frac{C}{2}\,[v_C^2(t)]_0^{1/\alpha} = C\,\frac{E^2}{8}\,(1 - 2\,\mathrm{e}^{-1})^2 = C\,\frac{E^2}{8}\left(1 - \frac{4}{e} + \frac{4}{e^2}\right) \approx 0{,}021\; CE^2\,.$$

9.4 Problème IV. *On considère le circuit de la figure* 9.10.

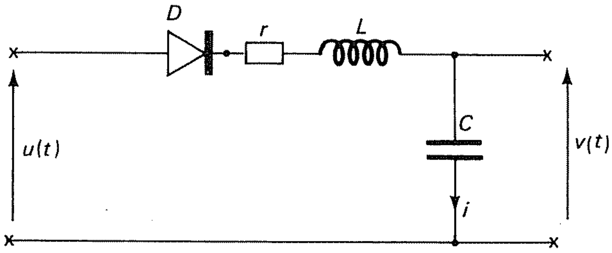


FIG. 9.10

a) *Déterminer une équation différentielle vérifiée par la réponse en tension v. On désignera par ρ la résistance directe de la diode D.*

b) *Étudier la variation de v lorsque u est un échelon d'amplitude E. On supposera l'amortissement oscillant.*

c) *Calculer l'énergie emmagasinée dans la capacité.*

a) Vu la présence de la diode, il n'existe d'intensité non nulle dans le circuit que pendant un intervalle de temps où la perturbation d'entrée est strictement positive. Dans ces conditions,

$$u(t) = (\rho+r)\,i+Li'+v\,.$$

Posons $R=\rho+r$. Comme $i=Cv'$, $i'=Cv''$ et

$$u = RCv'+LCv''+v\,,$$

soit

$$v''+2\alpha v'+\Omega^2 v = \Omega^2 u\,,$$

où $2\alpha=R/L$ et $\Omega^2=1/LC$. En dérivant, nous obtenons

$$i''+2\alpha i'+\Omega^2 i = \frac{u'}{L}.$$

b) Posons $m=\sqrt{\Omega^2-\alpha^2}$. Lorsque la diode est conductrice,

$$v = \mathrm{e}^{-\alpha t}(k_1\cos mt+k_2\sin mt)+E\,.$$

On trouve aisément $k_1=-E$, $k_2=-E\alpha/m$ et

$$v(t) = E\left[1-\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\cos mt+\frac{\alpha}{m}\sin mt\right)\right].$$

Il vient par dérivation

$$v'(t) = \frac{i(t)}{C} = \frac{E\Omega^2}{m}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin mt$$

(compte tenu de la relation $\alpha^2+m^2=\Omega^2$). Donc i est positif sur l'intervalle $[0,\pi/m]$, et la capacité se charge jusqu'au premier maximum de v. Ensuite i s'annule et la capacité conserve sa charge indéfiniment.

Pour obtenir le graphe de la figure 9.11, on a écrit v sous la forme

$$v(t) = E\left[1-\frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{\cos\varphi}\cos(mt-\varphi)\right],\qquad \text{où}\qquad \operatorname{tg}\varphi = \alpha/m\,.$$

c) L'énergie emmagasinée est

$$W = \tfrac{1}{2} C V^2, \qquad \text{où} \qquad V = v\left(\frac{\pi}{m}\right) = E(1+\mathrm{e}^{-\alpha\pi/m}).$$

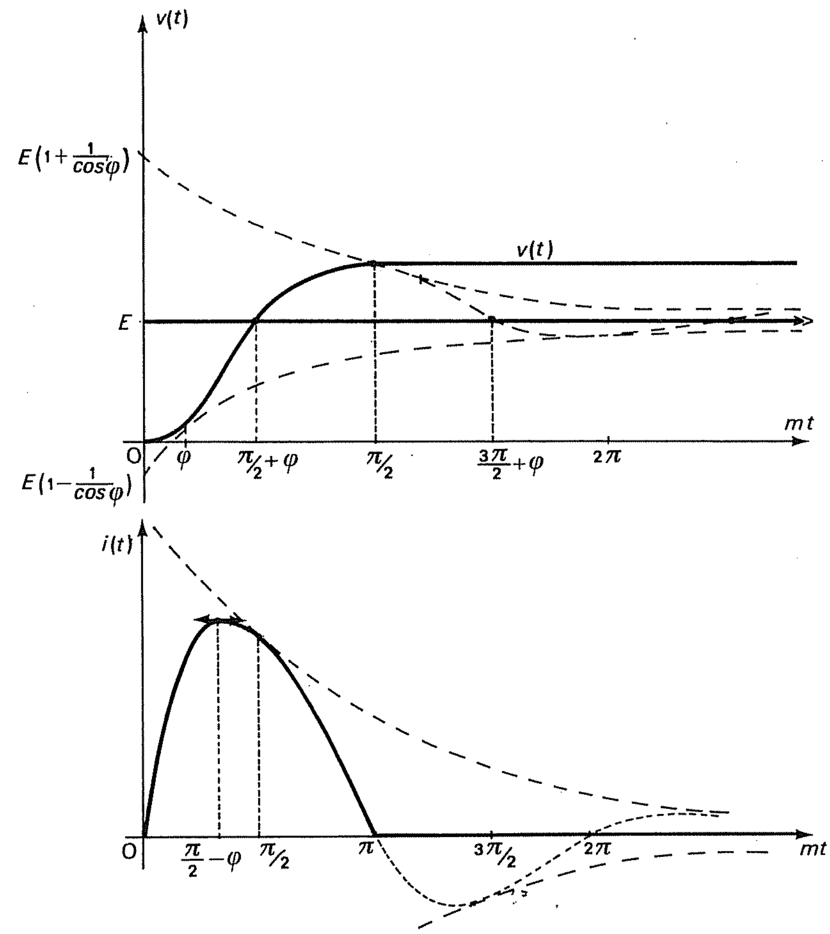


FIG. 9.11

Donc

$$W = \tfrac{1}{2} C E^2 (1 + \mathrm{e}^{-\alpha\pi/m})^2 .$$

9.5 Problème V. *On considère le montage de la figure* 9.12.

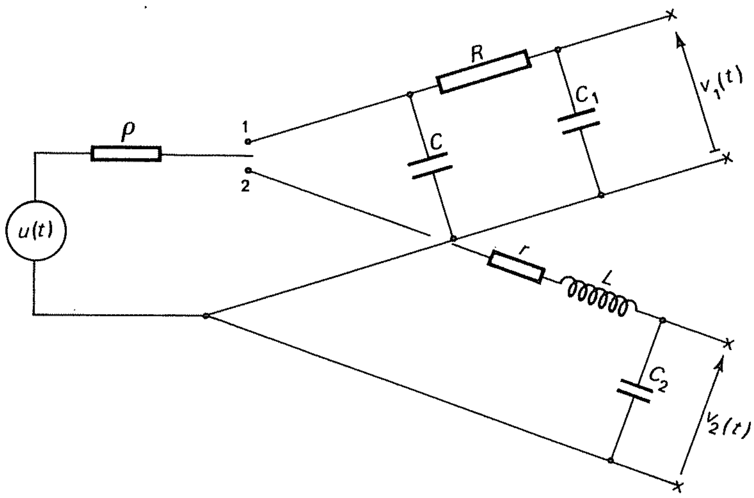


FIG. 9.12

a) *Former des équations différentielles vérifiées par* v_1 *et* v_2 *suivant la position du contacteur.*

b) *Trouver une condition suffisante pour que* $v_1 = v_2$. *Dans ces conditions, le régime de fonctionnement de ces circuits équivalents peut-il être oscillatoire ?*

c) *Sous les hypothèses précédentes, donner l'expression des tensions de sortie lorsque u est un échelon d'amplitude E, puis lorsque* $u(t) = U \sin \omega t$.

a) Établissons les équations du premier circuit (Fig. 9.13).

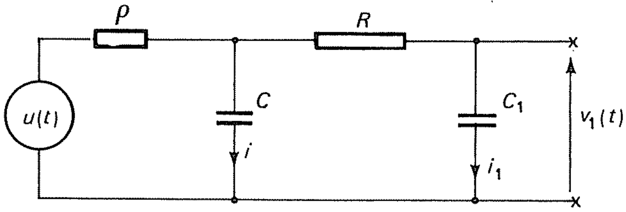


FIG. 9.13

Les mailles extérieure et intérieure donnent respectivement

$$\begin{aligned} u &= \rho(i + i_1) + R i_1 + v_1 \\ i &= C(R i_1' + v_1') . \end{aligned}$$

Or, $i_1 = C_1 v_1'$ et $i_1' = C_1 v_1''$. En éliminant i et i_1 entre ces diverses relations, nous obtenons l'équation différentielle

$$\rho RCC_1 v_1'' + (\rho C + \rho C_1 + RC_1)\, v_1' + v_1 = u(t). \tag{1}$$

Passons au second circuit (Fig. 9.14).

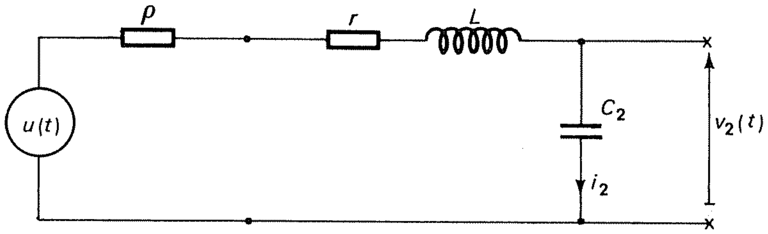


FIG. 9.14

Nous obtenons

$$u = (\rho + r)\, i_2 + L i_2' + v_2 .$$

Comme $i_2 = C_2 v_2'$, il en résulte aussitôt

$$LC_2 v_2'' + (\rho + r)\, C_2 v_2' + v_2 = u(t). \tag{2}$$

b) Pour que $v_1 = v_2$, il suffit que

$$\begin{cases} \rho RCC_1 = LC_2 \\ \rho C + \rho C_1 + RC_1 = \rho C_2 + rC_2 . \end{cases}$$

Ce système admet évidemment des solutions.

Le polynôme caractéristique de l'équation différentielle (1) est

$$P = X^2 + \frac{\rho C + \rho C_1 + RC_1}{RCC_1}\, X + \frac{1}{\rho RCC_1} .$$

La relation $\Delta' < 0$ s'écrit

$$(\rho C + \rho C_1 + RC_1)^2 - 4\rho RCC_1 < 0 ,$$

soit

$$(\rho C + \rho C_1 - RC_1)^2 + 4 R\rho C_1^2 < 0,$$

ce qui est impossible. Il est de même du régime critique. Le fonctionnement est apériodique.

c) Dans le cas d'un échelon E, les équations (1) et (2) deviennent

$$v'' + 2\alpha v' + \Omega^2 v = \Omega^2 E ,$$

où $2\alpha = (\rho + R)/L$ et $\Omega^2 = 1/LC_2$. Puisque le régime oscillatoire est impossible, ainsi que le régime critique, les solutions sont de la forme

$$v = k_1 \, e^{r_1 t} + k_2 \, e^{r_2 t} + E .$$

Si $u(t) = U \sin \omega t$, v est de la forme $V \sin(\omega t + \varphi)$. En employant la notation complexe, nous obtenons

$$-\omega^2 v + 2\alpha \, j\omega v + \Omega^2 v = \Omega^2 u ,$$

soit

$$\frac{v}{u} = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2 + 2\alpha j\omega}$$

et

$$V = \frac{U\Omega^2}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\alpha\omega}{\omega^2 - \Omega^2} .$$

9.6 Problème VI. *On considère le circuit passif de la figure* 9.15, *dans lequel il n'existe aucun couplage entre les diverses inductances.*

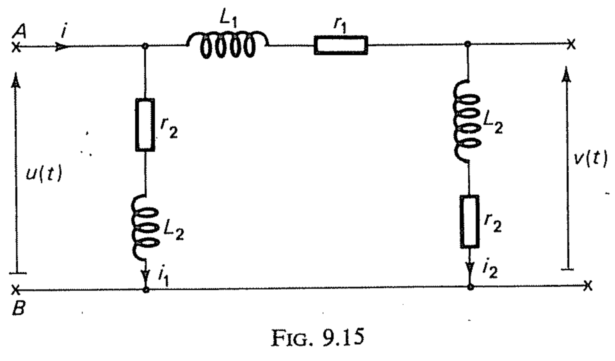


FIG. 9.15

On posera

$$\theta_1 = \frac{L_1}{r_1} \qquad \theta_2 = \frac{L_2}{r_2} \qquad \theta = \frac{L_1 + L_2}{r_1 + r_2} .$$

a) *Déterminer i_1 en fonction du temps. En déduire i_2 et v.*

b) *Trouver une condition suffisante entre les composants de ce circuit pour que v soit atténuée (sans déformation), quel que soit le signal d'entrée u.*

c) *On suppose que $r_1 = r_2 = 0$. On branche à l'instant $t = 0$ une capacité C, précédemment chargée à une tension E, à l'entrée AB du quadripôle. Expliciter i.*

a) Il est immédiat que

$$L_2 i_1' + r_2 i_1 = u .$$

Donc

$$i_1(t) = \frac{e^{-t/\theta_2}}{L_2}\left(\int_0^t u(x)\, e^{x/\theta_2}\, dx + k_1\right).$$

Le quadripôle pouvant se ramener aux schémas équivalents de la figure 9.16, où $L = L_1 + L_2$ et $r = r_1 + r_2$, il suffit de remplacer L_2 par L et θ_2 par θ pour obtenir i_2 :

$$i_2 = \frac{e^{-t/\theta}}{L}\left(\int_0^t u(x)\, e^{x/\theta}\, dx + k_2\right).$$

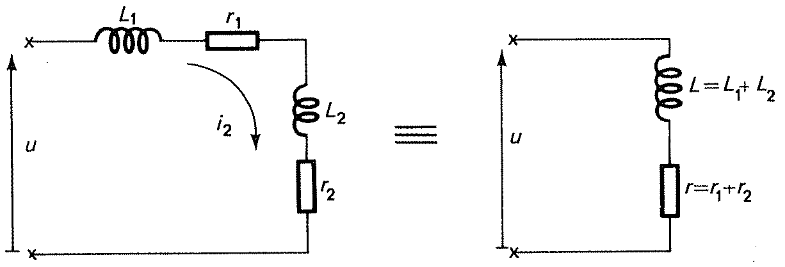


FIG. 9.16

Enfin, la tension de sortie est $v = L_2 i_2' + r_2 L_2$, soit

$$v(t) = \frac{e^{-t/\theta}}{L}\left(r_2 - \frac{L_2}{\theta}\right)\left(\int_0^t u(x)\, e^{x/\theta}\, dx + k_2\right) + \frac{L_2}{L}\, u(t).$$

b) Pour que la tension ne soit pas déformée, il suffit que le coefficient de l'intégrale soit nul, c'est-à-dire que

$$r_2 = L_2/\theta ,$$

ou encore que $r_2 L_1 = r_1 L_2$, soit

$$\theta_1 = \theta_2 .$$

Dans ce cas,

$$v(t) = \frac{r_2}{r_1 + r_2}\, u(t).$$

c) Annulons maintenant les résistances r_1 et r_2, et remplaçons la source u par une capacité C chargée à une tension E. Compte tenu du fait qu'un condensateur chargé à E est équivalent à un condensateur non chargé en série avec une source de tension continue E, nous pouvons établir les schémas équivalents de la figure 9.17, où $L' = L_2 L/(L_2+L)$ et $L = L_1+L_2$.

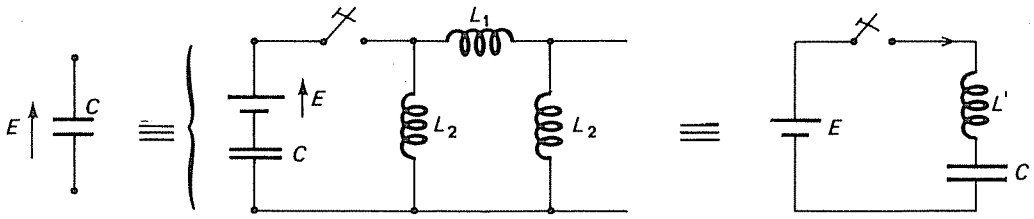


FIG. 9.17

Il est clair que i vérifie l'équation différentielle

$$L' i'' + i/C = 0 .$$

Posons $\Omega = 1/\sqrt{L'C}$; nous savons que i est de la forme

$$i = k_1 \sin \Omega t + k_2 \cos \Omega t .$$

Puisque $i(0) = 0$, nous voyons que $k_2 = 0$. D'autre part, $L' i'(0) = E$. Ainsi,

$$i(t) = \frac{E}{\sqrt{L'/C}} \sin \Omega t .$$

L'intensité cherchée est donc sinusoïdale de pulsation $\Omega = 1/\sqrt{L'C}$, ce qui était d'ailleurs prévisible, puisque les résistances du circuit sont nulles.

CHAPITRE 10

TRANSFORMATION DE LAPLACE

La **transformation de Laplace**, introduite par P. S. de Laplace au XVIII^e siècle, ressemble beaucoup à la transformation de Fourier (voir tome 3); comme cette dernière, elle a pour objet la résolution de certaines équations de convolution. Nous verrons en outre une application à la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

10.1 Transformation de Laplace. Soit f une fonction à valeurs complexes nulle sur $]-\infty, 0[$. L'ensemble des nombres réels x tels que la fonction $t \mapsto |f(t)|\, e^{-xt}$ soit intégrable sur $]-\infty, +\infty[$ est un intervalle de $\mathbf{R}$, de la forme $]a, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$. Il en découle que, pour tout nombre complexe p, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt$ est absolument convergente si la partie réelle de p est strictement supérieure à a. Le nombre a s'appelle *abscisse de convergence absolue.*

On appelle *transformée de Laplace* de f, et on note F, ou encore $\mathscr{L}f$, la fonction définie sur l'ensemble des nombres complexes p tels que $\mathrm{Re}(p) > a$ par la formule

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt\,. \tag{1}$$

Lorsque $a = -\infty$, la fonction F est donc définie sur le plan complexe tout entier; lorsque $a = +\infty$, l'ensemble de définition de F est vide. Si f est dominée au voisinage de $+\infty$ par une fonction de la forme $t \mapsto e^{kt}$, où k est un nombre réel, l'abscisse de convergence absolue est inférieure à k. En particulier, si f est bornée, l'abscisse de convergence absolue est négative.

La fonction F s'appelle *image* de f; on dit encore que f est un *original* de F. La correspondance entre f et F se note $F(p) \sqsubset f(t)$ (lire « F est l'image de f ») ou encore $f(t) \sqsupset F(p)$ (lire « f est un original de F »).

La linéarité de l'intégrale montre que la transformation de Laplace est linéaire :

$$\mathscr{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathscr{L} f + \beta \mathscr{L} g\,.$$

Il existe une formule de réciprocité de Laplace, analogue à la formule de réciprocitié de Fourier, permettant de reconstituer f à partir de F. Mais nous ne pouvons pas donner cette formule ici : elle fait appel à la notion d'intégration dans le plan complexe, qui n'a pas sa place dans un cours de mathématiques supérieures (même non élémentaire).

EXEMPLE. **Fonction de Heaviside.** La fonction constante et égale à 1 n'admet pas de transformée de Laplace, puisqu'elle n'est pas intégrable sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$. C'est pourquoi l'on introduit la fonction Υ (lire « upsilon ») de de Heaviside, ou *échelon unité*, définie par

$$\begin{aligned} \Upsilon(t) &= 0 \quad \text{si} \quad t < 0 \\ \Upsilon(t) &= 1 \quad \text{si} \quad t \geqslant 0\,. \end{aligned}$$

(Ainsi, l'échelon de tension d'amplitude E, que nous avons déjà rencontré bien des fois, se représente mathématiquement par la formule $u(t) = E\Upsilon(t)$.) La transformée de Laplace de Υ est définie par

$$\mathscr{L}\Upsilon(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt = -\frac{1}{p}\,[e^{-pt}]_0^{+\infty}.$$

Cette expression a un sens si et seulement si $\mathrm{Re}(p) > 0$; dans ces conditions,

$$\Upsilon(t) \sqsupset 1/p.$$

10.2 Cas des fonctions périodiques. Soit f une fonction de la forme Υg, où g est une fonction admettant la période T. Nous pouvons écrire $F(p)$ sous la forme

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{T} f(t)\, e^{-pt}\, dt + \int_T^{2T} f(t)\, e^{-pt}\, dt + \ldots +$$
$$+ \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)\, e^{-pt}\, dt + \cdots$$

Effectuons le changement de variable $u = t - T$ dans la deuxième intégrale, ..., le changement de variable $u = t - nT$ dans la $(n+1)$-ième intégrale. Nous obtenons au second membre

$$(1 + e^{-pT} + \ldots + e^{-pnT}) \int_0^T f(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

Nous reconnaissons la somme à l'ordre n d'une série géométrique, convergente si et seulement si $|e^{-pT}| < 1$. Posons $p = x + jy$, x et y étant réels; alors $e^{-pT} = e^{-xT}\, e^{-jyT}$ et $|e^{-pT}| = |e^{-xT}|$; la condition précédente devient $x > 0$, c'est-à-dire $\mathrm{Re}(p) > 0$. Dans ces conditions,

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T f(t)\, e^{-pt}\, dt. \tag{2}$$

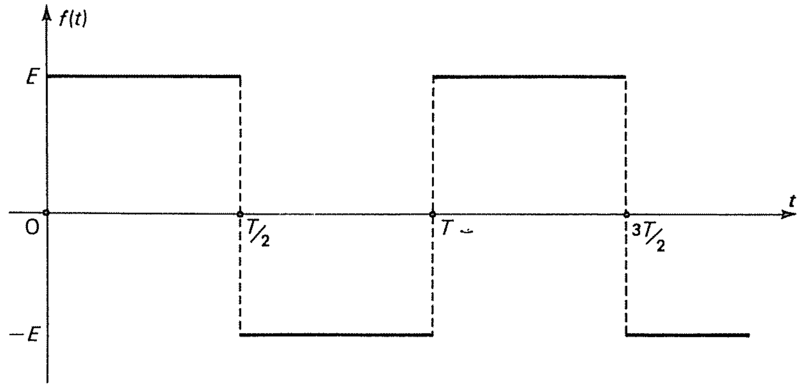


FIG. 10.1

EXEMPLE. *Chercher la transformée de Laplace du signal rectangulaire de période T* (Fig. 10.1) *définie par*

$$\begin{aligned} f(t) &= E \quad \text{si} \quad t \in]0, T/2[\\ &= -E \quad \text{si} \quad t \in]T/2, T[\\ &= 0 \quad \text{si} \quad t = 0 \quad \text{ou} \quad t = T/2 . \end{aligned}$$

La formule (2) s'écrit ici

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{E}{1-\mathrm{e}^{-pT}}\left[\int_0^{T/2} \mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t - \int_{T/2}^{T} \mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\right] \\ &= \frac{E}{1-\mathrm{e}^{-pT}}\left[\left(-\frac{\mathrm{e}^{-pt}}{p}\right)_0^{T/2} + \left(\frac{\mathrm{e}^{-pt}}{p}\right)_{T/2}^{T}\right] \\ &= \frac{E}{p(1-\mathrm{e}^{-pT})}\left(\mathrm{e}^{-pT} - 2\,\mathrm{e}^{-pT/2} + 1\right), \end{aligned}$$

soit encore

$$F(p) = \frac{E(1-\mathrm{e}^{-pT/2})^2}{p(1+\mathrm{e}^{-pT/2})\,(1-\mathrm{e}^{-pT/2})} = \frac{E}{p}\,\frac{1-\mathrm{e}^{-pT/2}}{1+\mathrm{e}^{-pT/2}} = \frac{E}{p}\,\mathrm{th}\,\frac{pT}{4}.$$

OPÉRATIONS SUR LES TRANSFORMÉES DE LAPLACE

10.3 Dérivation. Soit f une fonction à valeurs complexes dont la restriction à $[0, +\infty[$ admet une dérivée continue. Alors

$$\mathscr{L}f'(p) = \int_0^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t .$$

Intégrons par parties, en posant $u = \mathrm{e}^{-pt}$ et $\mathrm{d}v = f'(t)\,\mathrm{d}t$; il vient

$$\mathscr{L}f'(p) = [f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}]_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t .$$

Supposons que la partie réelle de p soit suffisamment grande pour que $f(t) = o(\mathrm{e}^{pt})$ au voisinage de $+\infty$. La quantité entre crochets se réduit alors à $-f(0)$. D'où

$$\mathscr{L}f'(p) = p\mathscr{L}f(p) - f(0) .$$

Autrement dit,

$$f'(t) \sqsupset pF(p) - f(0) . \tag{3}$$

On en déduit aisément par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n,

$$f^{(n)}(t) \sqsupset p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) . \tag{4}$$

EXEMPLE. Prenons $f(t) = \Upsilon(t) \sin \omega t$. Alors, d'après un calcul fait au tome 3,

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \sin \omega t \, e^{-pt} \, dt = \left[-\frac{e^{-pt}}{p^2+\omega^2} (p \sin \omega t + \omega \cos \omega t) \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\omega}{p^2+\omega^2},$$

soit

$$\Upsilon(t) \sin \omega t \sqsupset \frac{\omega}{p^2+\omega^2},$$

formule valable si $\mathrm{Re}(p) > 0$.

