V. SMIRNOV

COURS DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

ÉDITIONS
MIR

В. И. СМИРНОВ

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ

I

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

V. SMIRNOV

COURS de MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

tome I

ÉDITIONS MIR • MOSCOU • 1969

Table des matières

CHAPITRE IV. LES SÉRIES, APPLICATIONS AUX CALCULS APPROCHÉS

CHAPITRE V. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

INTRODUCTION

Dans le tome I du Cours de mathématiques supérieures en cinq volumes que nous avons entièrement révisé sont exposées les bases de l'analyse mathématique. Nous avons jugé utile, vu que dans les tomes suivants nous rencontrerons souvent des questions d'analyse moderne suffisamment complexes, d'insérer à la fin du § 2 (chapitre I), après la théorie des limites, l'exposé de la théorie des nombres irrationnels et son application à la démonstration des critères d'existence de la limite et des propriétés des fonctions continues. Nous y donnons aussi la définition rigoureuse et l'étude des fonctions élémentaires. Au chapitre V, consacré aux fonctions de plusieurs variables, nous donnons la démonstration de l'existence des fonctions implicites.

L'exposé est conduit de telle manière que la partie en gros caractères peut être lue indépendamment. Nous avons rapporté en petits caractères les exemples, certaines questions complémentaires, tout le développement théorique que nous avons mentionné plus haut, ainsi que les derniers paragraphes du chapitre IV dont le contenu est d'un niveau théorique nettement supérieur.

Ce manuel est destiné aux élèves des Facultés de physique et de mathématiques, ainsi qu'à ceux des écoles techniques supérieures.

V. Smirnov

Chapitre premier

DÉPENDANCE FONCTIONNELLE ET THÉORIE DES LIMITES

I-1. Grandeurs variables

I-1-1. La grandeur et sa mesure. L'analyse mathématique trouve sa signification fondamentale dans plusieurs sciences et, notamment, dans les sciences naturelles et la technique. A l'encontre des autres sciences qui s'intéressent chacune à un aspect déterminé du monde qui nous entoure, les mathématiques touchent aux propriétés les plus générales qui se rapportent à tous les phénomènes accessibles à la recherche scientifique.

L'une des notions fondamentales est la notion de *grandeur* et de *mesure*. Le trait caractéristique de la *grandeur* réside dans le fait qu'elle peut être mesurée, c'est-à-dire par un moyen ou un autre comparée à une grandeur déterminée du même ordre, prise *comme unité de mesure*. Le processus de comparaison dépend des caractéristiques de la grandeur recherchée et s'appelle *la mesure*. On obtient un *nombre*, qui exprime le rapport de la grandeur étudiée à celle prise comme unité de mesure.

Toute loi de la nature nous donne un rapport entre des grandeurs, ou, plus exactement, entre les chiffres exprimant ces grandeurs. Les chiffres et les différents rapports qui existent entre eux font justement l'objet de la recherche mathématique, indépendamment du caractère concret des grandeurs ou des lois qui nous ont amenés à ces nombres et rapports.

Ainsi, *à toute grandeur correspond le nombre qui la mesure*. Mais ce nombre dépend essentiellement de l'unité, prise pour la mesure, ou *échelle*. Lorsque cette unité augmente, le nombre qui mesure la grandeur considérée diminue et, inversement, ce nombre va grandir lorsque l'unité diminuera.

Le choix de l'échelle est conditionné par le caractère de la grandeur recherchée et par les circonstances dans lesquelles a lieu la mesure. La grandeur de l'échelle pour la mesure d'une seule et même grandeur peut varier dans les plus larges limites: par exemple, pour la mesure de *la longueur* dans les recherches optiques de précision, on prend comme unité de longueur *l'angström* (un dix-millionième de millimètre, 10^{-7} mm); en astronomie on utilise une unité de mesure appelée *année-lumière*, c'est-à-dire la distance parcourue par la lumière pendant un an (en une seconde la lumière parcourt environ 300 000 km).

I-1-2. Le nombre. Le nombre que l'on obtient comme résultat de la mesure peut être *entier* (si l'unité est contenue un nombre entier de fois dans la grandeur considérée), *fractionnaire* ou *rationnel* (s'il existe une autre unité de mesure qui soit contenue un nombre entier de fois aussi bien dans la grandeur mesurée que dans l'unité choisie auparavant, en un mot, lorsque la grandeur mesurée est *commensurable* avec l'unité de mesure) et enfin, le nombre peut être *irrationnel* (lorsqu'il n'existe pas de mesure commune, c'est-à-dire lorsque la grandeur donnée est *incommensurable* avec l'unité de mesure).

Ainsi, par exemple, on démontre en géométrie élémentaire que la diagonale du carré est incommensurable avec son côté, de sorte que, si l'on veut mesurer la diagonale du carré en ayant pris comme unité de mesure son côté, le nombre $\sqrt{2}$ obtenu en faisant la mesure, sera irrationnel. Le nombre π qui mesure la circonférence quand on prend le diamètre comme unité de mesure est aussi irrationnel.

Pour éclaircir la notion de nombre irrationnel, il est commode d'utiliser les fractions décimales. Tout nombre rationnel, comme on le sait de l'arithmétique, peut être représenté ou bien sous forme de fraction décimale finie ou bien sous forme de fraction décimale infinie, et dans ce dernier cas la fraction infinie sera périodique. Ainsi, par exemple, en divisant le numérateur par le dénominateur suivant la loi de la division des fractions décimales, on obtient :

$$\frac{5}{33}=0,151515\ldots=0,(15),\quad \frac{5}{18}=0,2777\ldots=0,2(7).$$

Réciproquement, on montre en arithmétique que toute fraction décimale périodique représente un nombre rationnel.

Quand on mesure une grandeur incommensurable avec l'unité choisie, on peut d'abord établir combien de fois l'unité entière est contenue dans la grandeur mesurée, puis combien de fois un dixième d'unité est contenu dans le reste obtenu de la grandeur, ensuite combien de fois un centième d'unité est contenu dans le nouveau reste et ainsi de suite. Grâce à cette méthode, quand on mesurera une grandeur incommensurable avec l'unité choisie, on obtiendra une certaine fraction décimale infinie non périodique. A chaque nombre irrationnel correspond une fraction infinie et, inversement, à chaque fraction décimale infinie non périodique correspond un certain nombre irrationnel. Si on ne laisse à cette fraction décimale infinie que les premières décimales, on obtient une valeur approximative par défaut du nombre irrationnel que représente cette fraction. Ainsi, par exemple, si l'on extrait la racine carrée suivant la règle habituelle jusqu'à la troisième décimale, on obtiendra :

$$\sqrt{2}=1{,}414\ldots$$

Les nombres 1,414 et 1,415 seront les valeurs approchées par défaut et par excès de $\sqrt{2}$ avec une précision d'un millième.

En utilisant les décimales on peut comparer les nombres irrationnels les uns aux autres et aux nombres rationnels.

Dans beaucoup de cas on doit considérer des grandeurs de signes différents : positifs et négatifs (température supérieure et inférieure à 0°, etc.) Ces grandeurs sont exprimées respectivement par des nombres positifs et négatifs. Si a et b sont des nombres positifs et si $a > b$, on aura $-a < -b$. Tout nombre positif, y compris zéro, est plus grand que tout nombre négatif.

Tous les nombres rationnels et irrationnels se répartissent suivant un ordre déterminé d'après leur grandeur. Tous ces nombres forment l'ensemble *des nombres réels.*

Notons un cas lié à la représentation des nombres réels par les fractions décimales. A la place d'une fraction décimale finie quelconque on peut écrire une fraction décimale infinie de période neuf. Ainsi, par exemple : $3{,}16 = 3{,}1599\ldots$ Si on n'utilise pas de fraction décimale finie, on obtient une correspondance biunivoque exacte entre les nombres réels et les fractions décimales infinies, c'est-à-dire qu'à tout nombre réel correspond une fraction décimale infinie déterminée (ou un nombre entier), et à toute fraction décimale infinie correspond un nombre réel déterminé. Aux nombres négatifs correspondent des fractions décimales infinies (ou des nombres entiers) avec un signe moins devant.

Dans le domaine des nombres réels on peut effectuer les quatre principales opérations, sauf la division par zéro. La racine de degré impair d'un nombre réel quelconque possède toujours une valeur déterminée. La racine de degré pair d'un nombre positif a deux valeurs qui ne diffèrent que par leur signe. La racine de degré pair d'un nombre réel négatif n'a pas de sens dans le domaine des nombres réels. La racine d'un quelconque degré de zéro n'a qu'une seule valeur : zéro. Nous exposerons au paragraphe [I-2-16] une théorie rigoureuse des nombres réels et des opérations effectuées sur eux.

On appelle *valeur arithmétique* ou *absolue du nombre a*, le nombre a lui-même, si a est un nombre positif ou égal à zéro, et le nombre $-a$, si a est un nombre négatif. La valeur absolue du nombre a est désignée par le symbole $|a|$, de sorte que $|a| = a$, si $a > 0$, et $|a| = -a$, si $a < 0$. Ainsi, par exemple, $|5| = 5$ et $|-5| = 5$ et de façon générale $|a| = |-a|$. On voit aisément que la valeur absolue de la somme $|a+b|$ ne sera égale à la somme des valeurs absolues des termes, c'est-à-dire à $|a|+|b|$, que dans le cas où les termes sont de même signe; quand les signes des termes sont différents, $|a+b|<|a|+|b|$, de sorte que dans tous les cas

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

Ainsi, par exemple, pour $a=-3$ et $b=-7$ nous avons le signe d'égalité, et pour $a=3$ et $b=-7$ nous avons $|3+(-7)|=$ $=4$ et $|3|+|-7|=10$, c'est-à-dire le signe d'inégalité.

Il est facile de constater exactement de la même façon que

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|,$$

si l'on considère que $|a|\geqslant|b|$. Pour $|a|<|b|$ l'inégalité est aussi valable parce que à gauche il y a une valeur positive et à droite, une valeur négative.

La valeur absolue du produit d'un nombre quelconque de facteurs est égale au produit des valeurs absolues de ces facteurs et la valeur absolue du quotient (le diviseur est non nul) est égale au quotient des valeurs absolues du dividende et du diviseur, c'est-à-dire

$$|abc|=|a|\cdot|b|\cdot|c| \quad \text{et} \quad \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}.$$

I-1-3. Les grandeurs constantes et variables. Les grandeurs étudiées en mathématiques se divisent en deux classes: les grandeurs constantes et les grandeurs variables.

On appelle *grandeur constante* une grandeur qui, dans une étude donnée, conserve une seule et même valeur inchangée. Ainsi, un nombre déterminé lui correspond pour une unité de mesure donnée.

On appelle *grandeur variable* celle qui, pour une raison ou une autre, peut prendre différentes valeurs au cours de l'étude donnée.

Après ces précisions il est clair que la notion de grandeur constante et variable est conditionnée dans une grande mesure et dépend des circonstances dans lesquels est étudié un phénomène donné. Une seule et même grandeur, qui, dans certaines conditions, aurait pu être considérée comme constante, dans d'autres conditions peut être variable et inversement.

Ainsi, par exemple, lors de l'évaluation du poids d'un corps, il est important de savoir si la pesée s'effectue dans un seul et même lieu de la surface de la Terre ou dans différents lieux : si l'évaluation a lieu dans un seul et même lieu, l'accélération de la force de pesanteur, dont dépend le poids, restera constante et la différence de poids entre différents corps dépendra seulement de leur masse;

si l'évaluation s'effectue en différents lieux de la surface de la Terre, l'accélération de la force de pesanteur ne peut être considérée comme constante, étant donné qu'elle dépend de la force centrifuge de la rotation de la Terre; c'est pour cela qu'un seul et même corps pèse moins à l'équateur qu'au pôle, ce qu'on peut constater si la pesée a lieu à l'aide de balances à ressorts, et non à levier.

De même on peut considérer que lors des calculs techniques approximatifs, la longueur des poutres employées dans la construction est une grandeur constante; par contre, quand pour des calculs plus précis, on prend en considération l'action de la température, la longueur des barres est variable, ce qui, évidemment, complique de façon considérable tous les calculs.

I-1-4. Intervalle. Le caractère de la variation d'une grandeur variable peut être des plus divers. Une grandeur variable peut prendre ou bien toutes les valeurs réelles possibles sans aucune restriction (par exemple le temps t rapporté à un moment initial déterminé, peut prendre toutes les valeurs possibles, aussi bien positives que négatives), ou bien ses valeurs sont limitées par certaines inégalités (par exemple la température absolue $T°$ qui doit être supérieure à -273 °C); enfin une grandeur variable ne peut prendre que certaines valeurs, et non pas toutes les valeurs possibles (valeurs seulement entières — le nombre d'habitants d'une ville donnée, le nombre de molécules dans un volume donné d'un gaz — ou seulement commensurables avec une unité donnée, etc.).

Montrons comment varient certaines grandeurs variables parmi les plus répandues dans les recherches théoriques et dans la pratique.

Si une grandeur variable x peut prendre toutes les valeurs réelles satisfaisant à la condition $a \leqslant x \leqslant b$, où a et b sont des nombres réels donnés, on dit que *x varie dans l'intervalle* (a, b). Un tel intervalle, bornes comprises, est appelé *intervalle fermé*. Si x peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle (a, b) excepté ses bornes, c'est-à-dire si $a < x < b$, alors on dit que *x varie à l'intérieur de l'intervalle* (a, b). Un tel intervalle avec ses bornes exclues est un *intervalle ouvert*. Le domaine de variation de x peut être également un intervalle, fermé d'un côté et ouvert de l'autre: $a \leqslant x < b$ ou $a < x \leqslant b$.

Si le domaine de variation de x est déterminé par l'inégalité $a \leqslant x$, on dit que x varie dans l'intervalle $(a, +\infty)$ qui est fermé à gauche et ouvert à droite. Exactement de la même façon l'inégalité $x \leqslant b$ définit d'intervalle $(-\infty, b)$ ouvert à gauche et fermé à droite. Si x peut prendre n'importe quelles valeurs réelles, on dit que x varie dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ ouvert des deux côtés.

Dans ce qui suit, nous désignerons toujours par (a, b) un intervalle fermé. Souvent, on le désigne par $[a, b]$. L'exclusion d'un extrémité d'un intervalle, ou des deux, ne sera effectuée que sous réserve spéciale.

I-1-5. Notion de fonction. Le plus souvent dans les applications on a affaire non pas à une grandeur variable mais à plusieurs à la fois. Prenons par exemple 1 kg d'air. Les grandeurs variables déterminant son état seront : la pression p (kg/m²) à laquelle il est soumis, le volume v (m³) qu'il occupe, sa température t (°C). Supposons un instant que la température de l'air reste égale à 0 °C ; le nombre t est dans ce cas une constante égale à zéro. Seuls p et v restent variables. Si on modifie la pression p, le volume v sera également modifié, par exemple si l'on comprime l'air, le volume va diminuer. On peut modifier la pression p à volonté (tout au moins dans les limites accessibles à la technique), c'est pourquoi on peut appeler p *une variable indépendante.* Selon la pression, le gaz doit, évidemment, occuper un volume entièrement déterminé ; par conséquent, il doit exister une loi qui permette de trouver, pour chaque valeur de p, la valeur correspondante de v. Cette loi est bien connue — c'est la loi de Boyle-Mariotte, qui dit que le volume occupé par un gaz à température constante est inversement proportionnel à la pression.

En appliquant cette loi à notre kilogramme d'air, on peut trouver une relation entre v et p sous forme de *l'équation* :

$$v = \frac{273 \cdot 29{,}27}{p}.$$

La grandeur variable v sera dans ce cas une *fonction* de la variable indépendante p.

En faisant abstraction de cet exemple particulier, on peut dire que du point de vue théorique *ce qui est caractéristique pour une variable indépendante c'est l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre, et on peut lui donner arbitrairement n'importe quelle valeur de cet ensemble de valeurs possibles.* Ainsi, par exemple, un intervalle quelconque (a, b) ou une partie de cet intervalle peut servir d'ensemble de valeurs de la variable indépendante x, c'est-à-dire qu'une variable indépendante x peut, par exemple, prendre n'importe quelles valeurs satisfaisant à l'inégalité $a \leqslant x \leqslant b$ ou à l'inégalité $a < x < b$. Il peut arriver que x prenne n'importe quelles valeurs entières, etc. Dans l'exemple étudié plus haut, p jouait le rôle d'une variable indépendante, et le volume v était fonction de p. Donnons maintenant une définition de la fonction.

D é f i n i t i o n. *Une grandeur y est dite fonction de la variable indépendante de x, si à n'importe quelle valeur déterminée de x (prise dans l'ensemble de ses valeurs possibles) correspond une valeur déterminée de y.*

Si, par exemple, y est une fonction de x, définie dans l'intervalle (a, b), cela signifie qu'à n'importe quelle valeur de x de cet intervalle correspond une valeur déterminée de y.

La question de savoir laquelle des deux grandeurs, x ou y, doit être considérée comme variable indépendante, est souvent une question de commodité. Dans notre exemple nous aurions pu, en changeant à notre gré le volume v et en déterminant chaque fois la pression p, considérer que v est la variable indépendante, et la pression p une fonction de v En résolvant par rapport à p l'équation écrite plus haut, nous obtiendrons la formule qui exprime p en fonction de la variable indépendante:

$$p=\frac{273\cdot 29{,}27}{v}.$$

Ce qui a été dit pour deux variables s'étend sans peine au cas d'un nombre quelconque de variables, et nous pouvons ici également distinguer les variables indépendantes des variables dépendantes ou fonctions.

Revenons à notre exemple: supposons que la température t n'est plus 0 °C, mais peut varier. La loi de Boyle-Mariotte doit être dans ce cas remplacée par celle plus complexe, de Clapeyron:

$$pv=29{,}27\,(273+t),$$

qui montre que dans l'étude de l'état d'un gaz, on ne peut changer librement que deux des grandeurs p, v et t, et que la troisième sera entièrement déterminée, si on donne les valeurs des deux premières. On peut prendre comme variables indépendantes, par exemple, p et t. v en sera alors fonction:

$$v=\frac{29{,}27\,(273+t)}{p},$$

ou encore, on peut considérer comme variables indépendantes v et t, et p sera fonction de ces deux variables.

Prenons un autre exemple. La surface S d'un triangle s'exprime en fonction de la longueur de ses côtés a, b, c par la formule:

$$S=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)},$$

où p est le demi-périmètre du triangle:

$$p=\frac{a+b+c}{2}.$$

On peut changer librement les côtés a, b, c, à la condition toutefois que chaque côté soit plus petit que la somme des deux autres. Ainsi les variables a, b, c *seront des variables indépendantes limitées par des inégalités, S sera fonction de ces variables.*

On peut de la même façon prendre arbitrairement deux côtés, par exemple a et b, et la surface S du triangle; et utilisant la formule:

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C,$$

2—281

où C est l'angle compris entre les côtés a, b, on peut calculer C. Ici les grandeurs a, b, S seront les variables indépendantes, C sera fonction de ces variables. Les variables a, b, S doivent être limitées par l'inégalité :

$$\sin C = \frac{2S}{ab} \leqslant 1.$$

Il faut noter que dans cet exemple, nous obtenons pour C *deux valeurs* suivant que nous prenons pour C l'angle aigu ou obtus ayant le même sinus :

$$\sin C = \frac{2S}{ab}.$$

Nous arrivons ici à la notion de *fonction multiforme* dont nous parlerons plus en détail par la suite.

I-1-6. Procédé analytique pour exprimer une dépendance fonctionnelle. Toute loi de la nature alliant des phénomènes établit *une relation fonctionnelle* entre des grandeurs.

Il existe de nombreux moyens pour exprimer les relations fonctionnelles, mais trois procédés sont d'une très grande importance : 1) *le procédé analytique*, 2) *le procédé des tables*, 3) *le procédé graphique ou géométrique.*

On dit qu'une relation fonctionnelle existe entre les grandeurs ou, plus simplement, qu'*une fonction est exprimée analytiquement*, si ces grandeurs sont liées entre elles par *des équations* dans lesquelles elles figurent, en subissant différentes opérations mathématiques : addition, soustraction, division, calcul logarithmique, etc. On arrive toujours à une représentation analytique lorsqu'on étudie la question *sous l'angle théorique*, c'est-à-dire qu'ayant posé les hypothèses principales, nous passons à l'analyse mathématique et obtenons le résultat à l'aide d'une formule mathématique.

Si l'on a l'expression concrète d'une fonction (c'est-à-dire d'une variable dépendante) à l'aide d'opérations mathématiques sur d'autres variables, indépendantes, on dit alors que la fonction est donnée analytiquement d'une façon explicite. On peut prendre comme exemple de fonction explicite l'expression du volume d'un gaz v à température constante en fonction de la pression (fonction explicite d'une variable indépendante) :

$$v = \frac{273 \cdot 29{,}27}{p}$$

ou la formule de la surface S d'un triangle en fonction de ses côtés :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(fonction explicite de trois variables indépendantes). Relevons encore un exemple de forme explicite de fonction d'une variable indépendante x:

$$y=2x^2-3x+7. \quad (1)$$

Il est souvent difficile ou même impossible de donner la formule qui exprime une fonction au moyen de variables indépendantes, c'est pourquoi on écrit simplement :

$$y=f(x).$$

Cette notation signifie que y est une fonction de la variable indépendante x et que f est la représentation symbolique de la dépendance de y par rapport à x. A la place de f, on peut évidemment employer d'autres lettres. Si on étudie différentes fonctions de x, on doit employer différentes lettres pour la notation symbolique de la dépendance de x:

$$f(x),\ F(x),\ \varphi(x),\ \text{etc.}$$

On utilise cette notation symbolique non seulement dans le cas où la fonction est exprimée analytiquement, mais aussi dans le cas général d'une dépendance fonctionnelle, que nous avons définie en [I-1-5].

On utilise également cette notation abrégée pour les fonctions de plusieurs variables indépendantes :

$$v=F(x,\ y,\ z),$$

où v est fonction des variables x, y, z.

Nous obtiendrons une valeur particulière d'une fonction, en attribuant aux variables indépendantes des valeurs particulières et en effectuant les opérations, indiquées par les signes f, F, ... Ainsi, par exemple, la valeur particulière de la fonction (1) pour $x=\frac{1}{2}$, sera :

$$y=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\frac{1}{2}+7=6.$$

En général, on exprime la valeur particulière d'une fonction $f(x)$, pour $x=x_0$, par $f(x_0)$. Il en est de même pour les fonctions de plusieurs variables.

Il ne faut pas confondre la notion générale de fonction qui a été donnée en [I-1-5] avec la notion d'expression analytique de y par x. Dans la définition générale d'une fonction, on parle d'une certaine loi, selon laquelle à n'importe quelle valeur de la variable x, prise parmi les valeurs possibles, correspond une valeur déterminée de y. C'est pourquoi on ne propose aucune expression analytique (formule) de y au moyen de x.

Remarquons encore que l'on peut définir une fonction par différentes expressions analytiques dans différents intervalles de variation de la variable indépendante x. Ainsi, par exemple, nous pouvons définir la fonction y dans l'intervalle $(0, 3)$ de la façon suivante : $y = x + 5$ pour $0 \leqslant x \leqslant 2$ et $y = 11 - 2x$ pour $2 < x \leqslant 3$. A toute valeur de x de l'intervalle $(0, 3)$ correspond une valeur déterminée de y, ce qui est conforme à la définition de la fonction.

I-1-7. Fonctions implicites. Une fonction est dite *implicite* si l'on a non pas une expression analytique directe de cette fonction au moyen de variables indépendantes, mais *une équation* qui relie sa valeur aux valeurs des variables indépendantes. Ainsi, par exemple, si la grandeur variable y est liée à une grandeur variable x par l'équation :

$$y^3 - x^2 = 0,$$

y est une fonction *implicite* de la variable indépendante x; d'un autre côté, on peut considérer x également comme fonction implicite de la variable indépendante y.

La fonction implicite v de plusieurs variables indépendantes $x, y, z \ldots$ est définie de façon générale par *l'équation* :

$$F(x, y, z, \ldots, v) = 0.$$

On pourra calculer les valeurs de cette fonction seulement lorsque l'on aura résolu l'équation par rapport à v et, par cela même, représenté v sous forme d'une fonction explicite de $x, y, z \ldots$:

$$v = \varphi(x, y, z, \ldots).$$

Dans l'exemple cité plus haut, y est exprimée en fonction de x suivant la formule :

$$y = \sqrt[3]{x^2}.$$

Cependant, pour obtenir les différentes propriétés de la fonction v il n'est pas nécessaire de résoudre l'équation et il arrive souvent qu'on étudie la fonction implicite d'après l'équation par laquelle elle est définie, sans la résoudre.

Par exemple, le volume d'un gaz v est une fonction implicite de la pression p et de la température t, définie par l'équation :

$$pv = R(273 + t).$$

L'angle C compris entre les côtés a et b du triangle de surface S est une fonction implicite de a, b et S, définie par l'équation :

$$ab \sin C = 2S.$$

I-1-8. Tables des fonctions. On utilise le procédé analytique pour représenter les fonctions en majeure partie dans les recherches théoriques, lorsqu'on a affaire à des lois générales. Dans la pratique, lorsqu'il faut, en fait, calculer les nombreuses valeurs particulières de différentes fonctions, le procédé analytique de représentation s'avère souvent peu commode, car il nécessite dans chaque cas que l'on fasse tous les calculs.

Pour éviter cela, on calcule les valeurs particulières des fonctions les plus courantes pour un grand nombre de valeurs particulières des variables indépendantes, et on établit *des tables.*

Telles sont, par exemple, les tables de valeurs des fonctions

$$y=x^2,\ \frac{1}{x},\ \sqrt{x},\ \pi x,\ \frac{1}{4}\pi x^2,\ \lg_{10} x,\ \lg_{10}\sin x,\ \text{etc.},$$

que l'on utilise constamment dans la pratique. Il existe d'autres tables de fonctions plus complexes, qui sont également d'une grande utilité: les tables des fonctions de Bessel, des fonctions elliptiques, etc. Il existe aussi des tables pour les fonctions de plusieurs variables, dont *la table de multiplication* nous offre l'exemple le plus simple, c'est-à-dire une table des valeurs de la fonction $z = xy$ pour différentes valeurs entières de x et de y.

On a parfois à calculer les valeurs des fonctions pour des valeurs particulières des variables indépendantes qui ne figurent pas dans les tables, et dont on ne trouve que des valeurs voisines; pour qu'il soit possible d'utiliser les tables dans ce cas, il existe diverses règles *d'interpolation*; l'une de ces règles est utilisée dans l'enseignement secondaire: celle que l'on emploie pour les tables de logarithmes (parties proportionnelles).

Les tables ont une grande valeur, puisqu'elles permettent d'exprimer des fonctions dont l'expression analytique *ne nous est pas connue*; c'est ce qui arrive quand on effectue *une expérience.* Toute recherche expérimentale a pour but de nous dévoiler les relations fonctionnelles qui nous sont inconnues, et le résultat de toute expérience s'exprime sous forme d'*une table*, reliant entre elles les valeurs correspondantes des grandeurs cherchées dans cette expérience.

I-1-9. Procédé graphique de représentation des nombres. En passant à l'étude du moyen graphique de représenter une relation fonctionnelle, on commencera par le cas de la représentation graphique d'une variable.

Tout nombre x peut être représenté par un certain segment. Pour cela il suffit, lorsqu'on s'est entendu une fois pour toutes sur le choix de l'unité de longueur, de construire le segment dont la longueur est précisément égale au nombre donné x. Ainsi, toute grandeur peut être non seulement exprimée par *un nombre*, mais aussi représentée géométriquement par *un segment.*

Pour pouvoir représenter de la même façon les nombres négatifs, on convient de reporter les segments sur une seule et même ligne droite, en indiquant en outre le sens de celle-ci. (fig. 1). On conviendra plus loin de désigner chaque segment par le signe $\overline{AB}$, où l'on appellera le point A l'origine, et B l'extrémité du segment.

Si le sens de A à B coïncide avec celui de la droite, le segment représente un nombre positif; si le sens de A à B est opposé à celui de la droite, le segment représentera un nombre négatif (A_1B_1 sur

Fig. 1

Fig. 2

la fig. 1). *La valeur absolue* du nombre étudié s'exprime par la longueur du segment qui le représente, indépendamment du sens.

On désignera la longueur du segment $\overline{AB}$ par $|\overline{AB}|$; si le segment $\overline{AB}$ représente un nombre x, on écrira simplement

$$x = \overline{AB}, \quad |x| = |\overline{AB}|.$$

On peut convenir une fois pour toutes de situer l'origine de tous les segments en un point O de la droite, choisi au préalable. Alors, tout segment $\overline{OA}$ et, bien entendu, le nombre x qu'il représente, sera entièrement défini par *le point A*, extrémité du segment (fig. 2). Réciproquement, étant donné le nombre x, on peut définir la valeur et le sens du segment $\overline{OA}$ et, bien entendu, son extrémité A; $x = 0$ correspond au point O (origine).

Ainsi, si l'on donne un sens à la droite $X'X$ (axe) et si l'on désigne sur cette droite un point fixe O (origine), à chaque nombre réel x correspondra un point déterminé A de cette droite, tel que le segment $\overline{OA}$ est mesuré par le nombre x. Réciproquement, à chaque point A de l'axe correspondra un nombre réel x bien déterminé, mesurant le segment $\overline{OA}$. Ce nombre x s'appelle l'abscisse du point A; s'il faut indiquer que le point A possède une abscisse x, on écrit $A(x)$.

Si le nombre x varie, le point A qui le représente se déplace le long de l'axe. La notion d'intervalle, établie ci-dessus, devient tout à fait évidente dans le cas d'une telle *représentation graphique du nombre x*, à savoir: si x varie dans l'intervalle $a \leqslant x \leqslant b$, le point correspondant sur l'axe $X'X$ se trouvera sur le segment dont les extrémités ont pour abscisses a et b.

Si on se limitait aux seuls nombres rationnels, aucune abscisse ne correspondrait au point A si le segment $\overline{OA}$ était incommensurable avec l'unité employée, autrement dit, les nombres rationnels seuls n'occupent pas tous les points de la droite. Pour y remédier, il faut faire appel aux nombres irrationnels. Dans la représentation graphique d'une variable on se base sur la condition que nous venons de poser : à tout point de l'axe $X'X$ correspond un nombre réel déterminé et, réciproquement, à tout nombre réel correspond un point déterminé de l'axe $X'X$.

Prenons sur l'axe $X'X$ 2 points : le point A_1 d'abscisse x_1 et le point A_2 d'abscisse x_2. Au segment $\overline{OA_1}$ correspondra le nombre x_1, et au segment $\overline{OA_2}$, le nombre x_2. Il n'est pas difficile de montrer, en

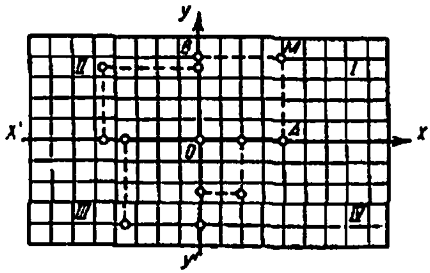

Fig. 3

examinant les positions possibles des points A_1 et A_2 qu'au segment $\overline{A_1A_2}$ correspondra le nombre $(x_2 - x_1)$ et que la longueur de ce segment sera égale à la valeur absolue de la différence $(x_2 - x_1)$:

$$|\overline{A_1A_2}| = |x_2 - x_1|.$$

Si par exemple, $x_1 = -3$ et $x_2 = 7$, le point A_1 se trouve à gauche de O, à une distance égale à 3, et le point A_2 se trouve à droite de O à une distance égale à 7. Le segment $\overline{A_1A_2}$ aura pour longueur 10, et sera dirigé comme l'axe $X'X$, c'est-à-dire qu'il lui correspondra le nombre $10 = 7 - (-3) = x_2 - x_1$. Nous proposons au lecteur d'analyser les autres positions possibles des points A_1 et A_2.

I-1-10. Les coordonnées. On a vu ci-dessus que la position d'un point sur l'axe $X'X$ peut être définie par un nombre réel x. Montrons maintenant un procédé analogue pour définir la position d'un point dans un plan.

Menons sur le plan deux axes perpendiculaires $X'X$ et $Y'Y$ et prenons comme origine sur chacun d'eux leur point d'intersection O (fig. 3). Les directions positives sont indiquées sur les axes par des flèches. Aux points de l'axe $X'X$ correspondent des nombres réels que l'on note par la lettre x. Aux points de l'axe $Y'Y$ correspondent de même des nombres réels que l'on notera par la lettre y. Soient des valeurs déterminées x et y, on a des points déterminés A et B sur les axes $X'X$ et $Y'Y$; connaissant les points A et B, on peut construire le point M, intersection de droites parallèles aux axes et menées par les points A et B.

A chaque couple de valeurs de grandeurs x, y correspond une position entièrement déterminée du point M sur le plan.

Réciproquement, à chaque point M du plan correspond un couple de valeurs entièrement déterminé des grandeurs x, y, correspondant aux points d'intersection A, B des droites menées par le point M parallèlement aux axes, avec les axes $X'X$ et $Y'Y$.

Etant données les directions des axes $X'X$ et $Y'Y$ indiquées sur la fig. 3, il faut considérer x positif si le point A se trouve à droite, et négatif s'il se trouve à gauche du point O; y sera positif si le point B se trouve au-dessus de O, négatif s'il se trouve au-dessous.

Les grandeurs x, y, déterminant la position du point M sur le plan et déterminées à leur tour par la position du point M, sont appelées coordonnées du point M. On appelle les axes $X'X$ et $Y'Y$ axes des coordonnées; le plan du dessin, plan des coordonnées XOY; le point O, origine des coordonnées.

La grandeur x s'appelle l'abscisse, et y l'ordonnée du point M. Pour indiquer un point M par ses coordonnées, on écrit:

$$M(x, y).$$

Le procédé de représentation est dit procédé des coordonnées orthogonales.

On peut représenter les signes des coordonnées du point M suivant ses différentes positions, dans les différents quadrants définis par les axes de coordonnées (I-IV) (fig. 3) au moyen de la table suivante:

M	I	II	III	IV
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

Il est évident que les coordonnées x, y du point M sont égales à la distance du point M aux axes des coordonnées, avec les signes correspondants.

Notons que les points de l'axe $X'X$ ont les coordonnées $(x, 0)$, et les points de l'axe $Y'Y$, les coordonnées $(0, y)$. L'origine des coordonnées O a les coordonnées $(0, 0)$.

I-1-11. Graphique et équation d'une courbe. Revenons aux grandeurs x et y que représente le point M. Admettons que x et y sont liés par une dépendance fonctionnelle; cela signifie que, en faisant varier à notre gré x (ou y), nous obtiendrons chaque fois une valeur correspondante de y (ou x). A chaque couple de valeurs de x ou y correspond une position déterminée du point M sur le plan XOY; si ces valeurs varient, le point M se déplacera sur le plan et décrira par son mouvement une certaine courbe (fig. 4) qui s'appelle *re-*

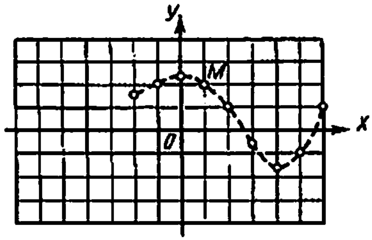

Fig. 4

présentation graphique (ou, plus simplement, *graphique* ou *diagramme*) *de la dépendance fonctionnelle considérée.*

Si la relation est posée *analytiquement* par une équation de la forme explicite:

$$y = f(x)$$

ou de la forme implicite:

$$F(x, y) = 0,$$

l'équation s'appelle *équation de la courbe*, et la courbe, *graphique de l'équation* ou *graphique de la fonction*. La courbe et son équation sont les différents moyens d'exprimer une seule et même relation fonctionnelle, c'est-à-dire que *tous les points dont les coordonnées vérifient l'équation de la courbe se trouvent sur cette courbe, et, réciproquement, les coordonnées de tous les points se trouvant sur la courbe, satisfont à son équation.*

Si l'on donne l'équation de la courbe, on peut, en utilisant une feuille de papier quadrillé, construire de façon plus ou moins précise la courbe elle-même (on peut, plus exactement, construire *le nombre que l'on veut de points* se trouvant sur cette courbe); plus on construira de points, plus précise en sera la forme de courbe; un tel procédé s'appelle *construction par points de la courbe.*

Le choix de *l'échelle* a une importance primordiale dans la construction des courbes; pour cela on peut choisir *différentes* échelles quand on construit x et y. Quand on a des échelles, identiques pour

x et y, le plan est assimilé à la feuille de papier quadrillé *en carrés*; quand on a différentes échelles, le plan est quadrillé *en rectangles*. Dans la suite on supposera que les échelles pour x et y sont identiques sauf réserve spéciale.

On recommande ici au lecteur de construire à l'aide de points quelques graphiques de fonctions très simples, en changeant les échelles pour x et y.

Les notions, exposées plus haut, de coordonnées du point M, d'équation de la courbe et de graphique de l'équation établissent un lien étroit entre l'algèbre et la géométrie. D'un côté, nous avons la possibilité de représenter et d'étudier des relations analytiques par un moyen géométrique direct, de l'autre, il s'avère possible de ramener la résolution de questions géométriques à des opérations purement algébriques, ce qui est le but de *la géométrie analytique*.

Etant donné leur importance, nous formulerons une fois encore les principes de base de la géométrie analytique. Si l'on trace dans le plan deux axes de coordonnées, *à chaque point du plan correspondra un couple de nombres réels, abscisse et ordonnée de ce point*; *et réciproquement, à chaque couple de nombres correspondra un point déterminé du plan, ayant le premier nombre pour abscisse, le deuxième pour ordonnée. A la courbe du plan correspond une relation fonctionnelle entre x et y ou, ce qui revient du même, une équation contenant les variables x et y, qui est vérifiée si et seulement si à la place de x et y on met les coordonnées d'un quelconque des points de la courbe. Réciproquement, à l'équation contenant les deux variables x et y correspond une courbe, composée par les points du plan, dont les coordonnées, substituées à x et y dans l'équation, vérifient l'équation.*

Nous considérerons par la suite les principaux exemples des graphiques de fonctions, et maintenant nous exposerons certaines considérations d'ordre général. Soit donnée une équation explicite: $y = f(x)$, où $f(x)$ est *une fonction univoque* (ou uniforme) définie, par exemple, sur l'intervalle (a, b), c'est-à-dire une fonction telle qu'à chaque x de (a, b) correspond une valeur bien déterminée de $f(x)$; le graphique de la dépendance fonctionnelle donnée se compose des points (x, y) obtenus de la manière indiquée. La perpendiculaire à l'axe OX menée par un point arbitraire de cet axe, dont l'abscisse appartient à (a, b), rencontrera le graphique en un seul point ($f(x)$ est univoque). Dans le cas de l'équation $F(x, y) = 0$ sous forme implicite tout se complique. Il peut arriver qu'aucun point ne correspond à l'équation. Cela a lieu par exemple pour l'équation $x^2 + y^2 + 3 = 0$, car pour toutes valeurs réelles de x et y le premier membre est positif. Il est évident qu'à l'équation $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 0$ correspond un seul point $(3, 5)$.

La construction de la courbe s'effectue automatiquement dans les instruments enregistreurs; la variable x représente en général le temps, et y la grandeur dont la variation au cours du temps nous intéresse, par exemple la pression barométrique (barographe), la température (thermographe). L'indicateur qui enregistre la relation entre le volume et la pression du gaz, contenu dans le cylindre d'un moteur à vapeur ou d'un moteur à gaz, a une grande importance.

I-1-12. Fonction linéaire. La plus simple des fonctions, qui possède en même temps des applications très importantes, est le binôme du premier degré.

$$y = ax + b, \tag{2}$$

où a et b sont des nombres donnés. Elle s'appelle *fonction linéaire.* Nous verrons que la courbe de cette fonction est une droite. Etudions d'abord le cas où le nombre b est égal à zéro. Dans ce cas, la fonction (2) aura la forme:

$$y = ax. \tag{3}$$

Elle exprime le fait que la variable y est directement proportionnelle à la variable x; le nombre a s'appelle coefficient de proportionnalité.

Les valeurs

$$x = 0, \quad y = 0$$

satisfont à l'équation (3), c'est-à-dire que la courbe correspondant à cette équation passe par l'origine des coordonnées O.

Si nous regardons le plan (fig. 5) nous voyons que l'équation (3) exprime la propriété géométrique suivante de la courbe considérée: quel que soit le point M que nous avons choisi sur la courbe, le rapport de l'ordonnée $y = \overline{NM}$ de ce point et de son abscisse $x = \overline{ON}$ est une grandeur constante a. Etant donné que, d'autre part, ce rapport est égal à la tangente de l'angle α formé par le segment $\overline{OM}$ et l'axe OX, il est évident que le lieu géométrique des points M est *une droite qui passe par l'origine des coordonnées O* en faisant un angle α (ou $\pi + \alpha$) avec l'axe OX. On mesure α à partir de l'axe OX, jusqu'à la droite, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

En même temps on découvre une signification géométrique importante du coefficient a dans l'équation (3) : *a est la tangente de l'angle α que forme la droite, correspondant à cette équation, avec l'axe OX*, c'est pourquoi a s'appelle *coefficient angulaire de la droite.* Remarquons que si a est un nombre négatif, l'angle α sera obtus et la droite correspondante sera située comme l'indique la fig. 6.

Venons-en maintenant au cas général d'une fonction linéaire, et plus spécialement à l'équation (2). Les ordonnées y de la courbe de cette équation se distinguent des ordonnées correspondantes de la courbe de l'équation (3) par le terme constant b. Ainsi, on obtient la courbe de l'équation (2) si on déplace la courbe de l'équation (3), représentée sur la fig. 5 (lorsque $a > 0$) parallèlement à l'axe OY du segment b: vers le haut, si b est positif, et vers le bas, si b est négatif. Ainsi on obtient une droite parallèle à la droite initiale et découpant sur l'axe OY le segment $\overline{OM}_0 = b$ (fig. 7).

Ainsi, *la courbe représentative de la fonction* (2) *est une ligne droite dont le coefficient a est égal à la tangente de l'angle formé par cette*

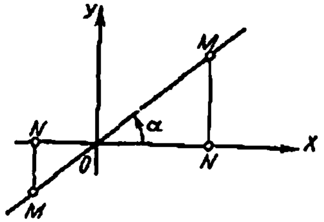

Fig. 5

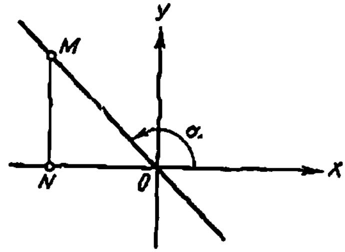

Fig. 6

droite et l'axe OX, et le terme libre b est égal au segment découpé par cette droite sur l'axe OY, à partir de O.

On appelle parfois le coefficient a simplement *pente* de la droite, et b *ordonnée à l'origine* de cette droite. Réciproquement, si l'on a une droite quelconque L, non parallèle à l'axe OY, il n'est pas difficile d'écrire l'équation de la forme (2) correspondant à cette droite. D'après ce qui précède, il suffit de prendre le coefficient a égal à la tangente de l'angle de cette droite avec l'axe OX, et b égal au segment découpé par cette droite sur l'axe OY.

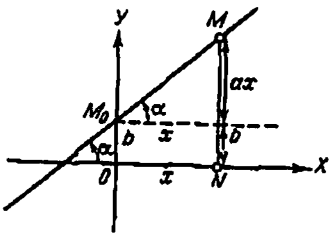

Fig. 7

Notons un cas particulier qui présente une certaine originalité. Si $a = 0$, l'équation (2) nous donne, quel que soit x:

$$y = b, \tag{2$_1$}$$

c'est-à-dire qu'on obtient une « fonction » de x telle que, pour toutes les valeurs de x, elle conserve une seule et même valeur de b. Il n'est pas difficile de constater que la courbe de l'équation (2_1) sera une droite parallèle à l'axe OX et se trouvant à une distance $|b|$ de cet axe (vers le haut si $b > 0$ et vers le bas si $b < 0$). Pour ne pas faire de réserves spéciales, nous dirons que l'équation (2_1) définit également une fonction de x.

I-1-13. Accroissement. Propriété fondamentale de la fonction linéaire. Etablissons une nouvelle notion importante que l'on rencontre souvent dans l'étude d'une relation fonctionnelle.

On appelle accroissement d'une grandeur variable indépendante x, lorsqu'on passe de la valeur initiale x_1 à la valeur finale x_2, la différence entre les valeurs finale et initiale: $x_2 - x_1$. On appelle accroissement correspondant de la fonction $y = f(x)$ la différence entre les valeurs finale et initiale de la fonction:

$$y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1).$$

On note souvent ces accroissements ainsi:

$$\Delta x = x_2 - x_1, \quad \Delta y = y_2 - y_1.$$

Remarquons que l'accroissement peut être une grandeur aussi bien positive que négative, si bien que la grandeur ayant reçu un « accroissement » ne doit pas obligatoirement augmenter.

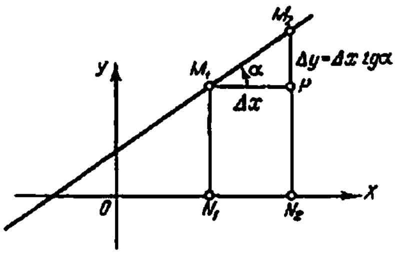

Fig. 8

Notons qu'il faut considérer la notation Δx comme une entité indissoluble pour définir l'accroissement de x.

Examinons le cas de la fonction linéaire:

$$y_2 = ax_2 + b \quad \text{et} \quad y_1 = ax_1 + b.$$

En retranchant terme à terme, on obtient:

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \tag{4}$$

ou

$$\Delta y = a\Delta x.$$

Cette égalité montre que *la fonction linéaire $y = ax + b$ est telle que l'accroissement de la fonction $(y_2 - y_1)$ est proportionnel à l'accroissement de la variable indépendante $(x_2 - x_1)$, et que le coefficient de proportionnalité est égal à a, c'est-à-dire au coefficient angulaire, ou à la pente de la courbe représentative de la fonction.*

Si nous examinons la courbe elle-même (fig. 8), à l'accroissement de la variable indépendante correspond le segment $\overline{M_1P} = \Delta x = x_2 - x_1$ et à l'accroissement de la fonction correspond le segment $\overline{PM_2} = \Delta y = y_2 - y_1$, et la formule (4) résulte directement de l'examen du triangle M_1PM_2.

Supposons maintenant qu'une fonction possède la propriété que nous avons indiquée ci-dessus, d'avoir un accroissement de la fonction proportionnel à l'accroissement de la variable indépendante, propriété exprimée par la formule (4). De cette formule il résulte que

$$y_2 = a(x_2 - x_1) + y_1$$

ou

$$y_2 = ax_2 + (y_1 - ax_1).$$

Nous considérons que les valeurs initiales des variables x_1 et y_1 sont définies et nous noterons la différence $(y_1 - ax_1)$ par la lettre b :

$$y_2 = ax_2 + b.$$

Etant donné que nous pouvons prendre n'importe quelles valeurs finales des variables x_2 et y_2, nous pouvons à la place des lettres x_2 et y_2 écrire simplement les lettres x et y, et l'égalité précédente se transforme en :

$$y = ax + b,$$

c'est-à-dire que *toute fonction dont l'accroissement est proportionnel à celui de la variable est une fonction linéaire $y = ax + b$, où a est le coefficient de proportionnalité.*

Ainsi, la fonction linéaire et sa courbe, la ligne droite, peuvent représenter toute loi de la nature dans laquelle il y a proportionnalité entre les accroissements des grandeurs examinées, ce qui arrive très souvent.

I-1-14. Graphique du mouvement uniforme. L'application la plus importante, qui donne une interprétation *mécanique* de l'équation de la droite et de ses coefficients, est *le graphique du mouvement uniforme.* Si un point P se déplace suivant une certaine trajectoire, sa position est définie par la distance, évaluée sur la trajectoire d'un côté ou de l'autre, d'un point donné A de cette trajectoire jusqu'au point P. Cette distance, c'est-à-dire l'arc AP, est le chemin parcouru et on le note par la lettre s, s pouvant être positif ou négatif : on considère les valeurs de s positives d'un côté du point origine A, et négatives de l'autre côté.

Le chemin parcouru s est une fonction du temps t ; en prenant t comme variable indépendante, on peut construire *la courbe du mouvement*, c'est-à-dire que la courbe de la relation fonctionnelle (fig. 9)

$$s = f(t)$$

ne doit pas être confondue avec *la trajectoire* elle-même.

Le mouvement est *uniforme* si l'espace, parcouru par le point dans un intervalle de temps quelconque, est proportionnel à cet intervalle, autrement dit, si le rapport

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

de l'espace parcouru dans l'intervalle de temps de t_1 à t_2, à cet intervalle d temps, est une grandeur constante que l'on appelle *vitesse* et que l'on note v

D'après ce qui a été dit plus haut, *l'équation du mouvement uniforme est du type*:

$$s = vt + s_0 ;$$

le diagramme lui-même est une droite dont le coefficient angulaire est égal à la vitesse du mouvement; *l'ordonnée initiale* s_0 *est la valeur de* s *pour* $t = 0$.

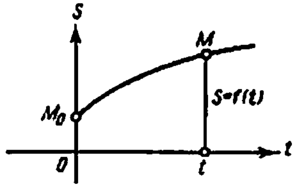

Fig. 9

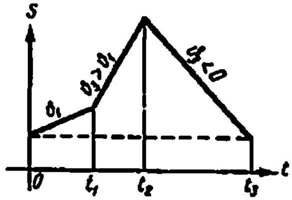

Fig. 10

Sur la fig. 10 on a représenté le diagramme du mouvement du point P, qui s'est déplacé avec une vitesse constante v_1 dans la direction positive à partir du moment 0 jusqu'au moment t_1 (l'angle avec l'axe t est aigu), ensuite à une vitesse toujours constante mais plus grande, v_2, dans la même direction (l'angle est

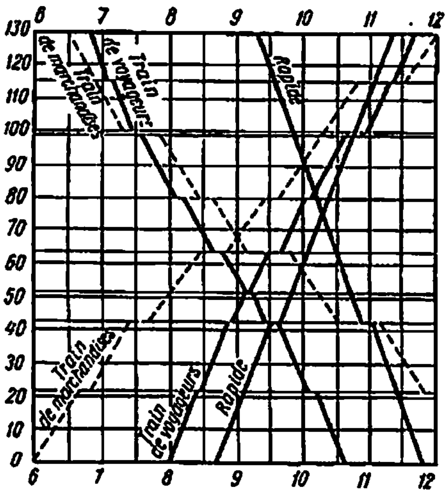

Fig. 11

aigu mais plus ouvert) jusqu'au moment t_2, et ensuite à une vitesse v_3 constante mais négative (dans la direction opposée, l'angle étant obtus) jusqu'à sa position initiale. Lorsqu'on a de nombreux points qui se déplacent le long d'une seule et même trajectoire (par exemple quand on établit l'horaire des trains ou des tramways) *un procédé graphique* de ce genre est pratique pour définir les rencontres des points en mouvement, et en général, pour représenter tout mouvement (fig. 11).

1-1-15. Formules empiriques. La simplicité de construction de la droite et de la loi qui l'exprime, loi de proportionnalité de l'accroissement de la fonction et de la variable indépendante, fait du graphique un procédé tout à fait commode pour trouver *les formules empiriques*, c'est-à-dire les formules qui découlent directement des données de l'expérience, sans étude théorique spéciale.

On représente graphiquement les données obtenues à partir des expériences, sur une feuille de papier millimétré; on trouvera une série de points et si l'on

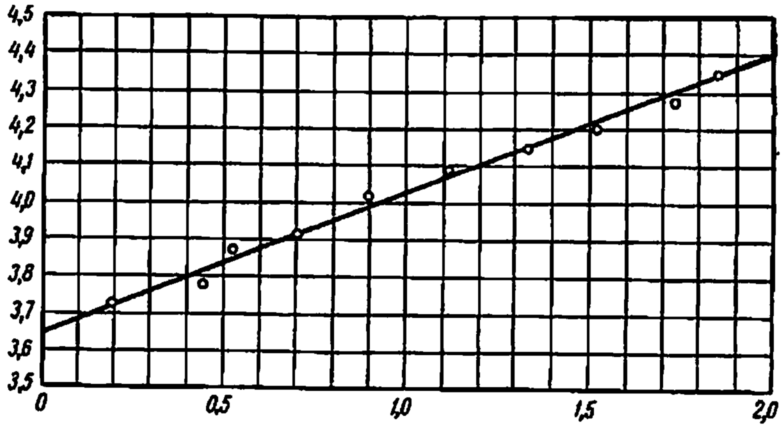

Fig. 12

désire obtenir une formule empirique approximative pour la relation fonctionnelle étudiée, sous forme de fonction *linéaire*, il reste à mener *la droite* qui, si elle ne passe pas par tous les points construits (ce qui n'est, bien sûr, presque jamais possible), passe du moins e n t r e ces points de telle sorte qu'un nombre identique de points se trouve de chaque côté de la droite et qu'ils se trouvent tous assez proches d'elle. Dans les calculs d'erreurs et dans les opérations de contrôle, on étudie des moyens plus précis pour construire la droite indiquée et pour évaluer l'erreur commise en faisant une représentation approximative. Mais dans les recherches moins précises auxquelles on a affaire dans la technique, la construction d'une droite empirique se fait tout simplement à l'aide de la « ficelle tendue », dont le nom indique bien en quoi cela consiste. Ayant construit la droite à l'aide d'une mesure directe, définissons son équation:

$$y = ax + b,$$

qui donne la formule empirique cherchée. Quand on a obtenu cette formule, il ne faut pas perdre de vue que les échelles sont très souvent différentes pour les grandeurs x et y, c'est-à-dire qu'*une seule et même longueur, reportée sur les axes* OX *et* OY, *représente des nombres différents*. Dans ce cas, le coefficient angulaire a ne sera pas égal à la tangente de l'angle formé par la droite et l'axe OX, mais s'en différenciera par un facteur, égal à la valeur numérique du rapport entre les unités de longueur, prises pour représenter les grandeurs x et y.

Exemple (fig. 12).

x	0,212	0,451	0,530	0,708	0,901	1,120	1,341	1,520	1,738	1,871
y	3,721	3,779	3,870	3,910	4,009	4,089	4,150	4,201	4,269	4,350

Réponse:

$$y \approx 0.375x + 3.65$$

(Ici et par la suite, nous représenterons par le signe $\approx$ *une égalité approximative.*)

I-1-16. Parabole du second degré. La fonction linéaire

$$y = ax + b$$

est un cas particulier *de fonction entière du n^e degré ou de polynôme du n^e degré*:

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

dont le cas le plus simple, après la fonction linéaire, est *le trinôme du second degré* ($n = 2$):

$$y = ax^2 + bx + c\,;$$

la courbe de cette fonction est *la parabole du second degré* ou plus simplement *la parabole.*

Pour l'instant, on étudiera le cas le plus simple de parabole:

$$y = ax^2. \tag{5}$$

Cette courbe peut être construite sans peine point par point. Sur la fig. 13 sont représentées les courbes $y = x^2$ ($a = 1$) et $y = -x^2$ ($a = -1$). La courbe correspondant à l'équation (5) est située entièrement au-dessus de l'axe OX, lorsque $a > 0$ et au-dessous de celui-ci lorsque $a < 0$. L'ordonnée de cette courbe croît en valeur absolue, lorsque x croît en valeur absolue, et cela d'autant plus rapidement qu'est plus grande la valeur absolue a. Sur la fig. 14 est représentée une série de courbes de la fonction (5) pour différentes valeurs de a, qui sont indiquées sur les paraboles correspondantes.

L'équation (5) contient seulement x^2, et c'est pourquoi elle ne varie pas lorsque x devient $(-x)$, c'est-à-dire que si un point (x, y) est situé sur la parabole (5), le point $(-x, y)$ est aussi situé sur cette même parabole. Il apparaît que les deux points, (x, y) et $(-x, y)$, sont symétriques par rapport à l'axe OY. Ainsi, si l'on fait tourner la partie droite du plan de 180° autour de l'axe OY et si on la fait coïncider avec la partie gauche, la portion de parabole située à droite de l'axe OY coïncidera avec la portion de parabole située à gauche

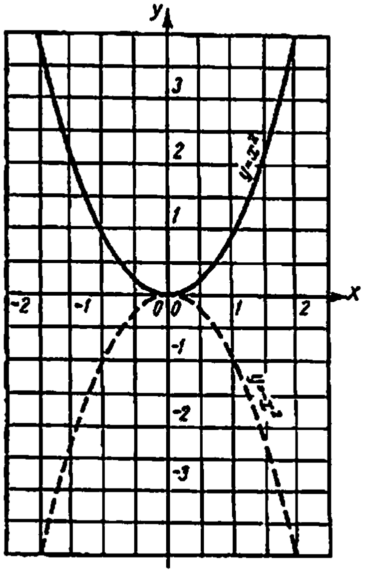

Fig. 13

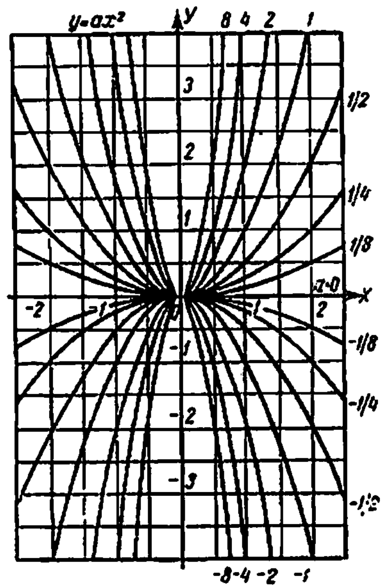

Fig. 14

de cet axe. Autrement dit, l'axe OY *est l'axe de symétrie de la parabole* (5).

L'origine des coordonnées se trouve être le point le plus bas de la courbe pour $a > 0$, et le plus élevé pour $a < 0$, et s'appelle *sommet de la parabole.*

Le coefficient a est entièrement défini si l'on donne un point M_0 (x_0, y_0) de la parabole, distinct de son sommet, étant donné qu'on a:

$$y_0 = ax_0^2, \quad a = \frac{y_0}{x_0^2},$$

à la suite de quoi l'équation de la parabole (5) aura la forme:

$$y = y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2. \tag{6}$$

Il existe un procédé *graphique* très simple pour construire un nombre quelconque n de points de la parabole à partir du sommet, de l'axe de symétrie et d'un quelconque de ses points M_0, distinct du sommet. Divisons l'abscisse et l'ordonnée d'un point donné M_0 (x_0, y_0) en n parties égales (fig. 15) et menons des rayons par l'origine des coordonnées vers les points qui partagent l'ordonnée. L'intersection de ces rayons avec les droites, menées par les points qui partagent l'abscisse parallèlement à l'axe OY, donne les points de la parabole.

En effet, par construction, on a (fig. 15):

$$x_1 = x_0 \cdot \frac{n-1}{n}, \quad y' = y_0 \cdot \frac{n-1}{n},$$

$$y_1 = y' \cdot \frac{n-1}{n} = y_0 \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 = y_0 \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2,$$

c'est-à-dire en vertu de (6), le point M_1 (x_1, y_1) est situé également sur la parabole. La démonstration est identique pour les autres points.

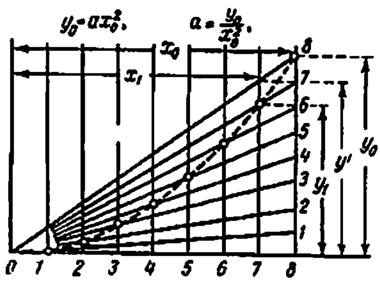

Fig. 15

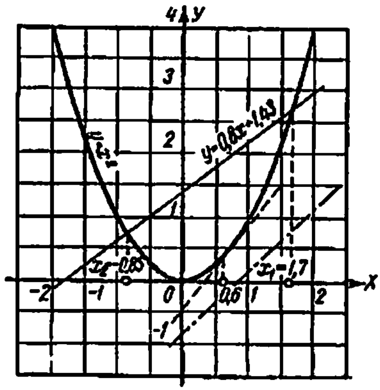

Fig. 16

Si l'on a deux fonctions:

$$y = f_1(x) \quad \text{et} \quad y = f_2(x)$$

et les courbes correspondantes, les coordonnées des points d'intersection de ces courbes vérifient les deux équations, c'est-à-dire que les abscisses de ces points d'intersection sont racines de l'équation:

$$f_1(x) = f_2(x).$$

Il est facile d'utiliser cette démonstration pour résoudre de façon approchée une équation du second degré. Si l'on construit sur une feuille de papier millimétré, le plus soigneusement possible, la parabole

$$y = x^2, \qquad (6_1)$$

on peut considérer les racines de l'équation du second degré:

$$x^2 = px + q, \qquad (7)$$

comme les abscisses des points d'intersection de la parabole (6_1) et de la droite $y = px + q$, si bien que l'on a la solution de l'équation (7) en trouvant ces points d'intersection. Sur la fig. 16, on a représenté 3 cas: lorsqu'on a 2 points, lorsqu'il y en a un seul (la droite est tangente à la parabole) et lorsqu'il n'y en a aucun.

1-1-17. Parabole du troisième degré. Le graphique du polynôme du troisième degré

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

est appelé *parabole du troisième degré*. On considérera cette courbe dans le cas le plus simple

$$y = ax^3. \tag{8}$$

Pour a positif, les signes de x et y sont identiques et pour a négatif, ils sont opposés. Dans le premier cas, la courbe est située dans les 1er et 3e quadrants et dans le second cas dans les 2e et 4e quadrants. Sur la fig. 17 on a représenté l'allure de cette courbe pour différentes valeurs de a.

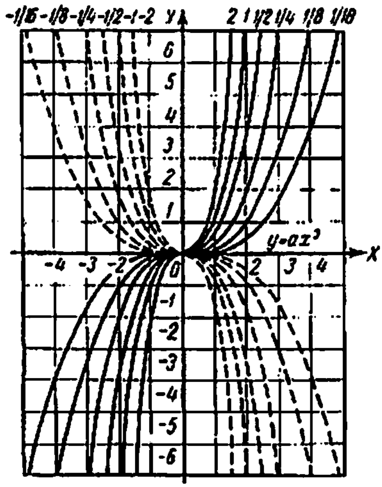

Fig. 17

Si l'on change simultanément x et y en $(-x)$ et $(-y)$, les deux membres de l'équation (8) changent de signe, et l'équation ne change pas de sens, c'est-à-dire que si le point (x, y) se trouve sur la courbe (8), le point $(-x, -y)$ se trouve aussi sur cette courbe. Il apparaît que les points (x, y) et $(-x, -y)$ sont symétriques par rapport à l'origine O, c'est-à-dire que le segment qui les relie est divisé en deux par l'origine O. Il s'ensuit que toute corde de la courbe (8), passant par l'origine des coordonnées O, est coupée en deux parties égales par l'origine. On dit encore que *l'origine des coordonnées O est le centre de la courbe* (8).

Remarquons encore un cas particulier de la parabole du 3e degré:

$$y = ax^3 + cx. \tag{9}$$

Le second membre de cette équation est la somme de deux termes, et par suite, pour construire cette courbe, il suffit de mener la droite

$$y = cx \tag{10}$$

et de prendre sur le graphique la somme des ordonnées correspondantes des courbes (8) et (10). Les différents aspects que peut prendre la courbe (9) (lorsque $a = 1$, et que c a différentes valeurs) sont représentés sur la fig. 18.

Si l'on construit la courbe:

$$y = x^3,$$

on obtiendra *un procédé graphique* commode pour obtenir (avec une faible précision) *les racines de l'équation du 3e degré*

$$x^3 = px + q,$$

étant donné que les racines de cette équation ne sont rien d'autre que les abscisses des points d'intersection de la courbe

$$y = x^3$$

avec la droite

$$y = px + q.$$

La fig. 19 montre qu'il peut y avoir un, deux ou trois points d'intersection, mais un au moins de façon certaine, c'est-à-dire que *l'équation du 3e degré a, au moins, une racine réelle.* On démontrera cela rigoureusement par la suite.

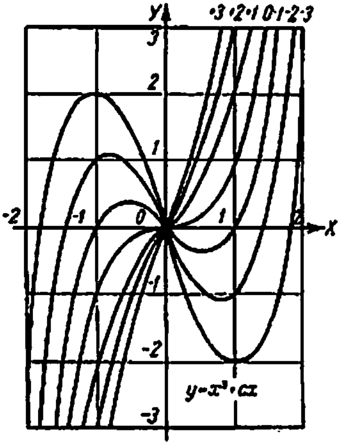

Fig. 18

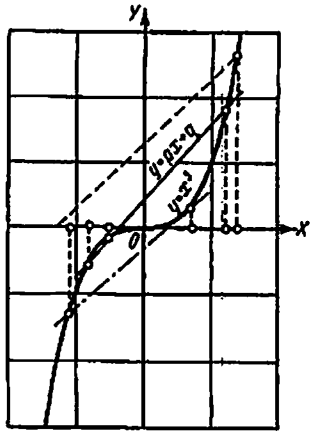

Fig. 19

I-1-18. Loi de proportionnalité inverse. La relation fonctionnelle

$$y = \frac{m}{x} \tag{11}$$

exprime la loi de proportionnalité inverse entre les variables x et y. Lorsque x croît un certain nombre de fois, y diminue un nombre égal de fois. Lorsque $m > 0$, les variables x et y ont un même signe, c'est-à-dire que la courbe est située dans le premier et le troisième quadrant, et lorsque $m < 0$, elle est dans le deuxième et le quatrième quadrant. Lorsque x est près de zéro, la fraction $\frac{m}{x}$ est grande en valeur absolue. Réciproquement, pour les grandes valeurs de x, la fraction $\frac{m}{x}$ est petite en valeur absolue.

La construction directe de cette courbe point par point nous conduit à la fig. 20, sur laquelle sont représentées les courbes (11) pour les différentes valeurs de m; les courbes correspondant au cas où $m > 0$, sont tracées en ligne continue; dans le cas où $m < 0$,

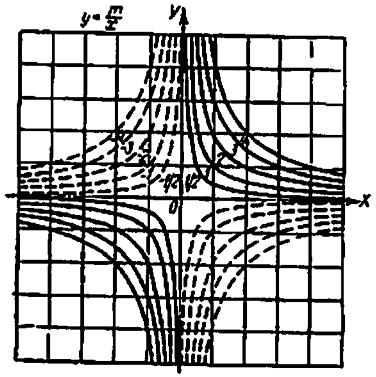

Fig. 20

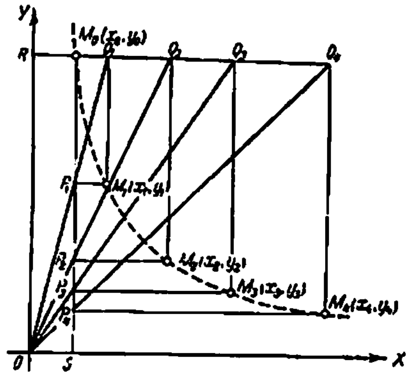

Fig. 21

elles sont tracées en pointillé, et pour chaque courbe on indique la valeur correspondante de m. On voit que chacune des courbes construites, qui s'appellent *hyperboles équilatères*, possède *des branches infinies* qui tendent vers les axes de coordonnées OX et OY lorsque l'abscisse x ou l'ordonnée y du point sur la branche considérée croît indéfiniment. Ces droites sont *les asymptotes* de l'hyperbole.

Le coefficient m dans l'équation (11) est défini, si l'on donne un point quelconque $M_0(x_0, y_0)$ de la courbe étudiée, vu que

$$x_0 y_0 = m;$$

et l'équation (11) peut être mise sous la forme:

$$xy = x_0 y_0, \tag{12}$$

ou

$$\frac{y}{x_0} = \frac{y_0}{x}.$$

De là le *procédé graphique* pour construire un nombre quelconque de points d'une hyperbole équilatère, si l'on donne ses asymptotes et un quelconque de ses points $M_0(x_0, y_0)$. Prenons les asymptotes comme axes de coordonnées, menons par l'origine des coordonnées des rayons quelconques OP_1, OP_2, ... et marquons les points d'intersection de ces rayons avec les droites $y = y_0$ et $x = x_0$.

Menons par les points (un point sur deux) situés sur un même rayon des droites parallèles aux axes des coordonnées; nous obtiendrons à l'intersection de ces droites des points de l'hyperbole (fig. 21). Cela résulte de la similitude des triangles ORQ_1 et OSP_1:

$$\frac{\overline{SP_1}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{RQ_1}} \quad \text{ou} \quad \frac{y_1}{x_0} = \frac{y_0}{x_1},$$

c'est-à-dire que le point M_1 (x_1, y_1) se trouve sur la courbe (12).

I-1-19. Fonction $y = ax^n$. Les fonctions $y = ax$, $y = ax^2$, $y = ax^3$ et $y = \frac{m}{x}$, que nous avons étudiées ci-dessus, sont des cas particuliers de la fonction de la forme:

$$y = ax^n, \tag{13}$$

où a et n sont des constantes quelconques. La fonction (13) est généralement appelée *fonction puissance*. Pour construire la courbe,

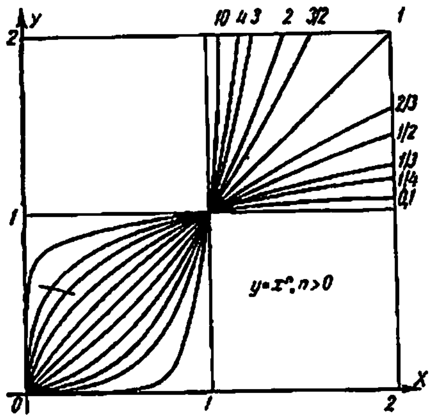

Fig. 22

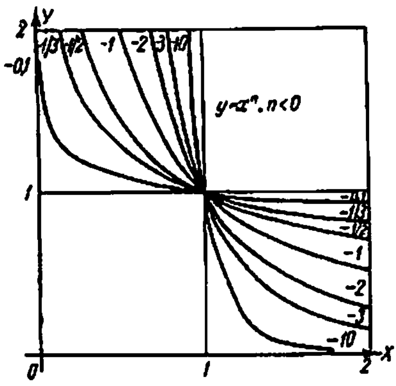

Fig. 23

on se limitera aux valeurs positives de x et au cas où $a = 1$. Sur les fig. 22 et 23 on a représenté les courbes correspondant aux différentes valeurs de n. Pour toutes les valeurs de n, l'équation $y = x^n$ donne $y = 1$ pour $x = 1$, c'est-à-dire que toutes les courbes passent par le point (1, 1). Pour les valeurs positives de n, quand $x > 1$, les courbes croissent d'autant plus que la valeur de n est plus grande (fig. 22). Pour les valeurs négatives de n (fig. 23) la fonction $y = x^n$ équivaut à une fraction. Par exemple, à la place de $y = x^{-2}$, on peut écrire $y = \frac{1}{x^2}$. Dans ces cas, lorsque x croît, les valeurs de y décroissent.

Remarquons que lorsque n est fractionnaire et possède un dénominateur pair on considère la valeur du radical comme positive; par exemple pour $x > 0$, on considère $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ comme positif.

Les deux constantes a et n qui figurent dans l'équation (13), sont définies si l'on donne deux points de la courbe $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ de sorte que l'on a

$$y_1 = ax_1^n, \quad y_2 = ax_2^n; \tag{14}$$

on divisant une équation par l'autre, on élimine a:

$$\frac{y_1}{y_2} = \left(\frac{x_1}{x^2}\right)^n,$$

ensuite, en prenant le logarithme, on trouve n

$$n = \frac{\ln y_1 - \ln y_2}{\ln x_1 - \ln x_2};$$

ayant obtenu n, on obtiendra a de n'importe laquelle des équations (14).

Le procédé graphique pour construire un nombre quelconque de points de la courbe (13) à partir de ses points $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ est représenté

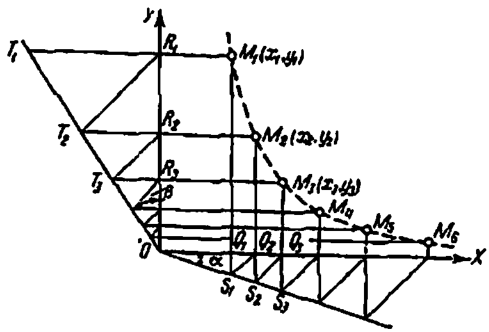

Fig. 24

sur la fig. 24. Menons par le point O deux rayons quelconques faisant des angles α et β avec l'axe OX et avec l'axe OY; par des points donnés M_1 et M_2, menons les perpendiculaires aux axes de coordonnées jusqu'à leur intersection avec les rayons aux points S_1, S_2; T_1, T_2 et avec les axes aux points Q_1, Q_2; R_1, R_2. Par le point R_2, menons R_2T_3 parallèlement à R_1T_2 et par le point S_2 menons S_2Q_3 parallèlement à S_1Q_2. En menant enfin par T_3 et Q_3 les droites parallèles respectivement aux axes OX et OY, on obtiendra à leur intersection le point $M_3(x_3, y_3)$ de la courbe. Vu la similitude des triangles, on obtient en effet:

$$\frac{\overline{OQ_3}}{\overline{OQ_2}}=\frac{\overline{OS_2}}{\overline{OS_1}}, \qquad \frac{\overline{OS_2}}{\overline{OS_1}}=\frac{\overline{OQ_2}}{\overline{OQ_1}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\overline{OQ_3}}{\overline{OQ_2}}=\frac{\overline{OQ_2}}{\overline{OQ_1}}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{x_3}{x_2}=\frac{x_2}{x_1},$$

d'où

$$x_3=\frac{x_2^2}{x_1},$$

et on peut de même démontrer que:

$$y_3=\frac{y_2^2}{y_1}.$$

On tire de l'équation (14):

$$y_3=\frac{(ax_2^n)^2}{ax_1^n}=a\left(\frac{x_2^2}{x_1}\right)^n=ax_3^n,$$

c'est-à-dire que le point (x_3, y_3) est bien situé sur la courbe (13), ce qu'il fallait démontrer.

I-1-20. Fonctions inverses. Introduisons, pour étudier les fonctions élémentaires que nous examinerons, une nouvelle notion: la notion de fonction inverse. Comme nous l'avons déjà rappelé [I-1-5], pour étudier la dépendance fonctionnelle entre les variables x et y, nous avons la possibilité de choisir la variable indépendante, et nous le faisons selon des considérations d'ordre purement pratique. Soit une fonction $y = f(x)$, où x joue le rôle d'une variable indépendante.

La fonction définie par la même relation fonctionnelle $y = f(x)$, quand on considère y comme variable indépendante et x comme variable dépendante $x=\varphi(y)$, est appelée fonction inverse de la fonction donnée $f(x)$, alors que cette dernière est souvent appelée fonction directe.

Comme les notations pour les variables ne jouent pas de rôle important, en représentant dans les deux cas la variable indépendante par la lettre x, on peut dire que $\varphi(x)$ sera la fonction inverse de la fonction $f(x)$. Ainsi, par exemple, si l'on a les fonctions

$$y=ax+b, \quad y=x^n,$$

les fonctions inverses seront

$$y=\frac{x-b}{a}, \quad y=\sqrt[n]{x}.$$

Le calcul de la fonction inverse à partir de l'équation de la fonction initiale s'appelle *inversion*.

Soit la courbe représentative de la fonction $y = f(x)$ où x est arbitraire. Il est facile de constater que cette courbe peut servir également de représentation à la fonction inverse $x = \varphi(y)$. Effectivement, les deux équations $y = f(x)$, et $x = \varphi(y)$ donnent une seule et même relation fonctionnelle entre x et y. En reportant sur l'axe OX, à partir de l'origine O, le segment correspondant au nombre x, et en menant de l'extrémité de ce segment la perpendiculaire à l'axe OX jusqu'à l'intersection avec la courbe représentative, on obtient, en prenant la longueur de cette perpendiculaire avec le signe correspondant, la valeur de y, correspondant à la valeur choisie pour x. Pour la fonction inverse, $x = \varphi(y)$, on doit seulement reporter la valeur donnée de y sur l'axe OY, à partir de l'origine O, et mener par l'extrémité de ce segment la perpendiculaire à l'axe OY jusqu'à l'intersection avec la courbe représentative. La longueur de cette perpendiculaire nous donne, avec le signe correspondant, la valeur de x, qui correspond à la valeur choisie pour y.

Ici apparaît un inconvénient: dans le premier cas, la variable indépendante x est reportée sur un seul axe, l'axe OX, et dans le second cas, la variable indépendante y est reportée sur l'autre axe, sur l'axe OY. Autrement dit, lorsqu'on passe de la fonction $y = f(x)$ à la fonction inverse $x = \varphi(y)$, on peut garder la même courbe représentative, mais on se rappellera que lors de ce passage, l'axe des valeurs de la variable indépendante devient l'axe des valeurs de la fonction, et réciproquement.

Pour éluder cette difficulté, on doit faire tourner le plan en bloc, de façon que les axes OX et OY changent de place. Pour cela il suffit évidemment de faire tourner le plan de la figure en même temps que la courbe représentative, de 180° autour de la bissectrice du premier quadrant de coordonnées. Lorsqu'on fait tourner le plan, les axes changent de place, et il faut alors écrire la fonction inverse $x = \varphi(y)$ sous la forme habituelle $y = \varphi(x)$. Ainsi, *si une fonction $y = f(x)$ est donnée graphiquement, il suffit pour obtenir la courbe représentative de la fonction inverse $y = \varphi(x)$ de faire tourner le plan de* 180° *autour de la bissectrice du premier quadrant.*

Sur la fig. 25, la courbe représentative de la fonction est tracée en trait plein, et la courbe de la fonction inverse est tracée en pointillé. On a tracé également en pointillé la bissectrice du premier quadrant, bissectrice autour de laquelle il faut faire tourner tout le plan de la figure, pour obtenir une courbe en pointillé à partir de la courbe en trait plein.

I-1-21. Fonctions multivoques. Dans tous les graphiques des fonctions élémentaires que nous avons vus ci-dessus, les droites perpendiculaires à l'axe OX ne coupaient pas la courbe en plus d'un point, et, dans la plupart des cas, elles la coupaient effectivement en un point. Cela signifie que pour une fonction définie par cette courbe, à une valeur donnée de x correspond une seule valeur bien déterminée de y. On dit encore de cette fonction qu'elle est *univoque* (ou *uniforme*).

Si les droites, perpendiculaires à l'axe OX, coupent la courbe en plusieurs points, cela signifie qu'à une valeur donnée de x correspondent plusieurs valeurs de y. De telles fonctions sont appelées *multivoques* (ou *multiformes*). On a déjà mentionné les fonctions multivoques plus haut [I-1-5].

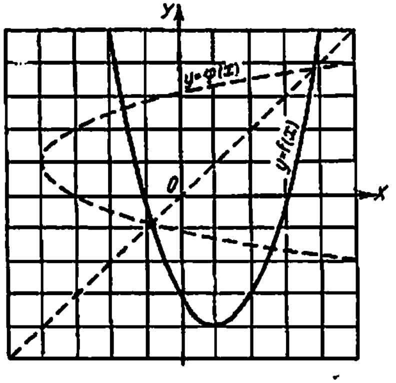

Fig. 25

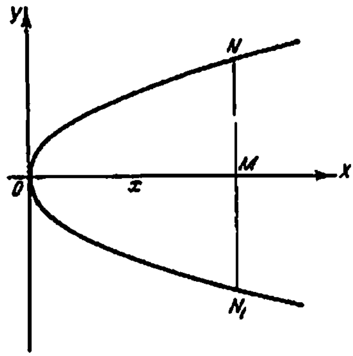

Fig. 26

Si la fonction $y = f(x)$ est univoque, la fonction inverse $y = \varphi(x)$ peut être multivoque. On le voit par exemple sur la fig. 25.

Analysons plus en détail un cas élémentaire. Sur la fig. 13, la courbe de la fonction $y = x^2$ est représentée en ligne continue. Si l'on fait tourner la figure de 180° autour de la bissectrice du premier quadrant, on obtient la courbe de la fonction inverse $y = \sqrt{x}$ (fig. 26).

Etudions-la de plus près. Pour les valeurs négatives de x (à gauche de l'axe OY), les droites perpendiculaires à l'axe OX ne coupent pas du tout la courbe, c'est-à-dire que la fonction $y = \sqrt{x}$ n'est pas définie pour $x < 0$. Cela correspond au fait que la racine carrée d'un nombre négatif ne possède pas de valeurs réelles. Réciproquement, pour n'importe quelle valeur positive de x, la droite perpendiculaire à l'axe OX coupe la courbe en deux points, c'est-à-dire que pour une valeur positive donnée de x, on a deux ordonnées de la courbe : $\overline{MN}$ et $\overline{MN_1}$. La première ordonnée donne pour y une certaine valeur positive, et la deuxième donne une valeur négative ayant même valeur absolue. Cela correspond au fait que la racine carrée d'un nombre positif possède deux valeurs, égales en valeur absolue et de signe contraire. On voit également d'après la figure que pour $x = 0$, on a une seule valeur $y = 0$. Ainsi, la fonction $y = \sqrt{x}$ est définie pour $x \geqslant 0$, possède deux valeurs pour $x > 0$ et une pour $x = 0$.

Remarquons que nous pouvons rendre notre fonction $y = \sqrt{x}$ univoque, en prenant seulement une partie de la courbe de la fig. 26. Prenons, par exemple, seulement la partie de la courbe qui se trouve dans le premier quadrant (fig. 27). Cela revient à ne considérer que

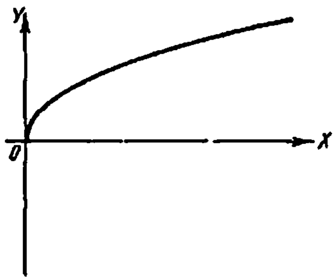

Fig. 27

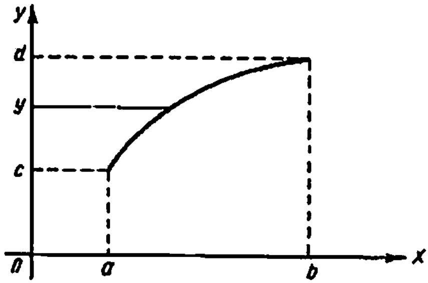

Fig. 28

les valeurs positives d'une racine carrée. Notons également que la partie de la courbe représentative de la fonction $y = \sqrt{x}$ représentée sur la fig. 27, vient de la partie de la courbe de la fonction $y = x^2$ (v. fig. 13), qui est située à droite de l'axe OY. On a déjà représenté sur la fig. 22 la partie de la courbe de la fonction qui se trouve dans le premier quadrant :

$$y = \sqrt{x} \quad \text{ou} \quad y = x^{\frac{1}{2}}.$$

Occupons-nous maintenant du cas où l'inverse d'une fonction univoque est une fonction qui est aussi univoque. Pour cela, nous allons introduire une nouvelle notion.

La fonction $y = f(x)$ est croissante, si l'accroissement de la variable indépendante x entraîne un accroissement correspondant de y, c'est-à-dire si de l'inégalité $x_2 > x_1$ il résulte que $f(x_2) > f(x_1)$.

Etant donné la disposition des axes OX et OY, à l'accroissement de x correspond un déplacement à droite le long de l'axe OX, et à l'accroissement de y correspond un déplacement vers le haut le long de l'axe OY. Le trait caractéristique de la courbe d'une fonction croissante réside dans le fait que, suivant le mouvement le long de la courbe du côté des valeurs croissantes de x (à droite), on se déplace également du côté des valeurs croissantes de y (vers le haut).

Considérons la courbe représentative d'une fonction croissante univoque quelconque, définie dans l'intervalle $a \leqslant x \leqslant b$ (fig. 28). Soit $f(a) = c$ et $f(b) = d$; il est évident que $c < d$, puisque la fonction est croissante. Si l'on prend une valeur quelconque de y dans l'intervalle $c \leqslant y \leqslant d$ et que l'on mène à partir du point correspondant la perpendiculaire à l'axe OY, cette perpendiculaire rencontrera notre courbe en un point, c'est-à-dire qu'à chaque valeur de y de l'intervalle $c \leqslant y \leqslant d$ correspond une valeur bien déterminée de x. Autrement dit, *une fonction inverse d'une fonction croissante, sera univoque.*

Il est facile de constater sur la courbe que cette fonction inverse sera également croissante.

D'une façon analogue, *la fonction $y = f(x)$ est dite décroissante, si lors de l'accroissement de la variable indépendante x, les valeurs correspondantes de y décroissent, c'est-à-dire s'il résulte de l'inégalité $x_2 > x_1$ que $f(x_1) > f(x_2)$.* On peut affirmer, comme plus haut, que la fonction, inverse de la fonction décroissante, sera une fonction univoque décroissante. Notons encore un cas important. Dans tous les raisonnements nous supposons toujours *que la courbe représentative de la fonction est une courbe continue.* Ce fait est équivalent à une propriété analytique de la fonction $f(x)$, *la continuité de cette fonction.* Une définition mathématique rigoureuse de la continuité d'une fonction et une étude des fonctions continues seront données au paragraphe 2. Le but du présent paragraphe est de faire connaissance de notions fondamentales, dont l'étude systématique sera faite dans les chapitres suivants.

En ce qui concerne la terminologie, remarquons que lorsqu'on parle d'une fonction sans se référer à ses valeurs multiples, c'est que l'on suppose toujours qu'il s'agit d'une fonction univoque.

I-1-22. Fonctions exponentielle et logarithmique. Revenons maintenant à l'étude de fonctions élémentaires. *Une fonction exponentielle* est définie par l'égalité :

$$y = a^x, \tag{15}$$

où l'on considère que a est un nombre positif donné (différent de l'unité). Pour une valeur positive entière de x la valeur de a^x est évidente. Pour une valeur positive fractionnaire de x, l'expression a^x est définie comme la racine $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$; dans le cas où q est pair, on convient de prendre une valeur positive du radical. Sans entrer pour le moment dans une étude plus approfondie des valeurs de a^x lorsque x est irrationnel, notons seulement que nous obtiendrons des valeurs approximatives de a^x, lorsque x est irrationnel, de plus en plus précises, si l'on remplace la valeur irrationnelle de x par ses valeurs approchées comme il a été indiqué plus haut [I-1-2]. Par exemple,

$$a^1 = a, \quad a^{1,4} = \sqrt[10]{a^{14}}, \quad a^{1,41} = \sqrt[100]{a^{141}}, \ \ldots$$

seront des valeurs approximatives de $a^{\sqrt{2}}$, où comme on le sait:

$$\sqrt{2} = 1,414213 \ldots$$

Le calcul de a^x lorsque x est négatif se ramène au calcul de a^x lorsque x est positif puisque: $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ qui détermine le degré de l'exposant négatif. On a convenu ci-dessus de considérer comme toujours positifs les radicaux dans l'expression $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$; il s'ensuit que la fonction a^x, pour n'importe quelles valeurs réelles de x, est toujours positive. En outre, on peut démontrer — ce sur quoi nous ne nous attarderons pas — que pour $a > 1$, la fonction a^x est croissante, et que pour $0 < a < 1$ elle est décroissante. On fera une étude plus approfondie de cette fonction plus loin [I-2-20].

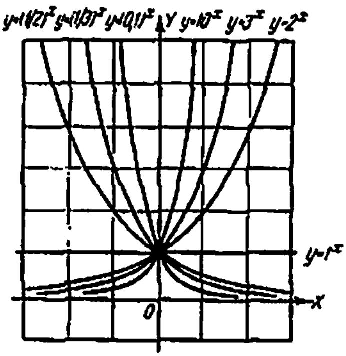

Fig. 29

Sur la fig. 29 on a donné les courbes représentatives de la fonction (15) pour différentes valeurs de a. Notons certaines particularités de ces courbes sur la fig. 29.

Avant tout, on a, pour une valeur quelconque de $a \neq 0$, $a^0 = 1$, d'où il résulte que, pour une valeur quelconque de a, la courbe de la fonction (15) passe par le point $y = 1$ sur l'axe OY, c'est-à-dire par le point dont les coordonnées sont $x = 0$, $y = 1$. Si $a > 1$, la courbe va de gauche à droite (du côté des valeurs croissantes de x) en s'élevant indéfiniment; et dans son mouvement vers la gauche la courbe se rapproche indéfiniment de l'axe OX, sans le toucher. Lorsque $a < 1$, la disposition de la courbe par rapport aux axes sera différente. Dans son mouvement vers la droite, la courbe se rapproche indéfiniment de l'axe OX, et dans son mouvement vers la gauche, elle croît indéfiniment. Etant donné que a^x est toujours positif, la courbe, bien entendu, est toujours située au-dessus de l'axe OX. Remarquons encore que l'on peut obtenir la courbe de la fonction $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ à partir de la courbe de la fonction $y = a^x$, en faisant tourner la figure de 180° autour de l'axe OY. Cela résulte directement de ce que, par cette rotation, x devient $(-x)$ et $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$.

Remarquons encore que, si $a = 1$, $y = 1^x$, et pour chaque valeur de x on a $y = 1$ [I-1-12].

Une fonction logarithmique est définie par l'équation

$$y = \lg_a x. \tag{16}$$

Par définition des logarithmes, la fonction (16) sera inverse de la fonction (15). On peut, de cette façon, obtenir la courbe de la fonction logarithmique (fig. 30) à partir de la courbe exponentielle en

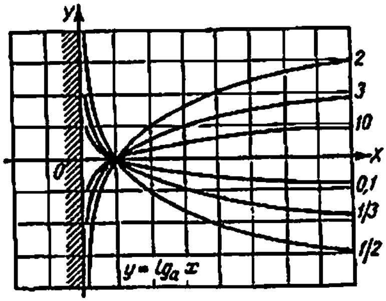

Fig. 30

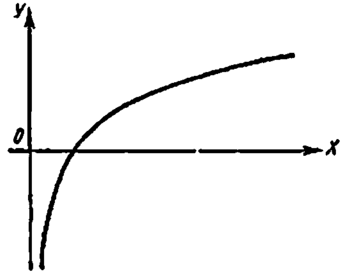

Fig. 31

faisant tourner les courbes de la fig. 29 de 180° autour de la bissectrice du premier quadrant. Vu l'accroissement de la fonction (15) lorsque $a > 1$, la fonction inverse (16) sera également une fonction de x croissante uniforme et, par là, la fonction (16) ne sera déterminée, comme on le voit sur la fig. 29, que pour $x > 0$ (les nombres négatifs n'ayant pas de logarithmes). Toutes les courbes de la fig. 30, correspondant à de différentes valeurs de a, coupent l'axe OX au point $x = 1$. Cela correspond au fait que le logarithme de l'unité est égal à zéro pour n'importe quel radical. Sur la fig. 31, on a représenté pour plus de clarté une seule courbe de la fonction (16) pour $a > 1$.

A la notion de la fonction logarithmique sont étroitement liées les notions *d'échelle logarithmique* et la théorie *de la règle à calcul*.

On appelle échelle logarithmique une échelle, portée sur une droite donnée, telle que la longueur des divisions ne correspond pas au nombre indiqué sur la division, mais à son logarithme, de base 10 généralement (fig. 32). De sorte que, si sur une division de l'échelle se trouve un nombre x, la longueur du segment $\overline{1x}$ est égale non pas à x, mais à $\lg_{10} x$. La longueur d'un segment entre deux points de l'échelle, repérés par x et y, sera égale à (fig. 32):

$$\overline{1y} - \overline{1x} = \lg_{10} y - \lg_{10} x = \lg_{10} \frac{y}{x};$$

pour obtenir le logarithme du produit xy, il suffit d'ajouter au segment $\overline{1x}$ le segment $\overline{1y}$, étant donné que le segment obtenu de cette façon sera égal à:

$$\lg_{10} x + \lg_{10} y = \lg_{10} (xy).$$

Ainsi, avec une échelle logarithmique, on peut ramener la multiplication et la division des nombres à l'addition et la soustraction de segments sur l'échelle,

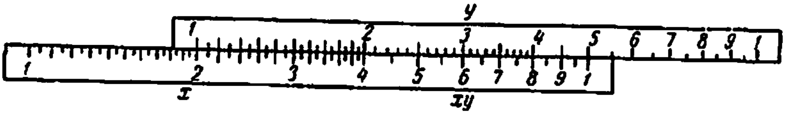

Fig. 32

ce qui se réalise dans la pratique à l'aide de deux échelles identiques, dont l'une peut glisser contre l'autre (fig. 32 et 33). C'est sur ce principe qu'est constituée l'échelle logarithmique.

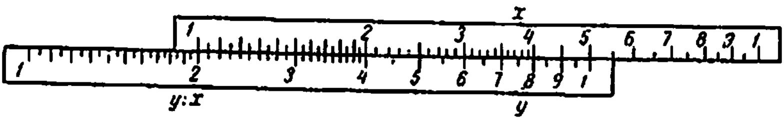

Fig. 33

Pour les calculs, on emploie souvent *du papier logarithmique* qui se présente sous la forme d'une feuille réglée, où les points de division sur les axes OX et OY correspondent non pas à l'échelle usuelle, mais à l'échelle logarithmique.

1-1-23. Fonctions trigonométriques (ou circulaires). Nous nous arrêterons seulement à quatre fonctions trigonométriques fondamentales:

$$y = \sin x, \quad y = \cos x,$$
$$y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{cotg} x,$$

où nous exprimerons la variable indépendante en radians, c'est-à-dire que nous prendrons comme unité d'angle, l'angle au centre tel qu'il corresponde à un arc de cercle, égal en longueur à un rayon.