Comme $f(0) = 0$ et que $(\sin \omega t)' = \omega \cos \omega t$, nous voyons sans nouveau calcul d'intégrale que

$$\Upsilon(t) \cos \omega t \sqsupset \frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

On trouverait de même

$$\Upsilon(t) \operatorname{sh} \omega t \sqsupset \frac{\omega}{p^2-\omega^2} \quad \text{si} \quad \mathrm{Re}(p) > |\omega|$$

$$\Upsilon(t) \operatorname{ch} \omega t \sqsupset \frac{p}{p^2-\omega^2} \quad \text{si} \quad \mathrm{Re}(p) > |\omega|.$$

10.4 Intégration. Introduisons les fonctions g et G définies par

$$g(t) = \int_0^t f(u) \, du \qquad \text{et} \qquad G(p) \sqsubset g(t).$$

En remplaçant f par g dans la formule (3), nous voyons que

$$G(p) = \frac{1}{p} F(p) \sqsubset g(t) = \int_0^t f(u) \, du. \tag{5}$$

Cette formule est plus simple que la formule (3), car $g(0) = 0$; elle permet de remplacer une intégration par une simple division par p. Nous en verrons des applications au moment du calcul opérationnel.

EXEMPLE. Une primitive de Υ est la fonction $t \mapsto t\Upsilon(t)$. Puisque $\Upsilon(t) \sqsupset 1/p$, nous voyons que

$$t\Upsilon(t) \sqsupset 1/p^2.$$

Par une récurrence évidente, on montre plus généralement que, pour tout entier naturel n,

$$\frac{t^n \Upsilon(t)}{(n-1)!} \sqsupset 1/p^n .$$

10.5 Originale d'une dérivée. Supposons que la variable p est réelle; on démontre alors que F est dérivable. (Au niveau de cet ouvrage, il n'est pas question de dériver par rapport à une variable *complexe*.) De plus, en admettant que l'on puisse dériver une intégrale généralisée sous le signe $\int$, on voit que

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p} = \int_0^{+\infty} [-tf(t)]\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t ,$$

soit

$$F'(p) \sqsubset -tf(t) . \tag{6}$$

On en déduit aussitôt par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$F^{(n)}(p) \sqsubset (-1)^n t^n f(t) . \tag{7}$$

EXEMPLES.

1. Prenons encore $f(t) = \Upsilon(t) \sin \omega t$, et donc $F(p) = \omega/(p^2+\omega^2)$. Supposons la variable p réelle; alors

$$F'(p) = -\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2} .$$

D'où

$$t\Upsilon(t) \sin \omega t \sqsupset \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2} .$$

2. Prenons $f(t) = \Upsilon(t)$. Nous savons que $F(p) = 1/p$. *Lorsque p est réel strictement positif,* nous retrouvons la formule

$$F'(p) = -\frac{1}{p^2} \sqsubset -t\, \Upsilon(t) .$$

10.6 Translation. Soit τ un nombre réel positif, Posons

$$f_\tau(t) = f(t-\tau) .$$

Alors

$$\mathscr{L}f_\tau(p) = \int_0^{+\infty} f(t-\tau)\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t .$$

Le changement de variable $u = t - \tau$ conduit à

$$\mathscr{L}f_\tau(p) = \int_{-\tau}^{+\infty} f(u)\, \mathrm{e}^{-p\tau}\, \mathrm{e}^{-pu}\, \mathrm{d}u .$$

Puisque f est nulle sur $[-\tau, 0[$,

$$\mathscr{L} f_\tau(p) = e^{-p\tau} \ \mathscr{L} f(p),$$

soit

$$f(t-\tau) \sqsupset e^{-p\tau} F(p) . \tag{8}$$

Cette relation est commode pour l'étude des phénomènes retardés.

10.7 Originale d'une translatée. Soit σ un nombre complexe. Alors

$$F(p-\sigma) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-(p-\sigma)t}\, dt = \int_0^{+\infty} [e^{\sigma t} f(t)]\, e^{-pt}\, dt .$$

Ainsi,

$$F(p-\sigma) \sqsubset e^{\sigma t} f(t) . \tag{9}$$

Cette relation est commode pour l'étude des phénomènes oscillatoires amortis.

EXEMPLES.

1. Nous savons que

$$\Upsilon(t) \sqsupset 1/p \qquad \text{si} \qquad \mathrm{Re}\,(p) > 0 .$$

Ainsi, pour tout nombre complexe α,

$$\Upsilon(t)\, e^{\alpha t} \sqsupset \frac{1}{p-\alpha} \qquad \text{si} \qquad \mathrm{Re}(p) > \mathrm{Re}(\alpha) .$$

De même,

$$\Upsilon(t)\, t\, e^{\alpha t} \sqsupset \frac{1}{(p-\alpha)^2} \qquad \text{si} \qquad \mathrm{Re}(p) > \mathrm{Re}(\alpha) .$$

2. *Soit α un nombre complexe. Chercher les images de* $\Upsilon(t)\, e^{\alpha t} \sin \omega t$ et de $\Upsilon(t)\, e^{\alpha t} \cos \omega t$.

Il suffit d'appliquer la formule (8) pour obtenir

$$\Upsilon(t)\, e^{\alpha t} \sin \omega t \sqsupset \frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$$

$$\Upsilon(t)\, e^{\alpha t} \cos \omega t \sqsupset \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2} .$$

10.8 Homothétie. Soit k un nombre réel strictement positif. Posons

$$f_k(t) = f(kt) .$$

Alors

$$\mathscr{L} f_k(p) = \int_0^{+\infty} f(kt)\, e^{-pt}\, dt .$$

Le changement de variable $u = kt$ montre que

$$\mathscr{L}f_k(p) = \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right),$$

soit encore

$$f(kt) \sqsupset \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right) \tag{10}$$

ou

$$F(kp) \sqsubset \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right). \tag{10'}$$

Ces relations sont souvent utilisées dans le cas d'un changement de variable.

10.9 Produit de convolution. Le produit de convolution de deux fonctions f et g nulles sur $]-\infty, 0[$ est la fonction $h = f * g$ définie par

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)\, g(u)\, \mathrm{d}u = \int_0^t f(t-u)\, g(u)\, \mathrm{d}u\,.$$

Par suite,

$$H(p) = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^t f(t-u)\, g(u)\, \mathrm{d}u\right] \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t\,.$$

Nous admettons que l'on peut intervertir l'ordre des intégrations. Alors

$$H(p) = \int_0^{+\infty} g(u)\, \mathrm{d}u \int_u^{+\infty} f(t-u)\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t\,.$$

D'après la formule (8), la dernière intégrale est $\mathrm{e}^{-pu} F(p)$. Ainsi,

$$H(p) = \int_0^{+\infty} g(u)\, \mathrm{e}^{-pu} F(p)\, \mathrm{d}u = F(p) \int_0^{+\infty} g(u)\, \mathrm{e}^{-pu}\, \mathrm{d}u = F(p)\, G(p)\,.$$

En résumé,

$$f(t) * g(t) \sqsupset \mathrm{F}(p)\, G(p)\,.$$

La transformée de Laplace d'un produit de convolution est égale au produit des transformées de Laplace de chaque facteur.

Exemples.

1. Prenons $f(t) = \Upsilon(t) \sin t$ et $g(t) = \Upsilon(t) \cos t$. Alors

$$(f * g)(t) = \int_0^t \sin(t-u) \cos u\, \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^t [\sin t + \sin(t-2u)]\, \mathrm{d}u$$
$$= \tfrac{1}{2} t \sin t\,.$$

D'autre part, nous savons que

$$F(p) = \frac{1}{p^2+1} \qquad G(p) = \frac{p}{p^2+1}.$$

D'où

$$(FG)\,(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2}.$$

En résumé,

$$\tfrac{1}{2}t \sin t \sqsupset \frac{p}{(p^2+1)^2}.$$

On pourrait retrouver ce résultat lorsque p est *réel*, en écrivant que

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p} \sqsubset -tf(t)$$

et que

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p} = \left(\frac{1}{p^2+1}\right)' = -\frac{2p}{(p^2+1)^2}.$$

2. *En utilisant le produit de convolution, trouver l'original de*

$$H(p) = \frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

Remarquons que

$$H(p) = \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)^2 = \tfrac{1}{2}[F(p)]^2, \qquad \text{où} \quad f(t) = \Upsilon(t)\sin\omega t.$$

Or,

$$[F(p)]^2 \sqsubset f * f.$$

Calculons donc

$$\begin{aligned}(f*f)\,(t) &= \int_0^t \sin\omega(t-u)\,\sin\omega u\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t [\cos\omega(t-2u) - \cos\omega t]\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2\omega}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2} \sqsubset \frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t - \omega t \cos\omega t).$$

CALCUL OPÉRATIONNEL

10.10 Intégration des équations différentielles linéaires. Le *calcul opérationnel*, appelé encore *calcul symbolique*, a été introduit par le physicien anglais O. Heaviside à la fin du XIX[e] siècle. D'un point de vue intuitif, sans aucune rigueur mathématique, Heaviside a montré qu'il est possible de résoudre rapidement de nombreux problèmes en utilisant un opérateur symbolique p, en évitant ainsi les manipulations souvent longues des équations différentielles linéaires. Cette méthode se justifie (au moins partiellement) à l'aide de la transformation de Laplace : la multiplication par p correspond à une dérivation, la division par p à une intégration. On notera l'analogie avec les nombres complexes : la dérivation de $t \mapsto e^{jt}$ se traduit par une multiplication par j, l'intégration par division par j.

Considérons une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants :

$$ay''+by'+cy = g(t). \tag{1}$$

Soit f une solution. Alors

$$f'(t) \sqsupset pF(p)-f(0)$$
$$f''(t) \sqsupset p^2 F(p)-pf(0)-f'(0).$$

Égalons les images des deux membres de (1) :

$$(ap^2+bp+c)\,F(p)-(ap+b)\,f(0)-af'(0) = G(p), \quad \text{où} \quad G(p) \sqsubset g(t).$$

Ainsi,

$$F(p) = \frac{G(p)+(ap+b)\,f(0)+af'(0)}{ap^2+bp+c}.$$

Il ne reste plus qu'à trouver l'original de $F(p)$.

EXEMPLES.

1. *Chercher la solution f de l'équation différentielle*

$$y''-y'-6y = 2\Upsilon(t)$$

satisfaisant à la condition initiale $f(0)=1, f'(0)=0$.

L'image de $f''-f'-6f$ est

$$p^2 F(p)-pf(0)-f'(0)-pF(p)+f(0)-6F(p),$$

soit, compte tenu de la condition initiale,

$$(p^2-p-6)\,F(p)-p+1.$$

D'autre part, l'image de $2\Upsilon(t)$ est $2/p$. Ainsi,

$$(p^2-p-6)\,F(p)-p+1 = 2/p\,;$$

d'où

$$F(p) = \frac{p-1+\dfrac{2}{p}}{p^2-p-6} = \frac{p^2-p+2}{p(p-3)\,(p+2)}.$$

Pour trouver l'original de F, décomposons la fraction rationnelle $\dfrac{X^2-X+2}{X(X-3)\,(X+2)}$ en éléments simples (voir tome 1) :

$$\frac{X^2-X+2}{X(X-3)\,(X+2)} = -\frac{1}{3X}+\frac{8}{15(X-3)}+\frac{4}{5(X+2)}.$$

Donc

$$F(p) = -\frac{1}{3p}+\frac{8}{15(p-3)}+\frac{4}{5(p+2)}\quad ,$$

ce qui conduit à

$$f(t) = \Upsilon(t)\left(-\frac{1}{3}+\frac{8}{15}\,\mathrm{e}^{3t}+\frac{4}{5}\,\mathrm{e}^{-2t}\right).$$

2. *Chercher la solution f de l'équation différentielle*

$$y''-3y'+2y = \mathrm{e}^{-x}$$

satisfaisant à la condition initiale $f(0) = 1, f'(0) = 0$.

La même méthode fournit aussitôt

$$(p^2-3p+2)\,F(p) - p+3 = \frac{1}{p+1}.$$

Donc

$$F(p) = \frac{p-3+\dfrac{1}{p+1}}{(p-1)\,(p-2)} = \frac{p^2-2p-2}{(p+1)\,(p-1)\,(p-2)}.$$

Or,

$$\frac{X^2-2X-2}{(X+1)\,(X-1)\,(X-2)} = \frac{1}{6(X+1)}+\frac{3}{2(X-1)}-\frac{2}{3(X-2)}.$$

Il s'ensuit que

$$f(t) = \Upsilon(t)\left(\frac{1}{6}\,\mathrm{e}^{-t}+\frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{t}-\frac{2}{3}\,\mathrm{e}^{2t}\right).$$

10.11 Impédance opérationnelle. On peut utiliser le même formalisme pour l'étude des circuits électriques. En effet, la réponse d'un circuit linéaire à une perturbation (régime transitoire) dépend des conditions initiales et de la perturbation. Il est alors possible de procéder comme en régime continu après avoir remplacé les réactances du régime sinusoïdal par Lp ou $1/Cp$ suivant le cas. Ceci permet de définir une impédance *opérationnelle*, notée $Z(p)$, par analogie avec l'impédance $Z(\omega)$, dite *isochrone*, du régime sinusoïdal. Il est possible d'établir l'équivalence des circuits de la figure 10.2.

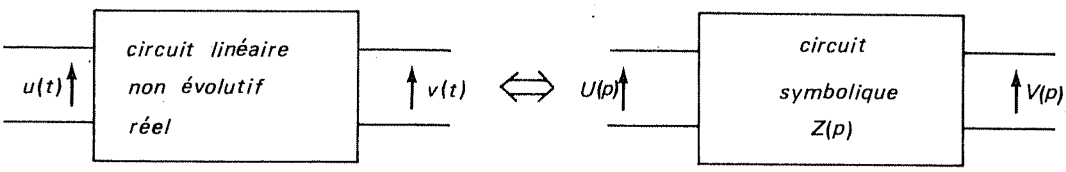


FIG. 10.2

Pour calculer la réponse du quadripôle en notation opérationnelle, il suffit de procéder comme en régime continu après avoir déterminé l'image $F(p)$ de la perturbation d'entrée et les impédances opérationnelles $Z(p)$ du circuit. La solution opérationnelle est une fonction V de la variable p ; le véritable objet du calcul est de rechercher l'original v de la fonction V. En pratique, il n'y a pas de grande difficulté pour obtenir $V(p)$, la transformation de Laplace permettant de calculer assez rapidement $U(p)$, et les lois de l'électricité faisant le reste. Pour obtenir $v(t)$, il n'existe pas de formulation directe. On procède par comparaison avec les éléments du tableau des transformées de Laplace usuelles et avec l'ensemble des règles établies dans ce chapitre.

EXEMPLES.

1. *On considère le circuit de la figure* 10.3.

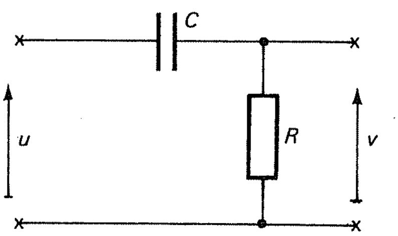


FIG. 10.3

Chercher la réponse à une perturbation u

a) *lorsque u est un échelon d'amplitude E* ;

b) *lorsque u est une impulsion isolée, prenant la valeur E sur un intervalle* $[0, \tau]$.

Les lois de l'électricité permettent d'écrire

$$V(p) = U(p)\,\frac{R}{1+\dfrac{1}{Cp}}, \qquad \text{où} \qquad U(p) \sqsubset u(t) \qquad \text{et} \qquad V(p) \sqsubset v(t).$$

Posons $\theta = RC$; alors

$$V(p) = U(p)\,\frac{\theta p}{1+\theta p}.$$

a) Si $u(t) = \Upsilon(t)\,E$, alors $U(p) = E/p$ et

$$V(p) = E\,\frac{1}{p+\dfrac{1}{\theta}}.$$

Le tableau des transformées usuelles nous donne

$$v(t) = E\Upsilon(t)\,\mathrm{e}^{-t/\theta},$$

ce qui est un résultat bien connu.

b) Remarquons que la fonction d'entrée est la différence entre l'échelon précédent et $E\Upsilon(t-\tau)$. Or,

$$E\Upsilon(t-\tau) \sqsupset E\,\frac{\mathrm{e}^{-p}}{p}.$$

L'image de la perturbation d'entrée est donc

$$U(p) = \frac{E}{p}\,(1-\mathrm{e}^{-p\tau}).$$

Il en découle que

$$V(p) = U(p)\,\frac{1}{p+\dfrac{1}{\theta}} = E\left(\frac{1}{p+\dfrac{1}{\theta}} - \frac{\mathrm{e}^{-p\tau}}{p+\dfrac{1}{\theta}}\right).$$

Le dernier terme est le produit d'une exponentielle $\mathrm{e}^{\beta t}$ par une fonction de la forme $1/(p-\alpha)$; on reconnaît l'image de $\Upsilon(t-\beta)\,\mathrm{e}^{\alpha(t-\beta)}$. Ainsi, l'original cherché est

$$v(t) = E[\Upsilon(t)\,\mathrm{e}^{-t/\theta} - \Upsilon(t-\tau)\,\mathrm{e}^{-(t-\tau)/\theta}].$$

2. *Calculer la réponse à un échelon d'amplitude E du circuit de la figure* 10.4.
Ici,

$$V(p) = U(p)\,\frac{Z(p)}{R+Z(p)},$$

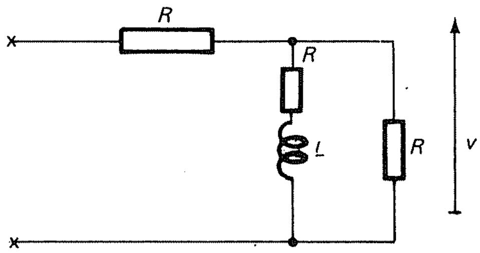


FIG. 10.4

où $Z(p)$ désigne l'impédance opérationnelle du circuit parallèle, soit

$$Z(p) = \frac{R(R+Lp)}{2R+Lp}.$$

Comme $U(p) = E/p$, nous voyons que

$$V(p) = \frac{E}{p}\,\frac{R(R+Lp)}{2R+Lp}\,\frac{1}{R+\dfrac{R(R+Lp)}{2R+Lp}} = E\,\frac{R+Lp}{p\,(3R+2Lp)}.$$

Une décomposition en éléments simples conduit aisément à

$$V(p) = \frac{E}{3}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{p+\dfrac{3R}{2L}}\right).$$

D'où

$$v(t) = \frac{E}{3}\,(1+\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-3Rt/2L}).$$

EXERCICES

Transformées de Laplace

Déterminer les images des fonctions périodiques de période T définies sur $[0, T[$ par

10.1 $f(t) = E\dfrac{t}{T}$.

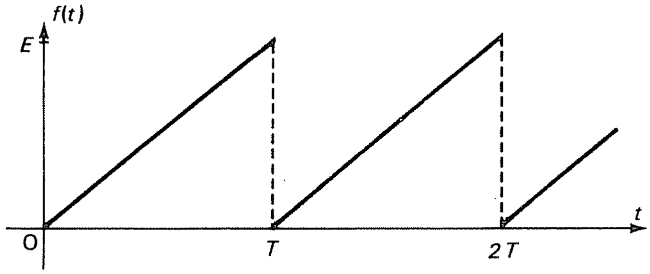


FIG. 1

10.2 $f(t) = 2E\dfrac{t}{T}$ si $t \in \left[0, \dfrac{T}{2}\right]$

$= 2E\left(1 - \dfrac{t}{T}\right)$ si $t \in \left]\dfrac{T}{2}, T\right[$.

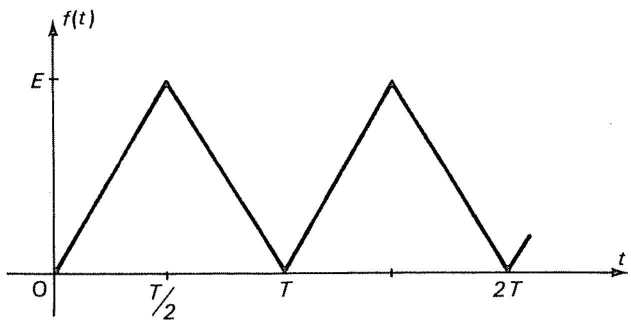


FIG. 2

10.3 $f(t) = E$ si $t \in [0, \tau]$

$= 0$ si $t \in]\tau, T[$.

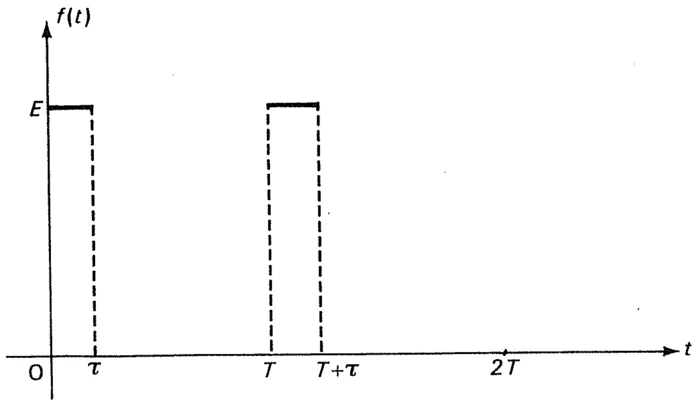


FIG. 3

Examiner le cas particulier où $\tau = T/2$.

10.4 $f(t) = E \sin \omega t$ si $t \in \left[0, \dfrac{T}{2}\right]$

$= 0$ si $t \in \left]\dfrac{T}{2}, T\right[$.

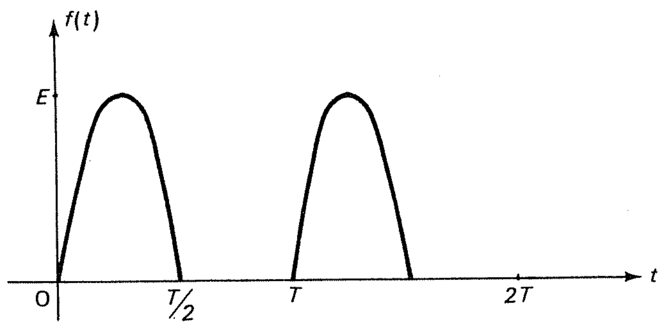


FIG. 4

10.5 $f(t) = E\,|\sin \omega t|$.

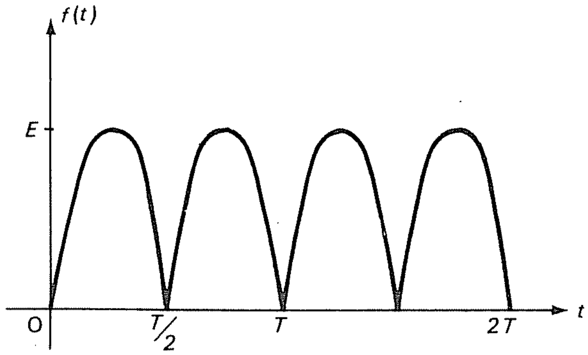


FIG. 5

Calcul opérationnel

10.6 En appliquant les méthodes du calcul opérationnel, déterminer la solution f de l'équation différentielle

$$y'' + 20y = 0$$

satisfaisant aux conditions initiales suivantes :

a) $f(0) = 0{,}5$ $\quad f'(0) = 0$

b) $f(0) = 0$ $\quad f'(0) = 4$

c) $f(0) = 0{,}5$ $\quad f'(0) = 4$.

Mêmes questions pour les équations différentielles suivantes :

10.7 $y'' - 25y = 0$

10.8 $y'' + 4y' + 20y = 0$

10.9 $y'' + 4y' + 4y = 0$

10.10 $y'' + 4y' + 3y = 0$.

10.11 On considère l'équation différentielle

$$L\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{C} = 0\,.$$

Déterminer la solution f telle que

$f(0) = 500$ $\quad f'(0) = 0$

sachant que $R = 100\ \Omega$, $C = 0{,}5\ \mu\mathrm{F}$ et que

a) $L = 10^{-3}$ H;

b) $L = 1{,}25 \times 10^{-3}$ H;

c) $L = 8 \times 10^{-3}$ H.

CHAPITRE 11

CALCUL NUMÉRIQUE

11.1 Vocabulaire du calcul numérique. En mathématiques comme en physique, les résultats d'un calcul numérique ne fournissent généralement pas la valeur *exacte* d'un nombre réel (inconnu) a, mais seulement une valeur *approchée* a'. La différence $\Delta a = a' - a$ s'appelle *erreur.* Le nombre réel $a - a' = -\Delta a$ s'appelle *correction*; c'est le nombre qu'il faudrait ajouter à la valeur approchée a' pour obtenir la valeur exacte.

En mathématiques, l'erreur doit évidemment être distinguée de ... la faute de calcul. L'erreur provient d'une part de la méthode employée : par exemple, une fonction compliquée peut être remplacée par une fonction affine; pour calculer la somme d'une série, on se limite aux premiers termes, car il n'est pas question de calculer la somme d'une infinité de termes! L'erreur provient d'autre part des arrondis : on remplace le nombre $\sqrt{2}$ par 1,414 et le nombre π par 3,14 ou 3,1416; il est impossible de conserver la suite (infinie) de toutes les décimales.

En physique, il faut ajouter à ces causes le fait que même les *données* d'un problème sont entachées d'erreurs. Il y a deux nouvelles sortes :

— les erreurs *systématiques*, dues aux méthodes de mesure et aux appareils (toujours imparfaits);

— les erreurs *fortuites*, dues à l'opérateur et au milieu dans lequel il opère.

Naturellement, on ne peut jamais calculer exactement l'erreur que l'on commet sur un nombre a; on ne peut que donner un *encadrement*, sous la forme $a' - \varepsilon' \leqslant a \leqslant a' + \varepsilon''$, où ε' et ε'' sont des nombres réels positifs. Si l'on peut choisir $\varepsilon' = 0$, on dit que a' est une valeur approchée *par défaut*; si l'on peut choisir $\varepsilon'' = 0$, on dit que a' est une valeur approchée *par excès.* Lorsqu'on ne connaît pas le sens de l'erreur, on préfère majorer la valeur absolue de l'erreur, et écrire $|a' - a| \leqslant \varepsilon$; un tel nombre réel positif ε s'appelle *incertitude.*

L'erreur Δa et l'incertitude ε n'ont guère d'intérêt pratique. Une erreur de 1 cm sur 1 m est grossière; une mesure de 100 m à 1 cm près est remarquable. Ce qui compte avant tout, c'est le *taux d'erreur* $\Delta a/a$, ou encore le taux d'incertitude ε/a, dont les valeurs numériques sont évidemment indépendantes du choix des unités.

Signalons un point de vue très différent de ce qui précède. Au lieu de majorer les erreurs, on peut chercher un intervalle contenant vraisemblablement (et non plus certainement) la valeur exacte a. Ce point de vue est celui de la statistique mathématique; on l'utilise constamment dans la vie courante : sondages d'opinion, contrôles de fabrication, etc. Nous le développerons au tome 6.

11.2 Règles de calcul des erreurs. En pratique, on assimile souvent l'acroissement d'une fonction à celui de sa différentielle. Nous renvoyons au tome 2 pour le cas des fonctions d'une variable, et au chapitre 2 du présent tome pour le cas des fonctions de plusieurs variables.

Nous allons appliquer les résultats précédemment établis au calcul des taux d'incertitude. Supposons que le nombre cherché a dépende de trois paramètres x, y

et z, indépendants les uns des autres :

$$a = f(x, y, z).$$

Alors

$$\Delta a \approx f'_x \, \Delta x + f'_y \, \Delta y + f'_z \, \Delta z,$$

ce qu'on écrit sous la forme

$$\frac{\Delta a}{a} \approx \frac{xf'_x}{a} \frac{\Delta x}{x} + \frac{yf'_y}{a} \frac{\Delta y}{y} + \frac{zf'_z}{a} \frac{\Delta z}{z}.$$

Pour obtenir le taux d'incertitude sur a, on remplacera les taux d'erreur $\Delta x/x$, $\Delta y/y$ et $\Delta z/z$ par des taux d'incertitude. De plus, on remplacera les coefficients xf'_x/a, yf'_y/a et zf'_z/a *par leurs valeurs absolues*, afin de se placer *dans le cas le plus défavorable* où toutes les erreurs s'ajoutent.

Ainsi, le taux d'incertitude sur un produit sera pris égal à la somme des taux d'incertitude sur chacun des facteurs, puisque, si $a = xyz$,

$$\frac{\mathrm{d}a}{a} = \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{\mathrm{d}y}{y} + \frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

Mais le taux d'incertitude sur un quotient sera aussi pris égal à la somme des taux d'incertitude. En effet, si $a = x/y$,

$$\frac{\mathrm{d}a}{a} = \frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

Comme on ne connaît pas les sens des erreurs sur le numérateur et sur le dénominateur, il n'y a aucune raison pour que les erreurs se compensent.

(Il y a cependant un cas où l'on peut prendre pour taux d'erreur la différence des taux d'erreur sur le numérateur et sur le dénominateur : c'est le cas où $a = u/v$, u et v étant des fonctions *d'une même variable* x. Une erreur sur x se répercute sur u et sur v, le signe $-$ conservant son sens physique.)

11.3 Exemples pratiques de calculs d'erreur.

1. Nous avons déjà calculé la différentielle de l'aire $S = bh$ d'un rectangle :

$$\mathrm{d}S = b \, \mathrm{d}h + h \, \mathrm{d}b.$$

D'où

$$\Delta S \approx b \, \Delta h + h \, \Delta b$$

et

$$\frac{\Delta S}{S} \approx \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta h}{h}.$$

Calculons l'incertitude sur S sachant que $b = 4$ m, $h = 2$ m et que les deux mesures sont effectuées au demi-millimètre près. Dans ces conditions,

$$\left|\frac{\Delta S}{S}\right| \leqslant \frac{0{,}5}{4\,000} + \frac{0{,}5}{2\,000} = \frac{1{,}5}{4\,000}.$$

Ainsi,

$$|\Delta S| \leqslant \frac{1{,}5}{4\,000}\,S = \frac{1{,}5\times 8}{4\,000} = 3\times 10^{-3}\ \mathrm{m}^2 = 30\ \mathrm{cm}^2.$$

L'aire est donc comprise entre $80\,000-30$ et $80\,000+30\ \mathrm{cm}^2$.

2. En électricité, dans la mesure d'une résistance au pont de Wheatstone (Fig. 11.1), l'équilibre du pont se traduit par

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}.$$

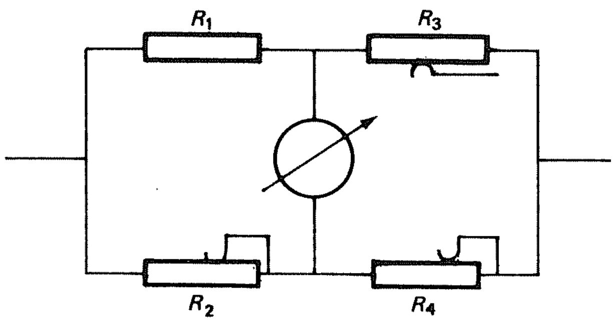


FIG. 11.1

Ainsi, $R_1 = R_3 \dfrac{R_2}{R_4}$ et

$$\frac{\mathrm{d}R_1}{R_1} = \frac{\mathrm{d}R_3}{R_3} + \frac{\mathrm{d}R_2}{R_2} - \frac{\mathrm{d}R_4}{R_4}.$$

Pour nous placer dans les conditions les plus défavorables, nous prendrons

$$\left|\frac{\Delta R_1}{R_1}\right| \leqslant \left|\frac{\Delta R_3}{R_3}\right| + \left|\frac{\Delta R_2}{R_2}\right| + \left|\frac{\Delta R_4}{R_4}\right|.$$

Supposons par exemple que R_3 puisse varier ohm par ohm, et que R_2, R_3 et R_4 soient déterminées par le constructeur à 1/500 près. Comme R_3 est connue à un ohm près,

$$\left|\frac{\Delta R_3}{R_3}\right| \leqslant \frac{1}{500} + \frac{1}{R_3}.$$

D'où

$$\left|\frac{\Delta R_1}{R_1}\right| \leqslant 3\,\frac{1}{500}+\frac{1}{R_3}=\frac{3}{500}+\frac{1}{R_3}.$$

Si $R_3 = 1\,000\ \Omega$,

$$\left|\frac{\Delta R_1}{R_1}\right| \leqslant \frac{3}{500}+\frac{1}{1\,000}=\frac{7}{1\,000}.$$

Le taux d'erreur est alors de 7/1000 ou 0,7% .

3. *Mesure d'une résistance électrique au moyen d'un voltmètre.* Prenons un générateur électrique quelconque (pile sèche ou accumulateur), et mesurons sa f. é. m. E avec un bon voltmètre de résistance interne r, en branchant ce voltmètre aux bornes du générateur (Fig. 11.2a)).

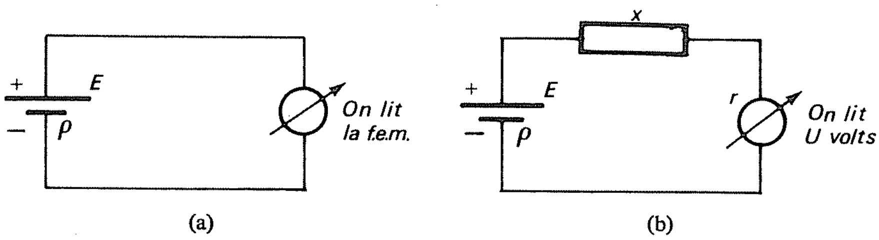


FIG. 11.2

Plaçons maintenant en série la résistance x à mesurer, l'aiguille du voltmètre déviera un peu moins puisque la résistance du circuit a augmenté (Fig. 11.2b)). Mais, le cadran de l'appareil étant gradué, on lira V volts sur le cadran; servons-nous alors de cette lecture.

Si ρ est la résistance interne de la source on a, pour l'intensité I du courant :

$$I=\frac{E}{\rho+x+r},$$

mais comme r est énorme par rapport à ρ (surtout si la source est un accumulateur), on peut négliger ρ par rapport à r, d'où

$$I=\frac{E}{x+r}.$$

D'autre part, appliquons la loi d'Ohm au voltmètre (puisqu'un voltmètre est tout simplement un milliampèremètre gradué en volts) :

$$V = rI;$$

en effet il y a V volts entre les deux bornes du voltmètre (par construction).

Égalons les deux valeurs de I :

$$\frac{E}{x+r} = \frac{V}{r}$$

d'où

$$x = r\,\frac{E-V}{V}.$$

Cherchons maintenant dans quel cas on aura la précision maximale, *en calculant le minimum du taux d'incertitude*. Négligeons l'erreur sur la résistance r du voltmètre (car elle est en constantan); alors

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}(E-V)}{E-V} - \frac{\mathrm{d}V}{V}.$$

Or, $\mathrm{d}(E-V) = \mathrm{d}E - \mathrm{d}V$. En pratique, on prendra des incertitudes égales pour E et pour V. Alors

$$\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \leqslant |\Delta V|\left(\frac{2}{E-V} + \frac{1}{V}\right).$$

Il faut donc rendre minimale l'expression

$$y = \frac{2}{E-V} + \frac{1}{V}.$$

Annulons donc la dérivée :

$$y' = \frac{2}{(E-V)^2} - \frac{1}{V^2} = \frac{2V^2 - (E-V)^2}{V^2(E-V)^2};$$

d'où $y' = 0$ pour

$$2V^2 = (E-V)^2$$

soit

$$E-V = V\sqrt{2} \qquad (E > V)$$

ou enfin

$$V = \frac{E}{1+\sqrt{2}}.$$

Le signe de y' montre que cette valeur correspond à un minimum de y. Dans ce cas, x devient :

$$x = r\left[\frac{(1+\sqrt{2})\,V - V}{V}\right]$$

$$x = r\sqrt{2}.$$

INTERPOLATION LINÉAIRE

11.4 Interpolation linéaire. Nous allons majorer l'erreur commise lorsqu'on remplace une fonction f par une fonction affine
— dans le calcul de f en un point c (interpolation linéaire directe);
— puis dans le calcul de f^{-1} en un point k (interpolation linéaire inverse).

On emploie constamment cette méthode dans l'usage des tables numériques, pour améliorer la précision. De plus, l'interpolation linéaire inverse contient comme cas particulier la résolution des équations par la méthode des parties proportionnelles (voir n° 11.5).

Interpolation linéaire directe. Soient f une fonction numérique continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbf{R}$, où $a < b$, et c un élément de $]a, b[$. L'interpolation linéaire directe consiste à remplacer $f(c)$ par la valeur au point c d'une fonction affine P coïncidant avec f aux points a et b (Fig. 11.3) :

$$P(c) = f(a) + \frac{c-a}{b-a}[f(b)-f(a)].$$

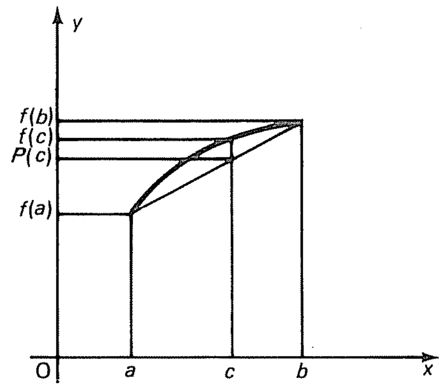


FIG. 11.3

Pour évaluer l'erreur de méthode $P(c)-f(c)$, supposons f deux fois dérivable sur $]a, b[$. Introduisons le nombre réel K défini par la relation

$$f(c) = f(a) + \frac{c-a}{b-a}[f(b)-f(a)] + \frac{K}{2}(c-a)(c-b),$$

et la fonction numérique φ définie sur $[a, b]$ par

$$\varphi(x) = -f(x) + f(a) + \frac{x-a}{b-a}[f(b)-f(a)] + \frac{K}{2}(x-a)(x-b).$$

La fonction φ est deux fois dérivable sur $]a, b[$. Puisque

$$\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(c),$$

le théorème de Rolle s'applique à la fonction φ sur les intervalles $[a, c]$ et $[c, b]$; il existe donc un nombre réel c_1 appartenant à l'intervalle $]a, c[$ et un nombre réel c_2 appartenant à l'intervalle $]c, b[$ tels que

$$\varphi'(c_1) = \varphi'(c_2) = 0.$$

Le théorème de Rolle s'applique à la fonction φ' sur l'intervalle $[c_1, c_2]$; il existe donc un nombre réel d appartenant à l'intervalle $]c_1, c_2[$, et *a fortiori* à l'intervalle $]a, b[$, tel que

$$\varphi''(d) = 0.$$

Or, la dérivée seconde de φ est définie par la relation

$$\varphi''(x) = -f''(x) + K.$$

D'où

$$K = f''(d).$$

En résumé,

$$f(c) = f(a) + \frac{c-a}{b-a}[f(b) - f(a)] + \frac{(c-a)(c-b)}{2} f''(d),$$

et l'erreur commise dans l'interpolation linéaire directe est

$$-\frac{(c-a)(c-b)}{2} f''(d).$$

Soit A un majorant de $|f''|$; l'erreur est inférieure en valeur absolue à

$$\frac{|(c-a)(c-b)|}{2} A.$$

Or, le maximum de la fonction

$$x \mapsto \frac{|(x-a)(x-b)|}{2}$$

sur l'intervalle $[a, b]$, atteint au point $\frac{a+b}{2}$, est $\frac{(b-a)^2}{8}$. On peut donc prendre pour valeur de l'incertitude

$$\varepsilon = \frac{(b-a)^2}{8} A.$$

Interpolation linéaire inverse. Soit f une fonction numérique continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbf{R}$, où $a < b$, et k un nombre réel appartenant à l'intervalle $]f(a), f(b)[$. L'interpolation linéaire inverse consiste à remplacer $c = f^{-1}(k)$ par $c' = P^{-1}(k)$, où P est la fonction affine coïncidant avec f aux points a et b (Fig. 11.4). Le nombre c' est défini par la relation

$$f(a) + \frac{c'-a}{b-a}[f(b)-f(a)] = k\,;$$

d'où

$$c' = a + \frac{b-a}{f(b)-f(a)}[k-f(a)]\,.$$

Cela revient à dire que c' est obtenu par interpolation linéaire directe de la fonction réciproque $g = f^{-1}$.

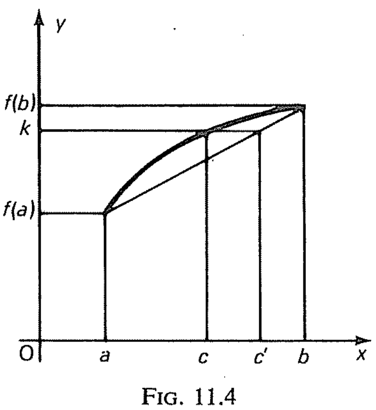


FIG. 11.4

Lorsque f est deux fois dérivable sur $]a, b[$ et que f' ne s'annule pas, l'erreur commise dans l'interpolation linéaire inverse est

$$-\frac{[k-f(a)]\,[k-f(b)]}{2}\,g''(h)\,.$$

Or,

$$g'[f(x)] = \frac{1}{f'(x)}\,;$$

donc

$$g''[f(x)] = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\,.$$

Soit B un majorant de $|f''/f'^3|$. On peut prendre comme valeur de l'incertitude

$$\varepsilon = \frac{[f(b)-f(a)]^2}{8} B .$$

EXEMPLES.

1. *Calculer les logarithmes décimaux des nombres*

$$1\,028{,}7 \qquad et \qquad 10{,}287 .$$

Nous lisons dans la table

$$\log_{10} 1\,028 = 3{,}011\,99 .$$

La différence tabulaire est 43; la méthode des parties proportionnelles conduit à ajouter $7/10 \times 43 \times 10^{-5}$. La table des parties proportionnelles directes correspondant à 43 fournit la valeur 30 ; d'où

$$\log_{10} 1\,028{,}7 = 3{,}012\,29 .$$

Nous en déduisons que

$$\log_{10} 10{,}287 = 1{,}012\,29 .$$

2. *Trouver les nombres ayant pour logarithmes*

$$0{,}229\,25 \qquad et \qquad 3{,}229\,25 .$$

Nous lisons dans la table

$$\log_{10} 1{,}695 = 0{,}229\,17 .$$

La différence tabulaire est 26. L'écart est

$$22\,925 - 22\,917 = 8 .$$

Nous trouvons dans la table des parties proportionnelles inverses correspondant à 26, en face de 8, le nombre 3. D'où

$$\log_{10} 1{,}695\,3 = 0{,}229\,25$$

et

$$\log_{10} 1\,695{,}3 = 3{,}229\,25 .$$

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS

Nous allons étudier trois méthodes pour trouver des solutions approchées des équations :

— la méthode des parties proportionnelles, qui consiste à remplacer le graphe d'une fonction par une corde;

— la méthode de Newton, qui consiste à remplacer le graphe d'une fonction par une tangente;

— la méthode d'itération, qui consiste à approcher une racine par une suite de valeurs construites par récurrence.

11.5 Méthode des parties proportionnelles. Soient f une fonction numérique continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, et (a, b) un couple de points de I tel que

$$f(a)f(b) < 0 .$$

L'équation

$$f(x) = 0$$

admet donc une racine x_0 et une seule dans l'intervalle $]a, b[$.

Une valeur approchée c de cette racine est obtenue en remplaçant f par une fonction affine coïncidant avec f aux points a et b (Fig. 11.5) :

$$c = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} = b - f(b)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}.$$

Ce procédé s'appelle méthode des parties proportionnelles, ou encore méthode de Lagrange; c'est le cas particulier de l'interpolation linéaire inverse où $k = 0$.

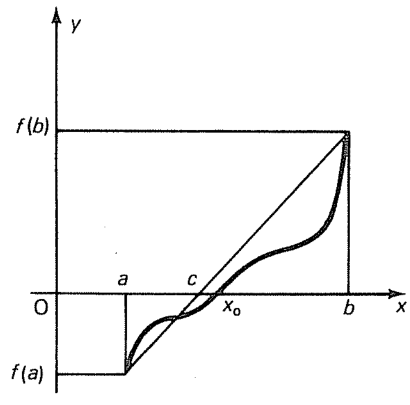


FIG. 11.5

Lorsque f est deux fois dérivable sur $]a, b[$ et que f' ne s'annule pas, l'erreur de méthode est donc

$$c - x_0 = \frac{f(a)f(b)}{2}\cdot\frac{f''(d)}{f'(d)^3},$$

où d appartient à l'intervalle $]a, b[$.

Supposons que $f''(x)$ ait un signe constant sur $]a, b[$; comme $f(a)f(b) < 0$, le nombre c est une valeur approchée par défaut si $f''f' > 0$ (Fig. 11.6a) et b)), par excès si $f''f' < 0$ (Fig. 11.7a) et b)).

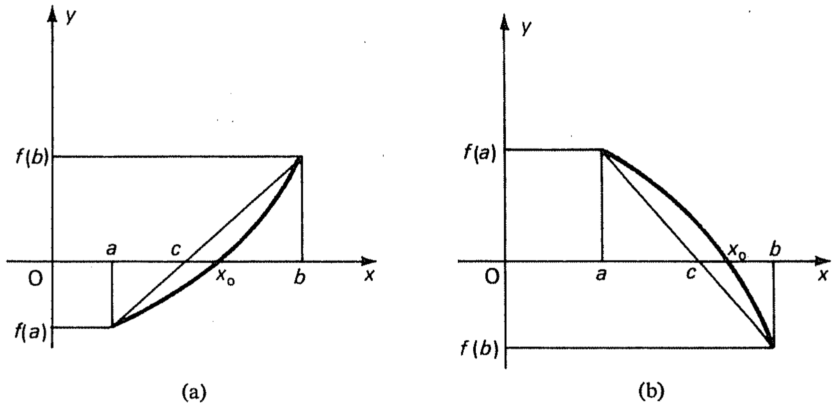


FIG. 11.6

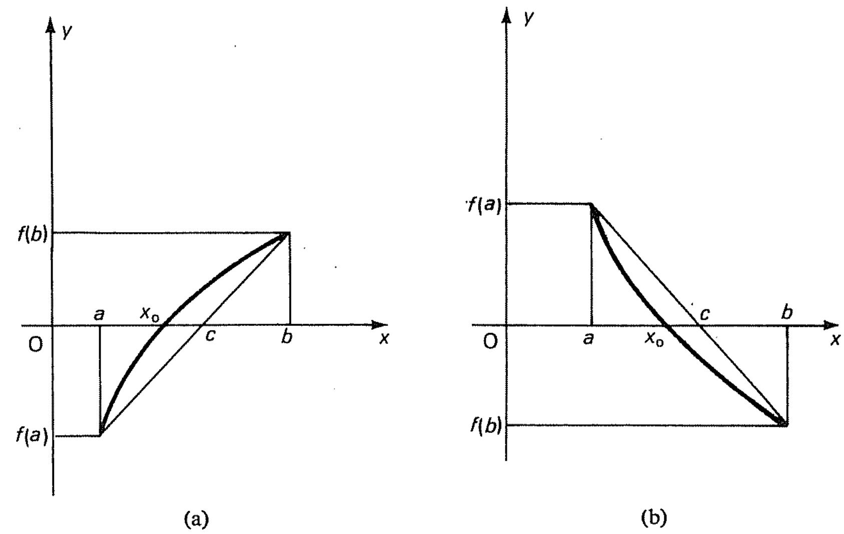


FIG. 11.7

EXEMPLE. *Montrer que l'équation*

$$x^3+2x-2 = 0$$

admet une racine et une seule entre 0,7 *et* 0,8.

Calculer une valeur approchée de cette racine par la méthode des parties proportionnelles.

Montrons que la fonction f définie par la formule

$$f(x) = x^3+2x-2$$

prend des valeurs de signes différents aux points 0,7 et 0,8. En effet :

$$f(0{,}7) = -0{,}257$$
$$f(0{,}8) = 0{,}112\,.$$

Puisque f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires montre que f s'annule au moins une fois entre 0,7 et 0,8.

$$f'(x) = 3x^2+2>0\,,$$

f est strictement croissante, ce qui entraîne l'unicité de la racine.

Une valeur approchée est

$$0{,}7+0{,}257\times\frac{0{,}1}{0{,}369} = 0{,}769\,64.$$

Comme

$$f''(x) = 6x\,,$$

il vient aussitôt

$$\frac{f''(x)}{f'(x)^3} = \frac{6x}{(3x^2+2)^3} \leqslant \frac{4{,}8}{3{,}47^3} \leqslant 0{,}115\,.$$

L'incertitude est

$$\frac{0{,}112\times 0{,}257}{2}\times 0{,}115 = 0{,}001\,66\,.$$

Puisque f est convexe, la valeur obtenue est approchée par défaut; d'où l'encadrement :

$$0{,}769\,64 \leqslant x_0 \leqslant 0{,}771\,30\,.$$

11.6 Méthode de Newton. Soient toujours f une fonction numérique continue et strictement monotone sur I, et (a, b) un couple de points de I tel que $f(a)\,f(b)<0$. Pour résoudre l'équation $f(x)=0$, remplaçons f par la fonction

$$x\mapsto f(a)+(x-a)\,f'(a)\,.$$

Cela revient à remplacer le graphe de f par la tangente au point d'abscisse a (Fig. 11.8).