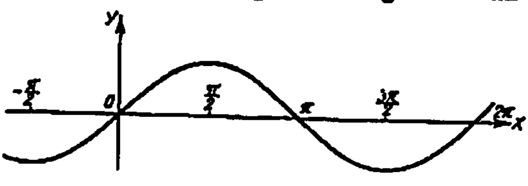

Fig. 34

La courbe de la fonction $y = \sin x$ est représentée sur la fig. 34. Grâce à la formule:

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

il est évident qu'on peut obtenir la courbe représentative de la fonction $y = \cos x$ (fig. 35) à partir de la courbe de la fonction $y = \sin x$ simplement en déplaçant la courbe sur la gauche le long de l'axe OX d'un segment $\frac{\pi}{2}$.

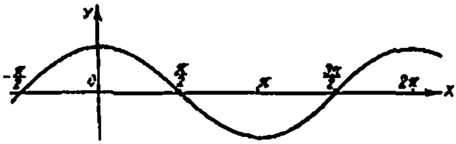

Fig. 35

Sur la fig. 36, on a représenté la courbe de la fonction $y = \operatorname{tg} x$. La courbe est composée d'une suite de branches infinies semblables. Chaque branche est située dans une bande de largeur π, et se présente sous la forme d'une fonction croissante de x. Enfin, sur la fig. 37, est représentée la courbe de la fonction $y = \operatorname{cotg} x$, qui est constituée également de branches infinies.

Les courbes des fonctions $y = \sin x$ et $y = \cos x$, par translation d'un segment 2π le long de l'axe OX vers la droite ou vers la gauche, coïncident, ce qui correspond au fait que les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ ont une période 2π, c'est-à-dire que:

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x \quad \text{et} \quad \cos(x \pm 2\pi) = \cos x$$

pour tout x. Les courbes des fonctions $y = \operatorname{tg} x$ et $y = \operatorname{cotg} x$ coïncident exactement de la même façon, quand elles se déplacent d'un segment π le long de l'axe OX.

Les courbes représentatives des fonctions:

$$y = A \sin ax, \quad y = A \cos ax \quad (A > 0, \ a > 0) \qquad (17)$$

sont semblables aux courbes des fonctions $y = \sin x$, et $y = \cos x$. Pour obtenir, par exemple, la courbe représentative de la première fonction (17) à partir de la courbe $y = \sin x$, il faut multiplier les longueurs de toutes les ordonnées de cette dernière courbe par A, et changer l'échelle de l'axe OX, de façon que le point d'abscisse x coïncide avec le point d'abscisse $\frac{x}{a}$. Les fonctions (17) sont également périodiques, mais de période $\frac{2\pi}{a}$.

Les courbes représentatives des fonctions plus compliquées:

$$y = A \sin(ax + b), \quad y = A \cos(ax + b), \tag{18}$$

que l'on appelle *courbes harmoniques simples* se déduisent des courbes des fonctions (17) par une translation à gauche le long de l'axe OX,

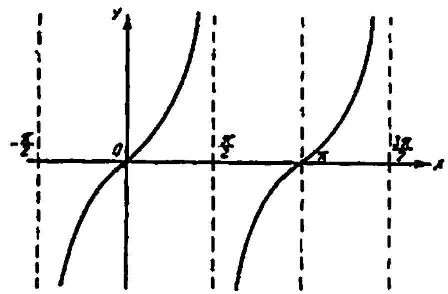

Fig. 36

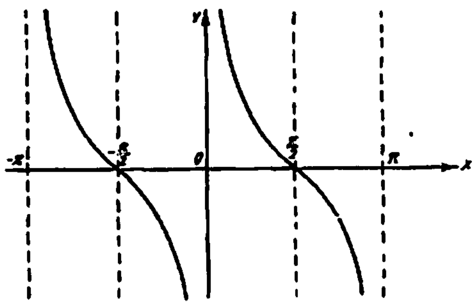

Fig. 37

d'un segment $\frac{b}{a}$ (on suppose b positif). Les fonctions (18) sont également de période $\frac{2\pi}{a}$.

Les courbes des fonctions de la forme:

$$y = A_1 \sin a_1 x + B_1 \cos a_1 x + A_2 \sin a_2 x + B_2 \cos a_2 x,$$

qui sont une somme de plusieurs termes du type (17), peuvent être construites, par exemple, si l'on additionne les ordonnées des courbes de chacun des termes. Les courbes ainsi obtenues sont généralement appelées *courbes harmoniques composées*. La fig. 38 représente la construction de la courbe de la fonction :

$$y = 2\sin x + \cos 2x.$$

Remarquons ici que la fonction :

$$y = A_1 \sin a_1 x + B_1 \cos a_1 x \tag{19}$$

peut être mise sous la forme (18) et représente une oscillation harmonique simple.

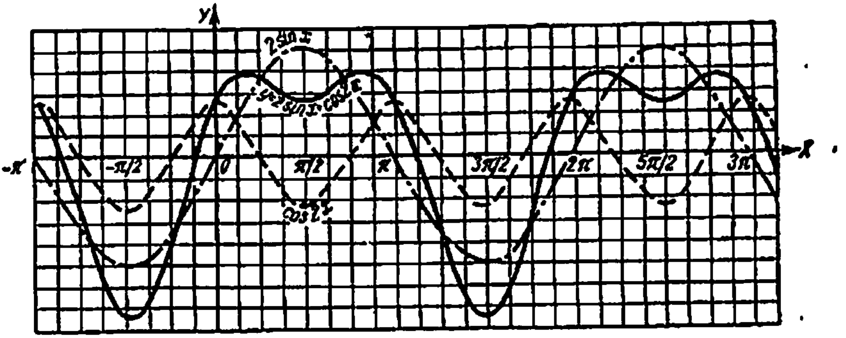

Fig. 38

En effet, posons :

$$m = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}, \quad n = \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}, \quad A = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}.$$

Nous avons évidemment :

$$A_1 = mA, \quad B_1 = nA \tag{20}$$

et en outre,

$$m^2 + n^2 = 1, \quad |m| \leqslant 1, \quad |n| \leqslant 1,$$

et, comme on le sait en trigonométrie, on peut toujours trouver un angle b_1, tel que

$$\cos b_1 = m, \quad \sin b_1 = n. \tag{21}$$

En remplaçant dans la fonction (19) les expressions de A_1 et B_1 données par (20) et en utilisant les égalités (21), nous obtenons :

$$y = A(\cos b_1 \cdot \sin a_1 x + \sin b_1 \cdot \cos a_1 x),$$

c'est-à-dire

$$y = A \sin(a_1 x + b_1).$$

I-1-24. Fonctions trigonométriques (ou circulaires) inverses. On obtient ces fonctions en inversant les fonctions trigonométriques :

$$y = \sin x, \ \cos x, \ \operatorname{tg} x, \ \operatorname{cotg} x$$

et on les désigne respectivement par les symboles :

$$y = \operatorname{arc} \sin x, \ \operatorname{arc} \cos x, \ \operatorname{arc} \operatorname{tg} x, \ \operatorname{arc} \operatorname{cotg} x,$$

ce qui n'est autre chose qu'une abréviation pour désigner les expressions : l'angle (ou l'arc) dont le sinus, le cosinus, la tangente ou la cotangente est respectivement égal à x.

Considérons la fonction

$$y = \operatorname{arc} \sin x. \tag{22}$$

La courbe représentative de cette fonction (fig. 39) se déduit de la courbe représentative de la fonction $y = \sin x$, selon la règle indiquée [I-1-20]. Cette courbe est entièrement située dans une bande verticale de largeur 2, s'appuyant sur le segment $-1 \leqslant x \leqslant +1$

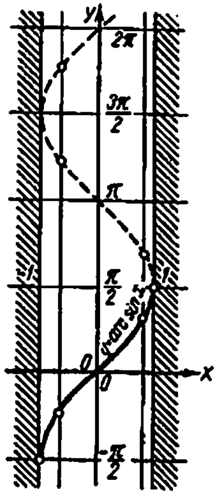

Fig. 39

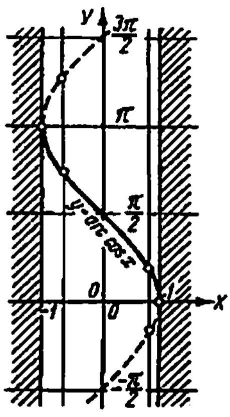

Fig. 40

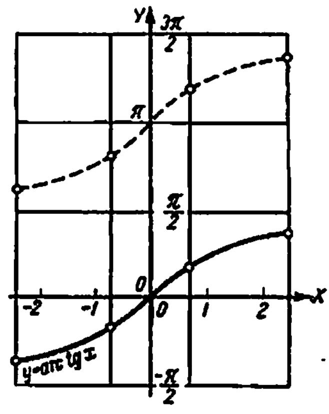

Fig. 41

de l'axe OX, c'est-à-dire que la fonction (22) n'est déterminée que dans l'intervalle $-1 \leqslant x \leqslant +1$. De plus, elle est équivalente à la fonction $\sin y = x$ et, comme on le montre en trigonométrie, pour une valeur donnée de x, on obtient un ensemble infini de valeurs pour l'angle y. Sur la courbe, nous voyons en effet que les droites perpendiculaires à l'axe OX en des points de l'intervalle $-1 \leqslant x \leqslant \leqslant +1$ ont avec la courbe une infinité de points communs, c'est-à-dire que la fonction (22) est une fonction multivoque.

On voit sur la fig. 39 que la fonction (22) deviendra univoque, si au lieu de prendre toute la courbe, on se limite à la partie de celle-ci, figurée en trait gras, partie qui correspond aux valeurs de l'angle y telles que $\sin y = x$, qui se trouvent dans l'intervalle: $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$.

Les fig. 40 et 41 donnent les courbes représentatives des fonctions $y = \operatorname{arc} \cos x$ et $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$; on y a fait figurer en trait gras les parties de la courbe qu'il faut considérer pour que la fonction soit univoque (on laisse au lecteur le soin de tracer la courbe représentative de arc cotg x). Remarquons ici que les fonctions $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ et $y = \operatorname{arc} \operatorname{cotg} x$ sont définies pour toutes les valeurs réelles de x.

En notant sur la figure l'intervalle de variation de y qui correspond à la partie en trait gras de la courbe, nous obtenons une table d'intervalles dans lesquels les fonctions deviennent univoques:

y	arc sin x	arc cos x	arc tg x	arc cotg x
Inégalités pour y	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$	$0 < y < \pi$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$	$0 < y < \pi$

Il est facile de montrer que les fonctions ainsi définies, qui s'appellent valeurs principales des fonctions circulaires, vérifient les relations:

$$\operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \cos x = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{cotg} x = \frac{\pi}{2}. \qquad (23)$$

I-2. Théorie des limites. Fonctions continues

I-2-1. Variable ordonnée. Lorsque nous parlions d'une variable indépendante x, ce qui nous importait c'était l'ensemble des valeurs que pouvait prendre x. Par exemple, ce pouvait être l'ensemble des valeurs satisfaisant à l'inégalité $0 \leqslant x \leqslant 1$. Maintenant, nous allons examiner une grandeur variable x prenant successivement un ensemble infini de valeurs, c'est-à-dire que ce qui nous importe maintenant, ce n'est pas seulement l'ensemble des valeurs de x, mais aussi l'ordre dans lequel elle prend ces valeurs. D'une façon plus précise, faisons les hypothèses suivantes: 1) si x' et x'' sont deux valeurs de la variable x, il est possible d'en distinguer une première et une seconde, de façon que, si x' précède x'' et x'' précède x''', alors x' précède x''; 2) aucune des valeurs de x n'est la dernière, c'est-à-dire que, quelle que soit la valeur de x considérée, il existe une infinité de valeurs qui la suivent. Une telle variable est appelée *variable ordonnée*. Par la suite, pour abréger, nous l'appellerons simplement *grandeur variable*. Comme d'habitude, sans tenir compte de la signification concrète de la grandeur (longueur, poids, etc.) nous désignerons par le terme « grandeur variable ordonnée » ou simplement « grandeur variable », toute suite infinie de ses valeurs.

Un cas particulier important de variable ordonnée est celui où il est possible d'indexer la suite tout entière de ses valeurs (la première, la seconde, la troisième, etc.):

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots,$$

de sorte que des deux valeurs x_p et x_q la valeur conséquente est celle qui possède l'indice le plus élevé. En qualité d'exemple supposons que le terme général de la suite x_n est déterminé par la formule $x_n = \frac{1}{2^n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, de sorte que la suite est de la forme

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots \tag{1}$$

Soit ensuite $x_n = 0,\overbrace{11\ldots1}^{n}$, autrement dit, x_n est une fraction décimale dont la partie entière est égale à zéro, et qui comporte n unités après la virgule; nous obtenons la suite

$$0,1;\ 0,11;\ 0,111, \ldots, 0,\overbrace{11\ldots1}^{n}, \ldots \tag{2}$$

Insérant entre deux nombres de la suite (1) le nombre zéro, nous obtenons une nouvelle suite

$$\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{16}, \ldots, \tag{3}$$

pour laquelle $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{4}$, $x_4 = 0$, $x_5 = \frac{1}{8}$, etc. Parmi les valeurs de cette variable on rencontre des valeurs égales, précisément $x_p = 0$ quand p est pair. Notons que la variable (1) est décroissante, c'est-à-dire que chacune de ses valeurs est inférieure à toutes les valeurs antécédentes et que la variable (2) est croissante, c'est-à-dire que chacune de ses valeurs est supérieure à toutes les valeurs antécédentes. La variable (3) n'est ni croissante, ni décroissante.

Indiquons maintenant des exemples de variable ordonnée dont on ne peut indexer les valeurs. Supposons que la variable x prend toutes les différentes valeurs vérifiant l'inégalité $a - k \leqslant x < a$, où a et k sont des nombres quelconques et $k > 0$. On estime alors que de deux valeurs x' et x'' la valeur conséquente est la plus grande. Autrement dit, la variable x croît en prenant toutes les valeurs de l'intervalle $a - k \leqslant x < a$, fermé à gauche et ouvert à droite. Elle prend n'importe quelle valeur plus petite que a de cet intervalle, mais ne prend pas la valeur a. La première valeur de cette variable est la valeur $x = a - k$, mais l'indexation des autres valeurs de la variable n'est plus possible. Si nous posons que la variable croissante satisfait non pas à l'inégalité $a - k \leqslant x < a$, mais à l'inégalité $a - k < x < a$, il n'y aura alors plus de première valeur de la variable x. Exactement de la même façon, on peut considérer une variable décroissante x sur l'intervalle $a < x \leqslant a + k$ ou sur l'intervalle $a < x < a + k$.

Indiquons maintenant un exemple analogue aux précédents, mais pour lequel la variable n'est ni croissante, ni décroissante. La variable x prend toutes les diverses valeurs vérifiant l'inégalité $a - k \leqslant x \leqslant a + k$, sauf la valeur $x = a$. Si x' et x'' sont deux valeurs distinctes de x pour lesquelles les valeurs absolues des différences $|x' - a|$ et $|x'' - a|$ sont différentes, on adopte pour valeur conséquente celle pour laquelle cette valeur absolue est plus petite (celle qui est plus proche de a sur l'axe OX), et si $x' - a$ et $x'' - a$ ne diffèrent que par leur signe (x' et x'' sont à égale distance de a, mais se trouvent sur l'axe OX de différents côtés de a), on estime que la valeur conséquente est celle pour laquelle la différence mentionnée est négative (celle qui sur l'axe OX est située à gauche de a). Dans cet exemple, la variable x s'approche de a sur l'intervalle $a - k \leqslant$ $\leqslant x \leqslant a + k$ des deux côtés, prenant toutes les valeurs sauf a; la première valeur de la variable est $x = a + k$, la seconde $x = a -$ $- k$, et l'indexation ne peut être conduite plus loin. Si au lieu de l'intervalle $a - k \leqslant x \leqslant a + k$ on prend l'intervalle $a - k <$ $< x < a + k$ en conservant la définition précédente de l'ordre de variation de x, il devient alors impossible d'indiquer la première valeur de x.

Dans ce qui suit nous rencontrerons fréquemment des grandeurs variables, liées par une dépendance fonctionnelle. Supposons que la variable x soit une fonction de la variable t. Introduisons alors la notation $x(t)$. Soit t une certaine variable ordonnée. Cela crée un ordonnancement des valeurs de $x(t)$; précisément, si t' et t'' appartiennent à la suite des valeurs de t et si t' est antécédent à t'', alors nous estimons que parmi les valeurs de $x(t)$ la valeur $x(t')$ précède $x(t'')$. Dans ce qui suit nous rencontrerons principalement les cas où parmi les valeurs de la variable ordonnée t il n'y a pas de valeurs égales. Toutefois, $x(t)$ peut prendre des valeurs égales pour différents t. Il est naturel de dire que la variable ordonnée t ordonne la variable $x(t)$ ou que t est une variable ordonnant la variable

$x(t)$. Notons que pour la variable indexée $x_1, x_2, x_3, \ldots$ le rôle de t est dévolu à l'indice 1, 2, 3, ..., autrement dit, t prend successivement les valeurs 1, 2, 3, ... et par cela même numérote les valeurs de la variable x.

La question se pose des opérations effectuées sur les variables ordonnées. Si, par exemple, x et y sont des variables ordonnées, alors on ne saurait dire sans accord préliminaire ce que signifie la somme $x + y$ ou le produit xy, car x, comme y, est susceptible de prendre une quantité infinie de valeurs, et il reste à savoir quelles valeurs de x et de y on doit ajouter ou multiplier, pour obtenir la nouvelle variable $x + y$ ou xy. Si x et y sont des variables indexées et $x_1, x_2, \ldots$ et $y_1, y_2, \ldots$ les valeurs successives de x et y, la somme $x + y$ est déterminée comme la variable ordonnée prenant la suite de valeurs

$$x_1+y_1, \quad x_2+y_2, \quad x_3+y_3, \ldots$$

Dans le cas général, pour la définition de l'opération effectuée sur les variables ordonnées, il faut qu'elles possèdent une même variable, les ordonnant. Supposons que les variables x et y soient des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ d'une même variable ordonnée t qui ordonne $x(t)$ et $y(t)$. La somme de x et y est alors définie en tant que variable ordonnée $x(t) + y(t)$ qui est ordonnée par la même variable t.

Pour les phénomènes se déroulant dans le temps, la succession de valeurs de la grandeur variable peut être naturellement établie par leur ordonnancement dans le temps, et l'on utilise fréquemment le schéma du temps en se servant des expressions « avant » et « après » au lieu des valeurs « antécédente » et « conséquente ».

Le présent paragraphe est principalement consacré à la théorie des limites qui constitue la base de l'analyse mathématique moderne. On considère dans cette théorie certains cas essentiels de variation des grandeurs.

I-2-2. Infiniment petits. A chaque valeur de la grandeur variable x correspond un point K sur l'axe numérique OX, d'abscisse x, et la variation de x se traduira par le déplacement du point K sur l'axe OX. Supposons que toutes les diverses positions du point K lors de la variation de x restent à l'intérieur d'un certain intervalle fini de l'axe OX. Il est équivalent de supposer que la longueur du segment $\overline{OK}$ où O est l'origine des coordonnées sur l'axe OX reste inférieure à un nombre positif donné M. Dans ce cas, la grandeur x est dite *bornée*; compte tenu de ce que la longueur du segment $\overline{OK}$ est $|x|$, nous pouvons donner la définition suivante.

D é f i n i t i o n. *Une variable x est dite bornée s'il existe un nombre positif M tel que, pour toute valeur de la variable x, on ait $|x| < M$.*

Comme exemple de grandeur bornée, on peut donner sin t où t est une variable ordonnée quelconque. Dans ce cas M est un nombre arbitraire supérieur à l'unité.

Considérons maintenant le cas où le point K, dans ses mouvements successifs, se rapproche indéfiniment de l'origine des coordonnées. Plus précisément, supposons que le point K, au cours de sa variation successive, pénètre à l'intérieur d'un segment $\overline{S'S}$ de l'axe OX et dont le milieu est O, segment aussi petit que l'on veut, donné à l'avance, et que le point K reste, au cours de ses déplacements ultérieurs, à l'intérieur de ce segment. Dans ce cas, on dit que *la grandeur x tend vers zéro* ou que *c'est un infiniment petit.*

Désignons par 2ε la longueur du segment $\overline{S'S}$ où ε est un nombre positif quelconque donné. Si le point K se trouve à l'intérieur de $\overline{S'S}$, la longueur de $\overline{OK} < \varepsilon$, et réciproquement, si la longueur de $\overline{OK} < \varepsilon$, le point K se trouve à l'intérieur de $\overline{S'S}$. Nous pouvons donc donner la définition suivante.

D é f i n i t i o n. *Une variable x tend vers zéro ou est un infiniment petit, si pour tout nombre positif donné ε il existe une valeur de x telle que toutes les valeurs suivantes satisfont à l'inégalité* $|x| < \varepsilon$.

Compte tenu de l'importance de la notion d'infiniment petit, nous donnerons une autre formulation de la même définition.

D é f i n i t i o n. *On dit qu'une grandeur x tend vers zéro ou est infiniment petite si $|x|$ lors des variations successives de x devient et reste inférieur à tout nombre ε petit positif donné à l'avance.*

Par « grandeur infiniment petite » nous entendons le caractère décrit plus haut de la variation d'une grandeur variable, et il ne faut pas confondre la notion de grandeur infiniment petite avec la notion souvent utilisée dans la pratique de *grandeur très petite.*

Supposons que pour mesurer la longueur d'une parcelle quelconque, nous ayons trouvé mille mètres, avec un certain reste que nous considérons comme très petit par rapport à la dimension totale et que nous négligeons. La longueur de ce reste est définie par un nombre positif déterminé et l'expression « infiniment petit » ne peut être, évidemment, utilisée ici. Si nous avions trouvé la même longueur, dans une mesure beaucoup plus précise, nous ne l'aurions pas considérée comme très petite et nous en aurions tenu compte. Nous voyons donc que la notion de grandeur petite est une notion relative, liée aux conditions pratiques de la mesure.

Supposons qu'une grandeur variable x prenne successivement les valeurs:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

et soit ε un nombre positif quelconque donné. Pour nous assurer que x est un infiniment petit, nous devons démontrer que $|x_n|$ est inférieur à ε, à partir d'une certaine valeur de l'indice n, autrement dit nous devons démontrer l'existence d'un nombre entier N tel que

$$|x_n| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad n > N.$$

Ce nombre N dépend de ε.

Considérons comme exemple d'infiniment petit la grandeur qui prend successivement les valeurs

$$q,\ q^2,\ q^3,\ \ldots,\ q^n,\ \ldots\ (0 < q < 1). \tag{4}$$

Nous devons vérifier l'inégalité

$$q^n < \varepsilon \quad \text{ou} \quad n\,\lg_{10} q < \lg_{10}\varepsilon \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

Compte tenu de ce que $\lg_{10} q$ est négatif, nous pouvons mettre l'inégalité précédente sous la forme:

$$n > \frac{\lg_{10}\varepsilon}{\lg_{10} q},$$

puisque lorsqu'on divise par un nombre négatif, il faut changer le sens de l'inégalité; par conséquent, nous pouvons prendre pour N le plus grand nombre entier contenu dans la fraction $\lg_{10}\varepsilon : \lg_{10} q$. Ainsi, la grandeur considérée ou, comme on dit généralement, *la suite* (4) tend vers zéro.

Si dans la suite (4) nous remplaçons q par $(-q)$, la seule différence sera que dans les termes d'exposant impair apparaîtra le signe moins, et les valeurs absolues des termes de cette suite resteront les mêmes; c'est pourquoi nous aurons encore une grandeur infiniment petite.

Si la grandeur x est un infiniment petit (x tend vers 0), on écrit généralement comme suit: $\lim x = 0$, ou, pour la variable indexée: $\lim x_n = 0$. Dans les démonstrations ultérieures, à part le premier théorème, nous conduirons la démonstration pour les variables indexées. Dans le premier théorème la démonstration sera conduite non seulement pour les variables indexées, mais aussi dans le cas général.

Donnons deux propriétés des infiniment petits.

1. *La somme de plusieurs (d'un nombre donné) infiniment petits est aussi un infiniment petit.*

Considérons, par exemple, la somme $w = x + y + z$ de trois infiniment petits, et supposons que les variables sont indexées. Soient

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots;\quad y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots;\quad z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots$$

les valeurs successives de x, y et z. Pour w nous obtenons les valeurs successives:

$$w_1 = x_1 + y_1 + z_1,\quad w_2 = x_2 + y_2 + z_2,\quad w_3 = x_3 + y_3 + z_3,\ \ldots$$

Soit ε un nombre quelconque positif donné. Compte tenu de ce que x, y et z sont infiniment petits, nous pouvons affirmer qu'il existe un nombre N_1, tel que $|x_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ pour $n > N_1$; un nombre N_2, tel que $|y_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ pour $n > N_2$; un nombre N_3, tel que $|z_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ pour $n > N_3$. Si nous désignons par N le plus grand des trois nombres N_1, N_2, N_3, nous aurons :

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |y_n| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |z_n| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour} \quad n > N,$$

et, par conséquent,

$$|w_n| \leqslant |x_n| + |y_n| + |z_n| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour} \quad n > N,$$

c'est-à-dire $|w_n| < \varepsilon$ pour $n > N$, d'où il résulte que w est un infiniment petit.

Considérons maintenant le cas général quand x, y, z sont des fonctions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ d'une même variable ordonnante t et $w(t) = x(t) + y(t) + z(t)$. Prenant en considération le fait que x, y, z sont des infiniment petits, nous pouvons affirmer: il existe une valeur $t = t'$ telle que $|x(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pour toutes les valeurs conséquentes de t; il existe une telle valeur $t = t''$ que $|y(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pour toutes les valeurs conséquentes de t; il existe une valeur t''' telle que $|z(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pour toutes les valeurs conséquentes de t. Désignant par t_0 celle des valeurs t', t'', t''' de la variable t telle que les deux autres lui soient antécédentes ou coïncident avec elle, nous pouvons affirmer que

$$|x(t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |y(t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |z(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pour toutes les valeurs de t conséquentes à t_0, c'est pourquoi

$$|w(t)| \leqslant |x_n(t)| + |y_n(t)| + |z_n(t)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon;$$

$|w(t)| < \varepsilon$ pour toutes les valeurs de t conséquentes à t_0, autrement dit, w est un infiniment petit.

2. *Le produit d'une grandeur bornée par un infiniment petit est un infiniment petit.*

Considérons le produit de deux variables indexées xy, où x est une grandeur bornée, et y un infiniment petit. Par définition, il existe un nombre positif M tel que $|x_n| < M$ quel que soit n; il existe un N tel que $|y_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ pour $n > N$. Nous voyons donc que:

$$|x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} \quad \text{pour} \quad n > N,$$

c'est-à-dire $|x_n y_n| < \varepsilon$ pour $n > N$, d'où il résulte que le produit xy est un infiniment petit.

On remarquera que cette dernière propriété est à plus forte raison valable, si $x = C$ est une grandeur constante. Le rôle du nombre M peut alors être rempli par n'importe quel nombre plus grand que $|C|$, autrement dit, le produit d'une grandeur constante par un infiniment petit est un infiniment petit. En particulier, si x est un infiniment petit, alors $(-x)$ est aussi un infiniment petit.

Vu l'importance fondamentale de la notion d'infiniment petit pour la suite de notre exposé, nous nous arrêterons encore sur cette notion et présenterons certaines remarques complémentaires.

Estimant que $0 < q < 1$, insérons entre deux termes de la suite (4) le nombre zéro. Nous obtenons la suite

$$q, 0, q^2, 0, q^3, 0 \ldots$$

On voit aisément que cette variable aussi tend vers zéro, tout en prenant la valeur zéro un nombre infini de fois. Cela ne contredit pas la définition d'une grandeur tendant vers zéro. Supposons que toutes les valeurs conséquentes de la « variable » sont égales à zéro. Pour la variable numérotée cela signifie que $x_n = 0$ pour tout n, et dans le cas de $x(t)$, où t est une variable ordonnée, cela signifie que $x(t) = 0$ pour toutes les valeurs de t. Une telle « variable » est en fait une grandeur constante, mais elle satisfait formellement à la définition d'un infiniment petit. Par exemple, pour la variable numérotée ($x_n = 0$ pour tout n) $|x_n| < \varepsilon$ pour tout ε positif donné, quel que soit n. Si $x_n = C$ pour tous les n et C est un nombre différent de zéro, une telle suite n'est rien d'autre qu'un infiniment petit.

Reprenons les trois exemples de la variable ordonnée de [I-2-1] dans lesquels on ne peut indexer la variable et posons dans ces exemples $a = 0$. La première est une variable croissante prenant toutes les valeurs de l'intervalle $-k \leqslant x < 0$. Pour un $\varepsilon > 0$ donné pour toutes les valeurs de cette variable conséquentes à la valeur $x = -\varepsilon$, si $\varepsilon \leqslant k$, nous avons $|x| < \varepsilon$. Si $\varepsilon > k$, alors $|x| < \varepsilon$ pour toutes les valeurs de x. Ainsi, x tend vers zéro (à partir des valeurs plus petites que zéro). Exactement de la même façon x tend vers zéro dans les deux autres cas: quand x est une variable décroissante prenant toutes les valeurs de l'intervalle $0 < x \leqslant k$, et quand x prend toutes les valeurs (distinctes) de l'intervalle $-k \leqslant x < +k$ excepté $x = 0$ pour le cas de l'ordonnancement des valeurs défini en [I-2-1]. Pour une variable x tendant vers zéro de la manière indiquée plus haut, introduisons des notations spéciales: dans le premier cas, nous écrirons: $x \to -0$ (x tend vers zéro à partir des valeurs plus petites que zéro); dans le second cas, $x \to +0$ (x tend vers zéro à partir des valeurs plus grandes que zéro); dans le troisième cas, $x \to \pm 0$ (x tend vers zéro des deux côtés).

Il existe, bien entendu, une infinité de manières suivant lesquelles la variable x indexée ou non indexée est susceptible de tendre vers zéro. Dans tous ces cas nous écrirons $x \to 0$. Dans les trois cas que nous avons précisés le zéro est affecté de signes. La particularité caractéristique du premier de ces trois cas réside dans le fait que x, en croissant, prend toutes les valeurs inférieures à zéro et suffisamment proches de zéro. Dans le second cas le même caractère de variation de x est lié à la décroissance de x. Dans le troisième cas x prend toutes les valeurs suffisamment proches de zéro, aussi bien plus grandes que plus petites, excepté la valeur zéro. De deux valeurs x' et x'' non également distantes de zéro (autrement dit $|x'| \neq |x''|$), on estime que la valeur conséquente est celle qui est plus proche de zéro, et de deux valeurs également distantes de zéro ($x'' = -x'$) on estime que la valeur conséquente est la valeur négative.

Formulons encore une remarque. Il découle de la définition d'un infiniment petit que *lors de la démonstration du fait que la variable x est un infiniment petit, il suffit de considérer uniquement les valeurs de x conséquentes à une certaine valeur déterminée $x = x_0$, cette valeur x_0 pouvant être choisie arbitrairement.*

Ceci étant, il est utile d'ajouter, dans la théorie des limites, un complément à la définition d'une grandeur bornée: il est inutile d'exiger que l'inégalité $|y| < M$ soit satisfaite pour toutes les valeurs de y; il suffit de donner la définition plus générale suivante:

Définition. *Une grandeur y est dite bornée, s'il existe un nombre positif M et une valeur de y_0 tels que toutes les valeurs suivantes satisfont à l'inégalité $|y| < M$.*

Avec cette définition d'une grandeur bornée, la démonstration de la seconde propriété des infiniment petits reste inchangée. Pour une variable indexée, la seconde définition d'une grandeur bornée entraîne la première, de sorte que cette seconde définition n'est pas plus générale. En effet, si $|x_n| < M$ pour $n > N$, en désignant par M' le plus grand des nombres:

$$|x_1|, \ |x_2|, \ \ldots \ |x_N| \quad \text{et} \quad M,$$

nous pouvons affirmer que $|x_n| < M' + 1$ pour tout n.

I-2-3. Limite d'une grandeur variable. Nous avons dit qu'une grandeur variable est infiniment petite, si le point K qui lui correspond et qui se déplace le long de l'axe OX, possède la propriété suivante: la longueur du segment $\overline{OK}$ lors de la variation de K devient et reste inférieure à tout nombre positif donné ε. Supposons maintenant que cette propriété est valable non pour le segment $\overline{OK}$, mais pour le segment $\overline{AK}$, où A est un point déterminé de l'axe OX, d'abscisse a (fig. 42). Dans ce cas, l'intervalle $\overline{S'S}$ de longueur 2ε aura son milieu non à l'origine des coordonnées, mais au point A d'abscisse $x = a$, et le point K au cours de son déplacement devra pénétrer à l'intérieur de cet intervalle et y rester durant son mouvement ultérieur. Dans ce cas, on dit que le nombre constant a est *la limite de la variable* x, ou que la variable x *tend vers* a.

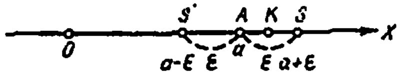

Fig. 42

Considérant que la longueur du segment $\overline{AK}$ est $|x - a|$ [I-1-9], on peut donner la définition suivante:

D é f i n i t i o n. *On appelle limite d'une variable x un nombre a tel que la différence $x - a$ est une grandeur infiniment petite.*

Notons que $a - x$ est aussi un infiniment petit.

En tenant compte de la définition d'une grandeur infiniment petite, on peut donner la définition de la limite a de la façon suivante:

D é f i n i t i o n. *On appelle limite d'une variable x un nombre a qui a la propriété suivante: pour n'importe quel nombre ε positif donné il existe une valeur de la variable x telle que l'inégalité $|x - a| < \varepsilon$ (ou, ce qui revient au même, $|a - x| < \varepsilon$) est vraie pour toutes les valeurs suivantes de x.*

Dans le cas d'un ensemble indexé $x_1, x_2, x_3, \ldots$ pour tout nombre ε donné positif il faut établir l'existence d'un nombre entier positif N tel que $|x_n - a| < \varepsilon$ (ou $|a - x_n| < \varepsilon$) pour $n > N$.

Si a est la limite de x (x tend vers a), on écrit:

$$\lim x = a, \quad \text{ou} \quad x \to a.$$

Dans le cas d'une variable indexée: $x_1, x_2, x_3, \ldots$ on dit également que a est la limite de la suite indiquée (la suite tend vers a) et on écrit:

$$\lim x_n = a, \quad \text{ou} \quad x_n \to a.$$

Attirons l'attention sur certaines circonstances qui découlent de la définition de la limite et que nous n'allons pas démontrer ici.

1. *Une grandeur variable ne peut tendre vers deux limites différentes, autrement dit, ou bien elle ne possède pas de limite, ou bien elle possède une limite déterminée.*

2. *Une grandeur variable dont la limite est égale à zéro est un infiniment petit et inversement, tout infiniment petit a une limite égale à zéro.*

3. *Si deux variables x_n et y_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) ou $x(t)$ et $y(t)$ ont pour limites a et b et vérifient au cours de leur variation successive les inégalités $x_n \leqslant y_n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) ou $x(t) \leqslant y(t)$, alors $a \leqslant b$.*

Notons que si les variables vérifient l'inégalité $x_n < y_n$, on peut obtenir l'égalité de leur limite, autrement dit $a \leqslant b$.

4. *Si les trois variables x_n, y_n, z_n vérifient l'inégalité $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, et si x_n et z_n tendent vers une même limite a, la variable y_n tend également vers cette limite a.*

L'existence de la limite a pour la variable x est équivalente à ce que la différence $x - a = \alpha$ soit un infiniment petit, et cela de sorte que l'ordonnancement de α est déterminé par l'ordonnancement de x. Pour une variable indexée : $x_n - a = \alpha_n$. Il en découle que :

5. *L'existence de la limite a de la variable x est équivalente à ce que x peut être représenté sous forme de la somme du nombre a et d'un infiniment petit, c'est-à-dire que $x = a + \alpha$ ou $x_n = a + \alpha_n$, où α ou α_n sont des infiniment petits.*

6. *Lors de la détermination de la limite a de la variable x il suffit de considérer uniquement les valeurs de x conséquentes à une certaine valeur déterminée $x = x_0$; cette dernière valeur peut être choisie arbitrairement, autrement dit, on peut ne pas accorder d'attention aux valeurs de x antécédentes à x_0.*

7. *Si la suite $x_1, x_2, x_3, \ldots$ tend vers a, alors n'importe quelle sous-suite infinie partielle $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots$ extraite de la suite initiale tend également vers a.* Dans la sous-suite partielle les indices $n_1, n_2, n_3, \ldots$ forment une suite croissante d'entiers positifs.

Pour une variable x non indexée tendant vers a, une propriété analogue a lieu sous une certaine réserve. Supposons que nous avons éliminé de la suite des valeurs de x certaines de ses valeurs (en quantité finie ou infinie), mais cela de telle façon que pour toute valeur fixée $x = x_0$ la suite restante des valeurs de x contient les valeurs pour lesquelles $x = x_0$ est une valeur antécédente. Alors la suite restante de valeurs est, si l'on conserve l'ordonnancement primitif des valeurs, une variable ordonnée tendant vers a.

Prenons comme exemple la variable indexée

$$x_1 = 0{,}1, \quad x_2 = 0{,}11, \ \ldots, \ x_n = 0{,}\overbrace{11 \ldots 1}^{n}, \ \ldots$$

et démontrons que sa limite est égale à $\frac{1}{9}$. Ecrivons la différence:

$$\frac{1}{9}-x_1=\frac{1}{90},\quad \frac{1}{9}-x_2=\frac{1}{900},\ \ldots,\quad \frac{1}{9}-x_n=\frac{1}{9\cdot 10^n},\ \ldots$$

L'inégalité $\frac{1}{9\cdot 10^n}<\varepsilon$ est équivalente à l'inégalité suivante:

$$9\cdot 10^n>\frac{1}{\varepsilon}\quad \text{ou}\quad n>\lg_{10}\frac{1}{\varepsilon}-\lg_{10}9,$$

et on peut prendre pour N le nombre entier le plus grand, contenu dans la différence $\lg_{10}\frac{1}{\varepsilon}-\lg_{10}9$ (on considère $\varepsilon<\frac{1}{9}$).

Etudions maintenant la somme des n premiers termes d'une progression géométrique décroissant indéfiniment:

$$S_n=b+bq+bq^2+\ldots+bq^{n-1}\quad (0<|q|<1).$$

Comme on le sait,

$$S_n=\frac{b-bq^n}{1-q},$$

et en donnant à n les valeurs 1, 2, 3, ..., on obtiendra la suite

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots$$

A partir de l'expression S_n, on a

$$\frac{b}{1-q}-S_n=\frac{b}{1-q}q^n.$$

Le second membre est le produit du facteur constant $\frac{b}{1-q}$ par le facteur infiniment petit q^n [I-2-2]. Compte tenu de la deuxième propriété des infiniment petits [I-2-2], la différence $\frac{b}{1-q}-S_n$ est une grandeur infiniment petite et, par conséquent, le nombre $\frac{b}{1-q}$ est la limite de la suite S_1, S_2, ...

Revenons à la variable non indexée x du paragraphe [I-2-1], définie par les inégalités $a-k\leqslant x<a$ ou $a<x\leqslant a+k$, ou $a-k\leqslant x\leqslant a+k$, sauf pour $x=a$, avec la suite des valeurs de x indiquée en [I-2-1]. Cette variable x possède, comme on le voit, une limite dans les trois cas, égale à a, et on indiquera les trois cas de variation de la variable x, de la façon suivante: $x\to a-0$; $x\to a+0$; $x\to a\pm 0$ [cf. I-2-2]. Notons que cette désignation n'est pas liée à la grandeur du nombre positif k, car, comme on a indiqué ci-dessus, en définissant une limite, on peut ne pas tenir compte des valeurs qui précèdent une valeur quelconque de x.

Faisons encore quelques remarques et citons des exemples.

La « variable » ordonnée x dont toutes les valeurs sont égales au nombre a, satisfait à la définition d'une grandeur tendant vers a.

Par exemple, pour la variable indexée ($x_n = a$ pour tout n) $|x_n - a| = 0$ est plus petit que tout nombre positif ε fixé à l'avance pour tout n [cf. I-2-2]. Cette façon de considérer une grandeur constante comme un cas particulier de grandeur variable nous sera commode par la suite.

Notons encore que si la variable x possède une limite, par exemple a, alors $|x - a| < \varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$ donné, à partir d'une certaine valeur de x, et par conséquent nous aurons $|x| < |a| + \varepsilon$, *autrement dit, x est une grandeur bornée* (remarque [I-2-2]).

Une grandeur variable peut, comme nous l'avons noté, ne pas avoir de limite. Prenons par exemple la variable indexée $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}11$, $x_3 = 0{,}111$, ..., dont la limite est $\frac{1}{9}$, et la variable $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{1}{2^2}$, $y_3 = \frac{1}{2^3}$, ..., dont la limite est le nombre zéro. La variable indexée $z_1 = 0{,}1$, $z_2 = \frac{1}{2}$, $z_3 = 0{,}11$, $z_4 = \frac{1}{2^2}$, $z_5 = 0{,}111$, $z_6 = \frac{1}{2^3}$, ... n'a pas de limite. La suite de ses valeurs successives z_1, z_3, z_5, ... a pour limite $\frac{1}{9}$ et la suite de ses valeurs z_2, z_4, z_6, ... a pour limite 0.

Prenons la suite indiquée plus haut $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{1}{2^2}$, $y_3 = \frac{1}{2^3}$, ..., dont la limite est zéro et insérons entre chaque couple de ses termes les nombres $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}$, ..., qui sont deux fois plus grands que les précédents. Cette dernière suite tend aussi vers zéro. Nous obtenons une suite tendant vers zéro :

$$\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2^2},\ \ldots$$

Les termes de cette suite, tout en s'approchant indéfiniment de zéro à partir des valeurs positives, ne décroissent pas toujours : le second est plus grand que le premier, le quatrième est plus grand que le troisième, etc.

Considérons la variable non indexée qui, décroissant sur l'intervalle $(1 < x \leqslant 5)$, tend vers l'unité, autrement dit $x \to 1+0$. Si nous excluons les valeurs de x vérifiant la condition $3 < x \leqslant 4$, l'ensemble restant des valeurs de x pour un même ordonnancement (décroissance) tendra aussi vers l'unité. Si nous excluons les valeurs de x vérifiant la condition $1 < x \leqslant 2$, alors en conservant l'ordre initial (décroissance) l'ensemble restant sera ordonné mais tendra non pas vers l'unité mais vers deux. Si nous excluons les valeurs de x vérifiant la condition $1 < x < 2$, l'ensemble restant des valeurs de x pour l'ordonnancement initial (décroissance) ne sera pas ordonné car il aura pour dernière valeur $x = 2$. Cet exemple se rapporte à la remarque que nous avons faite plus haut sur l'élimination des valeurs d'une variable ordonnée non indexée.

I-2-4. Théorèmes fondamentaux. Les théorèmes que nous citerons par la suite concerneront les variables indexées. Dans le cas général, la démonstration est tout à fait analogue [cf. I-2-2].

1. *Si les termes de la somme algébrique d'un nombre fini de variables possèdent des limites, leur somme possède également une limite, et cette limite est égale à la somme des limites de ces termes.*

Etudions la somme algébrique $x - y + z$, et supposons que les variables indexées x_n, y_n et z_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ tendent respectivement vers les limites a, b et c. On a donc:

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n, \quad z_n = c + \gamma_n,$$

où α_n, β_n et γ_n sont des infiniment petits. Pour les valeurs successives de la somme $x - y + z$ on aura

$$x_n - y_n + z_n = (a + \alpha_n) - (b + \beta_n) + (c + \gamma_n) =$$
$$= (a - b + c) + (\alpha_n - \beta_n + \gamma_n).$$

La première parenthèse du second membre de cette égalité est une grandeur constante, et la deuxième un infiniment petit [I-2-2]. D'où [I-2-3]:

$$x_n - y_n + z_n \to a - b + c,$$

c'est-à-dire

$$\lim (x - y + z) = a - b + c = \lim x - \lim y + \lim z.$$

2. *Si les facteurs du produit de plusieurs variables ont des limites, alors le produit aura une limite et cette limite sera égale au produit des limites des facteurs.*

Considérons le produit de deux facteurs xy et supposons que les variables indexées x_n, y_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ont les limites a et b. En vertu de cela nous avons

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n,$$

où α_n et β_n sont des infiniment petits. Pour les valeurs successives du produit $x_n y_n$ nous avons

$$x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n).$$

La somme entre parenthèses dans le second membre est une somme d'infiniment petits. En effet, les deux premiers termes sont les produits des constantes a et b par des infiniment petits, et dans le troisième terme le premier facteur $\alpha_n \to 0$ est de ce fait une grandeur bornée, et le second facteur β_n est un infiniment petit. Ainsi dans le second membre le premier terme ab est une constante et le second (entre parenthèses) est un infiniment petit [I-2-2]. Par conséquent, $x_n y_n \to ab$, autrement dit,

$$\lim (xy) = ab = \lim x \cdot \lim y.$$

3. *Si le dividende et le diviseur sont des variables possédant une limite et que la limite du diviseur soit différente de zéro, le quotient possède également une limite, et cette limite est égale au quotient des limites du dividende et du diviseur.*

Etudions le rapport $\frac{x}{y}$ et supposons que les grandeurs x_n et y_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) tendent respectivement vers les limites a et b, et que $b \neq 0$. Démontrons que la différence $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$. Pour cela, il suffit de démontrer que la différence $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}$ est un infiniment petit. On a, par hypothèse:

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n,$$

où α_n et β_n sont des grandeurs infiniment petites. D'où :

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b(b+\beta_n)}(b\alpha_n - a\beta_n).$$

Le dénominateur de la fraction de la partie droite se compose de deux facteurs et en vertu des deux précédents théorèmes tend vers b^2. Par conséquent, à partir d'une certaine valeur de n, le dénominateur sera supérieur à $\frac{b^2}{2}$ ($b \neq 0$), et la fraction $\frac{1}{b(b+\beta_n)}$ sera comprise, à partir de la valeur spécifiée de n, entre zéro et $\frac{2}{b^2}$, c'est-à-dire sera une grandeur bornée. La grandeur $(b\alpha_n - a\beta_n)$ est un infiniment petit. Ainsi, la différence $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}$ est un infiniment petit. Par conséquent, $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$, autrement dit,

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{a}{b} = \frac{\lim x}{\lim y} \quad (\lim y \neq 0).$$

Notons certains corollaires des théorèmes démontrés. Si x tend vers la limite a, la variable bx^k, où b est une constante et k un entier positif, tendra, en vertu du théorème 2, vers la limite ba^k.