On obtient une valeur approchée de la racine x_0 en cherchant l'abscisse c' de l'intersection de la tangente avec Ox :

$$f(a)+(c'-a)\,f'(a) = 0\,,$$

d'où

$$c' = a-\frac{f(a)}{f'(a)}. \qquad (1)$$

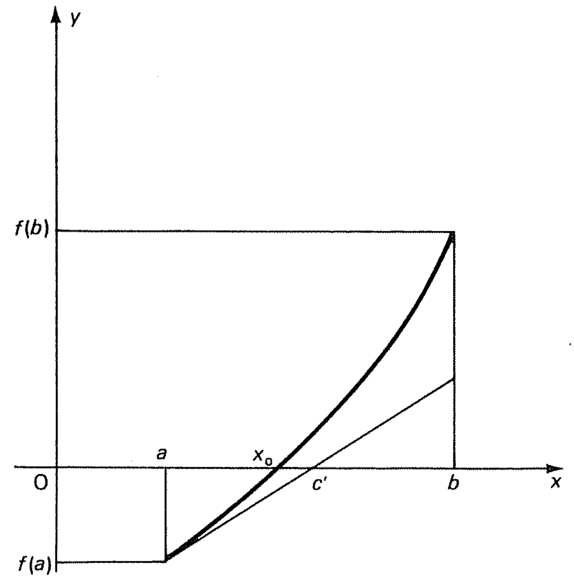


FIG. 11.8

Pour évaluer l'erreur commise en ramplaçant x_0 par c', utilisons la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 (voir tome 2) :

$$f(x_0) = f(a) + (x_0 - a) f'(a) + \frac{(x_0 - a)^2}{2} f''[a + \theta(x_0 - a)], \tag{2}$$

où $0 < \theta < 1$. Puisque $f(x_0) = 0$, nous obtenons par différence entre (1) et (2)

$$(c - x_0) f'(a) - \frac{(x_0 - a)^2}{2} f''[a + \theta(x_0 - a)] = 0,$$

soit

$$c - x_0 = \frac{(x_0 - a)^2}{2} \frac{f''[a + \theta(x_0 - a)]}{f'(a)}.$$

En pratique, on prend pour incertitude

$$\frac{(b-a)^2}{2} \frac{M_2}{m_1}, \quad \text{où} \quad M_2 = \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)| \quad \text{et} \quad m_1 = \inf_{x \in [a, b]} |f'(x)|.$$

(On notera que cette fois les valeurs a et b jouent des rôles très dissymétriques : le point b ne sert qu'à garantir que x_0 est entre a et b, mais il n'intervient pas dans le calcul de c'. Bien entendu, on aurait pu considérer la tangente au point d'abscisse b; dans ce cas, c'est le point d'abscisse a qui aurait un rôle secondaire.)

EXEMPLE. Reprenons l'équation

$$x^3+2x-2 = 0\,.$$

La tangente au point d'abscisse $a = 0{,}7$ a pour équation

$$y = -0{,}257+3{,}47(x-0{,}7)\,.$$

On obtient la valeur approchée c' en annulant y :

$$c' = 0{,}7 + \frac{0{,}257}{3{,}47} = 0{,}7740\,.$$

L'incertitude est

$$\frac{0{,}01}{2}\,\frac{4{,}8}{3{,}47} \approx 0{,}007\,.$$

La concavité de f montre que c' est une valeur approchée par excès. Ainsi,

$$0{,}7670 \leqslant x_0 \leqslant 0{,}7740\,.$$

11.7 Méthode d'itération. La méthode d'itération repose sur le théorème suivant :

Théorème du point fixe. *Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle fermé I de $\mathbf{R}$, telle que $f(I)$ soit contenu dans I et que f' soit majorée en valeur absolue par un nombre réel positif k strictement inférieur à* 1.

Il existe alors un point ξ de I et un seul tel que

$$f(\xi) = \xi\,.$$

De plus, pour tout point x_0 de I, la suite de terme général x_n définie par la relation de récurrence

$$x_n = f(x_{n-1})$$

converge vers ξ; plus précisément,

$$|x_n-\xi| \leqslant \frac{k^n}{1-k}\,|x_1-x_0|\,. \tag{1}$$

Remarquons d'abord que, d'après la formule des accroissements finis, pour tout couple (x, x') de points de I,

$$|f(x)-f(x')| \leqslant k\,|x-x'|\,.$$

Unicité de la solution de l'équation $f(x) = x$. Soient a et b deux points de I tels que

$$f(a) = a \qquad \text{et} \qquad f(b) = b\,.$$

Alors

$$|a-b| = |f(a)-f(b)| \leqslant k|a-b| .$$

Puisque $k < 1$, nous en déduisons que $a = b$.

Existence d'une solution de l'équation $f(x) = x$. Soit x_0 un point de I. Considérons la suite de terme général x_n définie par la relation de récurrence

$$x_n = f(x_{n-1}) .$$

Pour tout entier n supérieur à 2,

$$|x_n - x_{n-1}| = |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| \leqslant k|x_{n-1} - x_{n-2}| .$$

On en déduit par récurrence que

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant k^{n-1}|x_1 - x_0| .$$

Soit (r, s) un couple d'entiers naturels tel que $r < s$. Il résulte de l'inégalité triangulaire que

$$|x_s - x_r| \leqslant \sum_{p=r}^{s-1} |x_{p+1} - x_p| ,$$

et donc que

$$|x_s - x_r| \leqslant \left(\sum_{p=r}^{s-1} k^p\right).|x_1 - x_0| .$$

Or,

$$\sum_{p=r}^{s-1} k^p = k^r \frac{1-k^{s-r}}{1-k} < \frac{k^r}{1-k} .$$

Il s'ensuit que

$$|x_r - x_s| \leqslant \frac{k^r}{1-k} |x_1 - x_0| . \tag{2}$$

Puisque $k < 1$, k^r tend vers 0 lorsque r tend vers $+\infty$. La suite de terme général x_n est donc une suite de Cauchy de nombres réels; elle converge vers un nombre réel ξ. Comme l'intervalle I est fermé, ξ appartient à I. Enfin, puisque f est continue, $f(x_{n-1})$ tend vers $f(\xi)$ lorsque n tend vers $+\infty$. La relation

$$x_n = f(x_{n-1})$$

montre alors que

$$\xi = f(\xi) .$$

Pour majorer $|x_n - \xi|$, faisons tendre s vers $+\infty$ dans l'inégalité (2). Comme x_s tend vers ξ, $|x_r - x_s|$ tend vers $|x_r - \xi|$. Le prolongement des inégalités fournit aussitôt la relation (1).

Pour trouver une valeur approchée de la racine ξ de l'équation

$$f(x) = x ,$$

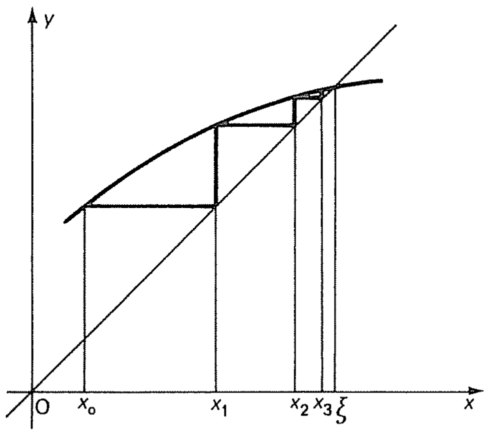
il suffit donc de calculer les premiers termes de la suite de terme général x_n. L'incertitude est alors donnée par la formule (1).

Si f' est positive, la suite de terme général x_n est monotone. Lorsque $x_1 < x_0$, x_n est une valeur approchée par défaut de ξ; lorsque $x_1 > x_0$, x_n est une valeur approchée par excès. On dit que l'approximation est en escalier (Fig. 11.9a)).

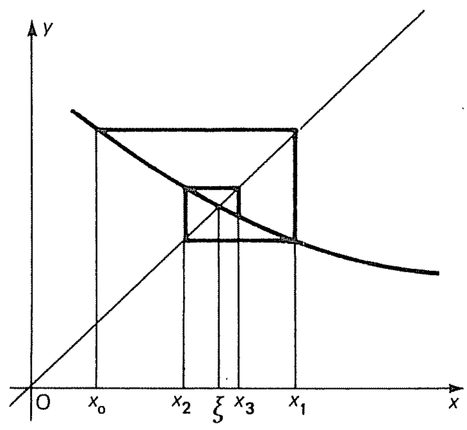
Si f' est négative, les suites de termes généraux x_{2n} et x_{2n+1} sont monotones de sens contraires. Par exemple, si $x_0 < x_1$, les termes x_{2n} et x_{2n+1} fournissent un encadrement de ξ :

$$x_{2n} < \xi < x_{2n+1} .$$

On dit que l'approximation est en spirale (Fig. 11.9b)).



(a)



(b)

FIG. 11.9

Si nous avons donné en détail la démonstration du théorème du point fixe, c'est parce que ce théorème est à la base de la plupart des méthodes employées sur ordinateur : équations implicites, équations différentielles, et même systèmes de Cramer! Il est très remarquable que *dans le cas des systèmes de Cramer, où l'on connaît des valeurs exactes des solutions à partir d'une formule, on préfère employer un procédé itératif ne donnant qu'une valeur approchée*! De toute façon, l'ordinateur fournira un certain nombre de décimales (et non une valeur exacte); tout ce qui compte, ce n'est pas la méthode utilisée, mais le temps mis pour trouver un résultat!

EXEMPLES.

1. *Soit a un nombre réel strictement positif. Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif u_0, la suite de terme général u_n définie par la relation de récurrence*

$$u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{a^2}{u_{n-1}}\right)$$

converge vers a.

(*On introduira la suite auxiliaire*

$$v_n = \frac{u_n - a}{u_n + a}.)$$

APPLICATION. *Calculer une valeur approchée de* $\sqrt{2}$.
Un calcul immédiat montre que

$$v_n = \left(\frac{u_{n-1} - a}{u_{n-1} + a}\right)^2 = v_{n-1}^2.$$

D'où

$$v_n = v_0^{(2^n)}.$$

Il s'ensuit que si $v_0 < 1$, c'est-à-dire si $u_0 > 0$, v_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$; donc u_n tend vers a.

Application. Prenons $a^2 = 2$, et $u_0 = 1$. Alors

$$u_1 = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$u_2 = \frac{17}{12} \approx 1{,}416$$

$$u_3 = \frac{577}{408} \approx 1{,}414\,21.$$

On constate que u_3 est égal à la valeur donnée pour $\sqrt{2}$ dans la table des racines carrées.

2. *Montrer que l'équation*

$$\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

ne possède qu'une racine positive; calculer cette racine par la méthode d'itération.
La fonction F définie par la formule

$$F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

est strictement croissante. Comme

$$F(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty\,,$$

l'image par F de l'intervalle $[0, +\infty[$ est ce même intervalle. Il s'ensuit que F

prend une fois et une seule toute valeur positive. En particulier, l'équation

$$F(x) = \tfrac{1}{2}$$

possède une racine positive et une seule.

Or,

$$\frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}\,;$$

donc $F(x) = x - \text{Arc tg}\, x$.

Si $x = 1$, $x - \text{Arc tg}\, x \approx 0{,}2 < \tfrac{1}{2}$.

La racine cherchée est donc supérieure à 1.

La dérivée de Arc tg x est inférieure à $\tfrac{1}{2}$ dès que x est supérieur à 1 ; le théorème du point fixe s'applique. D'où

n	x_n	Arc tg x_n
0	1	0,785
1	1,285	0,910
2	1,410	0,954
3	1,454	0,968
4	1,468	0,973
5	1,473	0,974
6	1,474	0,975
7	1,475	0,975

La racine cherchée est donc 1,475.

CALCUL APPROCHÉ DES INTÉGRALES

Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbf{R}$, où $a < b$. On se propose de calculer une valeur approchée de l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

et de déterminer un encadrement de la valeur exacte de I.

11.8 Méthode des rectangles. On peut remplacer f par la fonction constante et égale à $f(a)$. Cela revient à remplacer l'aire limitée par l'axe Ox, le graphe de f et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ par celle du rectangle $abB'A$ (Fig. 11.10).

On obtient ainsi la valeur approchée

$$R_1 = (b-a)\,f(a)\,.$$

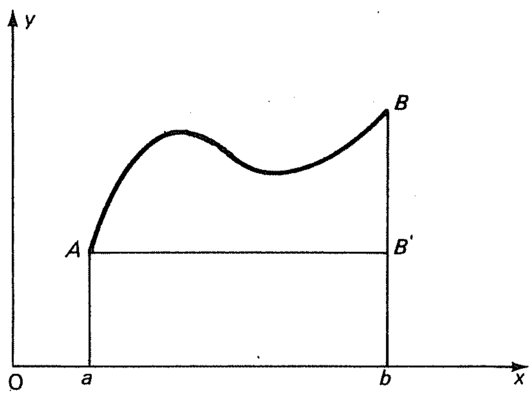


FIG. 11.10

Pour obtenir un encadrement de I, plaçons-nous dans le cas où f est continûment dérivable sur $[a, b]$. En intégrant I par parties, nous voyons que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [(x-b)f(x)]_a^b - \int_a^b (x-b)f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= (b-a)\,f(a) - \int_a^b (x-b)\,f'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Posons $M_1 = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|$; alors

$$|I - R_1| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)| = \frac{(b-a)^2}{2} M_1\,. \tag{1}$$

Soit maintenant n un entier naturel non nul. Considérons la subdivision $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de l'intervalle $[a, b]$ telle que, pour tout élément i de $[1, n]$,

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}.$$

Pour obtenir une valeur approchée de I, on peut remplacer la restriction de f à tout intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ par la fonction constante et égale à $f(x_{i-1})$. Cela revient à remplacer l'aire précédemment introduite par la somme des aires des rectangles $x_{i-1}x_iA_i'A_{i-1}$.

On obtient ainsi la valeur approchée

$$R_n = \frac{b-a}{n}[f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})]\,.$$

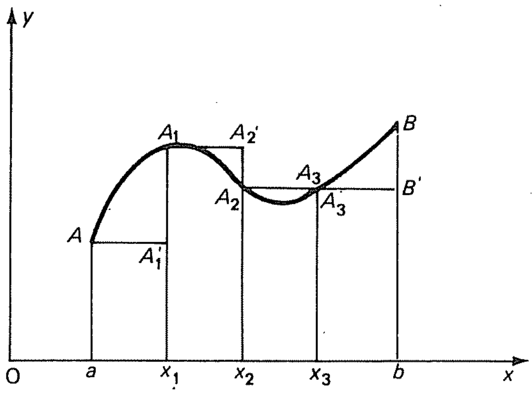


FIG. 11.11

L'erreur commise est la somme des erreurs sur chacun des intervalles $[x_i, x_{i-1}]$. En appliquant n fois la relation (1), nous trouvons la majoration suivante :

$$|I - R_n| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n} \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)| \,.$$

On remarquera que si f est croissante (resp. décroissante), R_n est une valeur approchée de I par défaut (resp. par excès).

Nous allons montrer qu'une légère modification de la méthode conduit à une bien meilleure précision, avec sensiblement autant de calculs.

11.9 Méthode des trapèzes. On peut remplacer f par la fonction affine coïncidant avec f aux points a et b. Cela revient à remplacer l'aire limitée par l'axe Ox, le graphe de f et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ par l'aire du trapèze $abBA$ (Fig. 11.12).

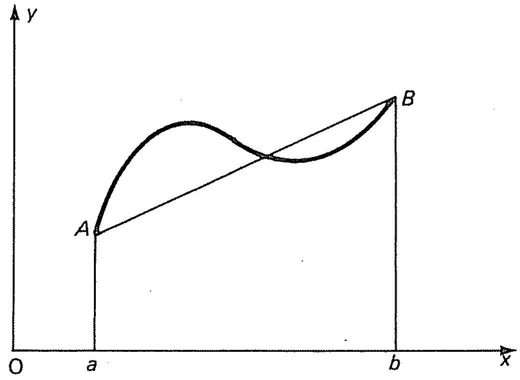


FIG. 11.12

On obtient ainsi la valeur approchée

$$T_1 = \frac{b-a}{2}\,[f(a)+f(b)].$$

Pour obtenir un encadrement de I, plaçons-nous dans le cas où f est deux fois continûment dérivable sur $[a, b]$. En intégrant I par parties, nous voyons que

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\right]_a^b - \int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{b-a}{2}\,[f(a)+f(b)] - \int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Une nouvelle intégration par parties conduit à

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\,[(x-a)\,(x-b)\,f'(x)]_a^b -\\ &\quad -\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)\,(x-b)\,f''(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)\,(x-b)\,f''(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Posons $M_2 = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$. Comme

$$\begin{aligned}\int_a^b (x-a)\,(x-b)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b (x-a)\,(x-a+a-b)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}\,(b-a)^3 - \frac{1}{2}\,(b-a)^3 = -\frac{1}{6}\,(b-a)^3,\end{aligned}$$

il vient finalement

$$|I-T_1| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12} \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)| = \frac{(b-a)^3}{12}\,M_2. \tag{2}$$

Soit maintenant n un entier naturel non nul. Considérons la subdivision $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de l'intervalle $[a, b]$ telle que, pour tout élément i de $[1, n]$,

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}.$$

Pour obtenir une valeur approchée de I, on peut remplacer la restriction de f à tout intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ par la fonction linéaire affine coïncidant avec f aux points x_{i-1}

et x_i. Cela revient à remplacer l'aire précédemment introduite par la somme des aires des trapèzes $x_{i-1}x_iA_iA_{i-1}$ (Fig. 11.13).

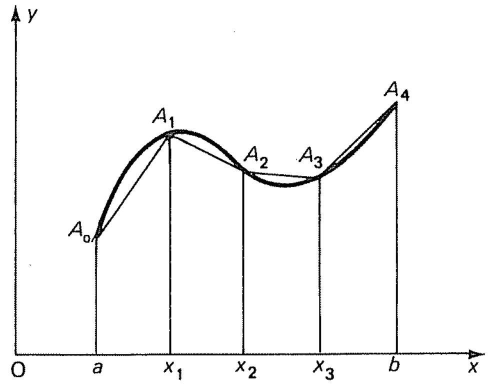


FIG. 11.13

On obtient ainsi la valeur approchée

$$T_n = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\right].$$

L'erreur commise est la somme des erreurs sur chacun des intervalles $[x_{i-1}, x_i]$.
En appliquant n fois la relation (2), nous trouvons la majoration suivante :

$$|I - T_n| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

On remarquera que si f est convexe (resp. concave), T_n est une valeur approchée de I par excès (resp. par défaut).

EXEMPLES.

1. *Calculer une valeur approchée de*

$$\ln 2 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$$

par la méthode des trapèzes à 5×10^{-3} *près.*

Comme

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3},$$

M est égal à 2. L'erreur de méthode est donc inférieure à

$$M\,\frac{(b-a)^3}{12n^2} = \frac{2}{12n^2}.$$

Puisque $f'' > 0$, on obtiendra une valeur approchée par excès.

Si nous prenons $n = 10$, l'incertitude est $1{,}67 \times 10^{-3}$. Il convient donc de commettre une erreur d'arrondi inférieure à 3×10^{-3}. Or, cette erreur est due au calcul des valeurs de f en tout point autre que 0, 0,6 et 1. Il faudra donc pousser chacune des huit divisions jusqu'à la troisième décimale. Pour conserver le sens de l'erreur, nous prendrons pour chaque terme une valeur approchée par excès. D'où le tableau :

x	$\dfrac{1}{1+x}$
0	1
0,1	0,910
0,2	0,834
0,3	0,770
0,4	0,715
0,5	0,667
0,6	0,625
0,7	0,589
0,8	0,556
0,9	0,527
1	0,500

La somme des aires des trapèzes est

$$0{,}1\,(0{,}75 + 6{,}193) = 0{,}694\,3\,.$$

Finalement

$$0{,}690 \leqslant \ln 2 \leqslant 0{,}695\,.$$

2. *Calculer par la méthode des trapèzes une valeur approchée de l'intégrale*

$$\int_0^{0,6} \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x\,,$$

en partageant l'intervalle d'intégration en six intervalles par les nombres 0, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6.

Préciser le sens de l'erreur commise en appliquant cette méthode et déterminer un majorant de la valeur absolue de cette erreur en adoptant pour ce majorant l'expression générale $(b-a)^3\,M_2/12n^2$, *c'est-à-dire ici* $0{,}6^3\,M_2/(12 \times 36)$, *où* M_2 *désigne un majorant de la valeur absolue de la dérivée seconde de* $\sqrt{1+x^3}$.

Pour obtenir M_2, calculons les dérivées première et seconde :

$$y' = \frac{3}{2}\,\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,,$$

$$y'' = \frac{3x}{\sqrt{1+x^3}} - \frac{9}{4}\,\frac{x^4}{(1+x^3)^{3/2}} = \frac{3x^4 + 12x}{4(1+x^3)^{3/2}}\,.$$

La dérivée seconde est inférieure à

$$\frac{3\times 0{,}6^4+12\times 0{,}6}{4}.$$

Nous prendrons $M_2 = 1{,}8$. L'erreur est alors majorée par

$$\frac{0{,}6^3}{12\times 36}\times 1{,}8 = \frac{0{,}216}{240} = 9\times 10^{-4}.$$

La fonction étant convexe, la méthode des trapèzes fournit une valeur approchée par excès. Si nous voulons une erreur totale inférieure à 10^{-3}, il convient de calculer les valeurs de la fonction avec une erreur inférieure à 10^{-4}. La table de logarithmes s'impose.

D'où le tableau :

x	x^3	$1+x^3$	$\log_{10}(1+x^3)$	$\log_{10}\sqrt{1+x^3}$	y
0					1
0,1	0,001	1,001	0,000 43	0,000 21	1,000 5
0,2	0,008	1,008	0,003 46	0,001 73	1,004 0
0,3	0,027	1,027	0,011 57	0,005 78	1,013 4
0,4	0,064	1,064	0,026 94	0,013 47	1,031 5
0,5	0,125	1,125	0,051 15	0,025 57	1,060 6
0,6	0,216	1,216	0,084 93	0,042 46	1,102 7

Il vient alors

$$I = 0{,}1\times\left[\frac{1+1{,}102\,7}{2} + 5{,}110\,0\right] = 0{,}616\,135.$$

Vu la précision des calculs, nous retiendrons

$$I\approx 0{,}616\,.$$

CALCUL APPROCHÉ DE LA SOMME D'UNE SÉRIE

11.10 Calcul approché de la somme d'une série. Considérons une série convergente de terme général (u_n). Nous pouvons prendre la somme s_n à l'ordre n pour valeur approchée de la somme s. L'erreur de méthode est $s_n - s$, c'est-à-dire l'opposé du reste r_n à l'ordre n.

Mais il faut tenir compte aussi de l'erreur d'arrondi commise dans le calcul approché des premiers termes de la série. On procèdera donc de la manière suivante :

Soit ε un nombre réel strictement positif. On choisira n tel que $|r_n| \leqslant \varepsilon/2$. On calculera ensuite les termes $u_0, u_1, \ldots, u_n$ de telle sorte que la somme des incertitudes sur ces termes soit inférieure à $\varepsilon/2$.

Dans ces conditions, l'incertitude sur s est inférieure à $\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$.
(Plus généralement, on peut choisir n de telle sorte que $|r_n| < \varepsilon$; on calculera alors les premiers termes avec une précision suffisante pour que la somme des incertitudes dues à la méthode et aux arrondis soit inférieure à ε.)

Nous allons calculer une majoration du reste de la série dans chacun des cas étudiés au tome 3.

11.11 Séries majorées par une série géométrique. Considérons une série de nombres réels positifs telle que

$$\sqrt[n]{u_n} \leqslant k, \qquad \text{où} \qquad k \in]0, 1[. \tag{1}$$

Alors

$$r_n \leqslant k^{n+1} + k^{n+2} + \ldots + k^p + \ldots$$

soit, puisque $k < 1$,

$$r_n \leqslant \frac{k^{n+1}}{1-k}. \tag{2}$$

Bien entendu, dans le cas où la relation (1) n'est vraie qu'à partir d'un certain rang n_0, on n'appliquera la formule (2) que si $n \geqslant n_0$.

Passons au cas où la convergence est établie à l'aide de la règle de D'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k. \tag{3}$$

Pour tout entier naturel p, $u_{n+p} \leqslant k^{p-1} u_{n+1}$, d'où

$$r_n \leqslant \frac{u_{n+1}}{1-k}. \tag{4}$$

Si la relation (3) n'est vraie qu'à partir d'un certain rang n_0, on choisira $n \geqslant n_0$ pour appliquer la formule (4).

EXEMPLE. *Calculer une valeur approchée par défaut à 10^{-6} près du nombre de Neper e, sachant que ce nombre est la somme de la série de terme général* $(1/n!)$.