Considérons le polynôme

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_kx^{m-k} + \ldots + a_{m-1}x + a_m,$$

où les coefficients a_k sont constants. Appliquant le théorème 1 et utilisant la remarque que nous venons de faire, on peut affirmer que quand $x \to a$, ce polynôme tendra vers la limite:

$$\lim f(x) = f(a) = a_0a^m + a_1a^{m-1} + \ldots + a_ka^{m-k} + \ldots + a_{m-1}a + a_m.$$

On peut, de la même façon, affirmer que lorsque x varie de la façon que nous venons d'indiquer, la fraction rationnelle

$$\varphi(x) = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^p + b_1x^{p-1} + \ldots + b_{p-1}x + b_p}$$

tendra vers la limite:

$$\lim \varphi(x) = \varphi(a) = \frac{a_0a^m + a_1a^{m-1} + \ldots + a_{m-1}a + a_m}{b_0a^p + b_1a^{p-1} + \ldots + b_{p-1}a + b_p},$$

si

$$b_0a^p + b_1a^{p-1} + \ldots + b_{p-1}a + b_p \neq 0.$$

Toutes ces propositions sont vraies, quelle que soit la manière dont x tend vers la limite a.

Au lieu de polynômes, ordonnés suivant les puissances d'une seule variable, nous aurions pu, bien entendu, étudier des polynômes, ordonnés suivant les puissances de plusieurs variables tendant vers une limite.

Ainsi, par exemple, pour des variables indexées, si $\lim x_n = a$ et $\lim y_n = b$, on a:

$$\lim (x_n^2 + x_ny_n + y_n^2) = a^2 + ab + b^2.$$

I-2-5. Infiniment grands. Si une grandeur variable x tend vers une limite, elle est bornée, comme nous l'avons vu.

Nous allons étudier quelques cas de variation de grandeurs bornées.

Comme précédemment, nous étudierons simultanément la grandeur x et le point K correspondant, qui se déplace sur l'axe OX. Supposons que le point K se déplace de telle façon que, aussi grande que soit la longueur du segment $\overline{T'T}$ dont le milieu est à l'origine des coordonnées, le point K au cours de son déplacement se trouvera en dehors de ce segment et y restera lors de son mouvement ultérieur. Dans ce cas, on dit que x est une grandeur infiniment grande, ou bien une grandeur qui tend vers l'infini. Soit $2M$ la longueur du segment $\overline{T'T}$. En tenant compte de ce que la longueur du segment $\overline{OK}$ est $|x|$, on peut donner la d é f i n i t i o n suivante:

On dit qu'une grandeur x est infiniment grande, ou tend vers l'infini, si $|x|$, lorsque x varie, devient et reste supérieure à un nombre positif donné M. Autrement dit: une grandeur x est infiniment grande, si elle remplit la condition suivante: *pour tout nombre positif donné M il existe une valeur de la variable x, telle que l'inégalité $|x| > M$ est observée pour toutes les valeurs suivantes de x.*

En particulier, si une grandeur infiniment grande x reste constamment positive à partir d'une certaine valeur déterminée (le point K est à droite du point O), on dit que x tend vers plus l'infini $(+\infty)$. De même, si une grandeur x reste négative (le point K est à gauche du point O), on dit que x tend vers moins l'infini $(-\infty)$.

Pour désigner une grandeur infiniment grande, on utilise les symboles suivants: $\lim x = \infty$, $\lim x = +\infty$, $\lim x = -\infty$. Au lieu de $\lim x = \infty$, on peut, évidemment, écrire $\lim |x| = +\infty$.

Le terme « infiniment grand » n'est employé que pour formuler la propriété indiquée ci-dessus de variation d'une grandeur variable x, et il faut distinguer ici, comme pour les grandeurs infiniment petites, la notion de grandeur infiniment grande de la notion de *grandeur très grande*.

Si, par exemple, la grandeur x prend successivement les valeurs 1, 2, 3, ..., on a évidemment $\lim x = +\infty$. Si ses valeurs successives sont: $-1, -2, -3, \ldots$, on a : $\lim x = -\infty$; et enfin, si ces valeurs sont: $-1, 2, -3, 4, \ldots$ nous pouvons écrire $\lim x = \infty$.

Etudions encore, comme exemple, la grandeur prenant successivement les valeurs:

$$q, q^2, \ldots, q^n, \ldots \quad (q > 1), \tag{5}$$

et soit $M > 1$ un nombre quelconque donné. L'inégalité $q^n > M$ est équivalente à:

$$n > \frac{\lg_{10} M}{\lg_{10} q},$$

et, par conséquent, si N est le nombre entier le plus grand contenu dans la fraction $\lg_{10} M : \lg_{10} q$, on aura:

$$q^n > M \quad \text{pour} \quad n > N,$$

c'est-à-dire que la variable considérée tend vers $+\infty$.

Si dans la suite (5), on remplace q par $(-q)$, seuls changent les signes des puissances impaires de q. Les valeurs absolues des termes de la suite restent les mêmes, de sorte que pour les valeurs négatives de q supérieures à l'unité en valeur absolue la suite (5) tend vers l'infini.

Par la suite, lorsque nous dirons qu'une grandeur variable tend vers une limite, nous sous-entendrons que cette limite est finie. On dit parfois qu'une grandeur variable tend vers une « limite infinie », en parlant d'une grandeur infiniment grande.

Des définitions précédentes, il résulte que: si une variable x tend vers zéro, la variable $\frac{m}{x}$, où m est une constante donnée différente de zéro, tend vers l'infini, et si x tend vers l'infini, $\frac{m}{x}$ tend vers zéro.

I-2-6. Variables monotones. En étudiant une grandeur variable, nous sommes souvent dans l'impossibilité de trouver sa limite, mais ce qui nous importe, c'est de savoir si cette limite existe, autrement dit, si la variable tend vers une limite. Donnons un critère important d'existence de la limite.

Supposons qu'une variable x croît constamment (plus précisément, qu'elle ne décroît jamais), ou bien qu'elle décroît constamment (plus précisément, qu'elle ne croît jamais). Dans le premier cas, chaque valeur de cette variable n'est pas inférieure à toutes les valeurs précédentes, ni supérieure à toutes les valeurs suivantes. Dans le second cas, elle n'est pas supérieure aux valeurs précédentes, ni jamais inférieure aux valeurs suivantes. Dans ces cas, on dit que *la grandeur varie de façon monotone.*

Le point correspondant K sur l'axe OX se déplacera alors dans une seule direction, positive si la variable croît, et négative si elle

Fig. 43

décroît. Il est certain que seules deux possibilités peuvent se présenter: ou bien le point K s'éloigne indéfiniment sur la droite ($x \to + \infty$ ou $- \infty$) ou bien le point K se rapproche indéfiniment d'un point déterminé A (fig. 43), c'est-à-dire que la variable x tend vers une limite. Si l'on sait que la grandeur x varie de façon monotone, et que, de plus, elle est bornée, il est évident que K ne peut pas s'éloigner indéfiniment, et on peut affirmer que x tend vers une limite.

Cette considération intuitive n'est pas une démonstration. On donnera une démonstration rigoureuse par la suite.

On formule habituellement le critère d'existence d'une limite de la façon suivante: *si une grandeur variable est bornée et varie de façon monotone, elle tend vers une limite.*

Etudions comme exemple la suite:

$$u_1 = \frac{x}{1}, \quad u_2 = \frac{x^2}{2!}, \quad u_3 = \frac{x^3}{3!}, \quad \ldots, \quad u_n = \frac{x^n}{n!} \quad \ldots^*, \tag{6}$$

où x est un nombre positif donné.

On a:

$$u_n = u_{n-1} \frac{x}{n}. \tag{7}$$

Pour $n > x$, la fraction $\frac{x}{n}$ sera inférieure à l'unité et $u_n < u_{n-1}$, que la variable u_n, à partir d'une certaine valeur, diminuera continûment lorsque n croîtra, en restant supérieure à zéro. D'après le

* Le symbole $n!$ est l'abréviation de la notation du produit $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n$ et s'appelle «factorielle n».

critère d'existence d'une limite, cette variable tendra vers une limite déterminée u. Nous allons dans l'égalité (7) faire croître indéfiniment le nombre entier n. Nous obtiendrons comme limite:

$$u = u \cdot 0, \quad \text{ou} \quad u = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0. \tag{8}$$

Si, dans la suite (6), nous remplaçons x par $(-x)$, seuls changent de signe les termes d'exposant n impair, et cette suite tendra vers zéro comme auparavant, c'est-à-dire que l'égalité (8) est vérifiée pour n'importe quelle valeur donnée de x aussi bien positive que négative.

Nous avons, dans cet exemple, calculé u, nous étant assurés auparavant que cette limite existe. Si nous ne l'avions pas fait, la méthode que nous avons appliquée aurait pu nous conduire à un résultat erroné. Examinons par exemple la suite:

$$u_1 = q, \; u_2 = q^2, \; \ldots, \; u_n = q^n, \; \ldots \quad (q > 1).$$

On a, de toute évidence:

$$u_n = u_{n-1} q.$$

Nous ne nous occuperons pas de l'existence de la limite u_n; nous la désignerons par la lettre u. Passant à la limite, il vient:

$$u = uq, \quad \text{c'est-à-dire} \quad u(1-q) = 0,$$

et, par suite, $u = 0$. Mais cela n'est pas vrai, car pour $q > 1$, comme on le sait, $\lim q^n = +\infty$ [I-2-5].

I-2-7. Critère de Cauchy d'existence d'une limite. Le critère d'existence d'une limite énoncé en [I-2-6] est une condition suffisante mais non nécessaire d'existence d'une limite, étant donné qu'une variable [I-2-3] peut tendre vers une limite, même si elle ne varie pas de façon monotone.

Le mathématicien français Cauchy a donné la condition nécessaire et suffisante d'existence d'une limite que nous allons énoncer maintenant. Si une limite est connue, elle a la propriété caractéristique suivante: à partir d'une certaine valeur de la variable, la valeur absolue de la différence entre la limite et la variable est inférieure à un ε quelconque positif donné. D'après le critère de Cauchy, pour que la limite existe, il faut et il suffit que, à partir d'une certaine valeur de la variable, la différence entre deux valeurs successives quelconques de la variable soit inférieure à un ε positif quelconque donné. Donnons une formulation précise de ce critère.

Critère de Cauchy. *Pour qu'une variable x ait une limite, il faut et il suffit que pour tout nombre ε positif donné il existe une* *valeur de x telle que pour n'importe quelles valeurs successives x' et x'', l'inégalité $|x' - x''| < \varepsilon$ soit vérifiée.*

Supposons que nous ayons une variable indexée

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

D'après le critère de Cauchy, la condition nécessaire et suffisante d'existence d'une limite, pour cette suite, est la suivante: pour

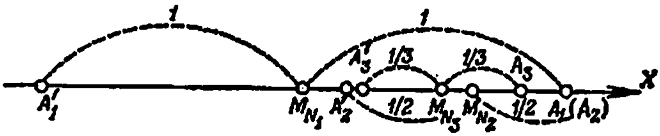

Fig. 44

un ε positif quelconque donné il existe un N (qui dépend de ε) tel que

$$|x_m - x_n| < \varepsilon, \quad \text{si} \quad m \text{ et } n > N. \tag{9}$$

Le fait que cette condition est nécessaire se justifie aisément. Si notre suite possède une limite a, on écrira $x_m - x_n = (x_m - a) + (a - x_n)$, d'où il résulte:

$$|x_m - x_n| \leqslant |x_m - a| + |a - x_n|.$$

Mais d'après la définition d'une limite, il existe un N, tel que $|x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, si m et $n > N$, et par suite, $|x_m - x_n| < \varepsilon$, si m et $n > N$. Bref, si les valeurs de x deviennent aussi voisines que possible de a, elles deviennent aussi voisines que possible entre elles-mêmes.

Sans donner pour le moment une démonstration rigoureuse pour prouver que le critère de Cauchy donne une condition suffisante, nous allons l'illustrer (fig. 44).

Soit M_s un point de l'axe des coordonnées, correspondant au nombre x_s. Supposons remplie la condition (9). D'après cette condition, il existe une valeur $N = N_1$, telle que

$$|x_s - x_{N_1}| < 1, \quad \text{lorsque} \quad s > N_1,$$

c'est-à-dire que tous les points M_s se trouvent, pour $s > N_1$, à l'intérieur du segment $\overline{A'_1 A_1}$, dont la longueur est égale à deux et dont le milieu se trouve au point d'abscisse x_{N_1}.

De même, il existe une valeur $N = N_2$ telle que

$$|x_s - x_{N_2}| < \frac{1}{2}, \quad \text{pour} \quad s > N_2,$$

et l'on peut estimer que $N_2 \geqslant N_1$. Il découle de ce qui vient d'être dit que tous les points x_s pour $s > N_2$ sont contenus dans le segment I, dont la longueur est égale à l'unité et dont le milieu est le point d'abscisse x_{N_2}. D'autre part, tous ces points doivent se trouver à l'intérieur du segment $\overline{A_1'A_1}$, d'où il ressort que les segments I et $\overline{A_1'A_1}$ doivent posséder une partie commune. Soit $\overline{A_2'A_2}$ cette partie commune. En vertu de ce que nous avons dit plus haut pour $s > N_2$ les points M_s doivent se trouver à l'intérieur du segment $\overline{A_2'A_2}$.

De même il existe une valeur $N = N_3 \geqslant N_2$ telle que $|x_s - x_{N_3}| < \frac{1}{3}$ pour $s > N_3$. Comme précédemment, construisons le segment $\overline{A_3'A_3}$ dont la longueur n'est pas supérieure à $\frac{2}{3}$ et qui appartient au segment $\overline{A_2'A_2}$; tous les points M_s pour $s > N_3$ se trouveront à l'intérieur de ce segment. En supposant que $\varepsilon = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ..., $\frac{1}{n}$, ..., nous obtiendrons une série de segments $\overline{A_n'A_n}$, dont chacun est contenu dans le précédent, et dont la longueur tend vers zéro. Il est évident que les extrémités de ces segments tendront vers un seul et même point A, et que le nombre a, correspondant à ce point, sera la limite de la quantité variable x, étant donné qu'il résulte de la construction indiquée ci-dessus, que pour une valeur suffisamment grande de s, tous les points M_s seront aussi proches que possible du point A.

Comme exemple d'application du critère de Cauchy, étudions l'équation de Kepler, qui sert à décrire le mouvement d'une planète sur son orbite. Cette équation est de la forme:

$$x = q \sin x + a,$$

où a et q sont des nombres donnés, dont le second est compris entre zéro et l'unité, et où x est l'inconnue.

Prenons un nombre quelconque x_0 et construisons la suite de nombres:

$$x_1 = q \sin x_0 + a, \qquad x_2 = q \sin x_1 + a, \ \ldots,$$
$$x_n = q \sin x_{n-1} + a, \qquad x_{n+1} = q \sin x_n + a, \ \ldots$$

En retranchant membre à membre la première égalité de la seconde nous obtiendrons:

$$x_2 - x_1 = q(\sin x_1 - \sin x_0) = 2q \sin \frac{x_1 - x_0}{2} \cos \frac{x_1 + x_0}{2}.$$

En considérant que $|\sin \alpha| \leqslant |\alpha|$ et $|\cos \alpha| \leqslant 1$, nous obtiendrons:

$$|x_2 - x_1| \leqslant 2q \frac{|x_1 - x_0|}{2} = q\,|x_1 - x_0|. \tag{10}$$

On peut obtenir également de la même façon l'inégalité suivante:

$$|x_3 - x_2| \leqslant q\,|x_2 - x_1|,$$

ou bien, en utilisant l'inégalité (10),

$$|x_3 - x_2| \leqslant q^2\,|x_1 - x_0|.$$

En continuant les mêmes calculs, nous obtiendrons pour chaque n l'inégalité:

$$|x_{n+1}-x_n| \leqslant q^n |x_1-x_0|. \tag{11}$$

Etudions maintenant la différence $x_m - x_n$, en considérant pour préciser que $m > n$:

$$x_m-x_n = x_m-x_{m-1}+x_{m-1}-x_{m-2}+x_{m-2}-x_{m-3}+\ldots+x_{n+1}-x_n.$$

En utilisant l'inégalité (11) et la formule donnant la somme des termes d'une progression géométrique, nous aurons:

$$|x_m-x_n| \leqslant |x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+$$
$$+|x_{m-2}-x_{m-3}|+\ldots+|x_{n+1}-x_n| \leqslant$$
$$\leqslant (q^{m-1}+q^{m-2}+q^{m-3}+\ldots+q^n)|x_1-x_0| = q^n \frac{1-q^{m-n}}{1-q}|x_1-x_0|.$$

Pour un accroissement illimité de n, le facteur q^n tend vers zéro [I-2-2]; le facteur $|x_1 - x_0|$ est constant: la fraction $\frac{1-q^{m-n}}{1-q}$ est toujours comprise entre zéro et $\frac{1}{1-q}$, c'est-à-dire qu'elle est bornée, car pour $m > n$, q^{m-n} est compris entre zéro et l'unité. Ainsi, pour un accroissement illimité de n et pour $m > n$ quelconque, la différence $x_m - x_n$ tend vers zéro, et la condition (9) est satisfaite. On peut, d'après la condition de Cauchy, affirmer qu'il existe une limite:

$$\lim x_n = \xi.$$

Dans l'égalité

$$x_{n+1} = q \sin x_n + a$$

nous donnerons à n un accroissement illimité. En utilisant le fait que $\lim \sin x_n = \sin \xi$ pour $\lim x_n = \xi$, ce que nous démontrerons dans [I-2-10], nous obtiendrons comme limite:

$$\xi = q \sin \xi + a, \tag{12}$$

c'est-à-dire que la limite ξ de la variable x_n est une racine de l'équation de Kepler.

Pour construire la suite x_n nous partons d'un nombre quelconque x_0. Nous montrerons cependant que l'équation de Kepler ne peut avoir deux racines différentes, c'est-à-dire que $\lim x_n$ ne dépend pas du choix de x_0 et est égale à l'unique racine de l'équation de Kepler.

Supposons qu'en plus de la racine ξ que nous avons trouvée, elle possède une autre racine ξ_1, et démontrons que $\xi_1 = \xi$. Nous avons alors par hypothèse outre (12):

$$\xi_1 = q \sin \xi_1 + a.$$

En retranchant membre à membre l'équation (12) de cette équation, nous obtiendrons:

$$\xi_1-\xi = q(\sin \xi_1 - \sin \xi) = 2q \sin \frac{\xi_1-\xi}{2} \cos \frac{\xi_1+\xi}{2},$$

d'où, comme précédemment:

$$|\xi_1-\xi| \leqslant 2q \left| \sin \frac{\xi_1-\xi}{2} \right|.$$

Mais $|\sin \alpha| \leqslant |\alpha|$ pour tout angle α, et cette dernière inégalité donne:

$$|\xi_1-\xi| \leqslant q|\xi_1-\xi|.$$

q étant compris entre zéro et 1, l'inégalité précédente n'est vérifiée que pour $|\xi_1 - \xi| = 0$, c'est-à-dire $\xi_1 = \xi$ et, par conséquent, l'équation de Kepler n'a qu'une seule racine.

I-2-8. Variation simultanée de deux grandeurs variables liées par une relation fonctionnelle. Soit une fonction $y = f(x)$ définie sur un certain ensemble de valeurs de x, par exemple dans un certain intervalle. Utilisant les valeurs de x de l'ensemble mentionné, nous pouvons construire divers ensembles ordonnés de valeurs de la variable x, et nous obtiendrons alors les ensembles ordonnés correspondants des valeurs de la variable $y = f(x)$ [I-2-1]. La variable ordonnée x sert à ordonner $f(x)$. Nous considérerons dans ce paragraphe un cas particulier important de ce processus.

Soit une fonction $f(x)$ définie sur un certain segment contenant le point $x = c$. Choisissant un nombre positif k suffisamment petit, nous pouvons estimer que par cela même la fonction $f(x)$ est définie sur l'intervalle $c - k < x \leqslant c + k$. Considérons trois cas d'ordonnancement des valeurs de x: $x \to c - 0$, $x \to c + 0$, $x \to c \pm 0$ et la variable ordonnée $f(x)$ correspondant à ces cas. Supposons que dans le premier cas la variable ait une limite. Désignons-la par la lettre A_1. Dans ce cas on écrit:

$$\lim_{x \to c-0} f(x) = A_1. \tag{13}$$

Exactement de la même façon dans le second cas en présence d'une limite (désignons-la par la lettre A_2), on écrit:

$$\lim_{x \to c+0} f(x) = A_2. \tag{14}$$

On désigne souvent les limites (13) et (14) par les symboles $f(c - 0)$ et $f(c + 0)$, de sorte que

$$\lim_{x \to c-0} f(x) = f(c-0), \qquad \lim_{x \to c+0} f(x) = f(c+0).$$

Notons que ce sont les limites de $f(x)$ quand x tend vers c de la gauche et de la droite. Dans le troisième cas, x tend vers c des deux côtés et l'existence de la limite

$$\lim_{x \to c\pm 0} f(x) = B \tag{15}$$

est évidemment équivalente à ceci: les limites (13) et (14) existent et sont égales ($A_1 = A_2$). Dans ce cas, $B = A_1 = A_2$.

Il ne faut pas confondre les symboles $f(c - 0)$ et $f(c + 0)$ avec $f(c)$, autrement dit, avec la valeur de $f(x)$ pour $x = c$. Dans ce qui précède nous ne nous sommes aucunement servis de cette valeur et au cours de notre exposé précédent $f(x)$ peut ne pas être déterminée pour $x = c$. Si la fonction est déterminée pour $x = c$ et $f(c - 0) = f(c + 0) = f(c)$, autrement dit,

$$\lim_{x \to c\pm 0} f(x) = f(c),$$

on dit alors que *la fonction est continue pour* $x = c$ (au point c). Utilisant la définition de la limite pour x et $f(x)$, on peut aisément indiquer les conditions équivalentes à l'existence des limites (13), (14) et (15). L'existence de la limite (13) est évidemment équivalente au fait que $f(x)$ devient arbitrairement proche de A_1 quand x s'approche suffisamment du point c, tout en restant inférieur à c. Plus exactement, (13) est équivalent à ceci : pour tout nombre positif donné ε il existe un nombre positif η tel que

$$|f(x)-A_1|<\varepsilon, \quad \text{si} \quad 0<c-x<\eta. \tag{13_1}$$

η dépend alors du choix de ε. Exactement de la même façon, (14) est équivalent à ceci : pour tout nombre positif donné ε il existe un nombre positif η tel que

$$|f(x)-A_2|<\varepsilon, \quad \text{si} \quad 0<x-c<\eta, \tag{14_1}$$

et (15) est équivalent à ce qui suit : pour tout nombre positif donné ε il existe un nombre positif η, tel que :

$$|f(x)-B|<\varepsilon, \quad \text{si} \quad |x-c|<\eta. \tag{15_1}$$

Notons encore ce fait évident : *si la limite* (15) *existe, alors* $f(x)$ *a la limite* B *quelle que soit la loi de la tendance de la variable ordonnée* x *vers* c. Une remarque analogue est valable également pour les limites (13) et (14) quand x tend vers c de la gauche et de la droite.

Par la suite nous considérerons en détail la notion de continuité et les propriétés des fonctions continues. Nous nous arrêterons aux cas où x ou $f(x)$ tendent vers l'infini [I-2-5]. On peut aisément étendre les définitions précédentes à ces cas également. Il n'est pas difficile, par exemple, de voir que

$$\lim_{x\to c-0}\frac{1}{x-c}=-\infty, \qquad \lim_{x\to c+0}\frac{1}{x-c}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\operatorname{tg} x=+\infty, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\operatorname{tg} x=-\infty.$$

Supposons que $f(x)$ est déterminée pour tous les x suffisamment grands et que la variable ordonnée x tend d'une manière arbitraire vers $+\infty$ [I-2-5]. Alors $f(x)$ est aussi une variable ordonnée et peut avoir une limite finie :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A. \tag{16}$$

Cela est équivalent à ce qui suit : pour tout nombre positif ε donné il existe un nombre M, tel que :

$$|f(x)-A|<\varepsilon, \quad \text{si} \quad x>M. \tag{16_1}$$

En particulier, l'ordonnancement de x peut consister en ce que x augmente indéfiniment, en prenant des valeurs réelles de plus en plus grandes. On peut considérer de même le cas où $x\to-\infty$.

Si $f(x)$ est déterminée pour tous les x, suffisamment grands en valeur absolue, et que la variable ordonnée x tend vers ∞ [I-2-5], il se peut qu'existe la limite finie, pareillement au cas précédent:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

Cela est équivalent à ce qui suit: pour tout nombre positif donné ε il existe un nombre positif M, tel que:

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{si} \quad |x| > M.$$

En particulier, x peut tendre vers l'infini, en prenant des valeurs toutes distinctes suffisamment grandes en valeur absolue. On peut les ordonner de même que nous l'avons fait en [I-2-1] pour la variable non indexée x, vérifiant la condition $a - k \leqslant x < a + k$ (excepté $x = a$). Notons que pour la variable indexée $x_1, x_2, x_3, \ldots$, possédant la limite a, on écrit souvent au lieu de $\lim x_n = a$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Dans ce cas, $n \to \infty$ signifie que n augmente, en prenant toutes les valeurs entières positives.

On peut parler également de limites infinies de $f(x)$. En particulier,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

signifie que pour tout nombre négatif donné M_1 il existe un nombre M, tel que $f(x) < M_1$, si $x > M$. D'une manière analogue, on peut définir d'autres cas de limite infinie.

Il n'est pas difficile de démontrer les égalités suivantes:

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{3x^2+x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{3},$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+5}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Etudions encore un exemple physique. Supposons que nous faisons chauffer un corps solide, et soit t_0 sa température initiale. Sous l'effet de la chaleur, la température du corps va s'élever jusqu'à ce qu'elle atteigne le point de fusion. Si l'on continue de chauffer, la température restera invariable jusqu'à ce que le corps passe entièrement à l'état liquide, et que recommence à s'élever la température du liquide formé. Une situation analogue se présente lors du passage de l'état liquide à l'état gazeux. Nous considérerons que la quantité Q de chaleur communiquée à ce corps est une fonction de la tempéra-

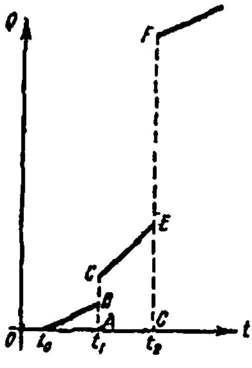

Fig. 45

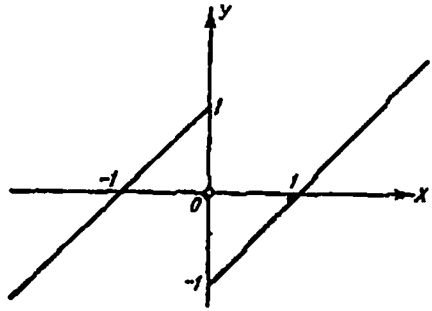

Fig. 46

ture. Sur la fig. 45 on a représenté la courbe de cette fonction, la température est portée sur l'axe horizontal, et la quantité de chaleur absorbée sur l'axe vertical. Soit t_1 la température à laquelle le corps commence à passer à l'état liquide, et t_2 la température à laquelle le liquide passe à l'état gazeux. Il est évident que:

$$\lim_{t\to t_1-0} Q=\text{ord. } \overline{AB} \quad \text{et} \quad \lim_{t\to t_1+0} Q=\text{ord. } \overline{AC}.$$

La grandeur du segment $\overline{BC}$ donne la chaleur latente de fusion, et la grandeur du segment $\overline{EF}$ donne la chaleur latente de vaporisation.

Si les limites $f(c-0)$ et $f(c+0)$ existent et sont différentes, la différence $f(c+0)-f(c-0)$ est le saut de la fonction $f(x)$ pour $x=c$ (au point $x=c$).

La fonction $y=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x-c}$ a, pour $x=c$, un saut égal à π. La fonction $Q(t)$ que nous venons d'étudier a, au point de fusion $t=t_1$, un saut égal à la chaleur latente de fusion.

En déterminant la limite $f(x)$ pour x tendant vers c, nous avons considéré que x tend vers c sans jamais se confondre avec lui. Cette réserve est essentielle, car la valeur de $f(x)$ pour $x=c$ n'existe pas toujours, ou bien n'a rien de commun avec les valeurs de $f(x)$ pour les valeurs de x voisines de c. Ainsi, par exemple, la fonction $Q(t)$ n'est pas déterminée pour $t=t_1$.

Etudions encore un exemple pour éclaircir ceci. Supposons que, dans l'intervalle $(-1, +1)$, la fonction est définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} &y = x+1 && \text{pour} && -1 \leqslant x < 0; \\ &y = x-1 && \text{pour} && 0 < x \leqslant 1; \\ &y = 0 && \text{pour} && x = 0. \end{aligned}$$

On a reproduit sur la fig. 46 la courbe représentative de cette fonction, qui se compose de deux segments de droites, à l'exclusion des extrémités (pour $x = 0$), et d'un point particulier, l'origine des coordonnées. Dans ce cas nous aurons :

$$\lim_{x\to -0} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to +0} f(x) = -1, \quad f(0) = 0.$$

I-2-9. Exemples. 1. On sait que pour tout x est vérifiée l'inégalité $|\sin x| \leqslant |x|$ et que le signe d'égalité n'a lieu que pour $x = 0$. Rappelons que la variable x est alors exprimée en radians. Il découle de ce que nous venons de dire que pour tout nombre positif donné ε nous avons $|\sin x| < \varepsilon$, si $|x| < \varepsilon$, autrement dit,

$$\lim_{x\to\pm 0} \sin x = 0.$$

2. Nous avons encore :

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \leqslant 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2},$$

autrement dit, $0 \leqslant 1 - \cos x \leqslant \frac{x^2}{2}$, d'où il découle que [I-2-3]

$$\lim_{x\to\pm 0} \cos x = 1.$$

3. Considérons le rapport

$$y = \frac{\sin x}{x}.$$

Cette fonction est déterminée pour tous les x sauf $x = 0$, car pour $x = 0$ le numérateur et le dénominateur s'annulent et la fraction n'a plus de sens. Etudions la variation de y quand $x \to \pm 0$. Quand le signe de x varie, la grandeur y ne varie pas, de sorte qu'il suffit de supposer que $x \to +0$. Montrons que $y \to 1$ quand $x \to +0$. Nous obtiendrons la même limite quand $x \to -0$. Notons que nous ne pouvons utiliser le théorème sur la limite du rapport car le numérateur et le dénominateur tendent vers zéro quand $x \to +0$.

Nous considérerons x comme l'angle au centre d'un cercle de rayon unité (fig. 47). Prenant en considération le fait que surf. $\triangle AOB <$ $<$ surf. secteur $AOB <$ surf. $\triangle AOC$, nous obtenons:

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

d'où en divisant par $\frac{1}{2}\sin x$, nous obtenons:

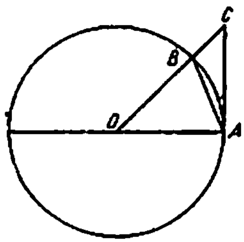

Fig. 47

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

ou

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x. \tag{17}$$

Mais $\cos x \to 1$ quand $x \to +0$, d'où:

$$\lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

et, en vertu de ce que nous avons dit plus haut,

$$\lim_{x \to \pm 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Déterminons pour ce cas le nombre η, qui entre dans la condition (15_1). Retranchant de un les trois parties de l'inégalité (17), nous obtenons

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

d'où il découle que

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon,$$

si $1 - \cos x < \varepsilon$. Mais, comme nous l'avons déjà vu plus haut, $1 - \cos x < \frac{x^2}{2}$, et il suffit de choisir $\frac{x^2}{2} < \varepsilon$, c'est-à-dire $|x| <$ $< \sqrt{2\varepsilon}$. Ainsi, dans le cas présent, $\sqrt{2\varepsilon}$ peut jouer le rôle du nombre η.

1-2-10. Continuité des fonctions. Donnons encore une fois la définition de la continuité d'une fonction au point $x = c$, lorsque cette fonction est déterminée en ce point et dans son voisinage à gauche et à droite.

Définition. *La fonction $f(x)$ définie pour $x = c$ et pour toutes les valeurs de x, suffisamment proches de c, est dite continue pour $x = c$ (au point c), si la limite de $f(x)$ existe pour $x \to c \pm 0$ et si cette limite est égale à $f(c)$:*

$$\lim_{x \to c \pm 0} f(x) = f(c). \tag{18}$$

Rappelons qu'il revient au même de dire que: *les limites* $f(c-0)$ *et* $f(c+0)$ *à gauche et à droite existent, et ces limites sont égales entre elles et égales à* $f(c)$, *autrement dit,* $f(c-0)=f(c+0)=f(c)$.

Il découle de [I-2-8] que cette définition équivaut également à ce qui suit: *pour un nombre quelconque positif donné* ε, *il existe un nombre positif* η, *tel que*

$$|f(x)-f(c)|<\varepsilon \quad pour \quad |x-c|<\eta. \tag{19}$$

Nul besoin de spécifier que $x \neq c$, car $f(x)-f(c)=0$ pour $x=c$. Nous pouvons le formuler autrement ainsi: $f(x)-f(c) \to 0$ pour $x-c \to \pm 0$. La différence $x-c$ est l'accroissement de la variable indépendante, et la différence $f(x)-f(c)$ l'accroissement correspondant de la fonction, c'est pourquoi la définition donnée de la continuité d'une fonction est souvent ainsi formulée:

Une fonction est dite continue en un point $x=c$, *si à un accroissement infiniment petit de la variable indépendante (à partir d'une valeur initiale* $x=c$*) correspond un accroissement infiniment petit de la fonction.*

Remarquons que la propriété de continuité, exprimée par l'équation (18), permet de trouver la limite d'une fonction, en remplaçant la variable indépendante par sa limite.

Nous voyons, d'après les formules citées [I-2-4], qu'un polynôme entier en x et le quotient de tels polynômes, c'est-à-dire une fonction rationnelle de x, sont des fonctions continues pour n'importe quelle valeur de x, sauf les valeurs pour lesquelles le dénominateur de la fonction rationnelle s'annule.

La fonction $y=b$ sera, de toute évidence, continue, cette fonction gardant la même valeur pour toutes les valeurs de x [I-1-12].

Toutes les fonctions élémentaires que nous avons étudiées dans le premier chapitre (fonctions puissance, exponentielle, logarithmique, trigonométriques et circulaires inverses) sont continues pour toutes les valeurs de x pour lesquelles elles existent, sauf les valeurs pour lesquelles elles tendent vers l'infini.

Ainsi, par exemple, $\lg_{10} x$ est une fonction continue de x pour toutes les valeurs positives de x; $\operatorname{tg} x$ est une fonction continue de x pour toutes les valeurs de x, sauf les valeurs

$$x=(2k+1)\frac{\pi}{2},$$

où k est un entier quelconque.

Notons encore la fonction u^v où u et v sont des fonctions continues de x, où l'on suppose que u ne prend pas de valeurs négatives. Dans les ouvrages mathématiques russes elle est appelée fonction *puissance-exponentielle*. (*N.R.*). Elle a aussi la propriété de continuité, excepté pour les valeurs de x pour lesquelles u et v sont simultanément égaux à zéro, ou bien pour $u=0$ et $v<0$.

Il faudrait démontrer de façon rigoureuse l'affirmation que nous avons faite sur la continuité des fonctions élémentaires, mais nous l'adopterons sans démonstration. Par la suite nous considérerons cette question plus en détail. Démontrons uniquement la continuité de la fonction $\sin x$ pour tout $x = c$, en utilisant la définition (19). Nous avons [cf. I-2-7]:

$$\sin x - \sin c = 2 \sin \frac{x-c}{2} \cos \frac{x+c}{2},$$

d'où il découle :

$$|\sin x - \sin c| = 2\left|\sin \frac{x-c}{2}\right|\left|\cos \frac{x+c}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin \frac{x-c}{2}\right|.$$

Mais $|\sin \alpha| \leqslant |\alpha|$ pour tout angle α et, par conséquent,

$$|\sin x - \sin c| \leqslant |x-c|.$$

Pour avoir $|\sin x - \sin c| < \varepsilon$, où ε est un nombre positif donné, il suffit d'estimer que $|x - c| < \varepsilon$, autrement dit, le nombre ε peut jouer le rôle de η dans la définition (19).

Il n'est pas difficile de démontrer que *la somme ou le produit d'un nombre entier fini quelconque de fonctions continues est également une fonction continue*; *cela est valable également pour le quotient de deux fonctions continues, sauf pour les valeurs de la variable indépendante pour lesquelles le dénominateur tend vers zéro.*

Etudions un cas particulier seulement. Supposons que les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont continues pour $x = a$ et que $\psi(a) \neq 0$. Formons la fonction :

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

En utilisant le théorème de la limite d'un quotient, on obtiendra :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)}{\lim\limits_{x \to a} \psi(x)} = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = f(a),$$

ce qui prouve la continuité du quotient $f(x)$ pour $x = a$.

Voici un exemple très simple. Etant donné que $y = \sin x$ est une fonction continue de x, $y = b \sin x$, où b est une constante, sera également une fonction continue, puisqu'elle est le produit des fonctions continues $y = b$ (voir plus haut) et $y = \sin x$.

Revenons maintenant à la fonction $y = \frac{\sin x}{x}$. Pour $x = 0$, cette fonction n'est pas définie, mais nous savons que $\lim\limits_{x \to \pm 0} y = 1$. C'est pourquoi, si nous supposons que $y = 1$ pour $x = 0$, y sera une fonction continue au point $x = 0$.

Cette façon de trouver la limite d'une fonction, lorsque x tend vers un point où elle n'est pas définie, s'appelle *calcul d'expressions indéterminées* et la limite elle-même, si elle existe, s'appelle parfois *la vraie valeur* de la fonction au point où elle n'est pas définie. Nous aurons par la suite beaucoup d'exemples où nous aurons à lever l'indétermination.

I-2-11. Propriétés des fonctions continues. Nous avons défini plus haut la continuité d'une fonction pour une valeur donnée de x. Supposons maintenant que la fonction est définie sur un intervalle borné $a \leqslant x \leqslant b$. *Si elle est continue pour n'importe quelle valeur de x de cet intervalle, on dit qu'elle est continue dans l'intervalle* (a, b). Romarquons ici que la continuité de la fonction aux bornes de l'intervalle $x = a$ et $x = b$ s'exprime :

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x \to b-0} f(x) = f(b).$$

Toutes les fonctions continues possèdent les propriétés suivantes :

1. *Si une fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b), il existe dans cet intervalle au moins une valeur de x pour laquelle $f(x)$ prend sa plus grande valeur, et au moins une valeur de x pour laquelle la fonction prend sa plus petite valeur.*

2. *Si la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b), tandis que $f(a) = m$ et $f(b) = n$, et si k est un nombre quelconque compris entre m et n, il existe dans l'intervalle (a, b) au moins une valeur de x pour laquelle $f(x)$ est égale à k ; en particulier, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes différents, il existe à l'intérieur de l'intervalle (a, b) au moins une valeur de x pour laquelle $f(x)$ s'annule.*

Ces deux propriétés deviennent tout à fait évidentes, si l'on considère que, lorsqu'une fonction est continue, sa courbe représentative se présentera sous forme d'une courbe continue. Cette considération ne peut, bien entendu, servir de démonstration. La notion de courbe continue, évidente à première vue, s'avère extrêmement complexe si l'on fait une étude plus poussée. La démonstration rigoureuse des deux propriétés énoncées, ainsi que de la suivante, est basée sur la théorie des nombres irrationnels. Nous admettrons ces propriétés sans démonstration.

Dans les derniers alinéas du présent paragraphe, nous dégagerons les bases de la théorie des nombres irrationnels et le lien entre cette théorie et la théorie des limites, et les propriétés des fonctions continues. Notons que l'on peut formuler la deuxième propriété des fonctions continues de la façon suivante : lorsque x varie de façon continue de a à b, la fonction continue $f(x)$ passe au moins une fois par tous les nombres qui se trouvent entre $f(a)$ et $f(b)$.

Sur les fig. 48 et 49 on a tracé la courbe représentative d'une fonction continue dans l'intervalle (a, b), où $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Sur la fig. 48, la courbe coupe une seule fois l'axe OX, et pour la valeur correspondante de x, la fonction $f(x)$ s'annule. Dans le cas de la fig. 49, il n'y aura pas une mais trois valeurs de ce genre.

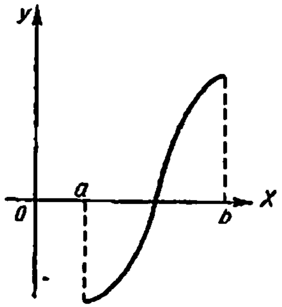

Fig. 48

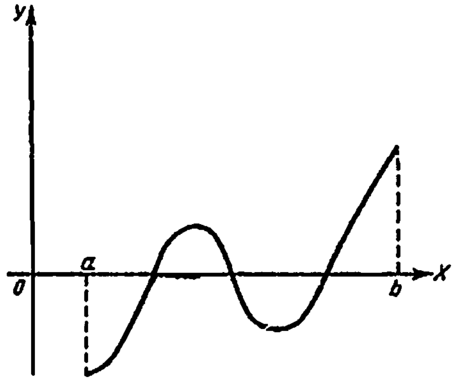

Fig. 49

Nous allons passer maintenant à la troisième propriété des fonctions continues, qui apparaît moins évidente que les deux précédentes.

3. Si une fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b) et si $x = x_0$ est une valeur déterminée de x dans cet intervalle, d'après la convention (19) en [I-2-10] (en remplaçant c par x_0), pour n'importe quel ε positif donné, il existe un η, dépendant évidemment de ε, tel que

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon, \quad \text{si} \quad |x-x_0|<\eta,$$

où nous considérerons x, bien entendu, comme appartenant à l'intervalle (a, b). (Si, par exemple, $x_0 = a$, x sera obligatoirement supérieur à a, et si $x_0 = b$, $x < b$.) Mais le nombre η peut ne pas dépendre seulement de ε, mais aussi de la valeur de $x = x_0$ de l'intervalle (a, b) que nous examinons. La troisième propriété des fonctions continues réside dans le fait que pour un ε quelconque donné, il existe un seul et même η pour toutes les valeurs x_0 de l'intervalle (a, b). Autrement dit, *si $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b), pour ε positif quelconque donné il existe un nombre η positif, tel que*

$$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon \tag{20}$$

pour n'importe quelle valeur x' et x'' de l'intervalle (a, b) vérifiant *l'inégalité*

$$|x'' - x'| < \eta. \tag{21}$$

On appelle cette propriété *la continuité uniforme*. Ainsi, *si une fonction est continue dans l'intervalle* (a, b), *elle est uniformément continue dans cet intervalle.*

Remarquons encore une fois que nous avons supposé la fonction $f(x)$ continue non seulement pour toutes les valeurs de x se trouvant dans l'intervalle (a, b) mais aussi pour les valeurs $x = a$ et $x = b$.

Nous allons préciser les propriétés de continuité uniforme par un exemple. D'abord, écrivons les inégalités précédentes sous une autre forme, en remplaçant la lettre x' par x, et x'' par $(x + h)$. Ici $x'' - x' = h$ représente l'accroissement de la variable indépendante et $f(x + h) - f(x)$ représente l'accroissement correspondant de la fonction. On écrit la propriété de continuité uniforme de la façon suivante:

$$|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{si} \quad |h| < \eta,$$

où x et $(x + h)$ sont deux points quelconques de l'intervalle (a, b).

Etudions comme exemple la fonction

$$f(x) = x^2.$$

Dans ce cas nous avons:

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = 2xh + h^2.$$

Pour toute valeur donnée de x, l'expression $(2xh + h^2)$, exprimant l'accroissement de notre fonction, tend évidemment vers zéro si l'accroissement de la variable indépendante tend vers zéro. Cela confirme une nouvelle fois [I-2-10] que la fonction choisie est continue pour toute valeur de x. Par là même elle sera continue, par exemple, dans l'intervalle $-1 \leqslant x \leqslant 2$. Démontrons qu'elle sera uniformément continue dans cet intervalle. Il nous faut vérifier l'inégalité

$$|2xh + h^2| < \varepsilon \tag{22}$$

par un choix correspondant du nombre η dans l'inégalité $|h| < \eta$, en outre, x et $(x + h)$ doivent appartenir à l'intervalle $(-1, 2)$. On a

$$|2xh + h^2| \leqslant |2xh| + h^2 = 2|x||h| + h^2.$$

Mais la plus grande valeur de $|x|$ dans l'intervalle $(-1, 2)$ est égale à deux, et c'est pourquoi on peut remplacer l'inégalité précédente par une autre, plus forte:

$$|2xh + h^2| \leqslant 4|h| + h^2.$$

On considérera, en tout cas, que $|h| < 1$. Dans ce cas, $h^2 < |h|$, et on peut transcrire l'inégalité précédente sous la forme:

$$|2xh + h^2| < 4|h| + |h|$$

ou

$$|2xh + h^2| < 5|h|.$$

Il est certain que l'inégalité (22) sera satisfaite, si nous exigeons que $|h|$ vérifie la condition $5|h| < \varepsilon$. Ainsi, h doit satisfaire aux deux inégalités:

$$|h| < 1 \quad \text{et} \quad |h| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

On peut prendre à la place du nombre η le plus petit des deux nombres 1 et $\frac{\varepsilon}{5}$.

Pour les petites valeurs de ε (précisément quand $\varepsilon < 5$), on doit prendre $\eta = \frac{\varepsilon}{5}$, et il est évident en tout cas que η sera, pour ε donné, le même pour toutes les valeurs de x de l'intervalle $(-1, 2)$.

Les propriétés indiquées ne sont plus valables dans le cas de fonctions discontinues ou de fonctions continues seulement *à l'intérieur* d'un intervalle. Etudions la fonction représentée sur la fig. 46. Elle est définie dans l'intervalle $(-1, +1)$ et présente une discontinuité pour $x = 0$. Parmi ses valeurs, il y en a qui sont aussi voisines que possible de l'unité, mais elle ne prend pas de valeur égale à l'unité, ni de valeurs supérieures à l'unité. Ainsi, parmi les valeurs de cette fonction, il n'y a pas de plus grande valeur. De même, il n'y a pas, parmi ces valeurs, de plus petite valeur. La fonction élémentaire $y = x$ ne prend pas dans l'intervalle $(0, 1)$ ni de plus grande valeur ni de plus petite valeur. Si l'on considère cette fonction dans l'intervalle fermé $(0, 1)$, elle atteindra sa plus petite valeur pour $x = 0$ et sa plus grande valeur pour $x = 1$. Etudions encore la fonction $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, continue dans l'intervalle $0 < x \leqslant 1$, ouvert à gauche. Lorsque x tend vers zéro, l'argument $\frac{1}{x}$ croît indéfiniment, et $\sin\frac{1}{x}$ oscille entre (-1) et $(+1)$ et n'a pas de limite pour $x \to +0$. Montrons que la fonction étudiée n'est pas uniformément continue dans l'intervalle $0 < x \leqslant 1$. Examinons deux valeurs: $x' = \frac{1}{n\pi}$ et $x'' = \frac{2}{(4n+1)\pi}$, où n est un nombre entier positif. Elles appartiennent toutes deux à l'intervalle mentionné quel que soit n. Nous avons:

$$f(x') = \sin n\pi = 0, \quad f(x'') = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Ainsi:

$$f(x'') - f(x') = 1 \quad \text{et} \quad x'' - x' = \frac{2}{(4n+1)\pi} - \frac{1}{n\pi}.$$

Lorsque le nombre entier positif n croît indéfiniment, la différence $x'' - x'$ tend vers zéro et la différence $f(x'') - f(x')$ reste égale à l'unité. On voit qu'il n'existe pas de η positif dans l'intervalle $0 < x \leqslant 1$ tel que, de l'inégalité (21), il résulte que $|f(x'') - f(x')| < 1$; cela résulte du choix de $\varepsilon = 1$ dans la formule (20).

Prenons la fonction $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$. Pour $x \to +0$, le premier facteur x tend vers zéro, et le second $\sin\frac{1}{x}$ ne dépasse pas l'unité en valeur absolue, et c'est pourquoi [I-2-8] $f(x) \to 0$ pour $x \to +0$. Pour $x = 0$, le second facteur n'a pas de sens, mais si nous complétons la définition de notre fonction, en posant $f(0) = 0$, c'est-à-dire si nous considérons que $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$ pour $0 < x \leqslant 1$ et $f(0) = 0$, nous obtiendrons alors une fonction continue dans l'intervalle fermé (0, 1). Les fonctions $\sin\frac{1}{x}$ et $x\sin\frac{1}{x}$ sont, comme on le voit, continues pour n'importe quelle valeur de x différente de zéro.

I-2-12. Comparaison des infiniment petits et des infiniment grands. Dans ce qui suit nous désignerons par les lettres α et β des variables ordonnées, possédant une même variable d'ordonnancement (l'indice n ou la variable t), de sorte que nous pouvons effectuer des opérations élémentaires sur ces variables.

Si α et β sont deux variables tendant vers zéro, le théorème de la limite d'un quotient n'est pas applicable à leur quotient $\frac{\beta}{\alpha}$ et sans recherches supplémentaires nous ne saurons rien dire à propos de l'existence d'une limite de ce quotient.

Nous estimerons que les variables α et β, qui tendent vers zéro, ne prennent pas la valeur zéro au cours de leur variation. Si le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ tend vers une limite finie a, différente de zéro, le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ tend aussi vers une limite finie $\frac{1}{a}$, différente de zéro. On dit dans ce cas que α et β sont *des infiniment petits du même ordre*.

Si la limite du rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ est égale à zéro, on dit que β est *un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à* α, et que α *est un infiniment petit d'ordre inférieur par rapport à* β. Si le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ tend vers l'infini, $\frac{\alpha}{\beta}$ tend vers zéro, c'est-à-dire que β est d'ordre inférieur par rapport à α, et que α est d'ordre supérieur par rapport à β. Il est facile de montrer que *si* α *et* β *sont des infiniment petits du même ordre et* γ *un infiniment petit d'un ordre supérieur par rapport à* α, γ *sera également un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à* β. Par hypothèse $\frac{\gamma}{\alpha}\to 0$ et le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ a une limite finie non nulle. De l'égalité $\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}$, d'après le théorème sur la limite du produit, il résulte que $\frac{\gamma}{\beta}\to 0$ et notre affirmation est démontrée.

Un cas particulier important est celui des infiniment petits du même ordre. Si $\frac{\alpha}{\beta}\to 1$ (et dans ce cas $\frac{\beta}{\alpha}$ tend aussi vers 1), les infiniment petits α et β sont *équivalents*. De l'égalité $\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}-1$ il résulte que *l'équivalence de* α *et* β *entraîne que la différence* $\beta-\alpha$ *est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à* α. De l'égalité $\frac{\beta-\alpha}{\beta}=1-\frac{\alpha}{\beta}$ il résulte de même que l'équivalence entraîne que $\beta-\alpha$ est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à β.

Si le rapport $\frac{\beta}{\alpha^k}$, où k est un nombre positif constant, tend vers une limite finie, non nulle, on dit que β est *un infiniment petit d'ordre k par rapport à* α. Si $\frac{\beta}{\alpha^k} \to c$, où c est un nombre non nul, alors $\frac{\beta}{c\alpha^k} \to 1$, c'est-à-dire que β et $c\alpha^k$ sont des infiniment petits équivalents, et par suite la différence $\gamma = \beta - c\alpha^k$ est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à β (ou par rapport à α^k). Si l'on prend α pour infiniment petit principal, l'égalité $\beta = c\alpha^k + \gamma$, où γ est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à α^k, représente la différence entre l'infiniment petit β et l'infiniment petit $c\alpha^k$ (d'ordre inférieur par rapport à α) de sorte que le reste γ est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à β (ou par rapport à α^k).

On compare deux infiniment grands u et v de façon analogue. Si $\frac{v}{u}$ tend vers une limite finie, non nulle, on dit que u et v sont des infiniment grands du même ordre. Si $\frac{v}{u} \to 0$, alors $\frac{u}{v} \to \infty$. Dans ce cas, on dit que v est un infiniment grand d'ordre inférieur par rapport à u, et que u est un infiniment grand d'ordre supérieur par rapport à v. Si $\frac{v}{u} \to 1$, on dit que les infiniment grands sont équivalents. Si $\frac{v}{u^k}$, où k est un nombre positif constant, a une limite finie, non nulle, on dit que v est un infiniment grand d'ordre k par rapport à u. Tout ce qui a été dit plus haut des infiniment petits reste valable pour les infiniment grands.

Remarquons encore que, si le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ ou $\frac{v}{u}$ ne possède pas de limite, on dit que les infiniment petits ou les infiniment grands ne sont pas comparables.

I-2-13. Exemples. 1. Nous avons vu plus haut que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

c'est-à-dire que $\sin x$ et x sont des infiniment petits équivalents, et par suite, la différence $\sin x - x$ est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à x. Nous verrons plus loin que cette différence est équivalente à $-\frac{1}{6}x^3$, c'est-à-dire qu'elle est un infiniment petit du troisième ordre par rapport à x.

2. Montrons que la différence $1 - \cos x$ est un infiniment petit du second ordre par rapport à x. En effet, à l'aide d'une formule trigonométrique bien

connue et des transformations élémentaires, il vient:

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2.$$

Si $x\to 0$, alors $\alpha=\frac{x}{2}$ tend aussi vers zéro, et, comme nous l'avons montré:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1,$$

et par suite,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},$$

c'est-à-dire que, en effet, $1-\cos x$ est un infiniment petit du second ordre par rapport à x.

3. De la formule

$$\sqrt{1+x}-1=\frac{x}{\sqrt{1+x}+1}$$

il résulte:

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1},$$

d'où

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{2},$$

c'est-à-dire que $\sqrt{1+x}-1$ et x sont des infiniment petits du même ordre, et $\sqrt{1+x}-1$ est équivalent à $\frac{1}{2}x$.

4. Démontrons qu'un polynôme de degré m est un infiniment grand d'ordre m par rapport à x. En effet:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{x^m}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{a_m}{x^m}\right)=a_0.$$

Il n'est pas difficile de voir que deux polynômes de même degré sont, pour $x\to\infty$, des infiniment grands du même ordre. Leur rapport a pour limite le rapport des coefficients des termes de degré le plus élevé. Par exemple:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+x-3}{7x^2+2x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}{7+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}=\frac{5}{7}.$$

Si les degrés de deux polynômes sont différents, pour $x \to \infty$, celui d'entre eux dont le degré est plus élevé, sera un infiniment grand d'ordre supérieur par rapport à l'autre.

I-2-14. Le nombre e. Etudions un exemple de variable important pour la suite, soit la variable qui prend les valeurs:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

où n croît en prenant des valeurs entières positives, et tend ainsi vers $+\infty$. En appliquant la formule du binôme de Newton, on obtiendra:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\frac{n}{1}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\\ &+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}+\ldots+\\ &+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1}{n!}\frac{1}{n^n}=\\ &=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\\ &+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+\\ &+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).\end{aligned}$$

Cette somme contient $(n+1)$ termes positifs. Lorsque le nombre entier n croît, d'une part le nombre de termes croît, et, d'autre part, chacun des termes croît également, car dans l'expression du terme général *

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$k!$ ne varie pas, mais les différences qui se trouvent entre parenthèses croissent avec n. Nous voyons ainsi que la variable étudiée croît avec n, et pour s'assurer de l'existence d'une limite de cette variable, il suffit de démontrer qu'elle est bornée.

---

* Le produit $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$ est obtenu à partir de la fraction $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{n^k}$, si on divise par n chacun des k facteurs du numérateur, en tenant compte de ce que le nombre des facteurs n du dénominateur est aussi égal à k.

Remplaçons dans l'expression du terme général chacune des différences notées par l'unité et tous les facteurs entrant dans kl, à partir de 3, par 2. Le terme général augmente, et nous aurons, en appliquant la formule de la somme des termes d'une progression géométrique:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$= 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

c'est-à-dire que la variable $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est bornée. Nous noterons la limite de cette variable par la lettre e:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \text{ est un entier positif}). \tag{23}$$

Il est évident que cette limite ne peut être supérieure à 3. Dans la formule (23) l'entier n peut, évidemment, tendre vers $+\infty$ de n'importe quelle façon.

Nous allons démontrer maintenant que l'expression $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ tendra vers la même limite e, si x tend vers $+\infty$, en prenant n'importe quelles valeurs.

Soit n l'entier le plus grand contenu dans x, c'est-à-dire que

$$n \leqslant x < n+1.$$

Le nombre n tend vers $+\infty$ en même temps que x. Prenant en considération que si la base positive supérieure à l'unité augmente, ainsi que l'exposant de la puissance, la puissance elle-même augmente. On peut écrire:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{24}$$

Mais en tenant compte de (23):

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = e\cdot 1 = e.$$

Ainsi, les termes extrêmes de l'inégalité (24) tendent vers une limite e et c'est pourquoi le terme intermédiaire doit aussi tendre vers cette limite, autrement dit:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \qquad (25)$$

Etudions maintenant le cas où x tend vers $-\infty$. Introduisons à la place de x une nouvelle variable y, posant

$$x=-1-y, \quad \text{d'où} \quad y=-1-x.$$

On voit d'après la dernière égalité que lorsque x tend vers $-\infty$, y tend vers $+\infty$.

En faisant dans l'expression $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ le changement de variables, et en tenant compte de l'égalité (25), nous obtiendrons:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{-y}{-1-y}\right)^{-1-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1+y}{y}\right)^{1+y}=$$
$$=\lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\left(1+\frac{1}{y}\right)\right]=e\cdot 1=e.$$

Si x tend vers ∞, quel que soit son signe, c'est-à-dire $|x|\to\to+\infty$, il résulte de ce qui précède que dans ce cas aussi

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \qquad (26)$$

Nous indiquerons par la suite un moyen commode pour calculer le nombre e avec la précision que l'on désire. Ce nombre est irrationnel et en allant jusqu'à la septième décimale on a

$$e=2{,}7182818\ldots$$

Il n'est pas difficile de trouver maintenant la limite de l'expression $\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$, où k est un nombre donné. En utilisant la continuité de la fonction puissance, nous obtiendrons:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^k=\lim_{y\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^k=e^k,$$

où l'on a désigné par la lettre y le quotient $\frac{x}{k}$, qui tend vers l'infini en même temps que x.

On rencontre des expressions de type $\left(1+\frac{k}{n}\right)^n$ dans la théorie des intérêts composés.

Supposons qu'il y a chaque année capitalisation des intérêts. Si on prête un capital a pour un intérêt annuel p, au bout de la première année on a:

$$a(1+k),$$

où

$$k=\frac{p}{100};$$

au bout de la deuxième année il sera de

$$a(1+k)^2,$$

et au bout de m années il sera :

$$a(1+k)^m.$$

Supposons maintenant qu'il y ait capitalisation des intérêts au bout de $\frac{1}{n}$ partie de l'année. Dans ce cas, le nombre k est divisé par n car le pourcentage p est calculé sur un an, et le nombre d'intervalles de temps est multiplié par n, et au bout de m années le capital deviendra :

$$a\left(1+\frac{k}{n}\right)^{mn}.$$

Admettons, enfin, que n croisse indéfiniment, c'est-à-dire qu'il y a capitalisation au bout d'intervalles de temps de plus en plus brefs et, à la limite, la capitalisation se fera continûment. Au bout de m années, le capital sera :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{mn}=\lim_{n\to\infty}a\left[\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n}\right]^{m}=ae^{km}.$$

Prenons le nombre e comme base de logarithmes. On les appelle *logarithmes naturels* et habituellement on les désigne simplement par le signe ln sans indiquer la base.

Lorsque la variable x tend vers zéro dans l'expression $\frac{\ln(1+x)}{x}$, le numérateur et le dénominateur tendent vers zéro. Pour lever l'indétermination, introduisons la variable y, en posant

$$x=\frac{1}{y}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad y=\frac{1}{x}.$$

Pour x tendant vers 0, y tend vers l'infini. En introduisant cette nouvelle variable et en utilisant la continuité de la fonction $\ln x$ pour $x>0$ et la formule (26), nous obtiendrons :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{y\to\infty}y\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)=\lim_{y\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=\ln e=1.$$

On voit ici la raison qui a fait choisir e comme base des logarithmes. De même que lors de la mesure en radians des angles, la vraie valeur de l'expression $\frac{\sin x}{x}$ pour $x=0$ est égale à l'unité, *dans le cas des logarithmes naturels, la vraie valeur de l'expression* $\frac{\ln(1+x)}{x}$ *pour* $x=0$ *est aussi égale à l'unité.*

De la définition des logarithmes, il résulte la relation suivante:

$$N = a^{\lg_a N}.$$

En prenant le logarithme de cette expression:

$$\ln N = \lg_a N \cdot \ln a, \quad \text{ou} \quad \lg_a N = \ln N \cdot \frac{1}{\ln a}.$$

Ce rapport exprime le logarithme du nombre N pour n'importe quelle base a en fonction de son logarithme naturel. Le facteur $M = \frac{1}{\ln a}$ est *le module* du système de logarithmes de base a, et pour $a = 10$ il est, en allant jusqu'à la septième décimale:

$$M = 0{,}4342945 \ldots$$

I-2-15. Propositions non démontrées. Dans l'exposé de la théorie des limites nous n'avons pas démontré plusieurs propositions, à savoir l'existence d'une limite pour une variable monotone bornée [I-2-6], la condition nécessaire et suffisante d'existence d'une limite (critère de Cauchy [I-2-7] et les trois propriétés des fonctions continues sur un intervalle fermé [I-2-11]. La démonstration de ces propositions est basée sur la théorie des nombres réels et de leurs opérations. Les paragraphes suivants seront consacrés à l'exposé de cette théorie et à la démonstration des propositions indiquées ci-dessus.

Introduisons une nouvelle notion et formulons une nouvelle proposition qui sera démontrée plus bas. Si nous avons un ensemble composé d'un nombre fini de nombres réels (par exemple, nous avons mille nombres réels), parmi eux il y en aura un qui sera le plus grand et un qui sera le plus petit. Si nous avons un ensemble infini de nombres réels et même s'ils sont tels qu'ils appartiennent à un intervalle défini, il n'y aura toutefois pas toujours parmi ces nombres, un nombre qui soit le plus petit et un qui soit le plus grand. Si, par exemple, nous étudions l'ensemble de tous les nombres réels compris entre 0 et 1, à l'exclusion des nombres 0 et 1 eux-mêmes, il n'y aura pas dans cet ensemble de nombre qui soit le plus petit ni de nombre qui soit le plus grand. Quel que soit le nombre, voisin de l'unité, mais inférieur à elle, que nous ayons pris, il y aura un autre nombre entre le nombre choisi et l'unité. Dans l'exemple donné, les nombres 0 et 1 qui n'appartiennent pas à l'ensemble choisi, possèdent par rapport à cet ensemble la propriété suivante: il n'y a pas dans l'ensemble de nombre plus grand que l'unité, mais pour tout nombre positif donné ε il y a des nombres supérieurs à $(1 - \varepsilon)$. De même, il n'y a pas dans l'ensemble de nombre inférieur à zéro, mais pour n'importe quel nombre positif donné ε il y a des nombres inférieurs à $(0 + \varepsilon)$. On appelle ces nombres 0 et 1 *les bornes supérieure et inférieure* de l'ensemble des nombres réels considéré.

Passons maintenant au cas général.

Soit un certain ensemble E de nombres réels. On dit qu'il est *borné supérieurement* s'il existe un nombre M tel que tous les nombres appartenant à E ne sont pas supérieurs à M. De même, on dit qu'un ensemble est *borné inférieurement* s'il existe un nombre m tel que tous les nombres appartenant à l'ensemble E ne sont pas inférieurs à m. Si l'ensemble est borné supérieurement et inférieurement, on dit simplement qu'il est *borné*.

Définition. *On appelle borne supérieure d'un ensemble E le nombre β (s'il existe) tel que, parmi les nombres appartenant à E, il n'y en a pas qui soient supérieurs à β, mais pour tout nombre positif donné ε il y a des nombres supérieurs à $(\beta - \varepsilon)$. On appelle borne inférieure de l'ensemble E le nombre α (s'il existe) tel que, parmi les nombres appartenant à E, il n'y a pas de nombre inférieur à α, mais pour tout nombre positif donné ε, il y a des nombres inférieurs à $(\alpha + \varepsilon)$.*

Si l'ensemble E n'est pas borné supérieurement, c'est-à-dire s'il existe des nombres dans E qui soient supérieurs à n'importe quel nombre donné, alors l'ensemble ne peut avoir de borne supérieure. De même, si l'ensemble E n'est pas borné inférieurement, il ne peut avoir de borne inférieure. Si parmi les nombres de l'ensemble, il y en a un qui est le plus grand, il est, de toute évidence, la borne supérieure de l'ensemble. De même, si, parmi les nombres de l'ensemble, il y en a un qui est le plus petit, c'est lui qui est la borne inférieure de l'ensemble E. Or, comme nous l'avons vu, parmi les nombres d'un ensemble infini il ne s'en trouve pas toujours un qui soit le plus petit ou le plus grand. On peut démontrer toutefois que *dans un ensemble borné supérieurement, il y a toujours une borne supérieure, et dans un ensemble borné inférieurement, il y a toujours une borne inférieure.* Remarquons encore qu'il résulte de la définition que les bornes supérieure et inférieure sont uniques.

Nous utiliserons souvent par la suite les propositions exposées dans le présent paragraphe. Au cours d'une première lecture, on peut laisser sans les lire les paragraphes suivants, imprimés en petits caractères.

I-2-16. Les nombres réels. Nous commencerons par l'exposé de la théorie des nombres réels. Considérons l'ensemble de tous les nombres rationnels, entiers et fractionnaires, positifs et négatifs. On peut se représenter ces nombres rationnels disposés suivant un ordre croissant. Si a et b sont deux nombres rationnels quelconques distincts, on peut placer entre eux autant de nombres rationnels qu'on veut. Soit $a < b$, introduisons un nombre rationnel positif $r = \frac{b-a}{n}$, où n est un entier positif quelconque. Les nombres rationnels $a + r, a + 2r, \ldots$ $\ldots, a + (n-1)r$ se trouvent entre a et b, et vu l'arbitraire dans le choix du nombre entier positif n, on voit que la proposition est démontrée.

Nous appellerons *coupure dans le domaine des nombres rationnels* toute division de ces nombres en deux classes telles que n'importe quel nombre d'une classe (de la première) soit plus petit que n'importe quel nombre de l'autre classe (de la deuxième). Il est alors évident que, si un nombre se trouve dans la première classe, tout nombre qui lui est inférieur se trouve aussi dans la première classe, et si un nombre se trouve dans la seconde classe, tout nombre qui lui est supérieur se trouve aussi dans la deuxième classe.

Supposons qu'il y ait parmi les nombres de la première classe, un nombre qui soit le plus grand. Ceci étant, on peut, vu la propriété de l'ensemble des nombres rationnels que nous avons mentionnée, affirmer que parmi les nombres de la seconde classe, il n'y a pas de nombre le plus petit. De même, si parmi les nombres de la seconde classe, il y en a un qui soit le plus petit, il n'y en a pas parmi les nombres de la première classe qui soit le plus grand. On parlera *de coupure de première espèce*, si parmi les nombres de la première classe il y en a un qui soit le plus grand, ou si parmi les nombres de la seconde classe il y en a un qui soit le plus petit. Il est facile de construire de telles coupures. Prenons un nombre rationnel quelconque b et rangeons dans la première classe tous les nombres rationnels inférieurs à b, dans la seconde classe, tous les nombres rationnels supérieurs à b; quant au nombre b lui-même, mettons-le soit dans la première classe (il sera alors le plus grand), soit dans la seconde (il sera alors le plus petit). En prenant pour b tous les nombres rationnels possibles, nous obtiendrons toutes les coupures possibles de première espèce. Nous dirons qu'une telle coupure de première espèce définit le nombre rationnel b qui est le plus grand dans la première classe ou le plus petit dans la seconde.

Mais il existe aussi *des coupures de seconde espèce*, pour lesquelles il n'y a pas dans la première classe de nombre le plus grand, et dans la seconde, de nombre le plus petit. Donnons un exemple. Rangeons dans la première classe tous les nombres rationnels négatifs, zéro et tous les nombres rationnels positifs dont le carré est inférieur à deux, et dans la seconde classe rangeons tous les nombres rationnels positifs dont le carré est supérieur à deux. Comme il n'existe pas de nombre rationnel dont le carré soit égal à deux, tous les nombres rationnels se trouvent classés, et nous aurons une coupure. Montrons que dans la première classe, il n'y a pas de nombre le plus grand. Pour cela il suffit de montrer que si le nombre a appartient à la première classe, il y a des nombres supérieurs à a, qui appartiennent aussi à la première classe. Si a est négatif ou nul, cela est évident; supposons que $a > 0$. Etant donné la composition de la première classe, $a^2 < 2$. Introduisons un nombre rationnel positif $r = 2 - a^2$ et démontrons qu'on peut définir un nombre rationnel positif x, assez petit pour que $(a + x)$ appartienne aussi à la première classe, c'est-à-dire tel que l'on ait l'inégalité:

$$2-(a+x)^2>0, \quad \text{ou} \quad r-2ax-x^2>0,$$

c'est-à-dire qu'il s'agit de trouver un nombre rationnel positif qui vérifie l'inégalité $x^2 + 2ax < r$. Supposant $x < 1$, nous avons $x^2 < x$, et, par conséquent, $x^2 + 2ax < x + 2ax = (2a + 1)\,x$, c'est-à-dire qu'il nous suffira de satisfaire à l'inégalité $(2a + 1)\,x < r$; de cette façon, x est défini par les deux inégalités:

$$x<1 \quad \text{et} \quad x<\frac{r}{2a+1}.$$

On peut, évidemment, trouver autant de nombres rationnels positifs x que l'on veut, qui vérifient ces deux inégalités. On peut, de même, démontrer que dans la seconde classe de la coupure construite il n'y a pas de nombre le plus petit. Nous avons donc donné un exemple de coupure de seconde espèce. Le point fondamental de la théorie est la convention suivante: on considère que *toute coupure de seconde espèce définit un nouvel objet — le nombre irrationnel*. Les différentes coupures de seconde espèce définissent différents nombres irrationnels. Il n'est pas difficile de supposer que l'exemple de coupure de seconde espèce donné plus haut, définit le nombre irrationnel que l'on note habituellement $\sqrt{2}$.

On peut disposer tous les nombres irrationnels introduits avec des nombres rationnels rangés par ordre croissant qui sera représenté intuitivement pour nous par les points de l'axe orienté OX. Si α est un nombre irrationnel, nous noterons par I (α) et II (α) la première et la seconde classe de la coupure qui définit le nombre irrationnel α. Nous considérons le nombre α plus grand que n'importe quel nombre de I (α) et plus petit que n'importe quel nombre de II (α). Ainsi n'importe quel nombre irrationnel peut être comparé à n'importe quel nombre rationnel. Il reste à définir les notions de plus grand et plus petit pour deux nombres irrationnels quelconques différents α et β. Comme α et β sont différents, les classes I (α) et I (β) ne coïncident pas et l'une des classes est contenue dans l'autre. Supposons que I (α) est compris dans I (β), c'est-à-dire que chaque nombre de I (α) appartient à I (β), mais qu'il y a des nombres de I (β) qui appartiennent à II (α). Ici nous considérerons, par définition, $\alpha < \beta$. Ainsi, l'ensemble de tous les nombres rationnels et irrationnels, c'est-à-dire *l'ensemble de tous les nombres réels est ordonné*. Il est facile alors, en utilisant les définitions données plus haut, de démontrer que, si a, b et c sont des nombres réels, $a < b$ et $b < c$, donc $a < c$.

Notons avant tout une conséquence des définitions données. Soit α un nombre irrationnel. Comme il n'y a pas dans la classe I (α) de nombre le plus grand, et dans la classe II (α), de nombre le plus petit, il n'en est que plus évident que l'on peut placer entre α et n'importe quel nombre rationnel a, autant de nombres rationnels que l'on veut. Soit, maintenant, $\alpha < \beta$ deux nombres irrationnels distincts. Une partie des nombres rationnels de I (β) entre dans II (α), d'où il résulte immédiatement que l'on peut également placer entre α et β autant de nombres rationnels que l'on veut, c'est-à-dire que, de façon générale, *on peut placer entre deux nombres réels distincts autant de nombres rationnels que l'on veut.*

Nous allons passer maintenant à la démonstration du théorème fondamental de la théorie des nombres irrationnels. Etudions l'ensemble de tous les nombres réels et faisons dans cet ensemble une coupure quelconque, c'est-à-dire répartissons tous les nombres réels (non seulement rationnels, mais aussi irrationnels) en deux classes I et II de façon que n'importe quel nombre de I sont inférieur à n'importe quel nombre de II. Montrons que dans ce cas, il y aura obligatoirement soit un nombre le plus grand dans la classe I, soit un nombre le plus petit dans la classe II (l'un exclut l'autre, comme plus haut pour la coupure dans le domaine des nombres rationnels). Pour cela, nous noterons par I′ l'ensemble des nombres rationnels de I, et par II′ l'ensemble des nombres rationnels de II. Les classes (I′,II′) déterminent une certaine coupure dans le domaine des nombres rationnels, et cette coupure définit un nombre réel α (rationnel ou irrationnel). Admettons pour plus de clarté, que ce nombre α appartient à la classe I suivant la disposition en deux classes des nombres réels, mentionnée plus haut. Montrons que α doit être le nombre le plus grand de la classe I. En fait, s'il n'en était pas ainsi, il existerait dans la classe I un nombre réel β plus grand que α. Prenons un nombre rationnel r situé entre α et β, c'est-à-dire que $\alpha < r < \beta$. Il doit appartenir à la classe I, et par suite, à la classe I′.

Ainsi, dans la première classe de coupure (I′, II′) définissant les nombres α, il se trouve un nombre r plus grand que α. C'est impossible et, par conséquent, il est faux de dire que α n'est pas le nombre le plus grand de la classe I. On peut montrer, de la même façon, que si α se trouve dans la classe II, il doit être le plus petit nombre.

Ainsi, nous avons démontré le théorème suivant:

Théorème fondamental. *Lorsqu'il y a une coupure dans le domaine des nombres réels, il faut obligatoirement soit que la première classe renferme le nombre le plus grand, soit que la seconde classe renferme le nombre le plus petit.*

Il est facile de donner à tous les raisonnements de ce paragraphe un sens géométrique simple. Nous considérons d'abord sur l'axe OX les points d'abscisse rationnelle seulement. A une coupure dans le domaine des nombres rationnels, correspond la séparation de la droite OX en deux demi-droites. Si la coupure a lieu en un point d'abscisse rationnelle, on a affaire à une coupure de première espèce auquel cas l'abscisse du point où a lieu la coupure, se rattache elle-même soit à la première soit à la seconde classe. Si la coupure s'effectue en un point auquel ne correspond pas une abscisse rationnelle, on a une coupure du type II définissant un nombre irrationnel qui est pris pour abscisse du point où se produit la coupure. Lorsque ces points ont des abscisses irrationnelles, toute section de la droite se produit alors en un point d'abscisse réelle. Ceci n'est qu'une illustration géométrique, mais ne démontre rien. Il n'est pas difficile, en utilisant la définition du nombre irrationnel α, de former une fraction décimale infinie correspondant à ce nombre [I-1-2]. Tout segment fini de cette fraction doit appartenir à $I(\alpha)$, mais si nous augmentons d'une unité le dernier chiffre de ce segment, le nombre rationnel correspondant doit se trouver dans II (α).

I-2-17. Opérations sur les nombres réels. La théorie des nombres irrationnels, outre les définitions déjà données et le théorème fondamental, comprend la définition des opérations effectuées sur les nombres irrationnels et l'étude des propriétés de ces opérations. Dans la définition des opérations, nous serons guidés par les coupures dans le domaine des nombres rationnels, et, dans la mesure où ces coupures définissent non seulement les nombres irrationnels, mais aussi les nombres rationnels (coupures de première espèce), la définition des opérations pourra de façon générale servir à tous les nombres réels, mais dans le cas des nombres rationnels les définitions seront équivalentes aux définitions habituelles. Dans ce paragraphe nous nous limiterons à des indications générales.

Faisons une remarque préalablement. Soit α un nombre réel. Prenons un nombre r (petit) rationnel positif quelconque, puis un nombre rationnel a de $I(\alpha)$ et formons la progression arithmétique:

$$a, \; a+r, \; a+2r, \; \ldots, \; a+nr, \; \ldots$$

Pour n grand, les nombres $(a+nr)$ entrent dans II (α) et par suite, il existera un nombre entier positif k tel que $[a+(k-1)r]$ appartient à I (α) et $(a+kr)$ appartient à II (α), c'est-à-dire:

R e m a r q u e. *Dans une coupure quelconque de nombres rationnels il existe dans les différentes classes des nombres qui diffèrent d'un nombre rationnel positif donné r, aussi petit soit-il.*

Passons maintenant à la définition de l'addition. Soient α et β deux nombres réels. Soit a un nombre quelconque de I (α), a' de II (α), b de I (β) et b' de II (β). Etablissons toutes les sommes possibles $(a+b)$ et $(a'+b')$. Dans tous les cas, on a: $a+b < a'+b'$. Etablissons une nouvelle coupure de nombres rationnels, en reportant dans la seconde classe tous les nombres rationnels supérieurs à tous les $(a+b)$, et en reportant dans la première classe tous les autres nombres rationnels. Dans ce cas, tout nombre de la première classe est inférieur à tout nombre de la seconde classe, tous les nombres $(a+b)$ sont dans la première classe et tous les nombres $(a'+b')$ dans la seconde classe. La nouvelle coupure établie définit un certain nombre réel que nous appellerons la somme $(\alpha+\beta)$. Ce nombre est évidemment plus grand ou égal à tous les $(a+b)$ et plus petit ou égal à tous les $(a'+b')$. En considérant que, en conformité avec la remarque que nous avons faite ci-dessus, les nombres a et a', ainsi que b et b', peuvent se différencier l'un de l'autre par un nombre rationnel quelconque positif petit, il n'est pas difficile de montrer qu'il ne peut exister qu'un seul nombre qui vérifie les inégalités notées ci-dessus. On vérifie directement que l'addition satisfait aux lois habituelles des nombres rationnels:

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha, \quad (\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma), \quad \alpha+0=\alpha.$$

Par exemple, pour obtenir $(\beta+\alpha)$, il nous faut composer à la place des sommes $(a+b)$ et $(a'+b')$, les sommes $(b+a)$ et $(b'+a')$, mais ces sommes coïncident avec les précédentes, étant donné la commutativité de l'addition des nombres rationnels.

Soit α un nombre réel. Déterminons le nombre $(-\alpha)$ par la coupure suivante: reportons dans la première classe tous les nombres rationnels de la classe II (α) en changeant les signes, et dans la seconde classe, tous les nombres de I (α) en changeant les signes. On obtient ainsi, en fait, une coupure dans le domaine des nombres rationnels, et pour le nombre $(-\alpha)$, ce qui est facile à vérifier, nous avons:

$$-(-\alpha)=\alpha, \quad \alpha+(-\alpha)=0.$$

Il n'est pas difficile de voir que, si $\alpha>0$, $(-\alpha)<0$, et réciproquement. Nous appellerons valeur absolue du nombre α, différent de zéro, celui des deux nombres α et $(-\alpha)$ qui est supérieur à zéro. Nous désignerons comme auparavant, la valeur absolue du nombre α par le symbole $|\alpha|$.

Passons maintenant à la multiplication. Soit α et β deux nombres réels positifs, c'est-à-dire que $\alpha>0$ et $\beta>0$. Soit *a un nombre positif* quelconque de I (α), soit *b un nombre positif* quelconque de I (β), soit a' et b' des nombres quelconques de II (α) et II (β) (ils sont déjà nécessairement positifs). Etablissons une nouvelle coupure, en mettant dans la seconde classe tous les nombres rationnels supérieurs à tous les produits ab, et dans la première classe, tous les autres nombres rationnels. Tous les ab tombent dans la première classe et tous les $a'b'$ dans la seconde classe. La nouvelle coupure définit un certain nombre réel, que nous appellerons le produit $\alpha\beta$. Ce nombre est supérieur ou égal à tous les ab et ne dépasse pas tous les $a'b'$, et seul ce nombre réel satisfait à ces inégalités.

Si un seul des nombres α, β ou les deux à la fois sont négatifs, nous ramènerons la multiplication au cas précédent, en introduisant dans la définition de la multiplication la règle habituelle des signes, c'est-à-dire que nous supposons que $\alpha\beta=\pm|\alpha||\beta|$, où nous prenons le signe $(+)$ si les nombres α et β sont tous les deux inférieurs à zéro, et le signe $(-)$ si l'un des nombres est supérieur à zéro et l'autre inférieur à zéro.

Pour la multiplication par zéro, nous prenons la définition: $\alpha\cdot 0=0\cdot\alpha=0$. Les lois fondamentales de la multiplication se vérifient immédiatement:

$$\alpha\beta=\beta\alpha, \quad (\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma), \quad \alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma,$$

et le produit de plusieurs facteurs peut être égal à zéro si, et seulement si, l'un des facteurs au moins est nul.

La soustraction est définie comme étant l'opération inverse de l'addition, c'est-à-dire que $\alpha-\beta=x$ est équivalent à $x+\beta=\alpha$. En ajoutant $(-\beta)$ aux deux membres de cette égalité, nous obtiendrons, en tenant compte des propriétés de l'addition que nous venons de mentionner: $x=\alpha+(-\beta)$, c'est-à-dire que la différence doit obligatoirement être déterminée par cette formule, et la soustraction se ramène à l'addition. Il reste à vérifier que l'expression obtenue pour x satisfait bien à la condition $x+\beta=\alpha$, mais cela résulte directement des propriétés de l'addition. Notons que l'inégalité $\alpha>\beta$ est équivalente à $\alpha-\beta>0$. Avant de passer à la division, nous définirons le nombre inverse d'un nombre donné. Si a est un nombre rationnel non nul, la nombre $\frac{1}{a}$ est son inverse. Soit α un nombre réel non nul. Soit d'abord $\alpha > 0$ et soit a' un nombre quelconque de II (α) (ce nombre est rationnel et positif). Déterminons le nombre inverse de α, par la coupure suivante: mettons dans la première classe tous les nombres négatifs, zéro et les nombres $\frac{1}{a'}$, et dans la seconde classe, tous les autres nombres. Soit un nombre quelconque positif c_1 qui appartient à la première classe de la nouvelle coupure. Cela signifie que $c_1 = \frac{1}{a'_1}$, où a'_1 est de la classe II (α). Prenons un nombre quelconque rationnel positif $c_2 < c_1$. On peut le mettre sous la forme $c_2 = \frac{1}{a'_2}$, où a'_2 est rationnel et $a'_2 > a'_1$, c'est-à-dire que a'_2 appartient aussi à II (α). Autrement dit, si un nombre positif quelconque appartient à la première classe de la nouvelle coupure, tout nombre rationnel positif qui lui est inférieur appartient aussi à cette première classe. Tous les nombres négatifs et zéro en font partie également par définition. On voit que nous avons donné la coupure déterminant le nombre inverse de α en observant la condition suivante: un nombre quelconque de la deuxième classe est plus grand que tout nombre de la première classe. Nous noterons ce nombre inverse de α, par le symbole $\frac{1}{\alpha}$.

Si $\alpha < 0$, nous définirons le nombre inverse par la formule: $\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{|\alpha|}$.

En utilisant la définition de la multiplication, nous avons: $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$.

Passons maintenant à la division. C'est l'opération inverse de la multiplication, c'est-à-dire que $\alpha : \beta = x$ est égal à $x\beta = \alpha$, et, comme pour la soustraction, il n'est pas difficile de montrer que si $\beta \neq 0$, on a un quotient unique: $x = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$ et, ainsi, la division se ramène à une multiplication. La division par zéro est impossible.

L'élévation à une puissance entière positive se ramène à une multiplication. L'extraction de racine est définie comme étant l'opération inverse de l'élévation à une puissance. Soit α un nombre réel positif et n un nombre entier quelconque supérieur à l'unité. Faisons la coupure suivante des nombres rationnels: mettons dans la première classe tous les nombres négatifs, zéro et tous les nombres positifs, dont la puissance n est inférieure à α, et dans la seconde classe, tous les autres nombres. En utilisant la définition de la multiplication, il n'est pas difficile de montrer que le nombre positif β, défini par cette coupure, vérifie la condition $\beta^n = \alpha$, c'est-à-dire que β est la valeur arithmétique de la racine $\sqrt[n]{\alpha}$. Si n est pair, $(-\beta)$ sera la seconde valeur. La racine d'une puissance impaire d'un nombre réel négatif se définit de façon analogue (une seule réponse). On parlera plus loin, plus en détail, de la fonction exponentielle. Notons encore un résultat important: *une fois vérifiées les lois fondamentales des opérations, toutes les règles et identités de l'algèbre seront vérifiées si l'on désigne des nombres réels par les lettres.*

I-2-18. Bornes d'un ensemble de nombres. Existence de bornes. Démontrons maintenant le théorème des bornes d'un ensemble de nombres réels, que nous avons formulé au paragraphe [I-2-15].

Théorème. *Si un ensemble E de nombres réels est borné supérieurement, il a une borne supérieure, et si E est borné inférieurement, il a une borne inférieure.*

Limitons-nous à la démonstration de la première partie du théorème. Par hypothèse, tous les nombres de E sont inférieurs à un certain nombre M. Faisons la coupure suivante des nombres réels: mettons dans la seconde classe tous les nombres supérieurs à tous les nombres de E, et dans la première tous les autres nombres réels. Dans la seconde classe entreront, par exemple, tous les nombres $(M + p)$, où $p > 0$, et dans la première classe entreront, par exemple, tous les nombres de E. Soit β un nombre réel, déterminé par la coupure ainsi obtenue. D'après le théorème fondamental du [I-2-16], il sera le plus grand dans la première classe et le plus petit dans la seconde. Montrons que β est précisément la borne supérieure de E. Il n'y a pas de nombres plus grands que β dans E, étant donné que tous les nombres de E sont dans la première classe. Ensuite, il existe sûrement des nombres de E plus grands que $(\beta - \varepsilon)$ pour tout ε positif, car s'il n'y avait pas de tels nombres, le nombre $\left(\beta-\frac{\varepsilon}{2}\right)$ serait supérieur à tous les nombres de E et devrait être dans la deuxième classe, or en réalité, il est inférieur à β et se trouve dans la première classe. Le théorème est ainsi vérifié. Il est évident que si β appartient à E, il sera plus grand de tous les nombres de E.

Démontrons maintenant l'existence d'une limite pour une variable bornée monotone [I-2-6]. Supposons que la variable x croît indéfiniment ou, en tout cas, ne décroît jamais, c'est-à-dire qu'aucune de ses valeurs n'est inférieure à une valeur précédente. Supposons en outre que x est borné, c'est-à-dire qu'il existe un nombre M tel que toutes les valeurs de x sont inférieures à M. Étudions l'ensemble de toutes les valeurs de x. D'après le théorème énoncé il existe une borne supérieure β pour cet ensemble. Démontrons que β est bien une limite de x. Soit ε un nombre positif quelconque. D'après la définition de la borne supérieure, on trouvera une valeur de x plus grande que $(\beta - \varepsilon)$. Comme x est monotone, toutes les valeurs suivantes de x seront aussi supérieures à $(\beta - \varepsilon)$, mais, d'un autre côté, elles ne peuvent être supérieures à β, et comme ε est arbitraire nous voyons que $\beta = \lim x$. On peut de la même façon étudier le cas d'une variable décroissante.

Avant de passer à la démonstration du critère de Cauchy [I-2-7] démontrons un théorème que nous allons utiliser.

Théorème. *Soit une suite d'intervalles finis:*

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n), \ldots$$

où chaque intervalle est compris dans le précédent, c'est-à-dire que $a_{n+1} \geqslant a_n$ *et* $b_{n+1} \leqslant b_n$, *les longueurs de ces intervalles tendent vers zéro, c'est-à-dire que* $(b_n - a_n) \to 0$. *Les bornes des intervalles* a_n *et* b_n *tendent vers une limite commune lorsque* n *croît.*

D'après l'hypothèse du théorème, nous avons: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$ et, en outre, $a_n < b_1$ pour tout n. Ainsi, la suite $a_1, a_2, \ldots$ sera monotone et bornée, et c'est pourquoi elle aura une limite: $a_n \to a$. De l'hypothèse $(b_n - a_n) \to 0$ il résulte que $b_n = a_n + \varepsilon_n$, où $\varepsilon_n \to 0$ et, par conséquent, b_n a une limite, elle aussi égale à a.

Passons maintenant à la démonstration du critère de Cauchy. Nous nous limiterons au cas d'une variable dont on peut indexer les valeurs:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{27}$$

Il faut montrer que la condition nécessaire et suffisante d'existence d'une limite de la suite (27) est que pour tout ε positif donné, il existe un indice N, tel que:

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad m \text{ et } n > N. \tag{28}$$

Montrons que cette condition est *suffisante*, c'est-à-dire que, lorsque cette condition est remplie, la suite (27) possède une limite. Il résulte de nos raisonnements précédents [I-2-7], que si la condition est remplie, on peut construire la suite d'intervalles:

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_k, b_k), \ldots$$

avec les propriétés suivantes: chaque terme est compris dans le précédent, les longueurs $(b_k - a_k)$ tendent vers zéro, et à tout intervalle (a_k, b_k) correspond un nombre entier positif N_k tel que tous les x_s pour $s > N_k$ appartiennent à (a_k, b_k). Ces intervalles (a_k, b_k) sont les segments $A'_k A_k$ du paragraphe [I-2-7]. D'après le théorème énoncé plus haut, on a la limite comme:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = a. \tag{29}$$

Montrons que a est bien la limite de la suite (27). Soit un nombre ε positif donné. D'après l'équation (29), il existe un nombre entier positif l, tel que (a_l, b_l) et tous les intervalles suivants se trouvent à l'intérieur de l'intervalle $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Il en résulte que tous les nombres x_s, eux aussi, pour $s > N_l$, appartiennent à cet intervalle, c'est-à-dire que $| a - x_s| < \varepsilon$ pour $s > N_l$. Étant donné le caractère arbitraire de ε, nous voyons que a est la limite de la suite (27), et l'on a prouvé que la condition (28) est suffisante. Nous avions déjà prouvé que la condition est *nécessaire* [I-2-7]. La démonstration vaut aussi pour une variable non indexée.

I-2-19. Propriétés des fonctions continues. En passant à la démonstration des propriétés des fonctions continues que nous avons exposées ci-dessus [I-2-11], nous commencerons par la démonstration d'un théorème auxiliaire.

Théorème I. *Si $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b), et si l'on donne un nombre positif quelconque ε, on peut diviser cet intervalle en un nombre fini de nouveaux intervalles de telle façon que $| f(x_2) - f(x_1) | < \varepsilon$, si x_1 et x_2 appartiennent à un seul et même nouvel intervalle.*

Nous allons faire la démonstration en raisonnant par l'absurde. Supposons que le théorème est faux. Admettons qu'il soit impossible de diviser (a, b) en différentes parties de la façon que nous avons indiquée. Divisons notre intervalle en deux parties par un point situé au milieu de l'intervalle: $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ et $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$. Si le théorème était vrai pour chacun de ces deux intervalles, il serait valable pour l'intervalle (a, b) tout entier. Ainsi, nous devons considérer que l'un au moins des deux intervalles obtenus ne peut pas être divisé de la façon indiquée dans le théorème. Prenons la partie de l'intervalle pour laquelle le théorème n'est pas vérifié, et divisons-le à nouveau en deux parties égales. Comme plus haut, pour au moins une des deux nouvelles moitiés, le théorème n'est pas valable. Prenons cette moitié, divisons-la à nouveau en deux, etc. Nous obtenons ainsi une suite d'intervalles:

$$(a, b), (a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n), \ldots,$$

dont chaque terme est la moitié du précédent, de sorte que la longueur $(b_n - a_n)$, égale à $\frac{b-a}{2^n}$, tend vers zéro lorsque n croît. En outre, pour tout intervalle (a_n, b_n), le théorème n'est pas valable, c'est-à-dire qu'il est impossible de diviser aucun (a_n, b_n) en de nouveaux intervalles de façon que $| f(x_2) - f(x_1) | < \varepsilon$, si x_1 et x_2 appartiennent à un seul et même intervalle nouveau. Montrons que c'est absurde.

Suivant le théorème du paragraphe [I-2-18], a_n et b_n possèdent une limite commune:

$$\lim a_n = \lim b_n = \alpha, \tag{30}$$

Cette limite, comme tous les nombres a_n et b_n, appartient à l'intervalle (a, b). Supposons d'abord que α est à l'intérieur de (a, b). Par hypothèse, $f(x)$ est continue pour $x = \alpha$, et par conséquent [I-2-10], pour un nombre ε donné il existe un nombre η tel que pour tous les x de l'intervalle $(\alpha - \eta, \alpha + \eta)$ on a l'inégalité:

$$|f(\alpha) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{31}$$

Si x_1 et x_2 sont deux valeurs quelconques de l'intervalle $(\alpha - \eta, \alpha + \eta)$, nous avons:

$$f(x_2) - f(x_1) = f(x_2) - f(\alpha) + f(\alpha) - f(x_1),$$

d'où :

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant |f(x_2) - f(\alpha)| + |f(\alpha) - f(x_1)|,$$

et d'après l'inégalité (31):

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

c'est-à-dire

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon \tag{32}$$

pour tout x_1 et x_2 de l'intervalle $(\alpha - \eta, \alpha + \eta)$. Mais d'après (30), il existera un intervalle (a_l, b_l) appartenant à l'intervalle $(\alpha - \eta, \alpha + \eta)$. C'est pourquoi l'inégalité (32) sera vérifiée à plus forte raison pour tout x_1 et x_2 de l'intervalle (a_l, b_l), c'est-à-dire que pour l'intervalle (a_l, b_l), le théorème est valable même si l'intervalle n'est pas divisé en parties. Cela est en contradiction, comme nous l'avons vu ci-dessus, avec le fait que pour tout intervalle (a_n, b_n) le théorème n'est pas valable. On a ainsi démontré le théorème, si α est intérieur à l'intervalle (a, b). Si α coïncide, par exemple, avec la borne gauche de l'intervalle, c'est-à-dire si $\alpha = a$, la démonstration sera la même, mais à la place de l'intervalle $(\alpha - \eta, \alpha + \eta)$, il faudra prendre l'intervalle $(\alpha, \alpha + \eta)$.