Suivant un calcul effectuée au tome 1,

$$u_n < e < u_n + \frac{1}{n.n!}.$$

Il faut donc choisir n tel que $1/n.n! < 10^{-6}$, c'est-à-dire $n.n! \geqslant 10^6$. En essayant les premières valeurs de n, on voit qu'il faut aller jusqu'à $n=9$, auquel cas

$r_n \leqslant 3 \times 10^{-7}$. Les erreurs d'arrondi proviennent alors des termes $u_3, u_4, \ldots, u_9$, soit sept termes. Il suffira de calculer chacun d'eux avec une incertitude inférieure à 10^{-7} pour obtenir une incertitude totale inférieure à $3 \times 10^{-7} + 7 \times 10^{-7} = 10^{-6}$. De plus, nous prendrons toutes les valeurs approchées par défaut, pour connaître le sens de l'approximation sur e.

Dressons le tableau suivant :

p	u_p
0	1
1	1
2	0,5
3	0,166 666 6
4	0,041 666 6
5	0,008 333 3
6	0,001 388 8
7	0,000 198 4
8	0,000 024 8
9	0,000 002 7

D'où

$$2{,}718\,281\,2 < e < 2{,}718\,282\,2\,.$$

Une valeur approchée de e à 10^{-6} près par défaut est donc 2,718 281 2.

11.12 Séries majorées par une intégrale. Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles positives, décroissante et ayant pour limite 0 à l'infini. Nous savons que la série de terme général $(f(n))$ est convergente si et seulement s'il en est ainsi de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Dans ces conditions,

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant r_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Il suffit donc de connaître une primitive de f pour obtenir un encadrement du reste à l'ordre n.

EXEMPLE. *Calculer la somme de la série de terme général* $(1/n^7)$ *à* 10^{-3} *près par défaut.*

Le résultat précédent s'applique à la fonction $f : t \mapsto t^{-7}$ (à ceci près que le terme général de la série n'est pas défini pour $n = 0$). Puisque f admet pour primitive la fonction $t \mapsto -1/6t^6$, nous voyons que

$$s_n + \frac{1}{6(n+1)^6} \leqslant s \leqslant s_n + \frac{1}{6n^6}\,.$$

Nous prendrons n tel que

$$\frac{1}{6}\left[\frac{1}{n^6}-\frac{1}{(n+1)^6}\right] \leqslant \tfrac{1}{2}\, 10^{-3},$$

réservant $0{,}5 \times 10^{-3}$ aux erreurs d'arrondi. D'où $n=3$ et

$$s \approx 1+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{6\times 4^6}.$$

On trouve facilement

$$s \approx 1{,}008\,.$$

11.13 Séries alternées. Considérons une série alternée dont le terme général décroît en valeur absolue et tend vers 0. Nous savons que les sommes à l'ordre $2p$ et à l'ordre $2p+1$ constituent un encadrement de s. Autrement dit, l'erreur est en valeur absolue inférieure au premier terme négligé et du signe de celui-ci.

EXEMPLES.

1. *Déterminer l'incertitude commise sur la somme de la série de terme général*

$$u_n = (-1)^n \frac{4^n}{(4n)!}$$

en prenant pour valeur approchée s_2.

Nous savons que s_2 est une valeur approchée par excès, car le premier terme négligé, à savoir u_3, est négatif. L'incertitude est

$$u_3 = \frac{4^3}{12!} = 1/7\,484\,400\,.$$

Tenons compte maintenant des erreurs d'arrondi. Pour obtenir une valeur de s approchée par excès, nous prendrons une valeur par excès de $4^2/8!$, soit 0,000 396 9 et une valeur par défaut de $4/4!$, soit 0,166 666 6. D'où

$$s \approx 0{,}833\,730\,3\,.$$

Plus précisément,

$$0{,}833\,730\,1 \leqslant s \leqslant 0{,}833\,730\,3\,.$$

2. *Calculer une valeur approchée par défaut de* $\pi/4$ *à* 10^{-6} *près. On utilisera la formule*

$$\text{Arc tg } 1 = 4\,\text{Arc tg}\,\frac{1}{5} - \text{Arc tg}\,\frac{1}{239}.$$

Nous savons que

$$\frac{\pi}{4} = \text{Arc tg } 1 = -\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots+(-1)^p\frac{1}{2p+1}+\dots$$

Mais $|r_{2p+1}| = \dfrac{1}{2p+3}$; pour obtenir $|r_{2p+1}| \leqslant 10^{-6}$, il faudrait prendre $2p+3 \geqslant 10^6$, c'est-à-dire calculer cinq cent mille termes (les termes pairs étant nuls). Le lecteur doit commencer à comprendre pourquoi l'énoncé impose une autre méthode!

Rappelons que

$$\text{Arc tg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + \dots$$

Il suffira de commettre une erreur strictement inférieure à $\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,10^{-6}$ sur le calcul de Arc tg $\frac{1}{5}$ et une erreur strictement inférieure à $\frac{1}{2}\,10^{-6}$ sur celui de Arc tg $\frac{1}{239}$.

La majoration du reste d'une série alternée conduit à chercher un entier p tel que

$$\frac{1}{(2p+3)\,5^{2p+3}} < \frac{1}{8 \times 10^6}.$$

On prendra $p = 3$, d'où

$$\text{Arc tg}\,\frac{1}{5} \approx \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \times 5^3} + \frac{1}{5 \times 5^5} - \frac{1}{7 \times 5^7},$$

valeur approchée par défaut.

De même, la relation

$$\frac{1}{(2q+3)\,239^{2q+3}} < \frac{1}{2 \times 10^6}$$

est vérifiée si $q = 0$. D'où

$$\text{Arc tg}\,\frac{1}{239} \approx \frac{1}{239},$$

valeur approchée par excès.

La somme des incertitudes dues à la méthode est

$$4\,\frac{1}{9 \times 5^9} + \frac{1}{3 \times 239^3} = 0{,}227 \times 10^{-6} + 0{,}025 \times 10^{-6} < 0{,}5 \times 10^{-6}.$$

Les erreurs d'arrondi proviennent des trois termes suivants: $4/(3 \times 5^3)$, $4/(7 \times 5^7)$ et $1/239$. Il suffira de calculer chacun de ces termes à 10^{-7} près. De plus, chacun de ces termes étant précédé du signe $-$, on calculera des valeurs approchées *par excès* pour obtenir finalement une valeur approchée *par défaut* de $\pi/4$.

$$\frac{4}{3 \times 5^3} = \frac{4 \times 2^3}{3 \times 10^3} \approx 0{,}010\,066\,7$$

$$\frac{4}{7\times 5^7} = \frac{4\times 2^7}{7\times 10^7} \approx 0{,}000\,007\,4$$

$$\frac{1}{239} \approx 0{,}004\,184\,2\,.$$

Ainsi,

$$\text{Arc tg } 1 \approx 0{,}800\,256\,0 - 0{,}014\,858\,3 = 0{,}785\,397\,7.$$

Cette valeur est approchée à 10^{-6} près par défaut. On peut en déduire une valeur approchée de π à 4×10^{-6} près par défaut :

$$\pi = 3{,}141\,590\,8$$

ou, si l'on préfère,

$$3{,}141\,590 \leqslant \pi \leqslant 3{,}141\,595\,.$$

SOLUTIONS DES EXERCICES

CHAPITRE 1

Dérivées partielles

1.1 $p = \dfrac{1}{2\sqrt{(1+x)(1+y)}}$ $\qquad q = -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+x}{1+y}}\,\dfrac{1}{1+y}$.

1.2 $p = -\dfrac{y}{x^2}\sin\dfrac{2y}{x}$ $\qquad q = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{2y}{x}$.

1.3 $p = \dfrac{1}{y}\,\dfrac{1}{\cos^2 x/y}$ $\qquad q = -\dfrac{x}{y^2}\,\dfrac{1}{\cos^2 x/y}$.

1.4 $p = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\cos y}{x}}$ $\qquad q = -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{\cos y}}\sin y$.

1.5 $p = 1/x$ $\qquad q = -1/y$.

1.6 $p = x\,\dfrac{\cos(x^2+y^2)}{\sqrt{\sin(x^2+y^2)}}$ $\qquad q = y\,\dfrac{\cos(x^2+y^2)}{\sqrt{\sin(x^2+y^2)}}$.

1.7 $f(x, y) = \exp(xy^2 \ln x)$

$p = y^2(1+\ln x)\, f(x, y)$ $\qquad q = 2xy \ln x f(x, y)$.

1.8 $p = \dfrac{y(1+y^2)}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$ $\qquad q = \dfrac{x(1+x^2)}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$.

1.9 $p = -\dfrac{x}{\sqrt{y^2-x^2}\,(y+\sqrt{y^2-x^2})}$ $\qquad q = \dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$.

(La valeur de q se trouve dans le tableau des primitives usuelles.)

1.10 $p = [2x-y(x^2+y^2)]\, e^{-xy}$ $\qquad q = [2y-x(x^2+y^2)]\, e^{-xy}$.

1.11 $p = \dfrac{1}{y\sqrt{1-x^2/y^2}}$ $\qquad q = -\dfrac{x}{y^2\sqrt{1-x^2/y^2}}$.

1.12 $p = -\dfrac{1}{2y\sqrt{\dfrac{x}{y}}\left(1+\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)^2}$ $\qquad q = \dfrac{x}{2y^2\sqrt{\dfrac{x}{y}}\left(1+\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)^2}$.

Si x et y sont strictement positifs,

$$p = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\,\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2} \qquad q = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}\,\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}.$$

1.13 $$p = -\frac{e^x}{(e^x+e^y)^2} \qquad q = -\frac{e^y}{(e^x+e^y)^2}$$

$$r = \frac{e^{2x}-e^{x+y}}{(e^x+e^y)^3} \qquad s = 2\,\frac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^3} \qquad t = \frac{e^{2y}-e^{x+y}}{(e^x+e^y)^3}.$$

1.14 $$p = \frac{1}{y}\,e^{x/y} \qquad q = -\frac{x}{y^2}\,e^{x/y}$$

$$r = \frac{1}{y^2}\,e^{x/y} \qquad s = -\frac{x+y}{y^3}\,e^{x/y} \qquad t = (x+2y)\,\frac{x}{y^4}\,e^{x/y}.$$

1.15 $$p = \frac{\cos x}{\cos y} \qquad q = \frac{\sin x \sin y}{\cos^2 y}$$

$$r = -\frac{\sin x}{\cos y} \qquad s = \frac{\cos x \sin y}{\cos^2 y} \qquad t = (1+2\,\mathrm{tg}^2 y)\frac{\sin x}{\cos y}.$$

1.16 $$p = 2\cos 2x \cos 3y \qquad q = -3\sin 2x \sin 3y$$

$$r = -4\sin 2x \cos 3y \qquad s = -6\cos 2x \sin 3y \qquad t = -9\sin 2x \cos 3y.$$

1.17 Posons, pour simplifier l'écriture, $u = x/y$. Alors

$$p = \frac{1}{y}\,\frac{\sin u}{\cos^2 u} \qquad q = -\frac{x}{y^2}\,\frac{\sin u}{\cos^2 u}$$

$$r = \frac{1}{y^2}\,\frac{\cos^2 u + 2\sin^2 u}{\cos^3 u}$$

$$s = -\frac{1}{y^2}\,\frac{\sin u}{\cos^2 u} - \frac{x}{y^2}\,\frac{\cos^2 u + 2\sin^2 u}{\cos^3 u}$$

$$t = \frac{2x}{y^3}\,\frac{\sin u}{\cos^2 u} + \frac{x^2}{y^4}\,\frac{\cos^2 u + 2\sin^2 u}{\cos^3 u}.$$

1.18 Posons $u = 1/xy^2$. Alors

$$p = -\frac{3}{x^2 y^2}\sin^2 u \cos u \qquad q = -\frac{6}{xy^3}\sin^2 u \cos u$$

$$r = \frac{6}{x^3 y^2} \sin^2 u \cos u + \frac{3}{x^4 y^4} (2 \sin u \cos^2 u - \sin^3 u)$$

$$s = \frac{6}{x^2 y^3} \sin^2 u \cos u + \frac{6}{x^3 y^5} (2 \sin u \cos^2 u - \sin^3 u)$$

$$t = \frac{18}{xy^4} \sin^2 u \cos u + \frac{12}{x^2 y^6} (2 \sin u \cos^2 u - \sin^3 u).$$

1.19 $p = \dfrac{2}{\cos^2 2x \sin 2y}$ $\qquad q = -\dfrac{2 \operatorname{tg} 2x \cos 2y}{\sin^2 2y}$

$r = \dfrac{8 \sin 2x}{\cos^3 2x \sin 2y}$ $\qquad s = -\dfrac{4 \cos^2 2y}{\cos^2 2x \sin^2 2y}$

$t = 4 \operatorname{tg} 2x \dfrac{\sin^2 2y + 2 \cos^2 2y}{\sin^3 2y}.$

1.20 Posons $u = e^{xy}$; alors $f(x, y) = \operatorname{tg} u$ et

$p = \dfrac{uy}{\cos^2 u}$ $\qquad q = \dfrac{ux}{\cos^2 u}$

$$r = uy^2 \frac{\cos u + 2 \sin u}{\cos^3 u}$$

$$s = \frac{u}{\cos^2 u} + uxy \frac{\cos u + 2 \sin u}{\cos^3 u}$$

$$t = ux^2 \frac{\cos u + 2 \sin u}{\cos^3 u}.$$

1.21 $p = 3x^2 - 6xy + 4y^2$ $\qquad q = -3x^2 + 8xy - 3y^2$

$r = 6x - 6y$ $\qquad s = -6x + 8y$ $\qquad t = 8x - 6y.$

1.22 $p = -12x^2 + 5y^2$ $\qquad q = 18y^2 + 10xy$

$r = -24x$ $\qquad s = 10y$ $\qquad t = 36y + 10x.$

1.23 $p = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$ $\qquad q = -\dfrac{x}{x^2 + y^2}$

$r = -\dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$ $\qquad s = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ $\qquad t = \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$

1.24 En posant $u=1-x$ et $v=1-y$, nous nous ramenons à l'exercice précédent, car $f=\text{Arc tg}\, u/v$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial u} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

1.25 $p=\dfrac{2}{\sqrt{x^2-y^2}}.$

Le calcul direct de q est compliqué. Remarquons que f est homogène de degré 0. L'égalité d'Euler s'écrit

$$px+qy=0.$$

On en déduit sans calcul

$$q=-\frac{px}{y}=-\frac{2x}{y\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$r=\frac{2x}{(x^2-y^2)^{3/2}} \qquad s=\frac{2y}{(x^2-y^2)^{3/2}} \qquad t=\frac{2x}{y^2}\,\frac{x^2-2y^2}{(x^2-y^2)^{3/2}}.$$

1.26 $p=\dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{-x^2+3\,xy-2\,y^2}}$ $\quad \varepsilon=1$ si $y>0$, $\varepsilon=-1$ si $y<0$.

Puisque f est homogène de degré 0,

$$q=-\frac{x}{y}\,p$$

(voir exercice précédent).

$$r=\frac{\varepsilon}{4}\,\frac{2\,x-3\,y}{(-x^2+3\,xy-2\,y^2)^{3/2}} \qquad s=\frac{\varepsilon}{4}\,\frac{4\,y-3\,x}{(-x^2+3\,xy-2\,y^2)^{3/2}}$$

$$t=\frac{xp}{y^2}-\frac{xs}{y}=\frac{\varepsilon x}{4\,y^2}\,\frac{-2\,x^2+9\,xy-8\,y^2}{(-x^2+3\,xy-2\,y^2)^{3/2}}.$$

1.27 $p=\dfrac{1}{2x\sqrt{e^y\ln x}} \qquad q=-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\ln x}{e^y}}$

$$r = -\frac{(1+2\ln x)\,e^y}{4x^2(e^y\ln x)^{3/2}} \qquad s = -\frac{1}{4x\sqrt{e^y\ln x}} \qquad t = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\ln x}{e^y}}.$$

1.28 $f(x, y) = 2\ln x - 3\ln y$

$$p = 2/x \qquad q = -3/y \qquad r = -2/x^2 \qquad s = 0 \qquad t = 3/y^2.$$

1.29 $p = \dfrac{2xy^3}{1+x^4y^6} \qquad q = \dfrac{3x^2y^2}{1+x^4y^6}$

$$r = \frac{2y^3(1-3x^4y^6)}{(1+x^4y^6)^2} \qquad s = 6xy^2\,\frac{1-x^4y^6}{(1+x^4y^6)^2} \qquad t = 6x^2y\,\frac{1-2x^4y^6}{(1+x^4y^6)^2}.$$

1.30 $p = -e^x\ln x \qquad q = e^y\ln y$

$$r = -e^x(\ln x + 1/x) \qquad s = 0 \qquad t = e^y(\ln y + 1/y).$$

1.31 $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 6y^4 \quad \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} = 24xy^3 \quad \dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} = 36x^2y^2 \quad \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 24x^3y.$

1.32 $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3} = y^3 f \quad \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} = (2y+xy^2)f \quad \dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} = (2x+x^2y)f \quad \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3} = x^3 f.$

Relations entre dérivées partielles

1.33 $p = \dfrac{x}{x^2+y^2} \qquad q = \dfrac{y}{x^2+y^2}$

$$r = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad t = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Donc $r+t=0$.

1.34 $r = e^x\cos y \qquad t = -e^x\cos y = -r.$

1.35 $r = -\cos(x+y) + \cos(x-y) = -f = t.$

1.36 La fonction considérée est homogène de degré 1. La relation demandée est l'égalité d'Euler.

1.37 $p = u - \dfrac{y}{x^2}(xu'+v') \qquad q = u' + \dfrac{1}{x}v'$

$$r = -2\frac{y}{x^2}u' + \frac{2y}{x^3}(xu'+v') + \frac{y^2}{x^4}(xu''+v'')$$

$$s = -\frac{y}{x^2} - \left(u'' + \frac{v''}{x}\right) - \frac{v'}{x^2}$$

$$t = \frac{1}{x}\left(u'' + \frac{1}{x}v''\right).$$

En multipliant ces trois expressions respectivement par x^2, $2xy$ et y^2 et en ajoutant membre à membre, nous obtenons effectivement 0.

Dérivées des fonctions composées

1.38 Il s'agit d'une expression de la forme $y = f(u, v) = u^v$, où $u = x$ et $v = 1/\sin x$.

$$u' = 1 \qquad v' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$f'_u = \frac{1}{\sin x}\, x^{(1/\sin x - 1)} \qquad f'_v = x^{1/\sin x} \ln x.$$

Donc

$$y' = \frac{1}{\sin x}\, x^{(1/\sin x - 1)} \cdot 1 + x^{1/\sin x} \cdot \ln x \left(-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)$$

$$= \frac{x^{1/\sin x}}{\sin^2 x}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \cdot \ln x\right).$$

1.39 $y' = x \cos x (\sin x)^{x-1} + (\sin x)^x \ln(\sin x)$.

1.40 $y' = x^{\cos x - 1} \cos x - \sin x\, x^{\cos x} \ln x$.

1.41 $y' = \dfrac{\operatorname{tg} x}{1+x^2} (\operatorname{Arc tg} x)^{\operatorname{tg} x - 1} + \dfrac{1}{\cos^2 x} (\operatorname{Arc tg} x)^{\operatorname{tg} x} \ln(\operatorname{Arc tg} x)$.

1.42 $y' = x^{\operatorname{Arc tg} x - 1} \operatorname{Arc tg} x + \dfrac{1}{1+x^2}\, x^{\operatorname{Arc tg} x} \ln x$.

1.43 $y' = \dfrac{1}{1+x^2} [x \operatorname{Arc tg} x + \tfrac{1}{2} \ln(1+x^2)]$.

Dérivées des fonctions implicites

1.44 $y' = -\dfrac{f'_x}{f'_y} = -\dfrac{2xy^2}{2x^2y+1}$.

1.45 $y' = \dfrac{y^2+8x+3x^2}{2y(4-x)}.$

1.46 $y' = \dfrac{2x(1-3y)}{3x^2+3y^2+2y}.$

1.47 $y' = -\dfrac{2x+3y}{3x+10y}.$

1.48 $y' = -\dfrac{2xy^2}{2y(x^2-1)} = \dfrac{xy}{1-x^2}.$

On aurait pu aussi résoudre l'équation en y :

$$y = \frac{\varepsilon}{\sqrt{x^2-1}}\,; \qquad \text{d'où} \qquad y' = -\varepsilon\,\frac{x}{(x^2-1)^{3/2}}.$$

1.49 $y' = -\dfrac{3y+y^2-3x^2}{x(3+2y)}.$

1.50 $y' = \dfrac{y^2 \cos x - 2x \sin y}{x^2 \cos y - 2y \sin x}.$

1.51 $y' = \sqrt{\dfrac{1-y}{1-x}} = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}.$

1.52 $\ln x - \ln y = 4(x-y) \qquad \dfrac{1}{x} - \dfrac{y'}{y} = 4(1-y')$

$$y' = \frac{y}{x}\,\frac{1-4x}{1-4y}.$$

1.53 $y' = \dfrac{y}{x}\,\dfrac{y^2-2x^2 \ln y}{x^2-2y^2 \ln x}.$

1.54 $y' = -\dfrac{x}{y}\,\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{1+\cos^2(x^2+y^2)} = -\dfrac{x}{y}\,\dfrac{\sin^2(x^2+y^2)}{1+\cos^2(x^2+y^2)}.$

1.55 $\dfrac{x+yy'}{x^2+y^2} = \dfrac{xy'-y}{x^2+y^2} \qquad y' = \dfrac{x+y}{x-y}.$

1.56 $\dfrac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{x-yy'}{x^2-y^2} = 0$ $\qquad y' = \dfrac{x(\sqrt{x^2+y^2}+y^2-x^2)}{y(x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2})}.$

1.57 $y' = \dfrac{y}{x}\dfrac{2x^2-y^2}{2x^2+y^2}.$

1.58 $y = \left(\dfrac{x^{1/3}}{x^{1/2}}\right)^2 = x^{1/3}$ $\qquad y' = -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{x^{4/3}}.$

1.59 $y^3 = \dfrac{x+2}{x-2}$ $\qquad 3y^2y' = -\dfrac{4}{(x-2)^2}$ $\qquad y' = -\dfrac{4}{3}\dfrac{1}{y^2(x-2)^2}.$

1.60 $xy = \ln x$ $\qquad y = \dfrac{\ln x}{x}$ $\qquad y' = \dfrac{1-\ln x}{x^2}.$

1.61 $y' = \dfrac{x^2-ay}{ax-y^2}.$

1.62 $y' = -\dfrac{(x+y)^{-1/3}+(x-y)^{-1/3}}{(x+y)^{-1/3}-(x-y)^{-1/3}}.$

soit, en multipliant numérateur et dénominateur par $(x+y)^{1/3}\,(x-y)^{1/3}$,

$$y' = -\frac{(x-y)^{1/3}+(x+y)^{1/3}}{(x-y)^{1/3}-(x+y)^{1/3}}.$$

1.63 La fonction f est homogène de degré 0. Nous savons que, dans ces conditions,
$y' = y/x$.

Plus précisément, $y/x = -\text{Arc tg } 1 + k\pi$.

1.64 Même remarque.

1.65 L'équation s'écrit $f(x, y) = 1$, où f est une fonction homogène de degré 0. Ici encore $y' = y/x$. Plus précisément, $y/x = 1$.

1.66 Pour la même raison, $y' = y/x$.

1.67 L'équation est impossible.

1.68 En divisant les deux membres par x^2, on se ramène au cas d'une fonction homogène de degré 0 :

$$\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}+1\right)^2 = 0.$$

Donc $y' = y/x$.

1.69 On divise cette fois les deux membres par x^4.

1.70 Dérivons les deux membres :

$$2x+y+xy'+2yy' = 0\,;$$

d'où $y' = -\dfrac{2x+y}{2y+x}$.

Dérivons encore une fois :

$$2+2y'+xy''+2y'^2+2yy'' = 0,$$

soit $y'' = -2\,\dfrac{1+y'+y'^2}{2y+x} = -6\,\dfrac{x^2+xy+y^2}{(2y+x)^3}$.

Compte tenu de la relation de départ,

$$y'' = -\frac{6}{(2y+x)^3}.$$

1.71 $y^2+2xyy'-1-y' = 0$

$$y' = \frac{y^2-1}{1-2xy}$$

$$4yy'+2xy'^2+2xyy''-y'' = 0$$

$$y'' = \frac{4yy'+2xy'^2}{1-2xy} = 4\,\frac{1-y^2}{(1-2xy)^3}\,(3x+y).$$

1.72 $x+2yy'-xy'-y = 0$

$$y' = \frac{x-y}{x-2y}$$

$$1+2(y'^2+yy'') - 2y'-xy'' = 0$$

$$y'' = \frac{1+2y'^2-2y'}{x-2y} = \frac{x^2-2xy+2y^2}{(x-2y)^3} = \frac{1}{(x-2y)^3}.$$

1.73 $y' = \dfrac{1-\sin(x+y)}{\sin(x+y)} = \dfrac{1}{\sin(x+y)} - 1$

$$y'' = -(1+y')\,\frac{\cos(x+y)}{\sin^2(x+y)} = -\frac{\cos(x+y)}{\sin^3(x+y)} = \frac{x}{\sin^3(x+y)}.$$

CHAPITRE 2

Calcul des différentielles

2.1 $\mathrm{d}f = 2\dfrac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$.