Passons maintenant à la démonstration de la troisième propriété du paragraphe [I-2-11].

Théorème II. *Si $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b), elle est uniformément continue dans cet intervalle, c'est-à-dire que pour tout ε positif donné, il existe un nombre positif η tel que $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ pour toutes valeurs de x' et x'' de (a, b) vérifiant l'inégalité $|x'' - x'| < \eta$.*

D'après le théorème I, nous pouvons diviser (a, b) en un nombre fini de nouveaux intervalles de façon que $|f(x_2) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$, si x_1 et x_2 appartiennent à un même intervalle nouveau. Soit η la longueur du plus court de ces nouveaux intervalles. Montrons que notre théorème est valable précisément pour ce nombre η. En effet, si x' et x'' sont deux valeurs de (a, b) vérifiant l'inégalité $|x'' - x'| < \eta$ ou bien x' et x'' appartiennent à un seul et même intervalle nouveau, ou bien ils se trouvent dans deux nouveaux intervalles contigus. Dans le premier cas, quand nous construisons de nouveaux intervalles, nous avons $|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$, et *a fortiori* $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$. En passant au deuxième cas, nous désignerons par γ le point commun des deux intervalles contigus auxquels appartiennent x' et x''. Dans le cas considéré, nous pouvons écrire:

$$f(x'') - f(x') = f(x'') - f(\gamma) + f(\gamma) - f(x'),$$

c'est-à-dire

$$|f(x'')-f(x')| \leqslant |f(x'')-f(\gamma)| + |f(\gamma)-f(x')|. \tag{33}$$

Mais

$$|f(x'')-f(\gamma)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |f(\gamma)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{34}$$

comme les points x'' et γ, ainsi que γ et x', se trouvent dans un même intervalle nouveau. Les (33) et (34) nous donnent $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$, et le théorème est démontré.

Le théorème I nous conduit également au corollaire suivant:

C o r o l l a i r e. *Une fonction continue dans l'intervalle* (a, b) *est bornée supérieurement et inférieurement, c'est-à-dire qu'elle est simplement bornée dans cet intervalle.* Autrement dit, il existe un nombre M tel que pour toutes les valeurs de x de (a, b), on a l'inégalité $|f(x)|<M$. En effet, prenons $\varepsilon_0>0$, et soit n_0 le nombre des intervalles nouveaux qui doivent diviser (a, b) pour vérifier le théorème I pour la valeur choisie $\varepsilon=\varepsilon_0$. Pour n'importe quel couple de points appartenant tous deux à un même intervalle nouveau, nous avons $|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon_0$. D'où il résulte directement que pour un x quelconque de l'intervalle (a, b), nous avons $|f(x)-f(a)|<n_0\varepsilon_0$, c'est-à-dire que toutes les valeurs de $f(x)$ sont comprises entre $f(a)-n_0\varepsilon_0$ et $f(a)+n_0\varepsilon_0$.

Dans la mesure où l'ensemble des valeurs de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) est borné supérieurement et inférieurement, il possède une borne supérieure et une borne inférieure [I-2-18]. Désignons la première par β, et la seconde par α. Démontrons à présent la première propriété du paragraphe [I-2-11].

T h é o r è m e III. *Une fonction continue dans l'intervalle* (a, b) *atteint dans cet intervalle sa plus grande et sa plus petite valeur.*

Nous allons démontrer que dans l'intervalle (a, b) il existe une valeur de x pour laquelle $f(x)$ est égale à β, et une valeur y pour laquelle $f(x)$ est égale à α. Nous nous bornerons à la démonstration de la première affirmation et nous raisonnerons par l'absurde. Supposons que $f(x)$ n'est égale à β pour aucun x de (a, b) (par conséquent, elle est toujours inférieure à β). Formons une nouvelle fonction:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\beta-f(x)}.$$

Comme le dénominateur ne s'annule pas, la nouvelle fonction sera également continue dans l'intervalle (a, b) [I-2-10]. D'autre part, il résulte de la définition de la borne supérieure que pour $\varepsilon>0$ arbitraire, il existe pour $a \leqslant x \leqslant b$ des valeurs de $f(x)$ situées entre $(\beta-\varepsilon)$ et β. Dans ce cas: $0<\beta-f(x)<\varepsilon$ et $\varphi(x)>\frac{1}{\varepsilon}$. Etant donné que l'on peut prendre ε aussi petit que l'on veut, on voit que la fonction $\varphi(x)$, continue dans l'intervalle (a, b), est bornée supérieurement, ce qui contredit le corollaire cité plus haut du théorème I.

Démontrons enfin la deuxième propriété du paragraphe [I-2-11]. Supposons que $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b) et soit k un nombre quelconque situé entre $f(a)$ et $f(b)$. Pour fixer les idées, supposons que $f(a)<k<f(b)$. Formons une nouvelle fonction

$$F(x)=f(x)-k,$$

continue dans l'intervalle (a, b). Ses valeurs aux bornes de l'intervalle seront

$$F(a)=f(a)-k<0, \qquad F(b)=f(b)-k>0,$$

c'est-à-dire que les valeurs de $F(x)$ aux bornes de l'intervalle sont de signes contraires. Si nous démontrons qu'à l'intérieur de (a, b) il y a une valeur x_0 pour laquelle $F(x_0) = 0$, dans ce cas $f(x_0) - k = 0$, c'est-à-dire que $f(x_0) = k$, et la seconde propriété sera démontrée. Il suffit donc de démontrer le théorème suivant:

Théorème IV. *Si $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b) et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes différents, il existe à l'intérieur de l'intervalle au moins une valeur de x_0 pour laquelle $f(x_0) = 0$.*

Raisonnons par l'absurde, comme pour le théorème III. Admettons que $f(x)$ ne s'annule nulle part dans l'intervalle (a, b). Dans ce cas, la nouvelle fonction

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x)} \tag{35}$$

sera également continue dans l'intervalle (a, b) [I-2-10]. Soit un nombre quelconque $\varepsilon > 0$. En vertu du théorème I, nous pouvons placer à l'intérieur de l'intervalle (a, b) un nombre fini de points, de sorte que, en ajoutant à ces points les extrémités de l'intervalle, la différence des valeurs de $f(x)$, pour deux quelconques de ces points situés côte à côte, est inférieure en valeur absolue à ε. En considérant que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes différents, nous pouvons affirmer qu'il existe deux points voisins ξ_1 et ξ_2 pour lesquels les valeurs de $f(x)$ sont de signes différents. D'une part $f(\xi_1)$ et $f(\xi_2)$ sont de signes différents et, d'autre part, $|f(\xi_2) - f(\xi_1)| < \varepsilon$. Mais si la valeur absolue de la différence de deux nombres réels de signes contraires est inférieure à ε, chacun de ces nombres est inférieur à ε en valeur absolue, c'est-à-dire, par exemple, $|f(\xi_1)| < \varepsilon$. Mais alors, d'après (35), $|\varphi(\xi_1)| > \frac{1}{\varepsilon}$, et étant donné que l'on peut prendre ε aussi petit que l'on veut, la fonction $\varphi(x)$ continue dans l'intervalle (a, b) n'est pas bornée dans cet intervalle, ce qui est absurde. Le théorème est ainsi démontré.

I-2-20. Continuité des fonctions élémentaires. Nous avons déjà montré la continuité du polynôme et de la fonction rationnelle [I-2-10]. Etudions maintenant la fonction puissance

$$y = a^x \quad (a > 0), \tag{36}$$

où nous considérerons, pour fixer les idées, que $a > 1$. Cette fonction est définie pour toutes les valeurs rationnelles positives de x. Pour les valeurs négatives de x, elle est définie par la formule:

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}}, \tag{37}$$

et, en outre, $a^0 = 1$. Ainsi, elle est définie pour toutes les valeurs rationnelles de x. On connaît également par l'algèbre les règles d'addition et de soustraction des indices lors de la multiplication et de la division.

Si x est un nombre positif rationnel $\frac{p}{q}$, nous aurons:

$$a^x = \sqrt[q]{a^p},$$

où le radical est considéré comme arithmétique. Il est évident que $a^p > 1$, et il résulte de la définition de la racine que $a^x > 1$ pour $x > 0$ (définitions du paragraphe [I-2-17]). De (37) il résulte que $0 < a^x < 1$ pour $x < 0$. Montrons maintenant que $a^{x_2} > a^{x_1}$, si $x_2 > x_1$, c'est-à-dire que a^x est une fonction croissante. En effet,

$$a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}(a^{x_2 - x_1} - 1),$$

où $x_2 - x_1 > 0$ et, par conséquent, les deux facteurs du second membre sont positifs. Montrons encore que $a^x \to 1$, si $x \to 0$, en prenant des valeurs rationnelles. Supposons d'abord que $x \to 0$, par toutes les valeurs rationnelles, en décroissant (à droite). Dans ce cas a^x décroît, mais reste supérieur à l'unité et, par conséquent, possède une limite, que nous désignerons par l. Lorsque x varie d'une façon qu'on a déjà notée, la variable $2x$ tend aussi à droite vers zéro suivant toutes les valeurs rationnelles. Nous avons donc:

$$a^{2x} = (a^x)^2,$$

et en passant à la limite, nous obtiendrons:

$$l = l^2, \quad \text{ou} \quad l(l-1) = 0,$$

c'est-à-dire que $l = 1$ ou $l = 0$. Mais le deuxième cas est impossible étant donné que $a^x > 1$. Ainsi $a^x \to 1$, si $x \to 0$ à droite. Il résulte de (37) que ce sera la même limite également lorsque $x \to 0$ à gauche. Ainsi, de façon générale $a^x \to 1$, si $x \to 0$, en prenant des valeurs rationnelles. D'où il résulte que, si x, prenant des valeurs rationnelles, tend vers une limite rationnelle b, alors $a^x \to a^b$. En effet:

$$a^x - a^b = a^b(a^{x-b} - 1).$$

La différence $(x - b)$ tend vers zéro et $(a^{x-b} - 1)$, comme on l'a démontré, tend aussi vers zéro.

Définissons maintenant la fonction (36) pour les valeurs irrationnelles de x. Soit α un nombre irrationnel, I (α) et II (α) la première et la seconde classe de la coupure dans le domaine des nombres rationnels définissant α. Supposons que $x \to \alpha$, en croissant et passant par tous les nombres rationnels de I (α). La variable a^x croît mais reste bornée, et elle est précisément inférieure à $a^{x''}$, où x'' est un nombre quelconque de II (α). Ainsi, lorsque x varie de cette façon, la variable a^x possède une limite que nous noterons, pour le moment, par L. De même si $x \to \alpha$ en décroissant et passant par tous les nombres rationnels de II (α), a^x possède également une limite. Montrons que cette limite est aussi égale à L. Soit x' de I (α) et x'' de II (α). Nous avons:

$$a^{x''} - a^{x'} = a^{x'}(a^{x''-x'} - 1) < L(a^{x''-x'} - 1),$$

c'est-à-dire:

$$0 < a^{x''} - a^{x'} < L(a^{x''-x'} - 1).$$

Pour x' et x'', voisins de α, la différence $(x'' - x')$ est aussi voisine que l'on veut de zero, et d'après cette inégalité, on peut dire la même chose de la différence $(a^{x''} - a^{x'})$, d'où la coïncidence des limites. Nous prenons par définition a^α égal à la limite L, c'est-à-dire que a^α *est la limite vers laquelle tend* a^x *lorsque* $x \to \alpha$ *suivant des valeurs rationnelles*. Maintenant la fonction (36) est définie pour toutes les valeurs réelles de x. D'après ce qui a été dit plus haut, il est facile de démontrer que ce sera une fonction croissante, c'est-à-dire que $a^{x_2} > a^{x_1}$, si x_1 et x_2 sont des nombres *réels* quelconques vérifiant l'inégalité $x_2 > x_1$. Au cours de la démonstration, il faut considérer séparément le cas où x_1 et x_2 sont tous les deux irrationnels de celui où un des deux seulement est rationnel. Il reste encore à démontrer que la fonction sera continue pour chaque valeur réelle de x. Il faut d'abord démontrer que $a^x \to 1$ lorsque $x \to 0$, cas où toutes les valeurs réelles de x sont permises. On peut démontrer cela exactement de la même manière que pour les valeurs rationnelles de x. Ensuite, comme ci-dessus, en utilisant la formule:

$$a^x - a^\alpha = a^\alpha (a^{x-\alpha} - 1),$$

nous pouvons démontrer que $a^x \to a^\alpha$ lorsque $x \to \alpha$, ce qui montre que a^x est continu pour toute valeur réelle de x.

Il n'est pas difficile de vérifier que toutes les propriétés fondamentales d'une fonction puissance sont vraies pour tous les exposants réels. Soit par exemple α et β deux nombres irrationnels, et soit $x \to \alpha$ et $y \to \beta$, où x et y sont des variables, qui, lorsqu'elles varient, prennent simultanément des valeurs rationnelles. Pour les exposants rationnels, nous avons:

$$a^x a^y = a^{x+y}.$$

En passant à la limite et en utilisant la continuité démontrée de la fonction puissance, nous obtiendrons la même propriété pour les indices irrationnels:

$$a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}.$$

Démontrons encore la loi de multiplication des exposants lors de l'élévation de puissance

$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}.$$

Si $\beta = n$ est un nombre entier positif, la formule que nous avons écrite résulte directement de la règle d'addition des exposants lors de la multiplication.

Si $\beta = \frac{p}{q}$ est un nombre rationnel positif, nous aurons:

$$(a^\alpha)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a^\alpha)^p} = \sqrt[q]{a^{\alpha p}} = a^{\alpha\frac{p}{q}}.$$

Pour les nombres rationnels negatifs, cette loi résulte directement de la formule (37). Supposons maintenant que β est irrationnel, et admettons que les nombres rationnels r tendent vers β. Nous avons, suivant ce qui a été démontré ci-dessus:

$$(a^\alpha)^r = a^{\alpha r}.$$

En passant à la limite et en utilisant la continuité de la fonction puissance, où nous prenons à gauche a^α pour base, nous obtiendrons $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$.

Avant de passer à la fonction logarithmique, faisons quelques remarques sur les fonctions inverses, dont nous avons déjà parlé brièvement dans l'introduction [I-1-20]. Si $y = f(x)$ est une fonction croissante continue dans l'intervalle (a, b), où $f(a) = A$ et $f(b) = B$, d'après la seconde propriété des fonctions continues, lorsque x croît de a vers b en passant par toutes les valeurs réelles, $f(x)$ croîtra de A vers B, en passant par toutes les valeurs intermédiaires. Ainsi à chaque valeur de y de l'intervalle (A, B) correspondra un x déterminé de (a, b), et la fonction inverse $x = \varphi(y)$ sera uniforme et croissante. Si $x = x_0$ se trouve à l'intérieur de (a, b), $y_0 = f(x_0)$ et que x parcoure le petit intervalle $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, alors, y parcourra un intervalle $(y_0 - \eta_1, y_0 + \eta_2)$. En désignant par δ le plus petit des deux nombres positifs η_1 et η_2, nous pouvons affirmer que si y appartient à l'intervalle $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ représentant une partie seulement de l'intervalle $(y_0 - \eta_1, y_0 + \eta_2)$, les valeurs correspondantes de x appartiennent *a fortiori* à l'intervalle $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, c'est-à-dire que $|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$, à condition que $|y - y_0| < \delta$. Etant donné que ε est arbitraire, cela montre la continuité de la fonction $x = \varphi(y)$ au point $y = y_0$. Si x_0 coïncide par exemple avec la borne a, il faut prendre, dans les raisonnements précédents, au lieu de $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ l'intervalle $(x_0, x_0 + \varepsilon)$. De façon analogue, on peut examiner le cas d'une fonction continue décroissante $f(x)$.

Revenons à la fonction (36). Du moment que $a > 1$, on a $a = 1 + b$, où $b > 0$, et la formule du binôme de Newton nous donne pour n entier positif > 1:

$$a^n = (1+b)^n > 1 + nb,$$

d'où l'on voit que a^x croît indéfiniment en même temps que x. De plus, il résulte de (37) que $a^x \to 0$ lorsque $x \to -\infty$. En tenant compte de ce qui a déjà été dit au sujet des fonctions inverses, nous pouvons affirmer que la fonction

$$x = \lg_a y, \tag{38}$$

qui est la fonction inverse de (36), sera une fonction univoque croissant continûment lorsque $y > 0$. On obtient les mêmes résultats dans le cas où $0 < a < 1$; mais les fonctions (36) et (38) seront décroissantes.

Introduisons maintenant une nouvelle notion, celle de *fonction de fonction*. Soit $y = f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle $a \leqslant x \leqslant b$; ses valeurs appartiennent à l'intervalle (c, d). Supposons, de plus, que $z = F(y)$ est une fonction continue dans l'intervalle $c \leqslant y \leqslant d$. En désignant par y la fonction de x, mentionnée plus haut, nous obtenons une fonction de fonction de x:

$$z = F(y) = F(f(x)).$$

On dit que cette fonction dépend de x par l'intermédiaire de y. Elle est définie dans l'intervalle $a \leqslant x \leqslant b$. Il est facile de voir qu'elle sera continue dans cet intervalle. En effet, à un accroissement infiniment petit de x correspond un accroissement infiniment petit de y, du fait de la continuité de $f(x)$: mais à un accroissement infiniment petit de y correspond un accroissement infiniment petit de z, du fait de la continuité de $F(y)$.

Examinons maintenant la fonction puissance

$$z = x^b \tag{39}$$

avec un exposant b réel quelconque, et nous considérerons la variable x comme positive. Des raisonnements concernant la fonction puissance, il résulte que la fonction (39) a une valeur déterminée pour tout x positif. En utilisant la définition des logarithmes et en prenant par exemple le logarithme népérien nous pouvons écrire au lieu de (39):

$$z = e^{b \ln x}.$$

Posant $y = b \ln x$ et $z = e^y$, nous pouvons considérer cette fonction comme une fonction de fonction de x, et la continuité des fonctions exponentielle et logarithmique nous assure la continuité de la fonction (39) pour tout $x > 0$.

Nous avons démontré [I-2-10] la continuité de la fonction $\sin x$ pour toutes les valeurs de x. On démontre de même la continuité de la fonction $\cos x$ pour tout x. Des formules

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

résulte [I-2-10] la continuité de $\operatorname{tg} x$ et $\operatorname{cotg} x$ pour tout x n'annulant pas les dénominateurs.

La fonction $y = \sin x$ est une fonction continue croissante dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. En utilisant ce qui a été dit des fonctions inverses, nous pouvons affirmer que la détermination principale de la fonction $x = \operatorname{arc} \sin y$ sera une fonction continue croissante dans l'intervalle $-1 \leqslant y \leqslant 1$. On démontre de façon analogue la continuité des autres fonctions circulaires inverses.

Chapitre II

NOTION DE DÉRIVÉE. APPLICATIONS

II-1. Dérivée et différentielle du premier ordre

II-1-1. Notion de dérivée. Soit un point se déplaçant sur une droite orientée. L'espace s parcouru par lui, évalué à partir d'un point donné de la droite, choisi comme origine, est évidemment une fonction du temps t

$$s = f(t),$$

telle qu'à chaque valeur du temps t correspond une valeur déterminée de s. Donnons à t un accroissement Δt; au nouveau temps $t + \Delta t$ correspondra le trajet $s + \Delta s$. Si le mouvement du point est uniforme, l'accroissement de trajet est proportionnel à l'accroissement de temps et dans ce cas le rapport $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ représente la vitesse constante du mouvement. Dans le cas général, ce rapport dépend aussi bien du temps t, que de l'accroissement Δt, et exprime *la vitesse moyenne* du mouvement au cours de l'intervalle de temps compris entre t et $t + \Delta t$. Cette vitesse moyenne est la vitesse d'un point imaginaire qui, animé d'un mouvement uniforme, parcourt le trajet Δs pendant le temps Δt. Nous aurons, par exemple, dans le cas d'un mouvement uniformément accéléré

$$s = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t$$

et

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} g(t+\Delta t)^2 + v_0 (t+\Delta t) - \frac{1}{2} gt^2 - v_0 t}{\Delta t} = gt + v_0 + \frac{1}{2} g\Delta t.$$

L'approximation qui consiste à assimiler le mouvement du point considéré pendant le temps Δt à un mouvement uniforme sera d'autant meilleure que l'intervalle Δt sera plus petit, et la limite du rapport $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, quand Δt tendra vers zéro, définira *la vitesse v à l'instant donné t*:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Ainsi, dans le cas d'un mouvement uniformément accéléré

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(gt+v_0+\frac{1}{2}g\Delta t\right)=gt+v_0.$$

La vitesse v, comme l'espace parcouru s, est une fonction du temps t; cette fonction s'appelle *la dérivée* par rapport au temps de la fonction $f(t)$; la vitesse apparaît donc comme *la dérivée de l'espace parcouru par rapport au temps.*

Supposons qu'un certain produit participe à une réaction chimique. La quantité x de ce produit, entrée en réaction à l'instant t, est une fonction du temps. A un accroissement Δt du temps correspondra un accroissement Δx de la quantité de produit réagissante x et le rapport $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ exprimera *la vitesse moyenne de la réaction chimique* au cours de l'intervalle de temps Δt; la limite de ce rapport, lorsque Δt tendra vers zéro, exprimera *la vitesse de la réaction chimique à l'instant donné* t.

Faisons maintenant abstraction des exemples et donnons une définition générale de la dérivée. Supposons que la fonction $y = f(x)$ est définie pour une certaine valeur fixée de x et pour toutes les valeurs qui lui sont suffisamment proches, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de la forme $x + h$, où h est un nombre arbitraire positif ou négatif suffisamment petit en valeur absolue. On appelle habituellement la valeur h l'accroissement de la variable indépendante x. Au lieu de h on écrit souvent Δx. L'accroissement correspondant de la fonction sera:

$$\Delta y=f(x+h)-f(x).$$

Formons le rapport de ces accroissements:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{1}$$

Ce rapport est déterminé pour toutes les valeurs de h, suffisamment petites en valeur absolue, c'est-à-dire dans un intervalle $-k\leqslant h\leqslant +k$ excepté $h = 0$. Comme x est fixé, le rapport (1) ne dépend que de h.

D é f i n i t i o n. *Si le rapport* (1) *a une limite (finie) quand* h *tend vers zéro* ($h \to \pm 0$), *cette limite est appelée la dérivée de la fonction* $f(x)$ *pour un* x *donné.*

En d'autres termes, on appelle dérivée de la fonction donnée $f(x)$ pour une valeur donnée de x la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de l'accroissement Δy de la fonction à l'accroissement Δx de la variable indépendante, quand ce dernier tend vers zéro ($\Delta x \to \pm 0$), si la limite susmentionnée existe. La dérivée est notée y' ou $f'(x)$:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to \pm 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

L'opération du calcul de la dérivée est appelée *la dérivation de la fonction.*

La fraction (1) peut ne pas avoir de limite quand $h \to \pm 0$ et alors la dérivée n'existe pas pour cette valeur donnée de x. L'existence de la limite $f'(x)$ est équivalente à ce qui suit [I-2-8]: *pour tout nombre donné* $\varepsilon > 0$, *il existe un nombre* $\eta > 0$ tel que

$$\left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon, \quad \textit{si } |h| < \eta \textit{ et } h \neq 0.$$

En supposant que la dérivée existe, nous pouvons écrire

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \beta,$$

où $\beta \to 0$ quand $h \to \pm 0$. Nous avons ensuite:

$$f(x+h) - f(x) = [f'(x) + \beta]\, h,$$

d'où il découle que $f(x+h) - f(x) \to 0$ quand $h \to \pm 0$, autrement dit, *si pour une certaine valeur de x la dérivée $f'(x)$ existe, alors la fonction $f(x)$ est continue pour cette valeur de x.* La réciproque n'est pas vraie, autrement dit, de la continuité de la fonction pour un x donné il ne découle pas l'existence de la dérivée.

Attirons l'attention sur le fait que lors de la recherche de la dérivée d'une fonction continue, nous avons une fraction (1) dont le numérateur et le dénominateur tendent vers zéro, mais le dénominateur h ne prend pas la valeur zéro. Notons un cas particulier. Si $y = cx$, le numérateur de la fraction est $c(x+h) - cx = ch$ et toute la fraction est égale à c, autrement dit, ne dépend pas de h. Sa limite pour $h \to \pm 0$ est aussi égale à c.

Pour une valeur fixée de x, les valeurs de $f(x)$ et $f'(x)$ sont des nombres. Si la fonction et sa dérivée existent pour tous les x à l'intérieur d'un certain intervalle, $f'(x)$ est une fonction de x à l'intérieur de cet intervalle. Dans le cas considéré plus haut $f(x) = cx$ la dérivée $f'(x)$ est égale au nombre c pour tous les x.

II-1-2. Signification géométrique de la dérivée. Pour établir la signification géométrique de la dérivée, on se reporte à la représentation graphique de la fonction $y = f(x)$. Soit M un point de la courbe représentative de coordonnées (x, y). Soit N un point voisin de la courbe représentative de coordonnées $(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$.

Si on figure les ordonnées $\overline{M_1M}$ et $\overline{N_1N}$ de ces deux points, et si on mène par M une droite parallèle à l'axe OX, on a évidemment (cf. fig. 50):

$$\overline{MP}=\overline{M_1N_1}=\Delta x,\ \overline{M_1M}=y,\ \overline{N_1N}=y+\Delta y,\ \overline{PN}=\Delta y. \qquad (2)$$

Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ représente la valeur de la tangente de l'angle α_1, que fait la sécante MN avec la direction positive de l'axe OX. Lorsque Δx tend vers zéro, le point N, se déplaçant sur la courbe,

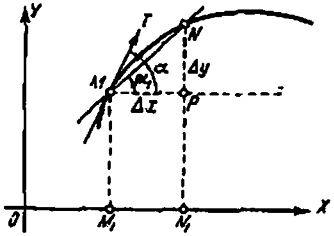

Fig. 50

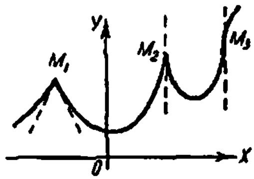

Fig. 51

tendra vers le point M; la position limite de la sécante MN sera *la tangente* MT à la courbe au point M et par conséquent la dérivée $f'(x)$ *sera égale à la tangente de l'angle* α, *formé par la tangente à la courbe au point* M (x, y) *et la direction positive de l'axe* OX, c'est-à-dire *égale au coefficient angulaire de cette tangente.*

Lorsqu'on évalue les intervalles d'après les formules (2), il y a lieu de tenir compte des signes et de remarquer que les accroissements Δx et Δy peuvent être aussi bien positifs que négatifs.

Le point N de la courbe peut tendre vers M de n'importe quel côté. Sur la fig. 50 nous avons donné à la tangente un sens déterminé. Si nous lui avions conféré le sens contraire, cela aurait modifié l'angle α d'une valeur π et n'aurait pas influé sur la valeur de la tangente de cet angle. Nous reviendrons encore par la suite à cette question de l'orientation de la tangente, mais maintenant elle est sans importance pour nous.

Nous voyons ainsi que l'existence de la dérivée est liée à l'existence de la tangente à la courbe correspondant à l'équation $y = f(x)$, et le coefficient angulaire de la tangente $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$ doit être fini. En d'autres termes, la tangente ne doit pas être parallèle à l'axe OY. Dans ce dernier cas, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, et la tangente de cet angle est infinie.

Une courbe continue peut en certains points ne pas avoir de tangente du tout, ou avoir une tangente parallèle à l'axe OY (fig. 51), et pour les valeurs correspondantes de x la fonction $f(x)$ n'a pas de dérivée. Il peut y avoir un nombre arbitrairement grand de points exceptionnels de ce genre sur la courbe. On démontre également qu'il existe des fonctions continues qui n'ont pas de dérivée pour aucune valeur de x. La courbe correspondant à cette fonction n'est pas concevable pour nos représentations géométriques.

Arrêtons-nous un peu plus en détail aux cas représentés sur la fig. 51.

Introduisons tout d'abord la notion de dérivée à droite et à gauche. Supposons que h tend vers zéro non d'une manière arbitraire, mais par valeurs négatives, ou par valeurs positives, autrement dit, $h \to -0$ ou $h \to +0$. Si le rapport (1) a dans ce cas une limite (finie), on la désigne usuellement par le symbole $f'(x-0)$ ou, respectivement, $f'(x+0)$ et on l'appelle *dérivée à gauche* ou, respectivement, *dérivée à droite*. L'existence de la dérivée $f'(x)$ est équivalente à l'existence et l'égalité des dérivées $f'(x-0)$ et $f'(x+0)$. Alors $f'(x) = f'(x-0) = f'(x+0)$.

Si les dérivées $f'(x-0)$ et $f'(x+0)$ existent et sont différentes, cela correspond au cas où au point correspondant x existent à droite et à gauche des tangentes non parallèles à l'axe OY (positions limites de la sécante), mais ces tangentes sont différentes, autrement dit, elles ne forment pas une droite passant par le point d'abscisse x. Ce cas est représenté par le point M_1 sur la fig. 51. Aux points M_2 et M_3 le rapport (1) tend vers l'infini quand $h \to -0$ ou $h \to +0$. Attirons l'attention sur le signe de cet infini.

Pour les points N situés sur la courbe à gauche du point M_2, la grandeur $h < 0$ et $f(x+h) - f(x) < 0$ pour les h suffisamment proches de zéro, car l'ordonnée à gauche est inférieure à l'ordonnée du point M_2. Ainsi, dans ce cas, le rapport (1) est positif et quand $h \to -0$, il tend vers $(+\infty)$ (la tangente à gauche est parallèle à l'axe OY). A droite de M_2 la grandeur $h > 0$ et, comme auparavant, $f(x+h) - f(x) < 0$, autrement dit, le rapport (1) est négatif et tend vers $(-\infty)$ quand $h \to +0$. Passons au point M_3. Ici à gauche $h < 0$ et $f(x+h) - f(x) < 0$, et à droite $h > 0$ et $f(x+h) - f(x) > 0$, autrement dit, à droite et à gauche le rapport (1) est positif et tend vers $(+\infty)$ quand $h \to -0$ et quand $h \to +0$, autrement dit, dans ce cas, le rapport (1) tend vers $(+\infty)$ quand $h \to \pm 0$.

Notons que lors de la définition de la dérivée nous avons exigé que le rapport (1) tende vers une limite finie quand $h \to \pm 0$. Si cette limite est égale à $(+\infty)$ ou $(-\infty)$ quand $h \to \pm 0$, nous ne disons pas toutefois que pour la valeur correspondante de x existe une dérivée égale à $(+\infty)$ ou $(-\infty)$.

Il peut également exister sur la courbe $y = f(x)$ des points où les dérivées $f'(x-0)$ et $f'(x+0)$ n'existent pas. Une courbe de ce genre est représentée sur la fig. 52. Elle ne possède pas les dérivées mentionnées au point $x = c$.

Si une fonction continue est donnée uniquement sur l'intervalle (a, b), nous ne pouvons former pour $x = a$ que la dérivée à droite $f'(a+0)$ et pour $x = b$ que la dérivée à gauche $f'(b-0)$. Quand on dit que $f(x)$ *possède sur l'intervalle fermé* (a, b) *une dérivée* $f'(x)$, cette dérivée doit être comprise dans le sens usuel en tout point intérieur de cet intervalle, mais aux extrémités de cet intervalle uniquement dans le sens indiqué.

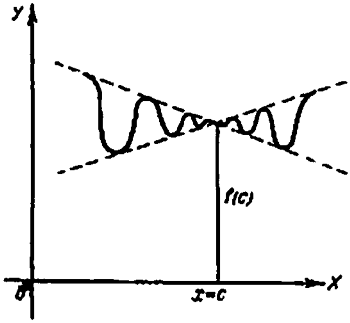

Fig. 52

Si $f(x)$ est déterminée dans un intervalle (A, B) plus large que (a, b), autrement dit, $A < a$ et $B > b$ et possède à l'intérieur de (A, B) une dérivée usuelle $f'(x)$, elle sera à plus forte raison une dérivée dans le sens indiqué sur l'intervalle (a, b).

II-1-3. Dérivées des fonctions simples. A partir de la définition on voit que, *pour déterminer la dérivée il faut former l'accroissement de la fonction, le diviser par l'accroissement correspondant de la variable indépendante et chercher la limite de ce rapport quand l'accroissement de la variable indépendante tend vers zéro.*

Appliquons cette règle à quelques fonctions simples.

I. $y = b$ (constante) [I-1-12].

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{b-b}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0,$$

c'est-à-dire que *la dérivée d'une constante est nulle.*

II. $y = x^n$ (n — nombre entier positif).

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^n + nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}h^2x^{n-2} + \ldots + h^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}hx^{n-2} + \ldots + h^{n-1} \right] = nx^{n-1}.$$

En particulier, pour $y = x$, $y' = 1$. On généralisera ci-dessous cette règle de dérivation des fonctions puissance aux valeurs quelconques de l'exposant n.

III. $y = \sin x$.

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x,$$

puisque pour $\frac{h}{2}$ tendant vers zéro, $\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ tend vers 1 [I-2-9].

IV. $y = \cos x$.

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} =$$

$$= -\lim_{h\to 0} \left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x.$$

V. $y = \ln x \, (x > 0)$.

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x},$$

puisque pour $h \to 0$, la variable $\alpha = \frac{h}{x}$ tend également vers zéro, et $\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} \to 1$ [I-2-14].

VI. $y = cu(x)$, où c est une constante et $u(x)$ une fonction de x.

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{cu(x+h) - cu(x)}{h} = c \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = cu'(x),$$

c'est-à-dire que *la dérivée du produit d'une constante par une variable est égale au produit de cette constante par la dérivée du facteur variable* ou, en d'autres termes, *on peut extraire un facteur constant du signe de dérivation.*

VII. $y = \lg_a x$.

Comme on le sait, $\lg_a x = \ln x \cdot \frac{1}{\ln a}$ [1-2-14]. En appliquant la règle VI, il vient:

$$y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}.$$

VIII. Pour l'étude de la dérivée de la somme de plusieurs fonctions, on se limitera à trois termes:

$$y = u(x) + v(x) + w(x),$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{[u(x+h) + v(x+h) + w(x+h)] - [u(x) + v(x) + w(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + \frac{w(x+h) + w(x)}{h} \right] =$$

$$= u'(x) + v'(x) + w'(x),$$

c'est-à-dire que *la dérivée d'une somme de fonctions est égale à la somme des dérivées de ces fonctions.*

IX. Examinons maintenant la dérivée du produit de deux fonctions:

$$y = u(x) \cdot v(x),$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)\, v(x+h) - u(x)\, v(x)}{h}.$$

En ajoutant et en retranchant au numérateur la grandeur $u(x+h)\, v(x)$, il vient

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)\, v(x+h) - u(x+h)\, v(x) + u(x+h)\, v(x) - u(x)\, v(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} u(x+h) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + \lim_{h \to 0} v(x) \frac{u(x+h) - u(x)}{h} =$$

$$= u(x)\, v'(x) + v(x)\, u'(x),$$

autrement dit, dans le cas de deux facteurs, on a montré que *la dérivée du produit est égale à la somme des produits des dérivées de chacun des facteurs par les autres.*

Montrons maintenant que cette règle s'applique au cas de trois facteurs, faisant deux groupes de facteurs, comportant respectivement un et deux facteurs de un, et un appliquant cette règle au cas de deux facteurs:

$$y = u(x)\, v(x)\, w(x),$$

$$y' = \{[u(x)\, v(x)]\, w(x)\}' = [u(x)\, v(x)]\, w'(x) + w(x)\, [u(x)\, v(x)]' =$$

$$= u(x)\, v(x)\, w'(x) + u(x)\, v'(x)\, w(x) + u'(x)\, v(x)\, w(x).$$

En utilisant la méthode bien connue de l'induction mathématique, il n'est pas difficile d'étendre cette règle au cas d'un nombre fini quelconque de facteurs.

X. Maintenant, soit y un quotient:

$$y=\frac{u(x)}{v(x)},$$

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{v(x)\,v(x+h)}\,\frac{u(x+h)\,v(x)-v(x+h)\,u(x)}{h}.$$

En ajoutant et en retranchant au numérateur de la deuxième fraction le produit $u(x)\,v(x)$, on a, en tenant compte de la continuité de la fonction $v(x)$:

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{1}{v(x)\,v(x+h)}\cdot\frac{u(x+h)\,v(x)-u(x)\,v(x)+u(x)\,v(x)-v(x+h)\,u(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{v(x)\,v(x+h)}\left[v(x)\,\frac{u(x+h)-u(x)}{h}-u(x)\,\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]=$$

$$=\frac{u'(x)\,v(x)-v'(x)\,u(x)}{[v(x)]^2},$$

c'est-à-dire que *la dérivée d'une fraction* (quotient) *est égale au produit de la dérivée du numérateur par le dénominateur moins le produit de la dérivée du dénominateur par le numérateur, le tout divisé par le carré du dénominateur.*

XI. $y=\operatorname{tg} x$.

$$y'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

XII. $y=\operatorname{cotg} x$.

$$y'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Lorsqu'on a établi les règles VI, VIII, IX et X, on a supposé que les fonctions $u(x)$, $v(x)$ et $w(x)$ avaient des dérivées, et on a démontré l'existence de la dérivée de la fonction y.

II-1-4. Dérivées des fonctions de fonction et des fonctions inverses. Rappelons d'abord la définition d'*une fonction de fonction* [I-2-20]. Soit $y=f(x)$ une fonction continue dans un intervalle quelconque $a\leqslant x\leqslant b$ et telle que les valeurs de la fonction appartiennent à l'intervalle $c\leqslant y\leqslant d$. Soit $z=F(y)$ une fonction continue dans l'intervalle $c\leqslant y\leqslant d$. Considérant y comme la fonction susmentionnée de x, nous obtiendrons une fonction de fonction de x:

$$z = F(y) = F(f(x)).$$

On dit que cette fonction dépend de x par l'intermédiaire de y. Il n'est pas difficile de voir que cette fonction sera continue dans l'intervalle $a \leqslant x \leqslant b$. En effet, à un accroissement infiniment petit de x correspond un accroissement infiniment petit de y, puisque la fonction $f(x)$ est continue, et à l'accroissement infiniment petit de y correspond un accroissement infiniment petit de z, la fonction $F(y)$ étant continue.

Il y a lieu de faire une remarque avant de passer à l'établissement de la règle de dérivation d'une fonction de fonction. Cette remarque est la suivante. Si $z = F(y)$ a une dérivée pour $y = y_0$, nous pouvons écrire d'après [II-1-1]:

$$\Delta z = F(y_0 + \Delta y) - F(y_0) = [F'(y_0) + \alpha]\,\Delta y, \tag{3}$$

où la variable α est la fonction de Δy, déterminée pour tout Δy suffisamment proche, mais différent de zéro, et $\alpha \to 0$ si $\Delta y \to 0$, sans jamais devenir nul. L'égalité (3) reste valable pour $\Delta y = 0$ avec n'importe quel α, parce que pour $\Delta y = 0$ et $\Delta z = 0$. D'après ce qui précède, il est naturel de poser $\alpha = 0$ pour $\Delta y = 0$. D'après cette proposition on peut supposer que dans la formule (3), $\alpha \to 0$ si $\Delta y \to 0$ de n'importe quelle façon, même si Δy prend la valeur zéro. Donnons maintenant le théorème de la dérivation d'une fonction de fonction.

T h é o r è m e. *Si $y = f(x)$ a une dérivée $f'(x_0)$ au point $x = x_0$ et si $z = F(y)$ a une dérivée $F'(y_0)$* au point $y_0 = f(x_0)$, *la fonction de fonction $F(f(x))$ a au point $x = x_0$ une dérivée égale au produit $F'(y_0)\, f'(x_0)$.*

Soit Δx l'accroissement non nul que l'on donne à la valeur x_0 de la variable indépendante x, et $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, l'accroissement correspondant de la variable y (qui peut être nul). Soit maintenant $\Delta z = F(y_0 + \Delta y) - F(y_0)$. La dérivée par rapport à x de la fonction de fonction $z = F(f(x))$ pour tout $x = x_0$ est évidemment égale à la limite, si elle existe, du rapport $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ pour $\Delta x \to 0$. Divisons les deux membres de l'égalité (3) par Δx:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = [F'(y_0) + \alpha]\,\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Lorsque $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ par suite de la continuité de la fonction $y = f(x)$ au point $x = x_0$, et, comme nous l'avons indiqué plus haut, $\alpha \to 0$. Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend vers la dérivée $f'(x_0)$. Si, dans l'égalité inscrite plus haut, on passe à la limite, il vient:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = F'(y_0) f'(x_0),$$

ce qui prouve le théorème que nous avons énoncé. Remarquons que la continuité de $f(x)$ pour $x = x_0$ découle de l'hypothèse de l'existence de la dérivée $f'(x_0)$ [II-1-1].

Le théorème qui vient d'être démontré peut être énoncé sous la forme suivante de règle de dérivation des fonctions de fonction: *la dérivée d'une fonction de fonction est égale au produit de la dérivée par rapport à la variable intermédiaire par la dérivée de la variable intermédiaire par rapport à la variable indépendante*:

$$z'_x = F'(y) f'(x).$$

Passons à la règle de dérivation des fonctions inverses. Si $y = f(x)$ est continue et croissante dans l'intervalle (a, b) (c'est-à-dire qu'aux plus grandes valeurs de x correspondent les valeurs plus grandes de y) avec $A = f(a)$ et $B = f(b)$, comme nous le savons déjà d'après [I-1-21] et [I-2-20], il existe une fonction inverse $x = \varphi(y)$ univoque continue et croissante dans l'intervalle (A, B). En raison de cette croissance, si $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$ et inversement; en raison de cette continuité, si $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ et inversement. (Le cas des fonctions décroissantes se traite exactement de la même façon.)

Théorème. Si $f(x)$ *a une dérivée* $f'(x_0)$ *différente de zéro au point* x_0, *la fonction inverse* $\varphi(y)$ *a au point* $y_0 = f(x_0)$ *une dérivée*

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{4}$$

Si l'on désigne par Δx et Δy les accroissements correspondants de x et de y, c'est-à-dire:

$$\Delta x = \varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0),$$
$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

et si l'on tient compte du fait qu'ils sont tous les deux différents de zéro, on peut écrire:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Comme on a vu plus haut, Δx et Δy tendent vers zéro simultanément, et l'expression précédente admet (4) comme limite. Le théorème qui vient d'être démontré peut être énoncé sous la forme suivante de règle de dérivation des fonctions inverses: *la dérivée de la fonction inverse d'une fonction est égale à l'unité divisée par la dérivée de la fonction initiale au point considéré.*

L'interprétation géométrique de cette règle de dérivation est simple [I-1-21]. Les fonctions $x = \varphi(y)$ et $y = f(x)$ ont la même courbe représentative dans le plan XOY, à ceci près que pour la fonction $x = \varphi(y)$ l'axe sur lequel est portée la variable indépendante est l'axe OY, et non plus l'axe OX (fig. 53). Si l'on mène la tangente MT en revenant à la signification géométrique de la dérivée, il vient

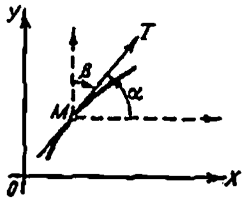

Fig. 53

$$f'(x) = \operatorname{tg}(OX, MT) = \operatorname{tg}\alpha,$$
$$\varphi'(y) = \operatorname{tg}(OY, MT) = \operatorname{tg}\beta,$$

les angles α et β étant comptés positivement sur la fig. 53. Mais il est évident que $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ et, par conséquent,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \text{ c'est-à-dire } \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Si $x = \varphi(y)$ est la fonction inverse de $y = f(x)$, on peut évidemment considérer, réciproquement, la fonction $y = f(x)$ comme l'inverse de $x = \varphi(y)$.

Appliquons la règle de dérivation des fonctions inverses à l'exemple suivant:

XIII. $y = a^x$ $(a > 0)$.

La fonction inverse est dans ce cas:

$$x = \varphi(y) = \lg_a y,$$

et d'après VII,

$$\varphi'(y) = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\ln a},$$

d'où nous tirons en appliquant la règle de dérivation des fonctions inverses:

$$y' = \frac{1}{\varphi'(y)} = y \ln a \quad \text{ou} \quad (a^x)' = a^x \ln a.$$

Dans le cas particulier où $a = e$, il vient:

$$(e^x)' = e^x.$$

La formule obtenue jointe à la règle de dérivation des fonctions de fonction nous permettra de calculer les dérivées de la fonction puissance.

XIV. $y = x^n$ $(x > 0$; n nombre quelconque réel).

Pour tout $x > 0$, cette fonction est définie et a une valeur positive [I-1-19].

En utilisant la définition des logarithmes, on peut représenter cette fonction sous la forme d'une fonction de fonction:

$$y = x^n = e^{n \ln x}.$$

En dérivant selon la règle de dérivation des fonctions de fonction, il vient:

$$y' = e^{n \ln x} \frac{n}{x} = x^n \frac{n}{x} = nx^{n-1}.$$

Ce résultat peut être étendu simplement au cas des valeurs négatives de x, si seulement pour ces valeurs la fonction existe, par exemple dans le cas de $y = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$.

Appliquons maintenant la règle de dérivation des fonctions inverses à la détermination des dérivées des fonctions circulaires inverses.

XV. $y = \text{arc} \sin x$.

Nous considérons la détermination principale [I-1-24] de cette fonction, c'est-à-dire l'arc compris dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$. Cette fonction peut être considérée comme la fonction inverse de la fonction $x = \sin y$, et d'après la règle de dérivation des fonctions inverses, il vient:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

en choisissant la racine positive, puisque $\cos y$ est positif dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. On peut obtenir de la même façon:

$$(\text{arc} \cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

où l'on prend en compte la détermination principale de la fonction arc cos x, c'est-à-dire l'arc compris dans l'intervalle $(0, \pi)$.

XVI. $y = \text{arc tg}\, x$.

La détermination principale d'arc tg x correspond à l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, et cette fonction peut être considérée comme l'inverse de la fonction $x = \text{tg}\, y$; par conséquent:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\text{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

On obtiendra de la même façon:

$$(\text{arc cotg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

XVII. Examinons encore la dérivation des fonctions du type $y = u^v$, où u et v sont des fonctions de x. Nous pouvons écrire

$$y = e^{v \ln u},$$

et, en appliquant la règle de dérivation des fonctions de fonction, il vient:

$$y' = e^{v \ln u} \cdot (v \ln u)'.$$

Si nous appliquons maintenant la règle de dérivation d'un produit de fonctions et dérivons $\ln u$ comme une fonction de fonction de x, nous obtiendrons finalement:

$$y' = e^{v \ln u} \left(v' \ln u + \frac{v}{u} u' \right)$$

ou

$$y' = u^v \left(v' \ln u + \frac{v}{u} u' \right) .$$

II-1-5. Table des dérivées des fonctions et exemples. Rappelons dans une table toutes les règles de dérivation que nous avons établies.

1. $(c)' = 0$.
2. $(cu)' = cu'$.
3. $(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)' = u_1' + u_2' + \ldots + u_n'$.
4. $(u_1 u_2 \ldots u_n)' = u_1' u_2 u_3 \ldots u_n + u_1 u_2' u_3 \ldots u_n + \ldots + u_1 u_2 u_3 \ldots u_n'$.
5. $\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.
6. $(x^n)' = nx^{n-1}$ et $(x)' = 1$.
7. $(\lg_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
8. $(e^x)' = e^x$ et $(a^x)' = a^x \ln a$.
9. $(\sin x)' = \cos x$.
10. $(\cos x)' = -\sin x$.
11. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
12. $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

15. $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

16. $(\operatorname{arc\,cotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

17. $(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v \ln u v'$.

18. $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ (y dépend de x par l'intermédiaire de u).

19. $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

Appliquons maintenant ces règles à quelques exemples:

1. $y = x^3 - 3x^2 + 7x - 10$.

L'application des règles 3, 6 et 2 conduit à:

$$y' = 3x^2 - 6x + 7.$$

2. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{-2/3}$.

L'application de la règle 6 conduit à:

$$y' = -\frac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}.$$

3. $y = \sin^2 x$.

On pose $u = \sin x$, et l'application des règles 18, 6 et 9 donne:

$$y' = 2u \cdot u' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$$

4. $y = \sin(x^2)$.

On pose $u = x^2$, et l'application des mêmes règles conduit à:

$$y' = \cos u \cdot u' = 2x \cos(x^2).$$

5. $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

En posant d'abord $u = x + \sqrt{x^2+1}$, puis $v = x^2 + 1$ et en appliquant ensuite deux fois la règle 18, ainsi que les règles 7, 3 et 6:

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}(x+\sqrt{x^2+1})' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}[1+(\sqrt{x^2+1})'] =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)'\right] =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

6. $y = \left(\frac{x}{2x-1}\right)^n$.

Posons $u=\frac{x}{2x+1}$ et appliquons les règles 18, 6 et 5 :

$$y'=n\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{n-1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)'=n\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{n-1}\frac{2x+1-2x}{(2x+1)^2}=\frac{nx^{n-1}}{(2x+1)^{n+1}}\,.$$

7. $y=x^x$.

Par application de la règle 17, il vient :

$$y'=x^{x-1}\cdot x+x^x\ln x=x^x(1+\ln x).$$

8. La fonction y est donnée par l'équation :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \tag{5}$$

comme fonction implicite de x. Calculer la dérivée y.

Si l'on résolvait l'équation donnée par rapport à y, on obtiendrait $y = f(x)$, le premier membre de cette équation, après y avoir porté $y = f(x)$, étant évidemment identiquement nul. La dérivée de zéro, comme celle de toute constante, est nulle, c'est pourquoi, si l'on dérive le premier membre de l'équation donnée par rapport à x, en considérant que y est une fonction de x, donnée par cette équation, on doit trouver zero :

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}y'=0,\ \text{d'où}\ y'=-\frac{b^2x}{a^2y}\,.$$

Dans ce cas, comme on peut le voir, y' ne s'exprime pas seulement en fonction de x mais aussi en fonction de y. Cependant, il n'a pas fallu, pour calculer la dérivée, chercher à résoudre l'équation (5) par rapport à y, c'est-à-dire trouver une expression explicite de la fonction.

Comme on le sait d'après la géométrie analytique, l'expression (5) est l'équation de l'ellipse et l'expression trouvée pour y' représente le coefficient angulaire de la tangente à cette ellipse au point de coordonnées (x, y).

II-1-6. Notion de différentielle. Soit Δx l'accroissement arbitraire de la variable indépendante que nous considérerons maintenant comme indépendante de x. Nous l'appellerons *différentielle de la variable indépendante* et nous l'écrirons Δx ou dx. Cette expression n'indique nullement un produit de d par x, mais est le symbole pour désigner *une quantité arbitraire ne dépendant pas de x.*

On appelle différentielle d'une fonction le produit de sa dérivée par la différentielle de la variable indépendante.

La différentielle d'une fonction $y = f(x)$ est désignée par le symbole dy ou $df(x)$:

$$dy=df(x)=f'(x)\,dx. \tag{6}$$

A partir de cette formule on peut exprimer la dérivée sous forme du rapport de deux différentielles :

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}\,.$$

Soulignons que la différentielle dx d'une variable indépendante, faisant partie de la définition de la différentielle d'une fonction et de la formule (6), peut prendre des valeurs tout à fait arbitraires. En fixant une valeur quelconque de dx, nous obtenons, d'après la formule (6), la valeur correspondante de dy, pour un x donné. Si nous considérons dx comme un accroissement de la variable indépendante x, il faut que non seulement x, mais aussi $x + dx$ appartiennent à l'intervalle sur lequel la fonction a été définie. Cependant, même alors, la différentielle de la fonction dy ne coïncide pas, sauf cas exceptionnels, avec l'accroissement de la fonction correspondant à l'accroissement dx de la variable indépendante.

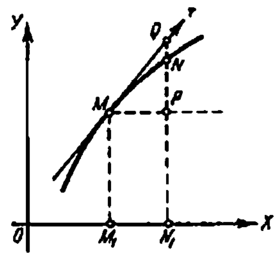

Fig. 54

Pour saisir la différence qui existe entre ces deux grandeurs nous allons examiner la courbe représentative de la fonction.

Soit, sur cette courbe, un point $M(x, y)$ et un autre point N. Traçons une tangente MT, les ordonnées correspondant aux points M et N et la droite MP parallèle à OX (cf. fig. 54). Nous aurons alors:

$$\overline{MP} = \overline{M_1N_1} = \Delta x \text{ (ou } dx),$$

$$\overline{PN} = \Delta y \text{ (accroissement de } y),$$

$$\operatorname{tg} \widehat{PMQ} = f'(x),$$

d'où

$$dy = f'(x)\,dx = \overline{MP} \operatorname{tg} \widehat{PMQ} = \overline{PQ}.$$

La différentielle de la fonction est représentée par le segment $\overline{PQ}$, qui n'est pas identique au segment $\overline{PN}$ qui correspond à l'accroissement de la fonction. Le segment $\overline{PQ}$ représente l'accroissement que nous aurions obtenu si, dans l'intervalle $(x, x + dx)$ nous avions remplacé l'arc de courbe $\overline{MN}$ par le segment $\overline{MQ}$ de la tangente, c'est-à-dire si nous avions estimé que dans cet intervalle, l'accroissement de la fonction est proportionnel à l'accroissement de la variable indépendante, et que le coefficient de proportionnalité est égal au coefficient angulaire de la tangente MT ou, ce qui revient au même, à la dérivée $f'(x)$.

La différence entre la différentielle et l'accroissement est représentée par le segment $\overline{NQ}$. Montrons que si Δx tend vers zéro, cette différence est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à Δx [I-2-12].

La limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est la dérivée, c'est pourquoi [I-2-3]:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon,$$

où ε est un infiniment petit simultanément avec Δx. Cette égalité nous donne:

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \varepsilon\Delta x$$

ou

$$\Delta y = dy + \varepsilon\Delta x,$$

ce qui montre que la différence entre dy et Δy est égale à $(-\varepsilon\Delta x)$. Le rapport entre $(-\varepsilon\Delta x)$ et Δx, égal à $(-\varepsilon)$, tend vers 0 en même temps que Δx, c'est-à-dire que la différence entre dy et Δy est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à Δx. Remarquons que le signe de cette différence peut être quelconque. Sur notre figure, aussi bien Δx que cette différence sont positifs.

La formule (6) donne la règle du calcul de la différentielle d'une fonction. Appliquons-la à quelques cas particuliers.

I. Soit c une constante, alors

$$dc = (c)'\,dx = 0 \cdot dx = 0,$$

c'est-à-dire que *la différentielle d'une constante est nulle*.

II. $$d[cu(x)] = [cu(x)]'\,dx = cu'(x)\,dx = c\,du(x),$$

c'est-à-dire qu'*un facteur constant peut être sorti du symbole de différentiation*.

III. $$d[u(x)+v(x)+w(x)] = [u(x)+v(x)+w(x)]'\,dx =$$
$$= [u'(x)+v'(x)+w'(x)]\,dx = u'(x)\,dx + v'(x)\,dx + w'(x)\,dx =$$
$$= du(x) + dv(x) + dw(x),$$

c'est-à-dire que *la différentielle d'une somme est égale à la somme des différentielles de chacun des termes*.

IV. $$d[u(x)\,v(x)\,w(x)] = u(x)\,v(x)\,w(x)]'\,dx =$$
$$= v(x)\,w(x)\,u'(x)\,dx + u(x)\,w(x)\,v'(x)\,dx + u(x)\,v(x)\,w'(x)\,dx =$$
$$= v(x)\,w(x)\,du(x) + u(x)\,w(x)\,dv(x) + u(x)\,v(x)\,dw(x),$$

c'est-à-dire que *la différentielle d'un produit est égale à la somme de produits de la différentielle de chacun des facteurs par tous les autres facteurs*.

On n'a mentionné ici que le cas de trois facteurs. Mais la même déduction est également valable pour n'importe quel nombre fini de facteurs.

V. $$d\frac{u(x)}{v(x)}=\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'dx=\frac{v(x)\,u'(x)\,dx-u(x)\,v'(x)\,dx}{[v(x)]^2}=$$
$$=\frac{v(x)\,du(x)-u(x)\,dv(x)}{[v(x)]^2},$$

c'est-à-dire que *la différentielle d'un rapport* (d'une fraction) *est égale à la différence entre le produit de la différentielle du numérateur par le dénominateur et le produit de la différentielle du dénominateur par le numérateur, le tout divisé par le carré du dénominateur.*

VI. Etudions le cas d'une fonction de fonction $y = f(u)$, où u est fonction de x. Déterminons dy, en supposant que y dépend de x:

$$dy = y'_x\,dx = f'(u)\cdot u'_x\,dx = f'(u)\,du,$$

c'est-à-dire que *la différentielle d'une fonction de fonction se présente sous la même forme que si la fonction intermédiaire était la variable indépendante.*

Etudions un cas particulier afin de comparer l'accroissement de la fonction à sa différentielle. Soit la fonction:

$$y=f(x)=x^3+2x^2+4x+10$$

et étudions son accroissement

$$f(2{,}01)-f(2)=2{,}01^3+2\cdot 2{,}01^2+4\cdot 2{,}01+10-(2^3+2\cdot 2^2+4\cdot 2+10).$$

Les calculs donnent la valeur suivante de l'accroissement:

$$\Delta y=f(2{,}01)-f(2)=0{,}240801.$$

Il est incomparablement plus simple d'évaluer la différentielle de la fonction. Dans le cas présent, $dx = 2{,}01 - 2 = 0{,}01$ et la différentielle de la fonction sera:

$$dy=(3x^2+4x+4)\,dx=(3\cdot 2^2+4\cdot 2+4)\cdot 0{,}01=0{,}24.$$

En faisant la comparaison, nous voyons qu'il y a coïncidence entre dy et Δy au millième près.

II-1-7. Quelques équations différentielles. Nous avons montré qu'en remplaçant l'accroissement de la fonction dans l'intervalle $(x, x + dx)$ par sa différentielle, nous appliquons la loi de proportionnalité directe entre les accroissements de la fonction et ceux de la variable indépendante avec un coefficient de proportionnalité correspondant, et que cette substitution engendre une erreur qui est un infiniment petit d'ordre supérieur à dx. C'est sur ce fait qu'est basé l'emploi de l'analyse des infiniment petits pour l'étude des phénomènes naturels.

En observant un certain processus, on s'efforce de le diviser en éléments petits et on applique à chacun d'eux la règle de proportionnalité directe. A la limite on obtient ainsi une équation représentant une relation entre une variable indépendante, une fonction et leurs différentielles (ou dérivées). *On appelle cette équation équation différentielle*, correspondant au processus considéré. Obtenir la fonction à partir de l'équation différentielle c'est *intégrer l'équation différentielle.*

Ainsi, en utilisant l'analyse des infiniment petits pour étudier une loi de la nature, il faut former l'équation différentielle de la loi considérée et l'intégrer. Ce dernier problème est en général beaucoup plus difficile que le premier et nous en parlerons dans la suite. Dans les exemples suivants nous allons rechercher les équations différentielles correspondant à certains phénomènes simples de la nature.

1. *Formule barométrique.* La pression atmosphérique p, calculée pour une unité de la surface, est évidemment une fonction de l'altitude h. Examinons une colonne cylindrique verticale d'air de section égale à l'unité. Considérons deux sections A et A_1 du cylindre, respectivement définies par les hauteurs h et $h + dh$. Lorsque l'on passe de la section A à la section A_1, la pression p diminue (si $dh > 0$) d'une grandeur égale au poids d'air contenu dans la partie du cylindre entre A et A_1. Si dh est petit, on peut considérer de façon approchée que la densité d'air ρ dans cette partie du cylindre est une constante. La surface de la section de la colonne AA_1 est égale à l'unité et sa hauteur est dh, son volume est donc dh et son poids $\rho\, dh$. Ainsi la diminution de p (lorsque $dh > 0$) est égale à $\rho\, dh$:

$$dp = -\rho\, dh.$$

D'après la loi de Boyle-Mariotte la densité ρ est proportionnelle à la pression p:

$$\rho = cp \text{ (où } c \text{ est une constante),}$$

et nous avons l'équation différentielle suivante:

$$dp = -cp\, dh \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{dh} = -cp.$$

2. *Réactions chimiques du premier ordre.* Soit une substance de masse a qui entre dans une réaction chimique. Soit x la masse qui est déjà entrée en réaction à l'instant t. Il est évident que x est une fonction de t. Pour certaines réactions on peut considérer de façon approchée, que la quantité de matière dx qui entre en réaction entre les instants t et $t + dt$, pour dt petit, est proportionnelle à dt et à la quantité de matière qui n'a pas encore réagi à l'instant t:

$$dx = c(a-x)\, dt \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dt} = c(a-x).$$

Transformons cette équation différentielle, en introduisant au lieu de x la fonction $y = a - x$, où y représente la masse qui n'a pas encore réagi à l'instant t. En tenant compte de ce que a est une constante, nous avons:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{dx}{dt},$$

et l'équation différentielle d'une réaction chimique du premier ordre peut être mise sous la forme:

$$\frac{dy}{dt} = -cy.$$

3. *Loi du refroidissement.* Supposons qu'un corps chauffé à une température élevée est plongé dans un milieu ayant une température constante de 0°. Lors du refroidissement, la température θ du corps sera une fonction du temps t mesuré à partir de l'instant où le corps est plongé dans le milieu. La quantité de chaleur dQ perdue par le corps pendant l'intervalle de temps dt sera considérée, de façon approchée, comme proportionnelle à la durée dt et à la différence entre la température du corps et du milieu ambiant à l'instant t (loi du refroidissement de

Newton). On peut alors écrire :

$$dQ = c_1\theta \, dt \text{ (où } c_1 \text{ est une constante).}$$

Si k est la chaleur spécifique du corps,

$$dQ = -k\, d\theta,$$

où nous avons mis le signe (—) car $d\theta$ dans le cas considéré est négatif (la température baisse). En comparant ces deux expressions de dQ, nous obtenons :

$$d\theta = -c\theta\, dt \left(c = \frac{c_1}{k}\right), \text{ soit } \frac{d\theta}{dt} = -c\theta ;$$

c est une constante, si nous considérons k comme une constante. Les équations différentielles obtenues ont une forme identique. Elles montrent toutes que la dérivée est proportionnelle à la fonction même avec un coefficient de proportionnalité négatif $(-c)$.

Nous avons montré [I-2-14] qu'un capital a placé pendant un temps t à un taux k et dont l'intérêt est capitalisé devient :

$$y = ae^{kt}. \tag{7}$$

En calculant la dérivée, nous obtenons :

$$y' = ake^{kt} = ky, \tag{8}$$

c'est-à-dire que dans ce cas, nous obtenons encore que la dérivée est proportionnelle à la fonction, grâce à quoi on appelle cette propriété *loi des intérêts composés.* Dans la suite nous montrerons que la fonction (7) donne *toutes* les solutions de l'équation différentielle (8) pour une valeur *arbitraire* de la constante a, à la place de laquelle nous écrirons C.

De la sorte les solutions de nos équations peuvent être mises sous la forme (en remplaçant k par $-c$) :

$$p(h) = Ce^{-ch}, \quad y(t) = Ce^{-ct}, \quad \theta(t) = Ce^{-ct}, \tag{9}$$

où C est une constante. Déterminons maintenant la signification physique de C dans chacune des formules précédentes. En faisant dans la première formule $h = 0$, il vient :

$$C = p(0) = p_0,$$

où p_0 est la pression atmosphérique pour $h = 0$, c'est-à-dire à la surface de la terre. Dans le deuxième cas pour $t = 0$ on a

$$C = y(0),$$

c'est-à-dire que C est la masse qui n'est pas entrée en réaction à l'instant initial, et nous l'avons notée d'abord avec la lettre a. Enfin, en faisant $t = 0$ dans la troisième des formules (9), on voit que C est la température initiale θ_0 du corps au moment où on le plonge dans le milieu. Et de la sorte il vient :

$$p(h) = p_0e^{-ch}, \quad y(t) = ae^{-ct}, \quad \theta(t) = \theta_0e^{-ct}. \tag{10}$$

II-1-8. **Estimation des erreurs.** Lorsque l'on détermine pratiquement ou que l'on calcule de façon approchée une grandeur x, on fait une erreur Δx qui est l'*erreur absolue* de l'observation ou du calcul. Elle ne caractérise pas la précision de l'observation. Par exemple, une erreur de 1 cm environ lors de la mesure des dimensions d'une chambre est pratiquement tolérable, tandis que la même erreur sur la distance de deux objets voisins (par exemple, la distance entre la chandelle et l'écran du photomètre) représente une grande erreur. C'est pourquoi on introduit en outre la notion d'*erreur relative*, qui est égale à la valeur absolue du rapport $\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$ de l'erreur absolue à la valeur de la grandeur mesurée.

Supposons maintenant qu'une grandeur y est définie par l'équation $y = f(x)$. L'erreur Δx entraînera une erreur Δy. Pour des valeurs petites de Δx on peut remplacer Δy approximativement par la différentielle dy, de sorte que l'erreur relative sur y s'exprime par:

$$\left|\frac{dy}{y}\right|.$$

Exemples. 1. L'intensité du courant i est définie, comme on sait, à l'aide d'une boussole des tangentes d'après la formule:

$$i = c \operatorname{tg} \varphi.$$

Soit $d\varphi$ l'erreur sur la mesure de l'angle φ:

$$di = \frac{c}{\cos^2 \varphi}\, d\varphi, \quad \frac{di}{i} = \frac{c}{\cos^2 \varphi \cdot c \operatorname{tg} \varphi}\, d\varphi = \frac{2}{\sin 2\varphi}\, d\varphi,$$

d'où on voit que l'erreur relative $\left|\frac{di}{i}\right|$ sera d'autant plus petite lors de la mesure de i, que φ sera plus voisin de 45°.

2. Examinons le produit uv:

$$d(uv) = v\,du + u\,dv, \quad \frac{d(uv)}{uv} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v},$$

d'où:

$$\left|\frac{d(uv)}{uv}\right| \leqslant \left|\frac{du}{u}\right| + \left|\frac{dv}{v}\right|,$$

c'est-à-dire que *l'erreur relative sur un produit n'est pas plus grande que la somme des erreurs relatives sur les différents facteurs.*

On a la même règle pour un quotient car:

$$d\frac{u}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2},$$

$$\frac{d\frac{u}{v}}{\frac{u}{v}} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}, \quad \left|\frac{d\frac{u}{v}}{\frac{u}{v}}\right| \leqslant \left|\frac{du}{u}\right| + \left|\frac{dv}{v}\right|.$$

3. Examinons la formule de la surface d'un cercle:

$$Q = \pi r^2, \quad dQ = 2\pi r\,dr, \quad \frac{dQ}{Q} = \frac{2\pi r\,dr}{\pi r^2} = 2\frac{dr}{r},$$

c'est-à-dire que l'erreur relative commise lors de la détermination de la surface d'un cercle, d'après la formule ci-dessus, est égale au double de l'erreur relative sur le rayon.

4. Supposons qu'un angle φ est défini par le logarithme de son sinus et de sa tangente. D'après les règles de différentiation, on a:

$$d(\lg_{10}\sin\varphi)=\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\ln 10\cdot\sin\varphi},\quad d(\lg_{10}\operatorname{tg}\varphi)=\frac{d\varphi}{\ln 10\cdot\operatorname{tg}\varphi\cdot\cos^2\varphi},$$

d'où

$$d\varphi=\frac{\ln 10\cdot\sin\varphi}{\cos\varphi}\,d(\lg_{10}\sin\varphi),\quad d\varphi=\ln 10\cdot\sin\varphi\cos\varphi\,d(\lg_{10}\operatorname{tg}\varphi).\qquad(11)$$

Supposons que lors de la détermination de $\lg_{10}\sin\varphi$ et de $\lg_{10}\operatorname{tg}\varphi$ on ait fait la même erreur (cette erreur dépend du nombre de décimales de la table de logarithmes utilisée). La première des formules (11) donne pour $d\varphi$ une valeur plus grande en valeur absolue que la seconde (11), car si dans la première formule, on divise $\ln 10\cdot\sin\varphi$ par $\cos\varphi$, dans la seconde on le multiplie par $\cos\varphi$, et $|\cos\varphi|<1$. De sorte que pour calculer l'angle, il est plus avantageux d'utiliser les tables de $\lg_{10}\operatorname{tg}\varphi$.

II-2. Dérivées et différentielles d'ordre supérieur

II-2-1. Dérivées d'ordre supérieur. Nous savons que la dérivée $f'(x)$ de la fonction $y=f(x)$ est aussi une fonction de x. En la dérivant, nous obtenons une nouvelle fonction qui est *la dérivée seconde* ou celle *du second ordre* de la fonction initiale $f(x)$, et que nous désignons par:

$$y'',\ \text{ou}\ f''(x).$$

En dérivant la dérivée seconde, nous obtenons *la dérivée du troisième ordre*:

$$y''',\ \text{ou}\ f'''(x).$$

Ainsi, par dérivation, on peut obtenir *une dérivée de n'importe quel, n^e ordre, y^n ou bien $f^n(x)$*.

Examinons quelques exemples.

1. $y=e^{ax}$, $y'=ae^{ax}$, $y''=a^2e^{ax}$, $\ldots$, $y^{(n)}=a^ne^{ax}$.
2. $y=(ax+b)^k$, $y'=ak(ax+b)^{k-1}$,
   $y''=a^2k(k-1)(ax+b)^{k-2}$, $\ldots$,
   $y^{(n)}=a^nk(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)(ax+b)^{k-n}$.
3. Nous savons que:

$$(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\quad(\cos x)'=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

c'est-à-dire que dériver $\sin x$ et $\cos x$ revient à ajouter $\frac{\pi}{2}$ à l'argument, d'où:

$$(\sin x)''=\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]'=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)'=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right),$$

et en général :

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad (\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

4. $y=\ln(1+x)$, $y'=\frac{1}{1+x}$, $y''=-\frac{1}{(1+x)^2}$, $y'''=\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3}$, ...,

$$y^{(n)}=(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

5. Considérons la somme de fonctions:

$$y=u+v+w.$$

En appliquant la règle de dérivation des sommes et en considérant que les dérivées correspondantes de u, v, w existent, on obtient :

$$y'=u'+v'+w',\quad y''=u''+v''+w'',\ \ldots,\ y^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}+w^{(n)},$$

c'est-à-dire que *la dérivée de n'importe quel ordre d'une somme est égale à la somme des dérivées du même ordre.* Ainsi :

$$y=x^3-4x^2+7x+10;\ y'=3x^2-8x+7,\ y''=6x-8;\ y'''=6,$$
$$y^{(4)}=0 \text{ et, plus généralement, } y^{(n)}=0 \text{ si } n>3.$$

De la même façon on peut montrer que *la dérivée n° d'un polynôme de degré m est nulle pourvu que $n>m$.*

Examinons maintenant le produit de deux fonctions $y=uv$. En utilisant les règles de dérivation des produits et des sommes, on obtient :

$$y'=u'v+uv',$$
$$y''=u''v+u'v'+u'v'+uv''=u''v+2u'v'+uv'',$$
$$y'''=u'''v+u''v'+2u''v'+2u'v''+u'v''+uv'''=$$
$$=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''.$$

On notera la loi suivante de composition des dérivées: *pour obtenir la dérivée n° du produit uv il faut développer $(u+v)^n$ suivant la formule du binôme de Newton et dans le développement obtenu, remplacer les exposants de u et v par des indices de dérivation, et il faut remplacer les termes avec des exposants nuls ($u^0=v^0=1$) faisant partie des membres du developpement extrêmes par les fonctions elles-mêmes.*

Cette règle est *la règle de Leibniz,* et on l'écrit sous forme symbolique :

$$y^{(n)}=(u+v)^{(n)}.$$

Démontrons la validité de cette règle, en faisant une démonstration par récurrence. Supposons que cette règle est vraie pour la dérivée d'ordre n, c'est-à-dire que:

$$y^{(n)}=(u+v)^{(n)}=u^{(n)}v+\frac{n}{1}u^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\ldots+uv^{(n)}. \quad (1)$$

Pour obtenir $y^{(n+1)}$, il faut dériver cette somme par rapport à x. Le produit $u^{(n-k)}v^{(k)}$ deviendra, dans le membre général de la somme, d'après la règle de dérivation du produit, la somme $u^{(n-k+1)}v^{(k)}+$ $+u^{(n-k)}v^{(k+1)}$. Mais sous forme symbolique cette somme peut s'écrire:

$$u^{n-k}v^{k}(u+v).$$

En effet, en ouvrant les parenthèses et en changeant les exposants en indices de dérivation, on obtient la somme:

$$u^{(n-k+1)}v^{(k)}+u^{(n-k)}v^{(k+1)}.$$

Nous voyons ainsi que pour obtenir $y^{(n+1)}$ il faut multiplier symboliquement tous les termes de la somme (1), et par conséquent la somme elle-même, par $(u+v)$, et par suite:

$$y^{(n+1)}=(u+v)^{(n)}\cdot(u+v)=(u+v)^{(n+1)}.$$

Nous avons montré que si la règle de Leibniz est vérifiée pour un n quelconque, elle est valable également pour $(n+1)$. Mais nous avons déjà vu qu'elle est valable pour $n=1, 2, 3$, et par suite pour toutes les valeurs de n.

Examinons comme exemple:

$$y=e^{x}(3x^{2}-1)$$

et cherchons $y^{(100)}$:

$$y^{(100)}=(e^{x})^{(100)}(3x^{2}-1)+\frac{100}{1}(e^{x})^{(99)}(3x^{2}-1)'+\frac{100\cdot 99}{1\cdot 2}(e^{x})^{(98)}(3x^{2}-1)''+$$

$$+\frac{100\cdot 99\cdot 98}{1\cdot 2\cdot 3}(e^{x})^{(97)}(3x^{2}-1)'''+\ldots+e^{x}(3x^{2}-1)^{(100)}.$$

Toutes les dérivées d'un polynôme du 2e degré sont identiquement nulles à partir de la troisième et par ailleurs, $(e^{x})^{(n)}=e^{x}$, d'où:

$$y^{(100)}=e^{x}(3x^{2}-1)+100e^{x}\cdot 6x+4\,950e^{x}\cdot 6=e^{x}(3x^{2}+600x+29\,699).$$

II-2-2. Interprétation mécanique de la dérivée seconde. Examinons le mouvement rectiligne d'un point:

$$s=f(t),$$

où t est le temps et s la distance calculée à partir d'un point de la droite. En dérivant une fois par rapport au temps, on obtient *la* *vitesse* du mouvement:

$$v = f'(t).$$

Formons la dérivée seconde, qui représente la limite du rapport $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ lorsque Δt tend vers zéro. Le rapport $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ caractérise la rapidité avec laquelle varie la vitesse pendant un intervalle de temps Δt, et donne l'accroissement moyen dans cet intervalle de temps. Et la limite de ce rapport lorsque Δt tend vers zéro donne *l'accélération* w à l'instant t du mouvement considéré:

$$w = f''(t).$$

Supposons que $f(t)$ est un polynôme du second degré:

$$s = at^2 + bt + c, \quad v = 2at + b, \quad w = 2a,$$

c'est-à-dire que l'accélération w est une constante et le coefficient $a = \frac{1}{2} w$. En faisant $t = 0$ il vient $b = v_0$, c'est-à-dire que le coefficient b est égal à la vitesse initiale, et $c = s_0$, c'est-à-dire que c est égal à la distance à l'instant $t = 0$ du point à l'origine des coordonnées sur la droite. En remplaçant a, b et c par leurs valeurs dans s on obtient la formule pour le mouvement uniformément accéléré ($w > 0$) ou uniformément ralenti ($w < 0$):

$$s = \frac{1}{2} wt^2 + v_0 t + s_0.$$

En général, en connaissant la loi de variation de s, on peut, en dérivant deux fois par rapport à t, déterminer l'accélération w et par suite la force f produisant le mouvement car d'après la deuxième loi de Newton $f = mw$, où m est la masse du point en mouvement rectiligne. On démontre en mécanique, dans le cas d'un mouvement curviligne, que $f''(t)$ n'est que la projection du vecteur accélération sur la tangente à la trajectoire.

Examinons le cas du mouvement oscillatoire harmonique d'un point M lorsque la distance s de ce point à un point fixe O sur la droite où se déplace M est définie par:

$$s = a \sin\left(\frac{2\pi}{\tau} t + \omega\right),$$

où l'amplitude a, la période des oscillations τ et la phase ω sont des constantes. Déterminons par différentiation la vitesse v et la force f:

$$v = \frac{2\pi a}{\tau} \cos\left(\frac{2\pi}{\tau} t + w\right), \quad f = mw =$$

$$= -\frac{4\pi^2 m}{\tau^2} a \sin\left(\frac{2\pi}{\tau} t + \omega\right) = -\frac{4\pi^2 m}{\tau^2} s,$$

c'est-à-dire que l'intensité de la force est proportionnelle à la longueur $\overline{OM}$ et dirigée en sens inverse. En d'autres termes, la force est toujours dirigée de M vers O, et elle est proportionnelle à la distance séparant ces deux points.

II-2-3. Différentielles d'ordre supérieur. Introduisons maintenant la notion de différentielles d'ordre supérieur d'une fonction $y = f(x)$. Sa différentielle

$$dy = f'(x)\,dx$$

est évidemment une fonction de x, mais il ne faut pas oublier que la différentielle de la variable indépendante dx est déjà indépendante de x [II-1-6], et doit être extraite lors des différentiations successives et considérée comme un facteur constant. Considérant dy comme fonction de x, on peut former la différentielle de cette fonction que l'on appellera *différentielle du deuxième ordre* de la fonction initiale $f(x)$ et que l'on désignera par les symboles d^2y ou $d^2f(x)$:

$$d^2y = d(dy) = [f'(x)\,dx]'\,dx = f''(x)\,dx^2.$$

En différentiant la fonction de x ainsi obtenue, on a *la différentielle du troisième ordre*:

$$d^3y = d(d^2y) = [f''(x)\,dx^2]'\,dx = f'''(x)\,dx^3$$

et en prenant les différentielles successives on arrive à la notion de *différentielle d'ordre* n de la fonction $f(x)$, et on obtient:

$$d^nf(x), \text{ ou } d^ny = f^{(n)}(x)\,dx^n. \tag{2}$$

Cette formule permet de représenter la dérivée du n^o ordre sous forme de rapport:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}. \tag{3}$$

Examinons maintenant le cas d'une fonction de fonction $y = f(u)$, où u est une fonction d'une certaine variable indépendante. Nous savons [II-1-6] que la différentielle du premier ordre de cette fonction est de la même forme que si u était une variable indépendante:

$$dy = f'(u)\,du.$$

En calculant les différentielles d'ordre supérieur nous obtenons des formules différant de (2) car nous ne pouvons plus considérer du comme une grandeur constante, u n'étant pas une variable indépendante. Ainsi, par exemple, pour les différentielles du deuxième ordre nous aurons:

$$d^2y = d[f'(u)\,du] = du\,d[f'(u)] + f'(u)\,d(du) = f''(u)\,du^2 + f'(u)\,d^2u,$$

qui contient le terme supplémentaire $f'(u)\,d^2u$ en plus par rapport à (2).

Si u est une variable indépendante, du est une constante et $d^2u = 0$. Supposons maintenant que u est une fonction linéaire de la variable indépendante t:

$$u = at + b.$$

Alors $du = a\,dt$, c'est-à-dire que du est de nouveau constant, c'est pourquoi les différentielles d'ordre supérieur d'une fonction de fonction seront d'après (2):

$$d^n f(u) = f^{(n)}(u)\,du^n,$$

c'est-à-dire que *l'expression* (2) *pour les différentielles d'ordre supérieur est valable lorsque x est une variable indépendante ou une fonction linéaire d'une variable indépendante.*

II-2-4. Différences des fonctions. Soit h l'accroissement de la variable indépendante. L'accroissement correspondant de la fonction $y = f(x)$ sera:

$$\Delta y = f(x+h) - f(x). \tag{4}$$

On l'appelle *différence du premier ordre* de la fonction $f(x)$. Cette différence est elle-même une fonction de x, et on peut trouver la différence de cette nouvelle fonction en calculant ses valeurs pour $x + h$ et pour x et en retranchant la deuxième valeur de la première. Cette différence s'appelle *différence du second ordre* de la fonction initiale $f(x)$ et on la désigne par le symbole $\Delta^2 y$. Il est facile d'exprimer $\Delta^2 y$ au moyen des valeurs de $f(x)$:

$$\begin{aligned}\Delta^2 y = \Delta(\Delta y) &= [f(x+2h) - f(x+h)] - [f(x+h) - f(x)] = \\ &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x).\end{aligned} \tag{5}$$

Cette différence du deuxième ordre est également une fonction de x et en cherchant la différence de cette fonction on obtient *une différence du troisième ordre* $\Delta^3 y$ de la fonction initiale $f(x)$. En remplaçant dans le second membre de (5) x par $x + h$ et en retranchant du résultat obtenu le second membre de (5), on aura pour $\Delta^3 y$:

$$\begin{aligned}\Delta^3 y = [f(x+3h) - 2f(x+2h) + f(x+h)] &- \\ - [f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)] &= \\ = f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)&.\end{aligned}$$

De sorte qu'on peut déterminer succesivement les différences de n'importe quel ordre, et *la différence du n^e ordre* $\Delta^{(n)} y$, étant exprimée par les valeurs de la fonction $f(x)$, sera de la forme:

$$\Delta^n y = f(x+nh) - \frac{n}{1} f(x+\overline{n-1}h) + \frac{n(n-1)}{2!} f(x+\overline{n-2}h) - \dots$$
$$\dots + (-1)^k \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} f(x+\overline{n-k}h) + \dots + (-1)^n f(x). \tag{6}$$

Nous avons déjà vu que cette formule est vraie pour $n = 1$, 2 et 3. Pour le démontrer dans toute sa généralité, il faut montrer, comme on le fait d'habitude, que si elle est vraie pour n elle est encore vraie pour $n+1$. Notons que pour calculer $\Delta^n y$, il faut connaître $(n+1)$ valeurs de $f(x)$ pour les valeurs x, $x+h$, $x+2h$, ..., $x+nh$ de la variable. Ces valeurs de la variable forment une progression arithmétique avec la différence h, ou, comme on dit, sont des valeurs équidistantes.

Pour les valeurs petites de $h = dx$, la différence Δy diffère peu de la différentielle dy. De même, les différences d'ordre supérieur donneront des valeurs approchées des différentielles de l'ordre correspondant, et réciproquement. Si, par exemple, la fonction est donnée par une table pour des valeurs équidistantes de la variable, nous ne pouvons pas calculer la valeur exacte des différentes dérivées de la fonction, car nous ne connaissons pas sa forme analytique, mais au lieu de la formule exacte (3) nous pouvons obtenir une valeur approchée des dérivées, en calculant le rapport $\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$. Formons par exemple la table des différences et des différentielles de la fonction $y = x^3$ dans l'intervalle (2, 3) en prenant

$$\Delta x = h = 0{,}1.$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$dy = 3x^2\,dx$	$d^2y = 6x\,dx^2$	$d^3y = 6dx^3$	$d^4y = 0$
2	8,000	1,261	0,126	0,006	0	1,200	0,120	0,006	0
2,1	9,261	1,387	0,132	0,006	0	1,323	0,126	0,006	0
2,2	10,648	1,519	0,138	0,006	0	1,452	0,132	0,006	0
2,3	12,167	1,657	0,144	0,006	0	1,587	0,138	0,006	0
2,4	13,824	1,801	0,150	0,006	0	1,728	0,144	0,006	0
2,5	15,625	1,951	0,156	0,006	0	1,875	0,150	0,006	0
2,6	17,576	2,107	0,162	0,006	0	2,028	0,156	0,006	0
2,7	19,683	2,269	0,168	0,006	—	2,187	0,162	0,006	—
2,8	21,952	2,437	0,174	—	—	2,352	0,168	—	—
2,9	24,389	2,611	—	—	—	2,523	—	—	—
3	27,000	—	—	—	—	—	—	—	—

Pour former cette table, on a calculé les valeurs successives de $y = x^3$. En effectuant les soustractions d'après (4), on en a obtenu les valeurs de Δy, à partir desquelles, par soustractions également, on a obtenu les valeurs de $\Delta^2 y$, etc. Un tel calcul successif des différences est évidemment plus simple que l'utilisation de la formule (6). Les différentielles s'obtiennent grâce aux formules connues indiquées en haut de la table et il faut poser

$$dx = h = 0{,}1.$$

Comparons la valeur exacte et la valeur approchée de la dérivée seconde y'' pour $x = 2$. Dans l'exemple étudié $y'' = 6x$ et $y'' = 12$ pour $x = 2$. De façon approchée cette dérivée s'exprime au moyen du rapport $\frac{\Delta^2 y}{h^2}$ et pour $x = 2$ nous avons:

$$\frac{0{,}126}{(0{,}1)^2} = 12{,}6.$$

Si $f(x)$ est un polynôme en x:

$$y = f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m,$$

en calculant Δy au moyen de la formule (4) nous obtenons pour Δy un polynôme entier de degré $m - 1$, dont le terme de degré le plus élevé sera $m a_0 h x^{m-1}$, ce que l'on pourra vérifier aisément. De sorte que dans le cas $y = x^3$, Δy sera un polynôme du deuxième degré en x, $\Delta^2 y$ un polynôme du premier degré, $\Delta^3 y$ sera une constante et $\Delta^4 y$ sera nul (voir table). A titre d'exercice le lecteur pourra démontrer que les valeurs de $d^2 y$ retarderont d'un degré par rapport à $\Delta^2 y$ ce que l'on peut voir sur la table.

II-3. Application de la notion de dérivée à l'étude d'une fonction

II-1-3. Critères de croissance et de décroissance d'une fonction. La connaissance de la dérivée permet d'étudier les différentes propriétés d'une fonction. Nous commencerons par la question la plus simple, mais la plus fondamentale, à savoir le problème de la croissance et de la décroissance d'une fonction.

La fonction $f(x)$ est dite croissante dans un intervalle si aux plus grandes valeurs de la variable indépendante correspondent les plus grandes valeurs de la fonction, c'est-à-dire *si*:

$$f(x+h) - f(x) > 0 \quad pour \quad h > 0.$$

Par contre, si nous avons

$$f(x+h) - f(x) < 0 \quad pour \quad h > 0,$$

la fonction sera dite décroissante.

Si nous examinons la courbe représentative de la fonction, les intervalles de croissance correspondront aux parties de la courbe pour lesquelles aux plus grandes abscisses correspondent les plus grandes ordonnées. Si nous orientons comme sur la fig. 55 l'axe OX vers la droite et l'axe OY vers le haut, aux intervalles de croissance de la fonction correspondront les parties de la courbe telles que lorsqu'on se déplace le long de la courbe vers la droite dans le sens des abscisses croissantes, on monte. Au contraire, les intervalles de décroissance correspondent à des parties de la courbe dirigées vers le bas lorsqu'on se déplace le long de la courbe vers la droite. Sur la fig. 55 la partie AB de la courbe correspond à l'intervalle de croissance et la partie BC à l'intervalle de décroissance. Il est clair, sur le graphique, que sur la première partie la tangente forme avec la direction de l'axe OX un angle α, compté à partir de l'axe OX jusqu'à la tangente à la courbe, et qui a une tangente positive. Mais la tangente de cet angle est justement égale à la dérivée première $f'(x)$. Par contre, sur la partie BC la direction de la tangente forme avec la direction OX un angle α au quatrième quadrant dont la tangente est négative, c'est-à-dire que dans le cas présent, $f'(x)$ sera négative. En comparant les résultats obtenus, nous aboutissons à la règle suivante: *les intervalles où $f'(x) > 0$ sont des intervalles de croissance de la fonction, tandis que les intervalles où $f'(x) < 0$ sont des intervalles de décroissance de la fonction.*

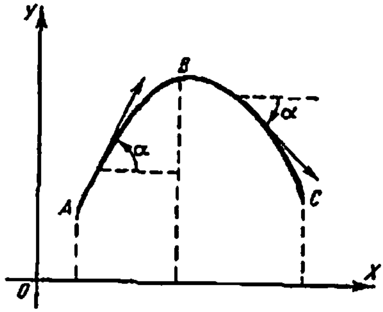

Fig. 55

Nous avons trouvé cette règle en utilisant les courbes représentatives; dans la suite nous en donnerons une démonstration analytique rigoureuse. Pour l'instant, nous appliquerons cette règle à quelques exemples.

1. Démontrons l'inégalité

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6} \text{ pour } x > 0.$$

Pour cela, formons la différence:

$$f(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right).$$

Calculons la dérivée $f'(x)$:

$$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} - (1 - \cos x) =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2} = 2\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{x}{2}\right)^2\right].$$

En tenant compte de ce que la valeur absolue de l'arc est plus grande que le sinus, on peut affirmer que $f'(x)>0$ dans l'intervalle $(0, +\infty)$, c'est-à-dire que dans cet intervalle $f(x)$ croît, mais $f(0)$ est égale à zéro, c'est pourquoi:

$$f(x)=\sin x-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)>0 \text{ pour } x>0,$$

c'est-à-dire que:

$$\sin x>x-\frac{x^3}{6} \text{ pour } x>0.$$

2. De même on peut démontrer que:

$$x>\ln(1+x) \text{ pour } x>0.$$

Formons la différence

$$f(x)=x-\ln(1+x)$$

d'où

$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}.$$

Il résulte de cette expression que pour $x>0$, $f'(x)>0$, c'est-à-dire que $f(x)$ croît dans l'intervalle $(0, +\infty)$ mais $f(0)=0$, par conséquent:

$$f(x)=x-\ln(1+x)>0 \text{ pour } x>0,$$

c'est-à-dire que:

$$x>\ln(1+x) \text{ pour } x>0.$$

3. Examinons l'équation de Kepler dont nous avons déjà parlé [I-2-7]:

$$x=q\sin x+a \quad (0<q<1).$$

Nous pouvons la mettre sous la forme

$$f(x)=x-q\sin x-a=0.$$

En calculant la dérivée $f'(x)$, il vient:

$$f'(x)=1-q\cos x.$$

En tenant compte de ce que le produit $q\cos x$ est en valeur absolue inférieur à l'unité puisque par hypothèse q est compris entre zéro et un, on peut affirmer que $f'(x)>0$ pour toutes valeurs de x, c'est pourquoi $f(x)$ croît dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ et par suite ne peut pas être nul plus d'une fois, c'est-à-dire que l'équation de Kepler n'a pas plus d'une racine réelle.

Si la constante a est un multiple de π, c'est-à-dire que $a=k\pi$ où k est un entier, en faisant $x=k\pi$, nous aurons $f(k\pi)=0$ et $x=k\pi$ sera l'unique racine de l'équation de Kepler. Si a n'est pas un multiple de π, on peut trouver un entier k tel que:

$$k\pi<a<(k+1)\pi.$$

En faisant $x=k\pi$ et $(k+1)\pi$, on obtient:

$$f(k\pi)=k\pi-a<0,$$

$$f(\overline{k+1}\pi)=(k+1)\pi-a>0.$$

Mais si $f(k\pi)$ et $f(\overline{k+1}\pi)$ sont de signes contraires, $f(x)$ doit s'annuler dans l'intervalle $(k\pi, \overline{k+1}\pi)$ [I-2-11], c'est-à-dire que dans cet intervalle doit se trouver la racine unique de l'équation de Kepler.

4. Examinons l'équation:

$$f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x + 15 = 0.$$

Formons la dérivée $f'(x)$ et égalons-la à zéro:

$$f'(x) = 15x^4 - 75x^2 + 60 = 15(x^4 - 5x^2 + 4) = 0.$$

En résolvant cette équation bicarrée nous obtenons que $f'(x)$ est nulle pour:

$$x = -2, \ -1, \ +1 \ \text{et} \ +2$$

de sorte qu'on peut diviser l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ en cinq parties:

$$(-\infty, -2), \ (-2, -1), \ (-1, 1), \ (1, 2), \ (2, +\infty),$$

dans lesquelles $f'(x)$ garde un signe constant, c'est pourquoi $f(x)$ varie de façon monotone, c'est-à-dire qu'elle croît ou décroît et ne peut pas, par conséquent, avoir plus d'une racine dans chacun de ces intervalles. Si aux extrémités de l'un de ces intervalles $f(x)$ a des signes contraires, l'équation $f(x) = 0$ a une racine dans cet intervalle, et si les signes sont les mêmes, il n'y a pas de racines dans cet intervalle. De sorte que, pour déterminer le nombre de racines de l'équation, il reste à déterminer le signe de $f(x)$ aux extrémités de chacun des cinq intervalles.

Pour déterminer le signe de $f(x)$ pour $x = \pm\infty$, mettons $f(x)$ sous la forme:

$$f(x) = x^5\left(3 - \frac{25}{x^2} + \frac{60}{x^4} + \frac{15}{x^5}\right).$$

Lorsque x tend vers $(-\infty)$, $f(x)$ tend vers $(-\infty)$ car x^5 tend vers $(-\infty)$ et l'expression entre parenthèses tend vers 3. De la même façon, on voit que si x tend vers $(+\infty)$, $f(x)$ tend vers $(+\infty)$. En remplaçant x successivement par -2, -1, 1 et 2, on obtient la table suivante:

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$

Il s'avère que $f(x)$ n'a des signes différents qu'aux extrémités de l'intervalle $(-1, +1)$ et par suite l'équation considérée n'a qu'une racine réelle comprise dans cet intervalle.