2.2 $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \qquad \mathrm{d}f = -\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2} - \dfrac{\mathrm{d}y}{y^2}$.

2.3 $\mathrm{d}f = y\cos x\,\mathrm{d}x + \sin y\,\mathrm{d}y - \sin(x-y)\,(\mathrm{d}x - \mathrm{d}y)$.

2.4 $\mathrm{d}f = 2\,\mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x}\,\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{y}{x}}\,\dfrac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2}$.

2.5 $\mathrm{d}f = \dfrac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$.

2.6 $f(x,y) = \mathrm{Arc\,tg}\,x + \mathrm{Arc\,tg}\,y + k\pi \qquad \mathrm{d}f = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \dfrac{\mathrm{d}y}{1+y^2}$.

2.7 $\mathrm{d}f = -2\,\dfrac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-(1+x^2+y^2)^2}}$.

2.8 $\mathrm{d}f = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x+y}{x-y}\right)^2}}\,\dfrac{-3y\,\mathrm{d}x + 3x\,\mathrm{d}y}{(x-y)^2}$.

Si $x-y > 0$, $\qquad \mathrm{d}f = 3\,\dfrac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{-3x(x+2y)}}$.

2.9 $\mathrm{d}f = \dfrac{1}{2(x+y)}\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} + \dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}}\right) - \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{(x+y)^2}(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)$.

2.10
$$\mathrm{d}f = \frac{y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^{1/2}} - 3\,\frac{xy(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y)}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$$
$$= \frac{(1-2x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + (1+x^2-2y^2)\,\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}.$$

2.11 $\mathrm{d}f = \dfrac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{y^2} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x}{\sqrt{xy}}$.

2.12 $f = \sqrt{u}$ $\qquad \mathrm{d}f = \dfrac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = \dfrac{y^2\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)\,(x^4-y^4)^{1/2}}.$

2.13 $\mathrm{d}f = \dfrac{y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{xy-1}.$

2.14 $f(x,y) = x\ln y$ $\qquad \mathrm{d}f = \ln y\,\mathrm{d}x + x\,\dfrac{\mathrm{d}y}{y}.$

2.15 $\mathrm{d}f = \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,(2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y).$

2.16 $\mathrm{d}f = \mathrm{e}^{xy^2}\,(y^2\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y).$

2.17 $\mathrm{d}f = \cot\dfrac{x}{y}\,\mathrm{d}\dfrac{x}{y} = \cot\dfrac{x}{y}\,\dfrac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{y^2}.$

2.18 $\mathrm{d}f = \mathrm{e}^{2x}\,(2\sin 3y\,\mathrm{d}x + 3\cos 3y\,\mathrm{d}y).$

Formes différentielles exactes

2.19 $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y,$ où $P = \dfrac{x+2y}{(x+y)^2}$ et $Q = \dfrac{y}{(x+y)^2}.$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2y}{(x+y)^3} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

La forme différentielle ω est donc exacte.

2.20 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{2xy}{(x+y)^3}.$

La symétrie des rôles joués par x et y montre sans calcul que $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$.

2.21 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -6\,\dfrac{x^2}{y^3} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}.$

2.22 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\sin x = \dfrac{\partial Q}{\partial x}.$

2.23 $y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}(xy)$ $\qquad \dfrac{\mathrm{d}x}{x} + \dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \mathrm{d}\ln|x| + \mathrm{d}\ln|y| = \mathrm{d}\ln|xy|.$

Donc

$$\omega = \mathrm{d}(xy + \ln|xy|),$$

ce qui montre que la forme différentielle ω est exacte.

2.24 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{3x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

Vu la symétrie, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

2.25 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 - 2x = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

2.26 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{2x}{y^2} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

2.27 $\omega = \mathrm{d}\,\dfrac{\mathrm{e}^y - 1}{1+x^2}$.

C'est donc une forme différentielle exacte.

2.28 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{x/y^2}{\sqrt{1-x^2/y^2}}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\dfrac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}$.

Ces expressions sont égales si et seulement si $y > 0$; la forme différentielle ω n'est pas exacte.

2.29 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{1}{x^2+1}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{1}{y^2+1}$.

La forme différentielle ω n'est pas exacte.

2.30
$$\omega = (x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y) + (y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) - \frac{y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$
$$= \tfrac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+y^2) + \mathrm{d}(xy) - \frac{\mathrm{d}(xy)}{x^2y^2}.$$

Ainsi, $\omega = \mathrm{d}f$, où

$$f = \tfrac{1}{2}(x^2+y^2) + xy + \frac{1}{xy}.$$

2.31 On peut calculer comme d'habitude les dérivées partielles croisées. Leur égalité s'écrit

$$\frac{-(x^2+y^2) - 2ay(x-y)}{(x^2+y^2)^{a+1}} = \frac{x^2+y^2-2ax(x+y)}{(x^2+y^2)^{a+1}},$$

ce qui équivaut à $a = 1$.

On peut encore écrire la forme différentielle ω de la manière suivante :

$$\omega = \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^a} + \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^a}.$$

Posons $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$. Alors

$$\omega = \rho\,\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^{2a}} + \frac{\rho^2}{\rho^{2a}}\,\mathrm{d}\theta.$$

La forme différentielle $\rho^{1-2a}\,\mathrm{d}\rho$ est exacte. Pour que la forme différentielle $\mathrm{d}\theta/\rho^{2a-2}$ le soit, il faut et il suffit que le coefficient de $\mathrm{d}\theta$ soit indépendant de ρ; on retrouve ainsi la condition $a = 1$. De plus, ω est alors égale à $\mathrm{d}f$, où

$$f(\rho, \theta) = \ln \rho + \theta.$$

2.32 $$\omega = \frac{(x-y)\,(\mathrm{d}x - \mathrm{d}y) + (a+1)(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)}{(x-y)^3} = \frac{\mathrm{d}(x-y)}{(x-y)^2} + (a+1)\frac{\mathrm{d}(xy)}{(x-y)^3}.$$

En posant $u = xy$ et $v = x-y$, on voit aussitôt que la forme différentielle ω est exacte si et seulement si $a = -1$. Dans ces conditions, $\omega = \mathrm{d}f$, où $f(x, y) = 1/(y-x)$.

Problèmes sur les différentielles

2.33 $$\mathrm{d}V = lh\,\mathrm{d}b + bh\,\mathrm{d}l + bl\,\mathrm{d}h,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{\mathrm{d}b}{b} + \frac{\mathrm{d}l}{l} + \frac{\mathrm{d}h}{h}$$

et

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta h}{h} = \frac{1}{100} - \frac{1}{100} + \frac{1}{100} = \frac{1}{100}.$$

$$\Delta V \approx \frac{1}{100}\,6 = 0{,}06 \text{ m}^3.$$

2.34 $$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \qquad \frac{\mathrm{d}V}{V} = 2\,\frac{\mathrm{d}R}{R} + \frac{\mathrm{d}h}{h}.$$

D'où

$$\frac{\Delta V}{V} = 2\,\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta h}{h} = \frac{2}{100} + \frac{1}{100} = \frac{3}{100}$$

$$\Delta V = \frac{3}{100}\,V = \frac{3}{100}\,\frac{\pi}{3}\,0{,}01 \times 0{,}2 = 6{,}28 \times 10^{-5}\ \mathrm{m}^3 = 62{,}8\ \mathrm{cm}^3\,.$$

2.35 $I = \dfrac{E}{r+R}$ $\qquad$ $\mathrm{d}I = \dfrac{\mathrm{d}E}{r+R} - E\,\dfrac{\mathrm{d}R}{(r+R)^2}$

$$\Delta I \approx -\frac{2}{50} - \frac{100}{2\,500} = -0{,}08\ \mathrm{A}\,.$$

2.36 $W = \frac{1}{2}CV^2$ $\qquad$ $\dfrac{\mathrm{d}W}{W} = \dfrac{\mathrm{d}C}{C} + 2\,\dfrac{\mathrm{d}V}{V}$

$$\Delta W = W\left(\frac{\Delta C}{C} + 2\,\frac{\Delta V}{V}\right) = \frac{1}{2}20 \times 10^{-6} \times 10^4 \left(\frac{0{,}5}{100} + \frac{2}{100}\right) = 2{,}5 \times 10^{-3}\ \mathrm{J}\,.$$

2.37 $Z = \dfrac{1}{C\omega} = \dfrac{1}{2\pi f C}$ $\qquad$ $\dfrac{\mathrm{d}Z}{Z} = -\dfrac{\mathrm{d}f}{f} - \dfrac{\mathrm{d}C}{C}$

$$\frac{\Delta Z}{Z} = -\frac{\Delta f}{f} - \frac{\Delta C}{C} = \frac{2}{50} - \frac{1}{100} = \frac{3}{100}\,,$$

$$Z = \frac{3}{100} \times 318 = 9{,}6\ \Omega\,.$$

2.38 $R = \rho\,\dfrac{4l}{\pi D^2}$ $\qquad$ $\dfrac{\mathrm{d}R}{R} = \dfrac{\mathrm{d}l}{l} - 2\,\dfrac{\mathrm{d}D}{D}$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta l}{l} - 2\,\frac{\Delta D}{D} = \frac{1}{1\,000} - \frac{2}{100} = 0{,}019$$

$$\Delta R = 0{,}019\,\frac{1{,}6 \times 10^{-6}}{0{,}785} \times 10^4 = 380\ \mu\Omega\,.$$

2.39 $\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mathrm{d}L}{L} + \dfrac{\mathrm{d}C}{C}\right)$ $\qquad$ $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\Delta L}{L} + \dfrac{\Delta C}{C}\right)$

$$\Delta\lambda = \frac{1}{2}\,1\,885\,\sqrt{1\,000 \times \frac{1}{1\,000}}\left(\frac{1}{100} - \frac{2}{100}\right) = -\frac{1\,885}{200} = -9{,}42\ \mathrm{m}\,.$$

CHAPITRE 3

3.1 Calculons les dérivées partielles de f :

$$p = 2x-y$$

$$q = 2y-x-3.$$

La relation $p=0$ implique $y=2x$; en reportant dans $q=0$, nous obtenons

$$x = 1,\ y = 2.$$

Pour savoir si f passe par un maximum ou un minimum, calculons les dérivées partielles secondes :

$$r = 2,\ s = -1,\ t = 2.$$

Ainsi, $s^2-rt=1-4=-3<0$. Il s'agit d'un extrémum. Puisque $r>0$, f passe par un minimum, à savoir -3.

3.2 $p = xy^3(2+qx+4y)$

$$q = x^2y^2(3+9x+8y).$$

La nullité de p et q se traduit par $x=0$, ou $y=0$, ou

$$9x+4y+2 = 0$$

$$9x+8y+3 = 0,$$

soit $x=-1/9$, $y=-1/4$.

$$r = 2y^3(1+9x+4y)$$

$$s = xy^2(6+27x+16y)$$

$$t = 6x^2\,y(1+3x+4y).$$

Au point $\left(-\frac{1}{9},\ -\frac{1}{4}\right)$, $s^2-rt = -\dfrac{1}{27\times 256} < 0$. Puisque $r>0$, f passe par un minimum, à savoir $\dfrac{1}{243\times 128}$. Si x ou y est nul, $s^2-rt = 0$, et il faut faire une étude directe. Le signe de f étant celui de $y(1+3x+2y)$,

— en un point de la forme $(x, 0)$ il n'y a pas d'extrémum;

— en un point de la forme $(0, y)$, $y\neq 0$, il y a minimum si $y>-1/2$ et maximum si $y<-1/2$; au point $(0,\ -1/2)$, il n'y a pas d'extrémum.

3.3 $p = 4x^3-4(x-y)$

$$q = 4y^3+4(x-y).$$

Annulons p et q; par différence, nous voyons que $x^3 = -y^3$, soit $y=-x$. Dans ces conditions,

$$x^3-2x = 0,$$

d'où $x=0$, $x=\sqrt{2}$ et $x=-\sqrt{2}$.

$$r = 8x^2-4$$

$$s = 4$$

$$t = 8y^2-4.$$

Aux points $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $s^2-rt = -128 < 0$ et $r = 12 > 0$; la fonction f passe dans les deux cas par le minimum -8. Au point $(0, 0)$, $s^2-rt=0$; mais, pour tout réel non nul x, $f(x, x) > 0$ et, si $|x|$ est suffisamment petit, $f(x, 0) < 0$. Il n'y a pas d'extrémum.

3.4 $p = 3x^2-6ax$

$$q = -8ay.$$

La nullité de p et q conduit à $y=0$ et soit à $x=0$, soit à $x=2a$.

$$r = 6(a-x) \qquad s = 0 \qquad t = -8a.$$

Au point $(0, 0)$, $s^2-rt<0$ et $r<0$; il y a un maximum.
Au point $(2a, 0)$, $s^2-rt>0$; il n'y a pas d'extrémum.

3.5 $p = 4x(x^2+y^2) - 4a^2x$

$$q = 4y(x \ +y^2)+4a^2y.$$

La relation $q=0$ impose $y=0$; alors $x=0$, $x=a$ ou $x=-a$.

$$r = 12x^2-4a^2 \qquad s = 8xy \qquad t = 12y^2+4a^2.$$

Au point $(0, 0)$, $s^2-rt > 0$; il n'y a pas d'extrémum.
Aux points $(a, 0)$ et $(-a, 0)$, $s^2-rt< 0$ et $r>0$; il y a un minimum.

3.6 $p = 3(x^2-2y+1)$

$$q = 3(y^2-2x+1).$$

Par différence, $(x-y)\ (x+y+2) = 0$. La relation $y = -2-x$ conduit à $x^2+2x+5=0$, ce qui est impossible sur le corps des réels. Il reste $x=y=1$.

$$r = 6x \qquad s = -6 \qquad t = 6y.$$

Au point $(1, 1)$, $s^2-rt=0$. Faisons une étude directe, en posant $x=1+h$, $y=1+k$. Alors

$$f(x, y) = 2+3(h-k)^2+h^3+k^3.$$

Si $h=k>0$, $f(x, y)>2$; si $h=k<0$, $f(x, y)<2$. Il n'y a donc pas d'extrémum.

3.7 $\quad p = 2(x-y)(2x^2+y^2-xy-1)$

$$q = 2(x-y)(-2y^2-x^2+xy+1).$$

Si $x \neq y$, on voit en faisant la somme que $x^2 = y^2$, puis que $4x^2 = 1$. D'où les points (x_0, x_0), $(1/2, -1/2)$ et $(-1/2, 1/2)$.

$$r = 2(6x^2+2y^2-6xy-1)$$

$$s = 2(-3x^2-3y^2+4xy+1)$$

$$t = 2(2x^2+6y^2-6xy-1).$$

Aux points $(1/2, -1/2)$ et $(-1/2, 1/2)$, $s^2 - rt < 0$; il y a un minimum. En un point de la forme (x_0, x_0), $s^2 - rt = 0$. Une étude directe montre qu'il y a un maximum si $x_0^2 < 1/2$ et un minimum si $x_0^2 > 1/2$. Si $x_0^2 = 1/2$, tout voisinage de (x_0, x_0) contient des points où $x^2+y^2-1 > 0$ et des points où $x^2+y^2-1 < 0$; il n'y a donc pas d'extrémum.

On retrouvera ces résultats en passant en coordonnées polaires.

3.8 $(a \cos x + b \cos y)^2 + (a \sin x + b \sin y)^2 = a^2+b^2+2ab\cos(x-y)$. On se ramène au cas d'une seule variable :

$$g(t) = A + Bt, \qquad \text{où} \qquad A = a^2+b^2, \qquad B = 2ab \text{ et } t = \cos(x-y).$$

Si $B > 0$, il y a un maximum si $\cos(x-y) = 1$, soit $x \equiv y$ (mod. 2π) ;
il y a un minimum si $\cos(x-y) = -1$, soit $x \equiv y + \pi$ (mod. 2π).
Si $B < 0$, les conclusions s'échangent. Si $B = 0$, f est constante.

3.9 $\quad p = \cos x + \cos(x+y)$

$$q = \cos y + \cos(x+y).$$

D'où $\cos x = \cos y$.

Si $x \equiv y$ (mod. 2π), alors $\cos x + \cos 2x = 0$, soit $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$. Ainsi, $\cos x = -1$ et $x \equiv \pi$ (mod 2π), ou $\cos x = 1/2$ et $x \equiv \pm\pi/3$ (mod. 2π).

Si $x \equiv -y$, on retrouve $\cos x = -1$.

$$r = -\sin x - \sin(x+y)$$

$$s = -\sin(x+y)$$

$$t = -\sin y - \sin(x+y).$$

Aux points $(\pi/3, \pi/3)$ et $(-\pi/3, -\pi/3)$, $s^2 - rt < 0$; dans le premier cas, f passe par un maximum ($r < 0$), et dans le second par un minimum ($r > 0$). Au point (π, π), $s^2 - rt = 0$; en prenant $y = x$, on voit que f a le signe de $\sin x$, ce qui montre qu'il n'y a pas d'extrémum.

3.10 $\quad p = \cos x - \sin(x+y)$

$$q = \cos y - \sin(x+y).$$

D'où $\cos x = \cos y$.

Si $x \equiv y$ (mod. 2π), alors $\cos x = \sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Ainsi, $\cos x = 0$ et $x \equiv \pi/2$ (mod. π), ou $\sin x = 1/2$ et $x \equiv \pi/6$ (mod. 2π) ou $x \equiv 5\pi/6$ (mod. 2π).

Si $x \equiv -y$, on retrouve $\cos x = 0$ (mais $y = -\pi/2$ si $x = \pi/2$).

$$r = -\sin x - \cos(x+y)$$

$$s = -\cos(x+y)$$

$$t = -\sin y - \cos(x+y).$$

Aux points $(\pi/2, \pi/2)$, $(\pi/2, -\pi/2)$, $(-\pi/2, \pi/2)$ et $(-\pi/2, -\pi/2)$, $s^2 - rt = 1 > 0$; il n'y a pas d'extrémum. Aux points $(\pi/6, \pi/6)$ et $(5\pi/6, 5\pi/6)$, $s^2 - rt = -3/4 < 0$; comme $r < 0$, f passe par un maximum.

3.11 $F(x, y, z) = xyz, \quad$ où $\quad x+y+z = S.$

Éliminons S, pour obtenir une fonction f de deux variables *indépendantes* :

$$f(x, y) = xy(S-x-y).$$

D'où

$$p = y(S-x-y) - xy$$

$$q = x(S-x-y) - xy.$$

La relation $x+y = S$, impliquant $z = 0$, est à rejeter; il reste $x = y$, et finalement

$$x = y = z = S/3.$$

$$r = -2y \qquad s = S-2x-2y \qquad t = -2x.$$

D'où $s^2 - rt = -S^2/3 < 0$; comme $r = -2\,(S/3) < 0$, f atteint un maximum.

3.12 $F(x, y, z) = x+y+z, \quad$ où $\quad xyz = P.$

$$f(x, y) = x+y+\frac{P}{xy}$$

$$p = 1 - \frac{P}{x^2 y} \qquad\qquad q = 1 - \frac{P}{xy^2}.$$

On trouve cette fois $x = y = z = \sqrt[3]{P}$.

$$r = \frac{2P}{x^3 y} \qquad\qquad s = \frac{P}{x^2 y^2} \qquad\qquad t = \frac{2P}{xy^3}.$$

D'où $s^2 - rt < 0$, $r > 0$; il s'agit d'un minimum.

3.13 Puisque $x^3 y^3 z^3 = (xyz)^3 = (a^3)^3 = a^9$, on se ramène à l'exercice précédent en posant $X = x^3$, $Y = y^3$, $Z = z^3$ et $P = a^9$. La fonction passe donc par un minimum au point (a, a, a).

3.14 Soient x, y et z les longueurs des arêtes. Le volume est $V = xyz$, et l'aire

$$S = 4(xy + yz + zx),$$

soit

$$S = 4\left(xy + \frac{V}{x} + \frac{V}{y}\right).$$

$$p = 4y - \frac{4V}{x^2} \qquad\qquad q = 4x - \frac{4V}{y^2}.$$

Ainsi, $x^2y = xy^2 = V$. D'où $x = y = \sqrt[3]{V}$. Alors $r = t = 8$, $s = 4$ et $s^2 - rt = 16 - 64 < 0$. Comme $r > 0$, il s'agit bien d'un minimum, correspondant au cas où le parallélépipède est un cube.

3.15 Rappelons que

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \qquad \text{où} \qquad 2p = a+b+c.$$

Pour que S soit maximale, il faut et il suffit que $y = S^2$ le soit. Or,

$$\frac{\partial y}{\partial a} = p(p-b)(2p-2a-b)$$

$$\frac{\partial y}{\partial b} = p(p-a)(2p-2b-a).$$

La valeur $p = a$ est à exclure, car elle conduit à $b + c = a$, ce qui est impossible dans un triangle. De même, $p \neq b$. Il reste

$$a+2b = b+2a = 2p,$$

soit $a = b = c = 2p/3$. Le triangle est alors équilatéral. On vérifie à l'aide des dérivées secondes qu'il s'agit d'un maximum de l'aire.

CHAPITRE 4

Équations incomplètes

4.1 $y = \operatorname{tg} x + C$.

4.2 $y = \frac{2}{3} x^3 - x + C$.

4.3 $dy = e^x \cos x \, dx$. Un calcul classique montre que

$$y = \tfrac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C .$$

4.4 $\dfrac{dy}{y^2 - 1} = dx \qquad -\tfrac{1}{2} \ln \left| \dfrac{1+y}{1-y} \right| = x + C$.

4.5 $\dfrac{dy}{2y-7} = dx \qquad \tfrac{1}{2} \ln \left| y - \dfrac{7}{2} \right| = x + C$.

4.6 $\dfrac{dy}{dx} = e^y$, soit $e^{-y} \, dy = dx$; d'où $e^{-y} = C - x$ et $y = -\ln(C - x)$.

4.7 $x = y' \, e^{2y'}$. Posons $m = y'$; alors $x = m \, e^{2m}$ et

$$dy = m \, dx = m(2m+1) \, e^{2m} \, dm .$$

Nous savons qu'une primitive est de la forme $(am^2 + bm + c) \, e^{2m}$; on trouve par identification

$$y = \left(m^2 - \frac{1}{2} m + \frac{1}{4} \right) e^{2m} + C .$$

4.8 $y'^2 - y'(4 + y^2) + 4 + y^2 = 0$, équation du deuxième degré en y'. D'où

$$y' = \frac{4 + y^2 \pm \sqrt{4 + y^2}}{2} \qquad \text{et} \qquad dx = \frac{2 \, dy}{4 + y^2 \pm y\sqrt{4 + y^2}} .$$

Prenons par exemple le signe $+$ et posons $y = 2 \operatorname{tg} t$; alors

$$dx = \frac{dt}{1 + \sin t} = \frac{1 - \sin t}{1 - \sin^2 t} \, dt = \frac{1 - \sin t}{\cos^2 t} \, dt$$

et

$$x = \operatorname{tg} t - \frac{1}{\cos t} + C .$$

4.9 Posons $X = y + y'$ et $Y = y - y'$; alors $X^3 = Y^2$, ce qui s'écrit encore $X = t^2$, $Y = t^3$. Par suite,

$$y = \tfrac{1}{2}(X + Y) = \tfrac{1}{2}(t^2 + t^3) \qquad y' = \tfrac{1}{2}(X - Y) = \tfrac{1}{2}(t^2 - t^3) .$$

D'où

$$\mathrm{d}y = \left(\frac{3}{2}t^2+t\right)\mathrm{d}t = y'\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(t^2-t^3)\,\mathrm{d}x\,.$$

Ainsi,

$$\mathrm{d}x = \frac{3t^2+2t}{t^2-t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{3t+2}{t-t^2}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{2}{t}-\frac{5}{t-1}\right)\mathrm{d}t$$

et

$$x = \ln\frac{t^2}{|t-1|^5}+C, \qquad \text{joint à } y = \tfrac{1}{2}(t^2+t^3)\,.$$

Équations à variables séparables

4.10 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -\dfrac{3x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{3}{2}\dfrac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \qquad y = \dfrac{C}{(1+x^2)^{3/2}}\,.$

4.11 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x} \qquad y = C\,\mathrm{tg}\,x/2\,.$

4.12 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = x\,\mathrm{d}x \qquad y = C\exp x^2/2\,.$

4.13 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}+\mathrm{d}x$, soit $\dfrac{\mathrm{d}(y/x)}{y/x} = \mathrm{d}x$; d'où $\dfrac{y}{x} = C\,\mathrm{e}^x$, soit $y = Cx\,\mathrm{e}^x$.

4.14 $\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2} \qquad -\sqrt{1-y^2} = -\dfrac{1}{x}+C\,.$

4.15 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-4} \qquad y = C\sqrt[4]{\left|\dfrac{2-x}{2+x}\right|}\,.$

4.16 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1+y^2}} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad y+\sqrt{1+y^2} = C(x+\sqrt{1+x^2})\,.$

4.17 $\dfrac{y^2}{y^2-4}\,\mathrm{d}y = \dfrac{x^2}{x^2-9}\,\mathrm{d}x$, soit $\left(1-\dfrac{4}{4-y^2}\right)\mathrm{d}y = \left(1-\dfrac{9}{9-x^2}\right)\mathrm{d}x\,.$

D'où

$$y-\ln\left|\frac{2+y}{2-y}\right| = x-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right|+C\,.$$

4.18 $\dfrac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ $\qquad \operatorname{Arc\,tg} y = \operatorname{Arc\,tg} x + C.$

Or, il découle de la relation $\operatorname{tg}(a-b) = \dfrac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1+\operatorname{tg} a \ \operatorname{tg} b}$ que

$$\operatorname{Arc\,tg} y - \operatorname{Arc\,tg} x = \operatorname{Arc\,tg} \frac{y-x}{1+xy} + k\pi, \qquad \text{où } k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ainsi,

$$\frac{y-x}{1+xy} = D \qquad \text{et} \qquad y = \frac{x+D}{1-Dx},$$

équation d'une hyperbole équilatère.

Équations homogènes

4.19 $y' = t + x\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{t^2+4t}{2}$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}t}{\dfrac{t^2+4t}{2} - t} = \frac{2}{t^2+2t}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t$$

$$x = C\frac{t}{t+2} \qquad\qquad y = C\frac{t^2}{t+2}.$$

4.20 $y' = \dfrac{t^2-4}{2t} \quad \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \dfrac{\mathrm{d}t}{\dfrac{t^2-4}{2t} - t} = -\dfrac{2t}{t^2+4}\,\mathrm{d}t$

$$x = \frac{C}{t^2+4} \qquad\qquad y = \frac{Ct}{t^2+4}.$$

4.21 $t + x\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1-t^2}{2t} \qquad \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \dfrac{2t}{1-3t^2}\,\mathrm{d}t = -\dfrac{1}{3}\dfrac{6t}{3t^2-1}\,\mathrm{d}t$

$$x = \frac{C}{\sqrt[3]{3t^2-1}} \qquad\qquad y = \frac{Ct}{\sqrt[3]{3t^2-1}}.$$

4.22 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = x^2\,\mathrm{d}t \qquad tx^2\,\mathrm{d}t = \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}x$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t \qquad x = C\exp\sqrt{1+t^2} \qquad y = Ct\exp\sqrt{1+t^2}.$$

4.23 $1-t^2 = x^2\left(\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)^2 \qquad \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \pm\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$

$$x = C\exp(\pm \operatorname{Arc\,sin} t) \qquad y = Ct\exp(\pm \operatorname{Arc\,sin} t)\,.$$

4.24 $\dfrac{xy'-y}{x} = \cos\dfrac{y}{x} \qquad x\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \cos t \qquad \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \dfrac{\mathrm{d}t}{\cos t}$

$$x = C\,\mathrm{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \qquad y = Ct\,\mathrm{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

4.25 $t+x\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2t}{1+t^2} \qquad \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \dfrac{1+t^2}{t(1-t^2)}\,\mathrm{d}t\,.$

Posons $u = t^2$; alors

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{1}{2}\,\frac{1+u}{u(1-u)}\,\mathrm{d}u = \left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{u} - \frac{1}{u-1}\right)\mathrm{d}u$$

$$x = C\,\frac{\sqrt{u}}{u-1} = C\,\frac{|t|}{t^2-1} \qquad y = Ct\,\frac{|t|}{t^2-1}\,.$$

4.26 $y' = -\dfrac{3t^2+2}{t^3} \qquad \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = -\dfrac{t^3\,\mathrm{d}t}{t^4+3t^2+2} = -\dfrac{t^3\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)\,(t^2+2)}\,.$

On pose $u = t^2$; alors

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{1}{2}\,\frac{u\,\mathrm{d}u}{(u+1)\,(u+2)} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}u}{u+1} - \frac{\mathrm{d}u}{u+2}$$

$$x = C\,\frac{\sqrt{u+1}}{u+2} = C\,\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2+2} \qquad y = Ct\,\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2+2}.$$

4.27 $\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \dfrac{t\,\mathrm{e}^t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{e}^t}{t+1}\right)$

$$x = C\exp\left(\frac{\mathrm{e}^t}{t+1}\right) \qquad y = Ct\exp\left(\frac{\mathrm{e}^t}{t+1}\right).$$

4.28 Il s'agit d'une équation du deuxième degré en y'. Or,

$$\Delta = (x^4-y^4)^2 + 4x^4y^4 = (x^4+y^4)^2\,.$$

D'où

$$y' = \frac{y^4-x^4 \pm (x^4+y^4)}{2x^2y^2}\,.$$

a) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} \qquad \dfrac{dy}{y^2} = \dfrac{dx}{x^2} \qquad \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x} + C \qquad y = \dfrac{x}{Cx+1}$;

b) $y' = -\dfrac{x^2}{y^2} \qquad y^2\, dy = -x^2\, dx \qquad x^3+y^3 = C$.

4.29 Ce n'est pas une équation homogène, mais le changement de fonction $t = y/x$ permet encore d'intégrer :

$$x^2\, dt = \frac{t^2-1}{a+2bt+ct^2}\, dx$$

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{a+2bt+ct^2}{t^2-1}\, dt = \left(c + \frac{a+c}{t^2-1} + \frac{2bt}{t^2-1}\right) dt$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} - ct + \frac{a+c}{2} \ln \left|\frac{1+t}{1-t}\right| - b \ln |\, t^2-1\, | \qquad y = tx\,.$$

Équations linéaires

4.30 Sans second membre : $y'/y = x/(x^2-1) \qquad y = C\sqrt{x^2-1}$.
Solution évidente : $y = a$. Solution générale avec second membre :

$$y = a + C\sqrt{x^2-1}\,.$$

4.31 Sans second membre : $y'/y = -1 \qquad y = C\, e^{-x}$.
On cherche une solution particulière sous la forme d'une fonction polynomiale de degré 2 (méthode habituelle pour les équations du deuxième ordre, valable aussi pour le premier ordre). On obtient par identification $y = x^2-2x+2$. D'où la solution générale avec second membre :

$$y = x^2-2x+2+C\, e^{-x}.$$

4.32 Sans second membre : $y'/y = 2/x \quad y = Cx^2$. Faisons varier la constante :

$$C'\, x^3 = \frac{1}{2} x^3 \qquad C' = \frac{1}{2} \qquad C = \frac{x}{2} + k \qquad y = \frac{x^3}{2} + kx^2.$$

4.33 Sans second membre : $y'/y = -2x \qquad y = C \exp(-x^2)$.
Cherchons une solution particulière sous la forme $y = ax^2+bx+c$. On trouve par identification $y = 1/2(x^2-1)$. La solution générale avec second membre est

$$y = 1/2(x^2-1) + C \exp(-x^2)\,.$$

4.34 Sans second membre : $y'/y = 1/x \quad y = Cx$. Faisons varier la constante :

$$C' = \operatorname{Arc\,tg} x \qquad C = x \operatorname{Arc\,tg} x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + k$$

$$y = x[x \operatorname{Arc\,tg} x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + k]\,.$$

4.35 Sans second membre : $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\qquad y = C/\cos x\,.$

$$C' = \sin 2x \qquad\qquad C = -\frac{\cos 2x}{2} + k$$

$$y = \frac{1}{\cos x}\left(k - \frac{\cos 2x}{2}\right) = \frac{k_1}{\cos x} - \cos x\,.$$

4.36 Sans second membre : $\dfrac{y'}{y} = -\dfrac{1}{\sin x}$ $\qquad y = C \cot \dfrac{x}{2}.$

Faisons varier la constante :

$$C' = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{\cos 2x}{2\cos^2 x/2}.$$

Comme

$$\frac{\cos 2x}{2\cos^2 x/2} = \frac{\cos 2x}{1+\cos x} = \frac{(1-2\sin^2 x)\,(1-\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= -2(1-\cos x) + \frac{1}{2\cos^2 x/2},$$

on obtient aisément

$$y = k \cot\frac{x}{2} + 1 + 2\cot\frac{x}{2}\left(\sin x - x - \ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right).$$

4.37 Sans second membre : $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{2}{x^2-1}$ $\qquad y = C\,\dfrac{1-x}{1+x}.$

$$\mathrm{d}C = \frac{x+2}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}\right]\mathrm{d}x$$

$$C = -\frac{3}{x-1} + \ln|1-x| + k \qquad y = \frac{3}{1+x} + \frac{1-x}{1+x}\,[\ln|1-x| + k]\,.$$

4.38 Sans second membre : $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{x}{x^2-1}$ $\qquad y = C\sqrt{|x^2-1|}\,.$

$$\mathrm{d}C = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x^2-1|}}.$$

Si $|x| > 1$, $C = \ln|x+\sqrt{x^2-1}| + k$ $\quad y = \sqrt{x^2-1}\,(\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+k)$

Si $|x| < 1$, $C = \text{Arc}\sin x + k$ $\quad y = \sqrt{1-x^2}\,(\text{Arc}\sin x + k)$.

4.39 $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{x}{x^2+1}\,dx \qquad y = C\sqrt{x^2+1}$.

$$dC = \frac{x^2}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx.$$

Pour faire disparaître l'exposant fractionnaire, posons $x = \text{tg}\, t$; alors

$$dC = \frac{\sin^2 t}{\cos t}\,dt = \left(\frac{1}{\cos t} - \cos t\right)dt.$$

D'où

$$y = \frac{1}{\cos t}\left[\ln\left|\text{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin t + k\right], \text{ joint à } x = \text{tg}\, t.$$

4.40 $\dfrac{y'}{y} = -\dfrac{x+1}{x(x+2)} = -\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2(x+2)} \qquad y = \dfrac{C}{\sqrt{|x(x+2)|}}$.

Or, $x(x+2) = (x+1)^2 - 1$. Ainsi,

— lorsque $x > 0$ ou $x < -2$, $\quad y = \dfrac{\text{Arg ch}(x+1) + k}{\sqrt{x(x+2)}}$;

— lorsque $-2 < x < 0$, $\quad y = \dfrac{\text{Arc}\cos(x+1) + k}{\sqrt{-x(x+2)}}$.

4.41 $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{3x+4}{2x(1+x)} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{2(x+1)} \qquad y = C\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x}}$ car $1+x > 0$.

$dC = -\dfrac{dx}{x^2} \qquad C = \dfrac{1}{x} + k \qquad y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}(1+kx)$.

4.42 $\dfrac{y'}{y} = -\dfrac{1}{2x} \qquad y = \dfrac{C}{\sqrt{|x|}}$.

$$dC = \frac{\sqrt{|x|}}{2(1-x)}\,dx.$$

Si $x > 0$, posons $t = \sqrt{x}$; alors $dC = \dfrac{t^2}{1-t^2}\,dt = \left(-1 + \dfrac{1}{1-t^2}\right)dt$

$$y = \frac{1}{t}\left[-t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + k\right].$$

Si $x < 0$, on pose de même $t = \sqrt{-x}$.

4.43 $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{x}$ $\quad y = Cx$. Faisons varier la constante :

$dC = \dfrac{\ln x}{x^2}\,dx$. On intègre par parties ; d'où

$$C = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2x^2} + k \qquad\qquad y = -\ln x - \frac{1}{2x} + kx.$$

4.44 Sans second membre, $y = C\,e^x$. Faisons varier la constante :

$$dC = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx \qquad y = \frac{x\,e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{4} + k\,e^x.$$

4.45 $\dfrac{y'}{y} = a$ $\qquad y = C\,e^{ax}$.

On peut prendre comme solution particulière de l'équation avec second membre une fonction polynomiale de degré 4 ; on obtient par identification

$$y = -\frac{x^4}{a} - \frac{4x^3}{a^2} - \frac{12x^2}{a^3} - \frac{24x}{a^4} - \frac{24}{a^5}.$$

4.46 $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{2}{1-x^2}$ $\qquad y = C\,\dfrac{1+x}{1-x}$. Faisons varier la constante :

$$C' = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad y = \frac{1+x}{1-x}\left(\frac{1}{1-x} + k\right).$$

4.47 Pour supprimer les radicaux, posons $x = \sin t$; l'équation reste linéaire :

$$\frac{dy}{dt} - ay = \frac{1}{2}\sin 2t.$$

Sans second membre : $\dfrac{dy}{y} = a\,dt$ $\qquad y = C\,e^{at}$. Avec second membre :

$$\mathrm{d}C = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-at}\sin 2t\,\mathrm{d}t \qquad C = \frac{\mathrm{e}^{-at}}{2(a^2+4)}(-a\sin 2t - 2\cos 2t) + k$$

$$y = \frac{1}{2(a^2+4)}(-a\sin 2t - 2\cos 2t) + k\,\mathrm{e}^{at}.$$

4.48 Posons $x = \operatorname{sh} t$; l'équation devient

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y = \operatorname{ch} t\,.$$

Sans second membre : $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \mathrm{d}t \qquad y = C\,\mathrm{e}^t$.

$$\mathrm{d}C = \left(\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{2}\right)\mathrm{d}t \qquad C = \frac{t}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{4} + k$$

$$y = \frac{t\,\mathrm{e}^t}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2} + k\,\mathrm{e}^t\,.$$

4.49 On se ramène à une équation linéaire en posant $u = y^2$; alors

$$x\,\frac{u'}{2} - u = x^\alpha.$$

$$\frac{u'}{u} = \frac{2}{x} \qquad u = Cx^2 \qquad \text{d'où} \qquad C' = 2x^{\alpha-3}\,.$$

Si $\alpha \neq 2$, $C = 2\,\dfrac{x^{\alpha-2}}{\alpha-2} + k \qquad u = y^2 = 2\,\dfrac{x^\alpha}{\alpha-2} + kx^2$.

Si $\alpha = 2$, $C = 2\ln x + k \qquad u = y^2 = 2x^2\ln x + kx^2$.

4.50 $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{a}{x} \qquad y = Cx^a \qquad C' = \mathrm{e}^x \qquad C = \mathrm{e}^x + k \qquad y = x^a(\mathrm{e}^x + k)$.

4.51 $\dfrac{y'}{y} = -\dfrac{1}{2x} \qquad y = \dfrac{C}{\sqrt{|x|}}$. Faisons varier la constante :

$$\mathrm{d}C = \frac{\sqrt{|x|}}{2x(1-x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Si $x > 0$, posons $t = \sqrt{x}$; alors $\mathrm{d}C = \dfrac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$ et $C = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+t}{1-t}\right| + k$

$$y = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right| + k\right).$$

Si $x < 0$, posons $t = \sqrt{-x}$; alors $\mathrm{d}C = \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ et $C = \text{Arc tg}\, t + k$

$$y = \frac{1}{\sqrt{-x}}(\text{Arc tg}\sqrt{-x}+k).$$

4.52 Sans second membre : $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x \qquad y = C\sqrt{|1-x^2|}.$

Une solution évidente de l'équation avec second membre est $\ln x$.

4.53 Si $x > 0$, $xy' + y = x^2$. Sans second membre, $y'/y = -1/x$, $y = C/x$. On trouve aisément la solution particulière $y = x^2/3$. Ainsi,

$$y = \frac{x^2}{3} + \frac{k}{x}. \tag{1}$$

Si $x < 0$, la solution générale de l'équation sans second membre est $y = Cx$. Une solution évidente est $-x^2$. Ainsi,

$$y = -x^2 + k_1 x. \tag{2}$$

On peut se demander s'il existe une solution valable sur **R**. La relation (1) montre que k doit être nul. La dérivée de y étant alors nulle à l'origine, la relation (2) impose $k_1 = 0$. Finalement, il existe une solution et une seule sur **R**, définie par $y = x^2/3$ si $x \geqslant 0$ et par $y = -x^2$ si $x < 0$.

4.54 En développant, nous obtenons

$$y'^2 + yy' - xy - x^2 = 0,$$

soit

$$(y'-x)\,(y'+y+x) = 0.$$

Ainsi, y est solution de l'une au moins des équations différentielles linéaires

$y' = x$, et alors $y = \dfrac{x^2}{2} + k$;

$y' + y + x = 0$, et alors $y = 1 - x + k\,\mathrm{e}^{-x}$.

CHAPITRE 7

Équations incomplètes

7.1 $\dfrac{y''}{y'} = \dfrac{x}{1-x^2} \qquad y' = \dfrac{C}{\sqrt{|1-x^2|}}$.

Si $|x| < 1$, $y = C \operatorname{Arc} \sin x + D$.

Si $|x| > 1$, $y = C \ln |x + \sqrt{x^2-1}| + D$.

7.2 On pose $y'^2 = q$, d'où $y'' = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y}$. L'équation devient

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{y^3} \qquad \mathrm{d}q = \frac{2\mathrm{d}y}{y^3} \qquad q = -\frac{1}{y^2} + C = y'^2$$

$\mathrm{d}x = \pm \dfrac{y}{\sqrt{Cy^2-1}}\,\mathrm{d}y$. La constante C est nécessairement strictement positive, et

$$x = x_0 \pm \frac{1}{\sqrt{C}}\sqrt{y^2 - \frac{1}{C}}.$$

7.3 De même,

$$\frac{1}{2}\,y\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y} - q - 1 = 0.$$

D'où, en séparant les variables,

$$\frac{\mathrm{d}q}{1+q} = 2\frac{\mathrm{d}y}{y} \qquad 1+q = Cy^2 = 1+y'^2 \quad \text{donc} \quad C > 0.$$

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{Cy^2-1}} = \pm\,\mathrm{d}x$. Posons $k = \sqrt{C}$; il vient

$\operatorname{Arg ch} ky = \pm\, k(x-x_0)$, soit $y = \dfrac{1}{k}\operatorname{ch}[k(x-x_0)]$.

7.4 $\dfrac{1}{2}\,y\,\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y} + q - 2ay^2 = 0$, équation linéaire du premier ordre.

Sans second membre : $\dfrac{\mathrm{d}q}{q} = -2\dfrac{\mathrm{d}y}{y} \qquad q = \dfrac{C}{y^2}$.

Avec second membre : solution évidente $q = ay^2$. Ainsi,

$$y'^2 = ay^2 + \frac{C}{y^2}, \quad \text{soit} \quad dx = \pm \frac{dy}{\sqrt{ay^2 + \dfrac{C}{y^2}}} = \pm \frac{y}{\sqrt{ay^4 + C}}\, dy.$$

Posons $t = y^2$; alors $dx = \pm \dfrac{1}{2} \dfrac{dt}{\sqrt{at^2 + C}}$. Cinq cas se présentent :

$a = 0$	$x = \pm \dfrac{1}{2} \dfrac{t}{\sqrt{C}} + x_0$
$a > 0,\ C > 0$	$x = \pm \dfrac{1}{2\sqrt{a}} \operatorname{Arg\,sh} t \sqrt{\dfrac{a}{C}}$
$a > 0,\ C < 0$	$x = \pm \dfrac{1}{2\sqrt{a}} \operatorname{Arg\,ch} t \sqrt{-\dfrac{a}{C}}$
$a < 0,\ C > 0$	$x = \pm \dfrac{1}{2\sqrt{-a}} \operatorname{Arc\,sin} t \sqrt{-\dfrac{a}{C}}$
$a < 0,\ C < 0$	impossible.

7.5 $\dfrac{1}{2} \cos y \dfrac{dq}{dy} + 2q \sin y + \sin y \cos^2 y = 0.$

C'est encore une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre. L'équation sans second membre est $\dfrac{dq}{q} = -4 \dfrac{\sin y}{\cos y}\, dy$. D'où

$$q = C \cos^4 y$$

$$\frac{1}{2} C' \cos^5 y = -\sin y \cos^2 y \qquad dC = -2 \frac{\sin y}{\cos^3 y}\, dy \qquad C = -\frac{1}{\cos^2 y} + k.$$

$$y'^2 = \cos^2 y (k \cos^2 y - 1), \qquad \text{où} \qquad k \geqslant 1.$$

Écartons la solution $\cos y = \pm 1/\sqrt{k}$ et séparons les variables :

$$dx = \pm \frac{dy}{\cos y \sqrt{k \cos^2 y - 1}}.$$

Posons $t = \sin y$; alors $dt = \cos y\, dy$ et

$$dx = \pm \frac{dt}{(1 - t^2) \sqrt{k - 1 - kt^2}} = \pm \frac{dt}{\sqrt{k}(1 - t^2) \sqrt{-t^2 + \dfrac{k-1}{k}}}.$$

Posons $a=(k-1)/k$ et $t=a\sin\varphi$; alors

$$dx = \pm\frac{d\varphi}{\sqrt{k}(1-a^2\sin^2\varphi)}.$$

Posons enfin $u=\mathrm{tg}\varphi$; il vient

$$dx = \pm\frac{du}{\sqrt{k}(1-a^2)\left(u^2+\dfrac{1}{1-a^2}\right)}$$

$$x = x_0 \pm \frac{1}{\sqrt{k(1-a^2)}}\,\mathrm{Arc\,tg}\,u\sqrt{1-a^2}.$$

7.6 Effectuons le changement de fonction $z=x+y$; alors

$z'' = e^z$, équation incomplète.

Posons $q=z'^2$; l'équation devient

$$\frac{1}{2}\frac{dq}{dz} = e^z \qquad q = 2e^z+k \qquad dx = \pm\frac{dz}{\sqrt{2e^z+k}}$$

Posons $u=e^{-z/2}$; il vient

$$dx = \pm\frac{2}{\sqrt{2+ku^2}}\,du.$$

— Si $k=0$, $x = x_0 \pm \sqrt{2}\,u$.

— Si $k>0$, $x = x_0 \pm \sqrt{2}\,\mathrm{Arg\,sh}\,u\sqrt{\dfrac{k}{2}}$.

— Si $k<0$, $x = x_0 \pm \sqrt{2}\,\mathrm{Arc\,sin}\,u\sqrt{-\dfrac{k}{2}}$.

7.7 Posons $q=y'^2$; alors $\quad dq = 2\,\mathrm{tg}\,y\,d(\mathrm{tg}\,y) \quad q=\mathrm{tg}^2\,y+k$.
La condition initiale impose $k=0$ et $y'=\mathrm{tg}\,y$. D'où

$$\frac{dy}{\mathrm{tg}\,y} = dx \qquad x = x_0+\ln\sin y.$$

7.8 Posons $y' = \dfrac{dy}{dx}$ et $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$; alors $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{y'}$ et $\dfrac{d^2x}{dy^2} = -\dfrac{y''}{y'^3}$. D'où

$$y''\left(1-\frac{1}{y'^3}\right) = 1.$$

Posons $z=y'$; nous obtenons une équation du premier ordre :

$$\left(1-\frac{1}{z^3}\right)\mathrm{d}z = \mathrm{d}x \qquad\qquad z+\frac{1}{2z^2} = x-x_0.$$

Enfin,

$$\mathrm{d}y = z\,\mathrm{d}x = z\left(1-\frac{1}{z^3}\right)\mathrm{d}z \qquad\qquad y-y_0 = \frac{z^2}{2}+\frac{1}{z}.$$

Équations linéaires à coefficients constants

7.9 Les racines du polynôme caractéristique sont 3 et $-1/2$. D'où

$$y = A\,\mathrm{e}^{3x}+B\,\mathrm{e}^{-x/2}.$$

7.10 Les racines du polynôme caractéristique sont $5+\mathrm{j}$ et $5-\mathrm{j}$. D'où

$$y = \mathrm{e}^{5x}(A\sin x+B\cos x).$$

7.11 La solution générale de l'équation sans second membre est

$$y = A\,\mathrm{e}^{x}+B\,\mathrm{e}^{-x} \qquad \text{ou} \qquad y = C\,\mathrm{sh}\,x+D\,\mathrm{ch}\,x.$$

Le second membre étant une fonction polynomiale de degré 2, on cherche une solution particulière de la même forme. On obtient par identification

$$y = -x^2-3.$$

7.12 Le polynôme caractéristique a pour racines 1 et $-1/2$. Puisque $2\mathrm{j}$ et $-2\mathrm{j}$ ne sont pas racines de ce polynôme, on cherchera une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme

$$y = a\sin 2x+b\cos 2x.$$

On obtient par identification $a=3/85$ et $b=-29/85$. D'où la solution générale de l'équation avec second membre :

$$y = A\,\mathrm{e}^{x}+B\,\mathrm{e}^{-x/2}+\frac{3}{85}\sin 2x-\frac{29}{85}\cos 2x.$$

7.13 La solution générale de l'équation sans second membre est

$$y = A\,\mathrm{e}^{3x}+B\,\mathrm{e}^{-3x} \qquad \text{ou} \qquad y = C\,\mathrm{sh}\,3x+D\,\mathrm{ch}\,3x.$$

Comme $3\mathrm{j}$ et $-3\mathrm{j}$ ne sont pas racines du polynôme caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme

$$y = a\sin 3x+b\cos 3x.$$

Le second membre étant pair, on prendra $a=0$, d'où $b=-1/3$ et

$$y = A\,\mathrm{e}^{3x}+B\,\mathrm{e}^{-3x}-\frac{1}{3}\cos 3x.$$

7.14 Le polynôme caractéristique admet une racine double, à savoir 2. La solution générale de l'équation sans second membre est

$$y = (mx+p)\ e^{2x}.$$

Puisque 2 est racine double, on cherche une solution particulière de la forme $y=(ax^2+bx+c)\ e^{2x}$. Les termes en b et c correspondant à la solution de l'équation sans second membre s'élimineront; on peut les choisir nuls.
Si $y=ax^2\ e^{2x}$, alors $y'=a(2x^2+2x)\ e^{2x}$, $y''=a(4x^2+8x+2)\ e^{2x}$. D'où $a=1$ et

$$y = \left(\frac{x^2}{2}+mx+p\right) e^{2x}.$$

7.15 Les racines du polynôme caractéristique sont -1 et -2. Or, $\operatorname{sh} 2x = \dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}$. Comme 2 n'est pas racine et que -2 est racine simple, on cherchera une solution particulière de la forme

$$y = a\ e^{2x}+(bx+c)\ e^{-2x}.$$

Le terme en c s'élimine. On trouve aisément

$$y = \frac{e^{2x}}{24}+A\ e^{-x}+\left(\frac{x}{2}+B\right) e^{-2x}.$$

7.16 Sans second membre : $y=(mx+p)\ e^{x}$. Comme $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$, on cherche une solution particulière de la forme

$$y = (ax^2+bx+c)\ e^{x}+\alpha\ e^{-x}.$$

Les termes en b et c s'éliminent; on trouve $a=1/4$, $\alpha=1/8$ et

$$y = \left(\frac{x^2}{4}+mx+p\right) e^{x}+\frac{e^{-x}}{8}.$$

7.17 Sans second membre : $y=A\sin x+B\cos x$. Puisque j et $-$j sont racines simples du polynôme caractéristique, on cherche une solution de la forme

$$y = (ax^2+bx+c)\sin x+(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\cos x.$$

Les termes en c et γ s'éliminent. De plus, comme le second membre est pair on cherche une solution paire :

$$y = bx\sin x+\alpha x^2\cos x.$$

D'où

$$y'' = b(-x\sin x+2\cos x)+\alpha(-x^2\cos x-2x\sin x+2\cos x)$$

et

$$y''+y = 2b\cos x-2\alpha x\sin x+2\alpha\cos x = x\sin x.$$

Ainsi, $\alpha = -1/2$, $b = -\alpha = 1/2$ et

$$y = A\sin x+B\cos x-\frac{1}{2}x^2\cos x+\frac{1}{2}x\sin x.$$

7.18 Le polynôme caractéristique a pour racines

$$r_1 = \cos\alpha+\mathrm{j}\sin\alpha = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} \qquad r_2 = \cos\alpha-\mathrm{j}\sin\alpha = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}.$$

Si $\alpha \in]0, \pi[$, ces racines sont distinctes, d'où la solution générale :

$$y = A\exp(x\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha})+B\exp(x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}).$$

Si $\alpha = 0$, 1 est racine double; la solution générale devient

$$y = \mathrm{e}^x(mx+p).$$

Si $\alpha = \pi$, -1 est racine double; la solution générale est alors

$$y = \mathrm{e}^{-x}(mx+p).$$

Passons à la recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre. Remarquons que

$$\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{1}{2}\left[\exp\left(\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\exp\left(-\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right].$$

Donc

$$\mathrm{e}^{x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{1}{2}[\mathrm{e}^{-\omega x}+\mathrm{e}^{-\bar{\omega}x}], \qquad \text{où} \qquad \omega = \frac{-1+\mathrm{j}\sqrt{3}}{2}.$$

Cherchons une solution correspondant au second membre $1/2\exp(-\bar{\omega}x)$; l'autre cas s'en déduira par passage aux conjugués.
Si $-\bar{\omega}$ n'est pas racine du polynôme caractéristique, c'est-à-dire si $\alpha \neq \pi/3$, on cherche une solution de la forme $y = a\exp(-\bar{\omega}x)$; on obtient

$$a = \frac{1}{2\bar{\omega}(2\cos\alpha-1)}.$$

Si $\alpha = \pi/3$, $-\bar{\omega}$ est racine simple; on prendra y de la forme

$$y = (ax+b)\exp(-\bar{\omega}x).$$

Le terme en b s'élimine, et l'on trouve $a = -\omega/4$.

7.19 Sans second membre,

$$y = A \sin x + B \cos x .$$

Le second membre n'étant pas le produit d'une exponentielle par une fonction polynomiale, faisons varier les constantes :

$$\begin{cases} A' \cos x - B' \sin x - \operatorname{tg} x = 0 \\ A' \sin x + B' \cos x = 0 . \end{cases}$$

D'où $A' = \sin x$ $\qquad A = -\cos x + \lambda$

$$B' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = \cos x - \frac{1}{\cos x} \qquad B = \sin x - \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + \mu$$

$$y = \lambda \sin x + \mu \cos x - \cos x \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| .$$

7.20 Sans second membre : $y = A \sin x + B \cos x$.
Avec second membre, $y = |x| + 1$. Mais comme la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable à l'origine, les solutions ainsi obtenues ne sont valables que sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$. Cherchons les solutions valables sur $\mathbf{R}$.

Si $x > 0$, $y = A \sin x + B \cos x + x + 1$.
Si $x < 0$, $y = A_1 \sin x + B_1 \cos x - x + 1$.

Comme y est continue à l'origine, $B_1 = B$; comme y est dérivable à l'origine, $A + 1 = A_1 - 1$, soit $A_1 = A + 2$. En résumé, si $x \leqslant 0$,

$$y = (A+2) \sin x + B \cos x - x + 1 .$$

Équations linéaires à coefficients non constants

7.21 Posons $y = x^n$, où $n \in \mathbf{Z}$. Alors $y' = nx^{n-1}$, $y'' = n(n-1)\, x^{n-2}$.
En reportant dans l'équation différentielle, nous obtenons des monômes tous de même degré n. En simplifiant par x^n, nous obtenons

$$n(n-1) - 2n + 2 = 0 ,$$

c'est-à-dire $n = 1$ ou $n = 2$. D'où les solutions $y = x$ et $y = x^2$. Ces solutions, étant linéairement indépendantes, constituent une base de l'espace vectoriel des solutions :

$$y = Ax + Bx^2 .$$

Décomposons le second membre en deux. Si le second membre est 2, une solution particulière est 1. Si le second membre est $2x^3 \sin 2x$, faisons varier les constantes :

$$\begin{cases} A'x^2 + 2B'x^3 - 2x \sin 2x = 0 \\ A'x + B'x^2 = 0 . \end{cases}$$

D'où

$$A' = -2x \sin 2x \qquad A = x \cos 2x - \frac{\sin 2x}{2} + \lambda$$

$$B' = 2 \sin 2x \qquad B = -\cos 2x + \mu$$

et

$$y = 1 + \lambda x + \mu x^2 - x \ \frac{\sin 2x}{2}.$$

7.22 Posons encore $y = x^n$. Cette fois, $n = -1$ ou $n = -2$. La solution générale de l'équation sans second membre est

$$y = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}.$$

Faisons varier les constantes :

$$\begin{cases} A' + \dfrac{2B'}{x} + \ln(1+x) = 0 \\ A'x + B' = 0. \end{cases}$$

D'où

$$A' = \ln(1+x) \qquad A = (1+x)\,[\ln(1+x) - 1] + \lambda$$

$$B' = -x \ln(1+x) \qquad B = \frac{1-x^2}{2} \ln(1+x) + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \mu$$

et

$$y = \frac{\lambda}{x} + \frac{\mu}{x^2} + \frac{(1+x)^2}{2x^2} \ln(1+x) - \frac{3}{2x} - \frac{3}{4}.$$

7.23 Comme $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}$ et que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d^2y}{dt^2}$, l'équation devient

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + t \ \frac{dy}{dt} - 4y = 0.$$

Cherchons des solutions de la forme $y = t^n$; nous obtenons la condition

$$n(n-1) + n - 4 = 0.$$

D'où $n = \pm 2$ et

$$y = At^2 + \frac{B}{t^2} = A(1+x)^2 + \frac{B}{(1+x)^2}.$$

7.24 Puisque, pour tout nombre réel x,

$$x^2-1-2x-(x^2-2x-1) = 0,$$

$y = e^x$ est solution. Cherchons toutes les solutions sous la forme $y = z\, e^x$; d'où $y' = (z'+z)\, e^x$ et $y'' = (z''+2z'+z)\, e^x$. On peut simplifier par e^x ; le coefficient de z est nul, et il reste

$$(x^2-1)(z''+2z') - 2xz' = 0.$$

Séparons les variables :

$$\frac{z''}{z'} = \frac{2x+2-2x^2}{x^2-1} = -2+\frac{2x}{x^2-1}.$$

D'où

$$z' = C(x^2-1)\, e^{-2x}.$$

Nous savons que z est de la forme

$$z = C(ax^2+bx+c)\, e^{-2x}+D.$$

Nous obtenons par identification $a = -1/2$, $b = a = -1/2$, $2c = b+1 = 1/2$, et

$$z = C\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right) e^{-2x}+D.$$

Ainsi,

$$y = C\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right) e^{-x}+D\, e^x.$$

7.25 Il est clair que toute solution polynomiale est de degré 2. On trouve par identification la solution $y = x^2+1$. Écrivons la solution générale sous la forme $y = (x^2+1)\, z$. Alors

$$y' = (x^2+1)\, z' + 2xz$$

$$y'' = (x^2+1)\, z'' + 4xz'+2z$$

et

$$x(x^2+1)\, z''+2(x^2-1)\, z' = 0.$$

D'où

$$\frac{z''}{z'} = -2\,\frac{x^2-1}{x(x^2+1)} = \frac{2}{x}-\frac{4x}{x^2+1} \qquad z' = C\,\frac{x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Une intégration par parties conduit à

$$z = \frac{C}{2}\operatorname{Arc\,tg} x+\frac{C}{2}\,\frac{x}{x^2+1}+B.$$

Finalement, en remplaçant $C/2$ par A,

$$y = Ax - A(x^2+1) \text{ Arc tg} x + B(x^2+1).$$

7.26 On remarque que $y = e^x$ est une solution évidente de l'équation sans second membre. Posons $y = z\,e^x$; on aboutit à l'équation linéaire du premier ordre

$$(1+x)\, z'' + 2xz' = x\, e^{-2x}.$$

Sans second membre : $\dfrac{dz'}{dx} = -\dfrac{2x}{1+x} = -2 + \dfrac{2}{1+x}$ $z' = C(1+x)^2\, e^{-2x}$.

Faisons varier la constante :

$$dC = \frac{x}{(1+x)^3}\, dx = \frac{dx}{(1+x)^2} - \frac{dx}{(1+x)^3}$$

$$C = -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2(1+x)^2} + k$$

$$z' = e^{-2x}[-x - \tfrac{1}{2} + k(1+x)^2].$$

On sait qu'une primitive est de la forme $e^{-2x}(ax^2+bx+c)$. On obtient par identification

$$y = e^{-x}\left[\frac{1+x}{2} + A(5+6x+2x^2)\right] + B\, e^x.$$

CHAPITRE 10

10.1 $$F(p) = \frac{E}{T}\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T t\,e^{-pt}\,dt.$$

Or, une primitive de $t\exp(-pt)$ est de la forme $(At+B)\exp(-pt)$. On trouve par identification $A = -1/p$ et $B = -1/p^2$. D'où

$$F(p) = \frac{E}{T}\frac{1}{1-e^{-pT}}\left[\left(-\frac{t}{p}-\frac{1}{p^2}\right)e^{-pt}\right]_0^T = \frac{E}{p^2T}\left(1+\frac{pT}{1-e^{pT}}\right).$$

10.2 On trouve de même

$$F(p) = \frac{2E}{p^2T}\frac{1-2e^{-pT/2}+e^{-pT}}{1-e^{-pT}} = \frac{2E}{p^2T}\frac{1-e^{-pT/2}}{1+e^{-pT/2}} = \frac{2E}{p^2T}\,\mathrm{th}\,\frac{pT}{4}.$$

10.3 $$F(p) = \frac{E}{1-e^{-pT}}\int_0^\tau e^{-pT}dt = \frac{E}{1-e^{-pT}}\frac{1}{p}(1-e^{-p\tau}).$$

Si $\tau = T/2$,

$$F(p) = \frac{E}{p}\frac{1}{1+e^{-pT/2}}.$$

10.4 $$F(p) = \frac{E}{1-e^{-pT}}\int_0^{T/2}\sin\omega t\,e^{-pt}\,dt.$$

D'après les formules d'Euler,

$$\sin\omega t = \frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}.$$

Donc

$$\int_0^{T/2}\sin\omega t\,dt = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{j\omega-p}e^{(j\omega-p)t}+\frac{1}{j\omega+p}e^{-(j\omega+p)t}\right]_0^{\pi/\omega}$$

$$= \frac{\omega}{p^2+\omega^2}(1+e^{-pT/2})$$

et

$$F(p) = E\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\frac{1}{1-e^{-pT/2}}.$$

10.5 On peut considérer ce signal comme la somme du précédent et d'un translaté de celui-ci. Donc

$$F(p) = E\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\frac{1+e^{-pT/2}}{1-e^{-pT/2}}.$$

Calcul opérationnel

10.6 Soit F l'image de f. Alors

$$p^2 F(p) - pf(0) - f'(0) + 20\,F(p) = 0.$$

a) $(p^2+20)\,F(p) = \dfrac{p}{2}$

$$F(p) = \frac{p}{2(p^2+20)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p-2j\sqrt{5}} + \frac{1}{p+2j\sqrt{5}}\right)$$

$$f(t) = \frac{1}{4}(e^{2jt\sqrt{5}} + e^{-2jt\sqrt{5}}) = \frac{1}{2}\cos 2t\sqrt{5}.$$

b) $F(p) = \dfrac{4}{p^2+20} = \dfrac{1}{j\sqrt{5}}\left(\dfrac{1}{p-2j\sqrt{5}} - \dfrac{1}{p+2j\sqrt{5}}\right)$

$$f(t) = \frac{1}{j\sqrt{5}}(e^{2jt\sqrt{5}} + e^{-2jt\sqrt{5}}) = \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2t\sqrt{5}.$$

c) Ce cas est la superposition des deux précédents, car la solution dépend linéairement de la condition initiale :

$$f(t) = \frac{1}{2}\cos 2t\sqrt{5} + \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2t\sqrt{5}.$$

10.7 $p^2 F(p) - pf(0) - f'(0) - 25\,F(p) = 0.$

a) $F(p) = \dfrac{p}{2(p^2-25)} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{p-5} + \dfrac{1}{p+5}\right)$

$$f(t) = \frac{1}{4}(e^{5t} + e^{-5t}) = \frac{1}{2}\,\text{ch}\,5t.$$

b) $F(p) = \dfrac{4}{p^2-25} = \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{p-5} - \dfrac{1}{p+5}\right)$

$$f(t) = \frac{2}{5}(e^{5t} - e^{-5t}) = \frac{4}{5}\,\text{sh}\,5t.$$

c) $f(t) = \frac{1}{2}\,\text{ch}\,5t + \frac{4}{5}\,\text{sh}\,5t.$

10.8 $(p^2+4p+20)\,F(p) - (p+4)\,f(0) - f'(0) = 0.$

a) $F(p) = \frac{1}{2}\,\frac{p+4}{p^2+4p+20} = \frac{2-\mathrm{j}}{8}\,\frac{1}{p+2-4\mathrm{j}} + \frac{2+\mathrm{j}}{\mathrm{j}}\,\frac{1}{p+2+4\mathrm{j}}$

$f(t) = \frac{2-\mathrm{j}}{8}\,\mathrm{e}^{(4\mathrm{j}-2)t} + \frac{2+\mathrm{j}}{8}\,\mathrm{e}^{-(4\mathrm{j}+2)t} = \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{4}\,(2\cos 4t + \sin 4t).$

b) $F(p) = \frac{4}{p^2+4p+20} = \frac{2}{2\mathrm{j}}\left(\frac{1}{p+2-4\mathrm{j}} - \frac{1}{p+2+4\mathrm{j}}\right)$

$f(t) = \frac{1}{2\mathrm{j}}\,\mathrm{e}^{-2t}\,(\mathrm{e}^{4\mathrm{j}t} - \mathrm{e}^{-4\mathrm{j}t}) = \mathrm{e}^{-2t}\sin 4t.$

c) $f(t) = \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{4}\,(2\cos 4t + 5\sin 4t).$

10.9 $(p^2+4p+4)\,F(p) - (p+4)\,f(0) - f'(0) = 0.$

a) $F(p) = \frac{1}{2}\,\frac{p+4}{(p+2)^2} = \frac{1}{(p+2)^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{p+2}$

$f(t) = t\,\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2t} = \left(t + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-2t}.$

b) $F(p) = \frac{4}{(p+2)^2}$

$f(t) = 4t\,\mathrm{e}^{-2t}.$

c) $f(t) = \left(5t + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-2t}.$

10.10 $(p^2+4p+3)\,F(p) - (p+4)\,f(0) - f'(0) = 0.$

a) $F(p) = \frac{1}{2}\,\frac{p+4}{(p+1)\,(p+3)} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{p+1} - \frac{1}{p+3}\right)$

$f(t) = \frac{3}{4}\,\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-3t}.$

b) $F(p) = \dfrac{4}{(p+1)\,(p+3)} = \dfrac{2}{p+1} - \dfrac{2}{p+3}$

$f(t) \;= 2(e^{-t} - e^{-3t})\,.$

c) $f(t) \;= \dfrac{11}{4}\,e^{-t} - \dfrac{9}{4}\,e^{-3t}\,.$

10.11 $L[p^2\,F(p) - pf(0) - f'(0)] + R[pF(p) - f(0)] + \dfrac{1}{C}\,F(p) = 0\,,$

soit

$(Lp^2 + 100\,p + 2 \times 10^6)\;F(p) - 500(Lp+100) = 0\,.$

a) $F(p) = 500\;\dfrac{10^{-3}\,p + 100}{10^{-3}\,p^2 + 10\,p + 2 \times 10^6} = 500\;\dfrac{p + 10^5}{p^2 + 10^5\,p + 2 \times 10^9}$

$\Delta = 10^{10} - 8 \times 10^9 = \;20 \times 10^8 \qquad \sqrt{\Delta} \approx 4{,}5 \times 10^4\,.$

Les pôles sont $-27{,}5 \times 10^3$ et $-72{,}5 \times 10^3$. D'où

$F(p) = \dfrac{805}{p + 27{,}5 \times 10^3} - \dfrac{305}{p + 72{,}5 \times 10^3}$

$f(t) \;= 805\,\exp(-27{,}5 \times 10^3 t) \;-\; 305\,\exp(-72{,}5 \times 10^3\,t)\,.$

b) $F(p) = 500\;\dfrac{p + 8 \times 10^4}{p^2 + 8 \times 10^4 + 16 \times 10^8} = 500\;\dfrac{p + 8 \times 10^4}{(p + 4 \times 10^4)^2}$

$= \dfrac{2 \times 10^7}{(p + 4 \times 10^4)^2} + \dfrac{500}{p + 4 \times 10^4}$

$f(t) \;= (2 \times 10^7\,t + 500)\,\exp(-4 \times 10^4\,t)\,.$

c) $F(p) = 500\;\dfrac{p + 125 \times 10^2}{p^2 + 125 \times 10^2\,p + 25 \times 10^7}$

$\Delta = 5^6 \times 10^4 - 10^9 \approx 844 \times 10^6 \qquad \sqrt{\Delta} \approx 29 \times 10^3\,.$

Les pôles sont $(-62{,}5 + 145\mathrm{j})\;10^2$ et $(-62{,}5 - 145\mathrm{j})\;10^2$. D'où

$F(p) = \dfrac{250 + 108\,\mathrm{j}}{p + (62{,}5 + 145\,\mathrm{j})\;10^2} + \dfrac{250 - 108\,\mathrm{j}}{p + (62{,}5 - 145\,\mathrm{j})\;10^2}$

$f(t) \;= [500\,\cos(145 \times 10^2\,t) + 216\,\sin(145 \times 10^2\,t)]\,\exp(-62{,}5 \times 10^2\,t)\,.$

TRANSFORMÉES DE LAPLACE USUELLES

Originales		*Images*	*Abscisses de convergence absolue*
$\Upsilon(t)$		$1/p$	$\mathrm{Re}(p) > 0$
$\Upsilon(t)\, t$		$1/p^2$	$\mathrm{Re}(p) > 0$
$\Upsilon(t)\, t^n$	$n \in \mathbf{N}$	$n!/p^{n+1}$	$\mathrm{Re}(p) > 0$
$\Upsilon(t)\, \mathrm{e}^{\alpha t}$	$\alpha \in \mathbf{C}$	$1/(p-\alpha)$	$\mathrm{Re}(p) > \mathrm{Re}(\alpha)$
$\Upsilon(t) \sin \omega t$	$\omega \in \mathbf{R}$	$\omega/(p^2+\omega^2)$	$\mathrm{Re}(p) > 0$
$\Upsilon(t) \cos \omega t$	$\omega \in \mathbf{R}$	$p/(p^2+\omega^2)$	$\mathrm{Re}(p) > 0$
$\Upsilon(t)\, \mathrm{sh}\, \omega t$	$\omega \in \mathbf{R}$	$\omega/(p^2-\omega^2)$	$\mathrm{Re}(p) > \lvert\omega\rvert$
$\Upsilon(t)\, \mathrm{ch}\, \omega t$	$\omega \in \mathbf{R}$	$p/(p^2-\omega^2)$	$\mathrm{Re}(p) > \lvert\omega\rvert$
$\Upsilon(t)\, \mathrm{e}^{\alpha t} \sin \omega t$		$\dfrac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}(p) > \mathrm{Re}(\alpha)$
$\Upsilon(t)\, \mathrm{e}^{\alpha t} \cos \omega t$		$\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}(p) > \mathrm{Re}(\alpha)$
f'		$pF(p)-f(0)$	
f''		$p^2\, F(p)-pf'(0)-f(0)$	
$\displaystyle\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u$		$\dfrac{1}{p}\, F(p)$	
$f(t-\tau)$	$\tau \in \mathbf{R}_+$	$\mathrm{e}^{-p\tau} F(p)$	
$\mathrm{e}^{\sigma t} f(t)$	$\sigma \in \mathbf{C}$	$F(p-\sigma)$	
$f(kt)$	$k \in \mathbf{R}_+^*$	$\dfrac{1}{k}\, F\left(\dfrac{p}{k}\right)$	
$f * g$		$F(p)\, G(p)$.	

INDEX TERMINOLOGIQUE

Imprimé en France. — JOUVE, 18, rue Saint-Denis, 75001 PARIS
N° 16018. Dépôt légal : septembre 1986
Dépôt légal de la 5e édition : 1er trimestre 1974

J. Quinet

Cours élémentaire de mathématiques supérieures

Depuis de nombreuses années, et au fil de plusieurs réimpressions, plus de 100 000 étudiants, ingénieurs, techniciens et professionnels se sont formés avec succès aux mathématiques supérieures grâce à cet ouvrage.

Cette nouvelle édition, totalement *refondue et augmentée de sujets nouveaux,* est l'œuvre d'une équipe de professeurs enseignant aux niveaux universitaire, technique et professionnel.

Les règles qui ont guidé sa rédaction restent celles de J. QUINET :

— EXPLIQUER ET FAIRE COMPRENDRE.
— AVOIR TOUJOURS POUR BUT L'APPLICATION PRATIQUE.
— Exposer la théorie par les moyens les plus *simples* et les plus *rapides,* en distinguant l'*essentiel* de ce qui est secondaire.
— Illustrer tout calcul et toute théorie par des exemples, des exercices et des applications à l'électricité, l'électronique, la mécanique, etc.

Une innovation : les solutions de *tous* les exercices proposés sont données à la fin de chaque volume.

Essentiellement pédagogique et moderne, cet ouvrage est, par la réponse qu'il donne aux besoins de la technique industrielle actuelle, un instrument indispensable de FORMATION PERMANENTE.

Le COURS ÉLÉMENTAIRE DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES comporte 5 tomes :

1. Algèbre
2. Fonctions usuelles
3. Calcul intégral et séries
4. Équations différentielles
5. Géométrie

Il est complété par le livre de J. Fourastié et B. Sahler "Probabilités et statistique".

9 782040 074234

ISBN 2-04-007423-6