Nous avons défini ci-dessus la croissance et la décroissance d'une fonction dans un intervalle. On dit parfois qu'une fonction croît ou décroît au point $x = x_0$. Cela signifie que la fonction croît en $x = x_0$ si $f(x) < f(x_0)$ lorsque $x < x_0$ et $f(x) > f(x_0)$ lorsque $x > x_0$; ce faisant on considère que x est voisin de x_0. On définit de façon analogue la décroissance d'une fonction en un point. De la notion de dérivée résulte la condition suffisante pour qu'une fonction croisse ou décroisse au point x_0, à savoir si $f'(x_0) > 0$, la fonction croît au point x_0, et si $f'(x_0) < 0$, la fonction décroît en ce point. En effet, si, par exemple, $f'(x_0) > 0$, la relation

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

qui a pour limite $f'(x_0)$, sera positive pour tout h suffisamment petit en valeur absolue, c'est-à-dire que le numérateur et le dénominateur seront de même signe. Autrement dit: $f(x_0+h)-f(x_0)>0$ pour $h>0$ et $f(x_0+h)-f(x_0)<0$ pour $h<0$, ce qui montre la croissance au point x_0.

II-3-2. Maxima et minima des fonctions. Revenons à l'examen de la courbe représentative d'une certaine fonction $f(x)$ (fig. 56). Sur cette courbe nous avons une succession d'intervalles de croissance et de décroissance de la fonction. L'arc AM_1 correspond à un intervalle de croissance. L'arc suivant M_1M_2 correspond à un intervalle de décroissance. Le suivant, M_2M_3, correspond à nouveau à un intervalle de croissance, etc. Les points de la courbe qui séparent les intervalles de croissance et de décroissance sont des sommets de la courbe. Considérons par exemple le sommet M_1. L'ordonnée de ce sommet est plus grande que toutes les ordonnées de la courbe suffisamment voisines de celle qu'on considère et situées soit à gauche soit à droite de celle-ci. On dit qu'à un tel sommet correspond un maximum de la fonction $f(x)$.

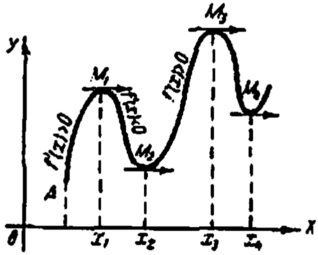

Fig. 56

Ceci nous conduit à la définition analytique générale suivante: *la fonction $f(x)$ admet un maximum au point $x = x_1$ si sa valeur $f(x_1)$ en ce point est plus grande que toutes ses valeurs aux points voisins*, c'est-à-dire *si l'accroissement de la fonction*

$$f(x_1+h)-f(x_1) \text{ est négatif}$$

pour tout h positif ou négatif, suffisamment petit en valeur absolue.

Examinons maintenant le sommet M_2. L'ordonnée de ce sommet est, au contraire, plus petite que les ordonnées voisines, situées aussi bien à gauche qu'à droite, et on dit qu'à ce sommet correspond un minimum de la fonction; la définition analytique sera: *la fonction $f(x)$ admet un minimum au point $x = x_2$ si pour tout h positif ou négatif dont la valeur absolue est suffisamment petite, la condition*

$$f(x_2+h)-f(x_2)>0$$

est vérifiée.

Il résulte du graphique qu'aussi bien aux sommets correspondant aux maxima de la fonction qu'à ceux correspondant aux minima, la tangente est parallèle à l'axe OX, c'est-à-dire que son coefficient angulaire $f'(x)$ est nul. On suppose, certainement, que la tangente et, donc, la dérivée existent. Mais il se peut que la tangente soit parallèle à l'axe OX sans qu'on soit à un sommet. Ainsi par exemple sur la fig. 57 nous avons un point M de la courbe qui n'est pas un sommet et où la tangente est tout de même parallèle à l'axe OX.

Supposons que $f'(x)$ s'annule pour $x = x_0$, c'est-à-dire qu'au point correspondant de la courbe la tangente est parallèle à l'axe OX. Examinons le signe de $f'(x)$ pour des valeurs de x voisines de x_0. Considérons les trois cas suivants:

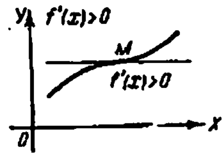

Fig. 57

I. Pour les valeurs de x plus petites que x_0 et suffisamment proches de x_0, $f'(x)$ est positive, tandis que pour les valeurs de x plus grandes mais suffisamment proches de x_0, $f'(x)$ est négative, c'est-à-dire que lorsque x passe par x_0, $f'(x)$ s'annule en devenant négative, après avoir été positive.

Dans ce cas à gauche de $x = x_0$ nous avons un intervalle où la fonction est croissante, et à droite un intervalle où elle est décroissante, c'est-à-dire que pour la valeur $x = x_0$ on a un sommet de la courbe correspondant à un maximum de la fonction $f(x)$ (fig. 56).

II. Pour des valeurs de x plus petites que x_0, $f'(x)$ est négative, et pour les valeurs de x plus grandes que x_0, $f'(x)$ est positive, c'est-à-dire que lorsque $f'(x)$ passe par 0, elle progresse des valeurs négatives aux positives.

Dans ce cas à gauche de $x = x_0$ on a un intervalle de décroissance tandis qu'à droite, un intervalle de croissance, c'est-à-dire que pour la valeur $x = x_0$ on a un sommet de la courbe correspondant à un minimum de la fonction (v. fig. 56).

III. Pour des valeurs de x aussi bien plus petites que plus grandes que x_0, $f'(x)$ garde un signe constant. Supposons par exemple que $f'(x)$ est positive. Dans ce cas le point correspondant de la courbe se trouve sur une partie croissante de la courbe et n'est pas un sommet (fig. 57).

Ce qui vient d'être dit nous conduit à la règle suivante: pour trouver les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ passe par un maximum ou un minimum:

1) *il faut calculer* $f'(x)$;

2) *il faut trouver les valeurs de* x *pour lesquelles* $f'(x)$ *s'annule, c'est-à-dire résoudre l'équation* $f'(x) = 0$;

3) *il faut étudier les changements de signe de* $f'(x)$ *lorsqu'elle passe par ces valeurs d'après le schéma suivant*:

x	x_0-h	x_0	x_0+h	$f(x)$
$f'(x)$	+	0	—	maximum
	—	0	+	minimum
	+	0	+	croît
	—	0	—	décroît

Les notations x_0-h et x_0+h dans la table montrent qu'il faut déterminer le signe de $f'(x)$ pour des valeurs de x plus petites et plus grandes que x_0, mais assez proches, de sorte qu'il faut considérer h comme un nombre positif assez petit.

On suppose que $f'(x_0)=0$, cependant pour tout x suffisamment proche de x_0, mais différent de x_0, $f'(x)$ n'est pas nulle.

Revenons au cas de la fig. 57. La tangente au point M d'abscisse x_0 se trouve de part et d'autre de la courbe au voisinage de ce point. Dans ce cas, $f'(x_0)=0$ et $f'(x)>0$ pour tout x proche mais différent de x_0, et toute la portion de courbe contenant le point x_0 est croissante, bien que $f'(x_0)=0$.

Parfois au lieu d'utiliser le procédé exposé pour déterminer les maxima, on en utilise un autre: *la fonction $f(x)$ admet un maximum au point $x=x_1$, si la valeur de $f(x_1)$ en ce point n'est pas inférieure à ses valeurs aux points voisins*, c'est-à-dire *si l'accroissement de la fonction $f(x_1+h)-f(x_1)\leqslant 0$ pour tout h, aussi bien positif que négatif, suffisamment petit en valeur absolue. De façon analogue le minimum au point x_2 peut être défini par l'inégalité $f(x_2+h)-$ $-f(x_2)\geqslant 0$.* Si, en outre, la fonction a une dérivée au point du maximum ou du minimum, cette dérivée doit s'annuler, comme au cas ci-dessus.

E x e m p l e. Soit à chercher les maxima et les minima de la fonction

$$f(x)=(x-1)^2(x-2)^3.$$

Calculons la dérivée première:

$$f'(x)=2(x-1)(x-2)^3+3(x-1)^2(x-2)^2=$$
$$=(x-1)(x-2)^2(5x-7)=5(x-1)(x-2)^2\left(x-\frac{7}{5}\right).$$

Il est évident alors que $f'(x)$ devient nulle pour les valeurs $x_1=1$, $x_2=\frac{7}{5}$, $x_3=2$ de la variable indépendante.

Examinons ces différentes valeurs. Pour $x=1$, le facteur $(x-2)^2$ est positif, tandis que $\left(x-\frac{7}{5}\right)$ est négatif. Pour toutes les valeurs de x aussi bien plus petites que plus grandes que 1, mais suffisamment proches de cette valeur, les signes de ces facteurs ne changeront pas, et le produit de ces deux facteurs sera sûrement négatif pour toutes les valeurs de x suffisamment proches de 1. Examinons finalement le dernier facteur $(x - 1)$ qui s'annule justement pour $x = 1$. Si $x < 1$, il est négatif, tandis que si $x > 1$, il est positif. De sorte que le produit entier, c'est-à-dire $f'(x)$, est positif pour $x < 1$ et négatif pour $x > 1$, d'où il résulte qu'à la valeur $x = 1$ correspond un maximum de la fonction $f(x)$. En faisant $x = 1$ dans $f(x)$, nous obtenons la valeur du maximum, c'est-à-dire l'ordonnée qui correspond au sommet de la courbe

$$f(1) = 0^2 \cdot (-1)^3 = 0.$$

En raisonnant d'une manière analogue pour les autres valeurs $x_2 = \frac{7}{5}$ et $x_3 = 2$, nous obtenons la table suivante:

x	$1-h$	1	$1+h$	$\frac{7}{5}-h$	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{5}+h$	$2-h$	2	$2+h$
$f'(x)$	+	0	−	−	0	+	+	0	+
$f(x)$	croît	0 max.	décroît		$-\frac{108}{3125}$ min.	croît			

Par la méthode d'étude des maxima et des minima que nous venons d'exposer, il est assez difficile de déterminer le signe de $f'(x)$ pour les valeurs de x plus petites et plus grandes que la valeur considérée. Cela est vrai surtout pour des exemples compliqués. Dans de nombreux cas on peut éluder cette difficulté en introduisant la dérivée seconde $f''(x)$. Supposons que nous voulons étudier ce qui se passe pour $x = x_0$, où $f'(x_0) = 0$. Portons cette valeur $x = x_0$ dans l'expression de $f''(x)$, et supposons que nous ayons obtenu une valeur positive, c'est-à-dire $f''(x_0) > 0$. Si on prend $f'(x)$ pour fonction initiale, $f''(x)$ sera sa dérivée et le fait que cette dérivée soit positive au point $x = x_0$ montre que $f'(x)$ est croissante au point correspondant, c'est-à-dire que $f'(x)$ qui est nulle pour $x = x_0$ doit passer des valeurs négatives aux valeurs positives. De sorte que *si $f''(x_0)$ est positive au point $x = x_0$, la fonction $f(x)$ admettra un minimum. De même on peut montrer que si $f''(x_0)$ est négative au point $x = x_0$, la fonction $f(x)$ admet un maximum.* Si, enfin, en faisant $x = x_0$ dans $f''(x)$, on obtient zéro, c'est-à-dire $f''(x_0) = 0$, la dérivée seconde ne permet pas d'étudier la fonction au point $x = x_0$ et il faut passer à l'étude directe du signe de $f'(x)$. Nous obtenons ainsi le schéma représenté sur la table suivante:

x	$f'(x)$	$f''(x)$	$f(x)$
x_0	0	$-$ $+$ 0	maximum minimum cas douteux

Des raisonnements que nous avons exposés il résulte que, lorsque la dérivée seconde existe, la condition nécessaire pour qu'il y ait un maximum est l'inégalité $f''(x) \leqslant 0$, tandis que la condition nécessaire pour qu'il y ait un minimum est l'inégalité $f''(x) \geqslant 0$. Nous pouvons alors définir le maximum par la condition $f(x_1 + h) - f(x_1) \leqslant 0$, et le minimum est défini par la condition $f(x_2 + h) - f(x_2) \geqslant 0$, ce que nous avons déjà noté.

Exemple. On cherche les maxima et les minima de la fonction

$$f(x) = \sin x + \cos x.$$

Cette fonction a une période de 2π, c'est-à-dire qu'elle ne change pas de valeur si on remplace x par $x + 2\pi$. Il suffit donc d'étudier x dans l'intervalle $(0, 2\pi)$. Formons les dérivées premières et secondes:

$$f'(x) = \cos x - \sin x, \qquad f''(x) = -\sin x - \cos x.$$

En annulant la dérivée première nous obtenons l'équation:

$$\cos x - \sin x = 0, \quad \text{soit} \quad \operatorname{tg} x = 1.$$

Les racines de cette équation dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ sont:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5\pi}{4}.$$

Examinons ces valeurs d'après le signe de $f''(x)$:

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = -\sqrt{2} < 0; \quad \text{maximum} \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2};$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sin\frac{5\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{4} = \sqrt{2} > 0; \quad \text{minimum} \quad f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}.$$

Pour finir, examinons un fait qui se produit parfois, lorsqu'on cherche les maxima et les minima d'une fonction. Il peut arriver que la courbe représentative de la fonction comporte des points pour lesquels la tangente ou bien n'existe pas, ou bien est parallèle à l'axe OY (fig. 58). Aux points du premier type, la dérivée $f'(x)$ n'existe pas, tandis qu'aux points du second type, elle sera infinie, car le coefficient angulaire d'une droite parallèle à OY est infini. Mais on voit sur le graphique qu'en de tels points on peut avoir des maxima ou des minima de la fonction. De sorte que nous devons compléter la règle de recherche des maxima et des minima de la manière suivante: *le maximum et le minimum de la fonction $f(x)$ peut se rencontrer non seulement aux points pour lesquels $f'(x)$ est nulle, mais aussi aux points où $f'(x)$ n'existe pas ou bien où elle est infinie.* L'examen de ces derniers points doit s'effectuer suivant le premier schéma exposé ci-dessus: il faut déterminer le signe de $f'(x)$ pour des valeurs de x plus petites et plus grandes que la valeur considérée.

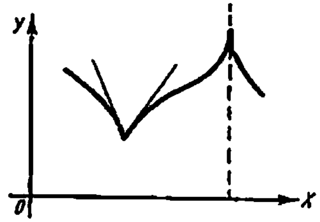

Fig. 58

Jusqu'ici nous n'avons étudié que le cas le plus simple d'une fonction continue $f(x)$ avec une dérivée continue possédant un nombre fini de zéros dans l'intervalle considéré. Dans la dernière remarque l'absence de la dérivée est admise aussi dans un nombre fini de points. En général, le but du présent paragraphe et des deux suivants est de servir d'introduction représentative à l'étude des propriétés des fonctions. Par la suite, nous reviendrons à un exposé analytique rigoureux.

Exemple. On cherche les maxima et les minima de la fonction:

$$f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}.$$

La dérivée première est:

$$f'(x)=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{5}{3}\,\frac{x-\frac{2}{5}}{\sqrt[3]{x}}.$$

Elle est nulle pour $x=\frac{2}{5}$ et devient infinie pour $x=0$. Examinons cette dernière valeur: le numérateur est négatif pour $x=0$ et quel que soit x au voisinage de $x=0$. Le dénominateur est négatif pour $x<0$ et positif pour $x>0$. Donc, la fraction sera positive pour les valeurs négatives de x et au voisinage de $x=0$ et négative pour les valeurs positives de x, c'est-à-dire que pour $x=0$ nous avons le maximum $f(0)=0$. Au point $x=\frac{2}{5}$ nous aurons le minimum:

$$f\left(\frac{2}{5}\right)=-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}=-\frac{3}{25}\sqrt[3]{20}.$$

II-3-3. Construction de graphiques. La recherche des maxima et des minima de la fonction $f(x)$ facilite considérablement la construction de la courbe représentative de la fonction. Montrons à l'aide de quelques exemples comment construire le graphique d'une fonction.

1. Soit à construire la courbe représentative de la fonction

$$y=(x-1)^2(x-2)^3,$$

que nous avons éxaminée au paragraphe précédent. Nous avons deux sommets de cette courbe: un maximum (1, 0) et un minimum $\left(\frac{7}{5}, -\frac{108}{3125}\right)$. Notons ces points sur le graphique. Il est commode de repérer aussi les intersections de la courbe avec les axes. Pour $x=0$ nous avons $y=-8$. C'est-à-dire que la courbe coupe OY au point $y=-8$.

En faisant y nul, il vient:

$$(x-1)^2(x-2)^3=0,$$

qui nous donne les intersections de la courbe avec l'axe OX. Pour $x=1$, nous avons déjà vu que nous avons un sommet, tandis que pour $x=2$, comme nous l'avons déjà vu au paragraphe précédent, on n'a pas un sommet mais dans un point correspondant du graphique la tangente est parallèle à l'axe OX. La courbe cherchée est représentée sur la fig. 59.

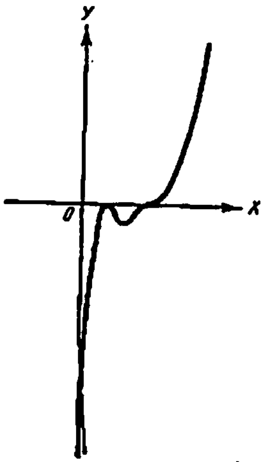

Fig. 59

2. Traçons la courbe

$$y=e^{-x^2}.$$

Sa dérivée première est:

$$y'=-2xe^{-x^2}.$$

En annulant y', on obtient $x=0$ qui, on le voit aisément, correspond à un sommet (maximum) dont l'ordonnée est $y=1$. Ce point est aussi l'intersection de la courbe avec l'axe OY. En annulant y, on obtient l'équation $e^{-x^2}=0$, qui n'a pas de racines, c'est-à-dire que la courbe ne coupe pas l'axe OX. Notons de plus que lorsque x tend vers $(+\infty)$ ou vers $(-\infty)$,

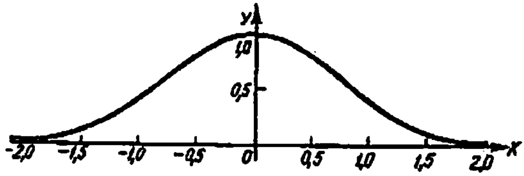

Fig. 60

l'exposant de e^{-x^2} tend vers $(-\infty)$ et l'expression tend vers zéro, c'est-à-dire que lorsqu'on s'éloigne indéfiniment à droite ou à gauche, la courbe tend indéfiniment vers OX. La courbe qui correspond à toutes ces données est représentée sur la fig. 60.

3. Construisons la courbe

$$y=e^{-ax}\sin bx \qquad (a>0).$$

qui représente *une oscillation amortie*. Le facteur $\sin bx$ n'est pas supérieur à 1 en valeur absolue, et la courbe sera comprise entre les deux courbes

$$y = e^{-ax} \quad \text{et} \quad y = -e^{-ax}.$$

Lorsque x tend vers $(+\infty,)$ le facteur e^{-ax} tend vers zéro, donc le produit $e^{-ax} \sin bx$ tend aussi vers zéro, c'est-à-dire que, losqu'on s'éloigne indéfiniment à droite, la courbe se rapproche à l'infini de l'axe OX. Les intersections de la courbe avec l'axe OX s'obtiennent en résolvant l'équation

$$\sin bx = 0,$$

c'est-à-dire qu'elles seront :

$$x = \frac{k\pi}{b} \ (k \text{ entier}).$$

Calculons la dérivée première :

$$y' = -ae^{-ax} \sin bx + be^{-ax} \cos bx = e^{-ax} (b \cos bx - a \sin bx).$$

Mais l'expression entre parenthèses peut être, comme on sait, mise sous la forme :

$$b \cos bx - a \sin bx = K \sin (bx + \varphi_0),$$

où K et φ_0 sont des constantes. En annulant la dérivée première, on obtient l'équation :

$$\sin (bx + \varphi_0) = 0,$$

qui donne :

$$bx + \varphi_0 = k\pi, \quad \text{c'est-à-dire} \quad x = \frac{k\pi - \varphi_0}{b} \ (k \text{ entier}). \qquad (1)$$

Quand x passe par ces valeurs, $\sin (bx + \varphi_0)$ changera chaque fois de signe. Il en est évidemment de même pour la dérivée y' car :

$$y' = Ke^{-ax} \sin (bx + \varphi_0),$$

et le facteur e^{-ax} ne change pas de signe. Donc, à ces racines correspondent à tour de rôle des maxima et des minima de la fonction. Si on n'a pas le facteur exponentiel e^{-ax}, on se trouve en présence de la sinusoïde

$$y = \sin bx,$$

et les abscisses de ses sommets s'obtiennent à partir de l'équation :

$$\cos bx = 0,$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{(2k-1)\pi}{2b} \ (k \text{ entier}). \qquad (1_1)$$

Nous voyons ainsi que le facteur exponentiel non seulement diminue l'amplitude des oscillations mais déplace aussi les abscisses des sommets de la courbe. En comparant (1) et (1_1), il est facile de voir que ce déplacement est constant, et qu'il a pour valeur $\left(-\frac{\pi}{2b} - \frac{\varphi_0}{b}\right)$. Sur la fig. 61 on a représenté une oscillation amortie pour $a = 1$ et $b = 2\pi$. Les sommets ne se trouvent pas sur les courbes en pointillé, représentant les équations $y = \pm e^{-ax}$, ce qui est dû au déplacement des sommets dont nous avons déjà parlé.

4. Construisons la courbe:

$$y = \frac{x^3 - 3x}{6}.$$

Calculons les deux premières dérivées:

$$y' = \frac{x^2 - 1}{2}, \quad y'' = x$$

En annulant la dérivée première, on obtient les racines $x_1 = 1$ et $x_2 = -1$. En portant ces valeurs dans la dérivée seconde, on voit qu'à la première racine

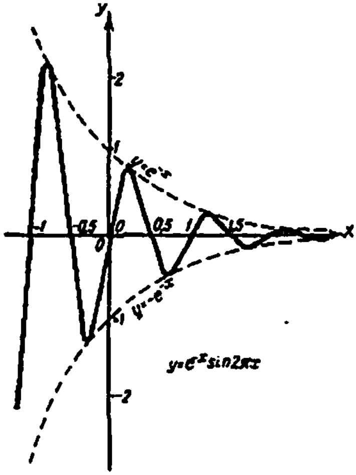

Fig. 61

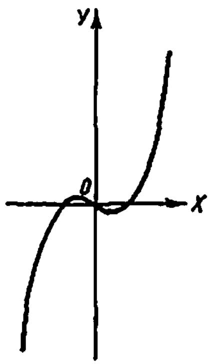

Fig. 62

correspond un minimum tandis qu'à la seconde correspond un maximum. En portant ces valeurs dans l'expression pour y, on trouve les sommets correspondants de la courbe:

$$\left(-1, \frac{1}{3}\right), \quad \left(1, -\frac{1}{3}\right).$$

En faisant $x = 0$, on a $y = 0$, c'est-à-dire que la courbe passe par l'origine des coordonnées. Enfin, en faisant $y = 0$, on trouve en plus de $x = 0$ encore deux racines: $x = \pm\sqrt{3}$, c'est-à-dire qu'en définitive, la courbe coupera les axes de coordonnées aux points $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$. Ajoutons que si l'on remplace simultanément x par $(-x)$ et y par $(-y)$, les deux membres de l'équation de la courbe changent seulement de signe, c'est-à-dire que l'origine des coordonnées est un centre de symétrie pour la courbe (fig. 62).

II-3-4. Plus grande et plus petite valeur d'une fonction. Examinons les valeurs de la fonction $f(x)$ quand la variable indépendante

x prend ses valeurs dans l'intervalle (a, b), c'est-à-dire que $a \leqslant x \leqslant b$, et cherchons la plus grande et la plus petite valeur de cette fonction. Sous cette condition, la fonction $f(x)$ passera par une plus grande et plus petite valeur [I-2-11], c'est-à-dire que le graphique de cette fonction aura dans l'intervalle considéré une ordonnée la plus grande et une ordonnée la plus petite. D'après les règles déjà énoncées, nous pourrons trouver les maxima et les minima de la fonction se trouvant à l'intérieur de l'intervalle (a, b). Si la fonction $f(x)$ a son ordonnée la plus grande dans cet intervalle, cette ordonnée coïncidera évidemment avec le maximum le plus

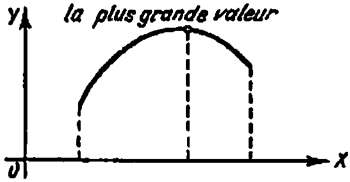

Fig. 63

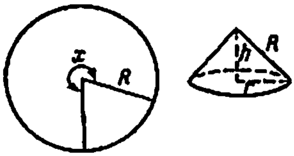

Fig. 64

grand de la fonction dans l'intervalle (a, b). Mais il peut arriver que l'ordonnée la plus grande ne se trouve pas dans l'intervalle, mais à l'une de ses extrémités $x = a$ ou $x = b$. C'est pourquoi, pour trouver, par exemple, la valeur la plus grande de la fonction, il ne suffit pas de comparer tous ses maxima dans l'intervalle et d'en choisir le plus grand, mais il faut tenir compte, en plus, des valeurs de la fonction aux extrémités de l'intervalle. De même, pour déterminer la plus petite valeur de la fonction, il faut prendre tous ses minima situés dans l'intervalle, et les valeurs extrêmes de la fonction pour $x = a$ et $x = b$. Notons que les maxima et les minima peuvent ne pas exister, tandis qu'il existera toujours pour une fonction continue la plus grande et la plus petite valeur dans un intervalle fini (a, b).

Voyons quelques cas particuliers où la recherche de la plus grande et la plus petite valeur s'effectue le plus simplement. Si, par exemple, la fonction $f(x)$ croît dans l'intervalle (a, b), alors pour $x = a$ elle prendra la plus petite valeur et pour $x = b$ la plus grande valeur. Ce sera l'inverse dans le cas d'une fonction décroissante.

Si la fonction passe par un maximum dans l'intervalle et n'a pas de minimum, ce maximum unique donne la plus grande valeur de la fonction (fig. 63), ce qui fait que dans ce cas il n'est pas nécessaire de chercher les valeurs de la fonction aux extrémités de l'intervalle. De même, si la fonction a un minimum dans l'intervalle et aucun maximum, alors ce minimum unique correspond à la plus petite valeur de la fonction. Les propriétés qui viennent d'être indiquées auront lieu dans les premiers des quatre problèmes ci-dessous.

1. *On se donne un segment de longueur l. On demande de le diviser en deux parties telles que la surface du rectangle construit à partir de ces longueurs soit la plus grande.*

Soit x la longueur d'une des parties; l'autre sera $(l-x)$. En tenant compte de ce que la surface du rectangle est égale au produit des côtés voisins, on voit que le problème se ramène à trouver les valeurs de x pour lesquelles la fonction:

$$f(x)=x(l-x)$$

atteint sa plus grande valeur dans l'intervalle $(0, l)$ de variation de x.

Calculons les deux premières dérivées:

$$f'(x)=(l-x)-x=l-2x, \quad f''(x)=-2<0.$$

En annulant la dérivée première on trouve l'unique valeur $x=\frac{l}{2}$ qui correspond à un maximum, car $f''(x)$ est constamment négative. Ainsi, la surface sera la plus grande dans le cas d'un carré de côté $\frac{l}{2}$.

2. *On retranche d'un cercle de rayon R un secteur, et avec la partie restante on forme un cône. Déterminer l'angle au centre du secteur retranché pour que le volume du cône soit le plus grand possible.*

Prenons pour variable indépendante x, non l'angle au centre du secteur découpé, mais son complément à 2π, c'est-à-dire l'angle au centre du secteur restant. Pour des valeurs de x proches de 0 et de 2π, le volume du cône sera voisin de 0, et il est évident que dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ on aura une valeur de x pour laquelle ce volume sera maximum.

En formant le cône avec le secteur restant (fig. 64) on obtiendra un cône dont la génératrice est égale à R, la circonférence de la base sera égale à Rx, le rayon $r=\frac{Rx}{2\pi}$ et la hauteur:

$$h=\sqrt{R^2-\frac{R^2x^2}{4\pi^2}}=\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}.$$

Le volume du cône sera:

$$v(x)=\frac{1}{3}\pi\frac{R^2x^2}{4\pi^2}\cdot\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}=\frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2-x^2}.$$

Pour chercher la plus grande valeur de cette fonction nous pouvons ne pas tenir compte du facteur constant $\frac{R^3}{24\pi^2}$. Le produit restant $x^2\sqrt{4\pi^2-x^2}$ est positif et, par conséquent, passera par sa valeur la plus grande pour les mêmes valeurs de x que son carré. Ainsi nous pouvons examiner la fonction:

$$f(x)=4\pi^2x^4-x^6$$

dans l'intervalle $(0, 2\pi)$.

Calculons la dérivée première:

$$f'(x) = 16\pi^2 x^3 - 6x^5.$$

Elle existe pour toute valeur de x. En l'annulant on obtient trois racines:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad x_3 = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Les deux premières valeurs *ne sont pas dans l'intervalle* $(0, 2\pi)$. Il ne reste que la valeur $x_3 = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ qui se trouve dans l'intervalle, mais nous avons vu que la plus grande valeur dans cet intervalle existe, et, par conséquent, sans étudier cette valeur de x_3, on peut affirmer qu'elle correspond à la valeur maximum du volume du cône.

3. *La droite L partage le plan en deux parties (milieux) I et II. Un point se déplace dans le milieu I avec la vitesse v_1 et dans le milieu II avec la vitesse v_2. Quelle trajectoire doit prendre ce point pour passer le plus vite possible du point A du milieu I au point B du milieu II?*

Soit AA_1 et BB_1 les perpendiculaires à la droite L issues des points A et B. Introduisons les notations suivantes:

$$\overline{AA_1} = a, \quad \overline{BB_1} = b, \quad \overline{A_1B_1} = c,$$

et sur L on mesurera les abscisses dans le sens $\overline{A_1B_1}$ (fig. 65).

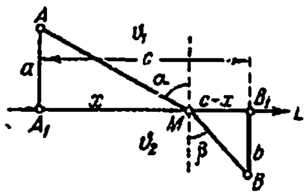

Fig. 65

Il est évident que dans le milieu I aussi bien que dans le milieu II, la trajectoire du point doit être rectiligne, mais le trajet AB ne sera pas en général le plus court. Ainsi le « trajet le plus court » sera formé de deux segments de droite $\overline{AM}$ et $\overline{MB}$, et le point M doit se trouver sur L. Prenons pour variable indépendante x l'abscisse du point M: $x = \overline{A_1M}$. Le temps t nécessaire pour parcourir le chemin le plus court sera:

$$t = f(x) = \frac{AM}{v_1} + \frac{MB}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v_2}$$

dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

Calculons les deux premières dérivées:

$$f'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}},$$

$$f''(x) = \frac{a^2}{v_1(a^2+x^2)^{3/2}} + \frac{b^2}{v_2[b^2+(c-x)^2]^{3/2}}.$$

Les deux dérivées existent pour toutes les valeurs de x, et $f''(x)$ est toujours positive. Par suite, $f'(x)$ croît dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ et ne s'annule pas plus d'une fois.

Mais

$$f'(0) = -\frac{c}{v_2\sqrt{b^2+c^2}} < 0$$

et

$$f'(c) = \frac{c}{v_1\sqrt{a^2+c^2}} > 0,$$

d'où l'équation $f'(x) = 0$ a une racine unique x_0 entre 0 et c, qui correspond à l'unique minimum de $f(x)$ car $f''(x) > 0$. Les abscisses 0 et c correspondent aux points A_1 et B_1, et le point M cherché doit donc se trouver entre A_1 et B_1 ce que l'on aurait pu obtenir à partir de considérations géométriques élémentaires.

Explicitons la signification géométrique de la solution obtenue. Désignons par α et β les angles formés par les segments $\overline{AM}$ et $\overline{BM}$ avec la perpendiculaire à L au point M. L'abscisse x du point M cherché doit être telle que $f'(x) = 0$, c'est-à-dire qu'elle doit vérifier l'équation:

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}},$$

qui peut être mise sous la forme

$$\frac{A_1M}{v_1 AM} = \frac{MB_1}{v_2 BM}$$

soit:

$$\frac{\sin\alpha}{v_1} = \frac{\sin\beta}{v_2}, \text{ c'est-à-dire } \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Le « trajet le plus court » sera celui pour lequel le rapport des sinus des angles α et β sera égal au rapport des vitesses dans les milieux I et II. Ce résultat nous donne la loi connue de la réfraction de la lumière et, par conséquent, la réfraction de la lumière s'effectue comme si le rayon lumineux choisissait le « trajet le plus court » pour passer d'un milieu dans un autre.

4. Supposons qu'on étudie expérimentalement une grandeur x et que n mesures, faites avec le même soin, donnent les n valeurs:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,$$

qui sont différentes étant donné l'imprécision des instruments. La « valeur la plus probable » de x sera celle pour laquelle la somme des carrés des erreurs sera la plus faible. De sorte que la recherche de cette valeur revient à rechercher la valeur de x qui minimise la fonction:

$$f(x) = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \ldots + (x-a_n)^2$$

dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

Calculons les deux premières dérivées:

$$f'(x) = 2(x-a_1) + 2(x-a_2) + \ldots + 2(x-a_n).$$
$$f''(x) = 2+2+\ldots+2 = 2n > 0.$$

En annulant la dérivée première, nous obtenons la valeur unique

$$x=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\,.$$

à laquelle correspond le minimum, étant donné que la dérivée seconde est positive. De sorte que *la « valeur la plus probable » de x est la moyenne arithmétique des valeurs obtenues expérimentalement.*

5. *Trouver la plus courte distance d'un point M à un cercle.*

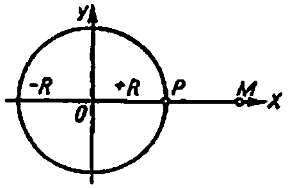

Fig. 66

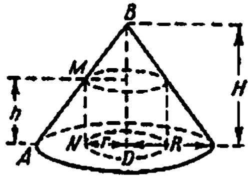

Fig. 67

Prenons pour origine des coordonnées le centre O du cercle et pour axe OX la droite OM. Soit $OM = a$ et soit R le rayon du cercle. L'équation du cercle sera

$$x^2+y^2+R^2,$$

et la distance du point M de coordonnées $(a, 0)$ à un point quelconque du cercle sera

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}.$$

Cherchons la valeur minimum du carré de cette distance. En remplaçant y^2 par sa valeur R^2-x^2, nous obtiendrons, à partir de l'équation du cercle, une fonction

$$f(x)=(x-a)^2+(R^2-x^2)=-2ax+a^2+R^2,$$

où la variable indépendante x varie dans l'intervalle $(-R\leqslant x\leqslant R)$. Comme la dérivée première

$$f'(x)=-2a$$

est négative pour tout x, la fonction $f(x)$ décroît et donc passe par sa valeur la plus petite pour $x=R$ à l'extrémité droite de l'intervalle. La distance la plus courte sera donc $\overline{PM}$ (fig. 66).

6. *Inscrire dans un cône circulaire donné un cylindre tel que sa surface totale soit la plus grande possible.*

Soit R et H le rayon de la base et la hauteur du cône, et r et h, le rayon de la base et la hauteur du cylindre. La fonction dont on cherche la plus grande valeur sera dans ce cas

$$S=2\pi r^2+2\pi rh.$$

Les grandeurs variables r et h sont liées entre elles car le cylindre doit être inscrit dans le cône donné. Il résulte de la similitude des triangles ABD et AMN (fig. 67):

$$\frac{MN}{AN}=\frac{BD}{AD}\quad\text{soit}\quad\frac{h}{R-r}=\frac{H}{R},$$

d'où

$$h=\frac{R-r}{R}H.$$

En remplaçant h par sa valeur dans S:

$$S=2\pi\left[r^2+rH\left(1-\frac{r}{R}\right)\right].$$

De sorte que S est une fonction de la seule variable indépendante r qui peut varier dans l'intervalle $0\leqslant r\leqslant R$. Calculons les deux premières dérivées

$$\frac{dS}{dr}=2\pi\left(2r+H-\frac{2r}{R}H\right),\quad \frac{d^2S}{dr^2}=4\pi\left(1-\frac{H}{R}\right).$$

En annulant $\frac{dS}{dr}$, on obtient pour r l'unique valeur

$$r=\frac{HR}{2(H-R)}. \tag{2}$$

Pour que cette valeur soit dans l'intervalle $(0, R)$, il faut que

$$0<\frac{HR}{2(H-R)} \quad \text{et} \quad \frac{HR}{2(H-R)}<R. \tag{3}$$

La première inégalité est équivalente à: H doit être plus grand que R. En multipliant les deux termes de la deuxième inégalité par la grandeur positive $2(H-R)$, il vient

$$R<\frac{H}{2}.$$

Si cette condition est vérifiée, $\frac{d^2S}{dr^2}$ est négatif et à la valeur (2) correspond le maximum unique de la fonction S qui est la valeur la plus grande de la surface du cylindre. Cette valeur peut être obtenue facilement en portant la valeur (2) de r dans S.

Supposons maintenant que la valeur (2) n'est pas dans l'intervalle $(0, R)$, c'est-à-dire que l'une des inégalités (3) n'est pas vérifiée. Deux cas sont alors possibles: ou bien $H\leqslant R$ ou bien $H>R$, mais $R\geqslant\frac{H}{2}$. Ces deux cas sont caractérisés par la condition

$$H\leqslant 2R. \tag{4}$$

Transformons l'expression de $\frac{dS}{dr}$:

$$\frac{dS}{dr}=2\pi\left(2r+H-\frac{2r}{R}H\right)=\frac{2\pi}{R}[(2R-H)r+H(R-r)].$$

On voit que si (4) est vérifié, $\frac{dS}{dr}>0$ pour $0<r<R$, c'est-à-dire la fonction S croît dans l'intervalle $(0, R)$ et atteint sa valeur la plus grande pour $r=R$. Pour cette valeur de r il est évident que $h=0$, et la solution peut être considérée comme un cylindre écrasé dont la base coïncide avec celle du cône et dont la surface est $2\pi R^2$.

II-3-5. Théorème de Fermat. Nous avons déjà exposé, en partant de considérations de géométrie élémentaire, des méthodes pour étudier la croissance et la décroissance des fonctions, trouver leurs maxima et minima, ainsi que leurs plus grandes et plus petites valeurs. Nous allons maintenant passer à l'exposé analytique rigoureux de certains théorèmes et formules qui nous donneront une démonstration analytique de la validité des règles déjà données, et qui permettront une étude plus détaillée des fonctions. Dans cet exposé nous examinerons toutes les conditions qui doivent être satisfaites pour que tels ou tels théorèmes et formules soient applicables.

Théorème de Fermat. *Si la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b), a une dérivée en tout point de cet intervalle et si en un point $x = c$ de cet intervalle elle a sa valeur la plus grande (ou la plus petite), la dérivée première est nulle en ce point, c'est-à-dire que $f'(c) = 0$.*

Ainsi, supposons pour fixer les idées que $f(c)$ soit la plus grande valeur de la fonction. Pour la plus petite valeur la démonstration est analogue. Par hypothèse, $x = c$ est dans l'intervalle et la différence $[f(c+h) - f(c)]$ sera négative, ou en tout cas elle ne sera pas positive pour tout h positif ou négatif:

$$f(c+h)-f(c)\leqslant 0.$$

Formons le rapport

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}.$$

Le numérateur est négatif ou nul, d'où:

$$\left.\begin{aligned} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}&\leqslant 0 \quad \text{pour} \quad h>0, \\ \frac{f(c+h)-f(c)}{h}&\geqslant 0 \quad \text{pour} \quad h<0. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Le point $x = c$ est situé dans l'intervalle où, par hypothèse, la dérivée existe, c'est-à-dire que la fraction écrite tend vers une limite déterminée, $f'(c)$, lorsque h tend vers 0 de n'importe quelle manière. Supposons d'abord que h tende vers zéro par valeur positive. Alors en passant à la limite, la première des inégalités (5) donne

$$f'(c)\leqslant 0.$$

De même, en passant à la limite, h tendant vers zéro, la deuxième des inégalités (5) donne

$$f'(c)\geqslant 0.$$

En comparant ces inégalités, il vient

$$f'(c)=0.$$

II-3-6. Théorème de Rolle. *Si une fonction $f(x)$, continue dans l'intervalle (a, b), a une dérivée en tout point de l'intervalle et si les valeurs de la fonction aux extrémités de l'intervalle sont égales, c'est-à-dire si $f(a) = f(b)$, alors il existe dans cet intervalle au moins un point $x = c$ pour lequel la dérivée s'annule, c'est-à-dire tel que $f'(c) = 0$.*

Une fonction continue $f(x)$ doit passer dans cet intervalle par sa valeur la plus petite m et sa valeur la plus grande M. Si ces valeurs sont égales, c'est-à-dire si $m = M$, il en résulte que la fonction est constante dans tout l'intervalle et a la valeur m (ou M). Mais on sait que la dérivée d'une constante est nulle et dans ce cas simple la dérivée serait nulle en tout point de l'intervalle. Revenant au cas général, nous pouvons donc considérer que $m < M$. Comme les valeurs de la fonction aux extrémités de l'intervalle sont égales par hypothèse, c'est-à-dire que $f(a) = f(b)$, l'un au moins des nombres m et M est différent de la valeur de la fonction aux extrémités. Supposons par exemple que ce soit M, c'est-à-dire que la fonction n'a pas sa valeur la plus grande aux extrémités, mais en un point de l'intervalle. Soit $x = c$ ce point. D'après le théorème de Fermat, nous aurons en ce point $f'(x) = 0$, ce qui démontre le théorème de Rolle.

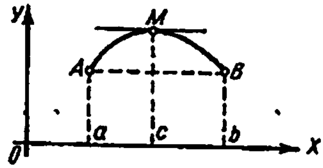

Fig. 68

Dans le cas particulier où $f(a) = f(b) = 0$, on peut formuler le théorème de Rolle brièvement de la manière suivante: *entre deux racines de la fonction il y a au moins une racine de la dérivée première.*

Le théorème de Rolle a une signification géométrique simple. Par hypothèse, $f(a) = f(b)$, c'est-à-dire que les ordonnées de la courbe $y = f(x)$, correspondant aux extrémités de l'intervalle, sont égales et dans cet intervalle la dérivée existe, c'est-à-dire que la courbe admet une tangente. Le théorème de Rolle dit que dans cet intervalle il y aura alors au moins un point où la dérivée sera nulle, c'est-à-dire où la tangente sera parallèle à l'axe OX (fig. 68).

R e m a r q u e. Si la condition du théorème de Rolle concernant l'existence d'une dérivée $f'(x)$ n'est pas vérifiée en tous les points de l'intervalle, le théorème peut être faux.

Ainsi, par exemple, la fonction

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$$

est continue dans l'intervalle $(-1, +1)$ et $f(-1) = f(1) = 0$, mais la dérivée

$$f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

ne s'annule pas dans l'intervalle. Ceci a lieu parce que $f'(x)$ n'existe pas (devient infinie) pour $x = 0$ (fig. 69). Un autre exemple est donné par la courbe représentée sur la fig. 70. Dans ce cas nous avons une courbe $y = f(x)$, pour laquelle $f(a) = f(b) = 0$. Toutefois, on voit d'après la représentation graphique de la courbe que la tangente ne peut pas être parallèle à l'axe OX dans l'intervalle (a, b), c'est-à-dire que $f'(x)$ ne s'annule pas. Ceci a lieu parce que la courbe a au point $x = \alpha$ deux tangentes différentes, à gauche

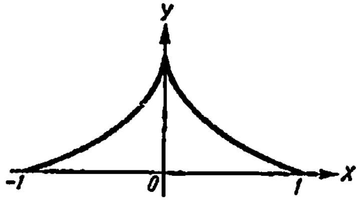

Fig. 69

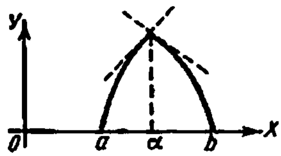

Fig. 70

et à droite de ce point, donc en ce point il n'y a pas de dérivée définie, et la condition du théorème de Rolle imposant l'existence d'une dérivée en tout point de l'intervalle n'est pas remplie.

II-3-7. Formule de Lagrange. Supposons que la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b) et admet une dérivée en tout point intérieur de cet intervalle mais que la condition $f(a) = f(b)$ du théorème de Rolle peut ne pas être vérifiée.

Formons la fonction

$$F(x) = f(x) + \lambda x,$$

où λ est une constante que nous déterminerons de façon que la fonction $F(x)$ vérifie la condition susmentionnée du théorème de Rolle, c'est-à-dire que

$$F(a) = F(b)$$

soit

$$f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b,$$

d'où

$$\lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Appliquons maintenant à $F(x)$ le théorème de Rolle. Nous pouvons affirmer qu'entre a et b il existe un point $x = c$ pour lequel

$$F'(c) = f'(c) + \lambda = 0 \qquad (a < c < b),$$

d'où en remplaçant λ par sa valeur :

$$f'(c) = -\lambda \quad \text{ou} \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Cette dernière égalité peut être mise sous la forme :

$$f(b)-f(a) = (b-a)\, f'(c).$$

Cette égalité s'appelle *formule de Lagrange*. La valeur de c est comprise entre a et b, c'est pourquoi le rapport $\frac{c-a}{b-a} = \theta$ est compris entre 0 et 1, et on peut poser

$$c = a + \theta(b-a) \qquad (0 < \theta < 1),$$

et la formule de Lagrange peut être mise sous la forme :

$$f(b)-f(a) = (b-a)\, f'[a+\theta(b-a)] \qquad (0 < \theta < 1).$$

En posant $b = a+h$, on obtient :

$$f(a+h)-f(a) = hf'(a+\theta h).$$

La formule de Lagrange donne l'expression exacte de l'accroissement $f(b) - f(a)$ de la fonction $f(x)$, c'est pourquoi on l'appelle *formule des accroissements finis*.

Nous savons que la dérivée d'une constante est nulle. On peut déduire de la formule de Lagrange la propriété inverse : *si la dérivée* $f'(x)$ *est nulle en tout point de l'intervalle* (a, b), *la fonction* $f(x)$ *est constante dans cet intervalle.*

Prenons une valeur quelconque de x dans l'intervalle (a, b) et appliquons la formule de Lagrange à l'intervalle (a, x). On obtient :

$$f(x)-f(a) = (x-a)\, f'(\xi) \qquad (a < \xi < x);$$

mais par hypothèse $f'(\xi) = 0$, et par conséquent:

$$f(x)-f(a) = 0, \text{ c'est-à-dire } f(x) = f(a) = C^{te}.$$

Nous savons seulement de la valeur c qui entre dans la formule de Lagrange qu'elle est comprise entre a et b, c'est pourquoi la formule de Lagrange ne permet pas un calcul exact de l'accroissement de la fonction au moyen de la dérivée, mais elle permet d'évaluer l'erreur que nous faisons en remplaçant l'accroissement de la fonction par sa différentielle.

Exemple. Soit

$$f(x) = \lg_{10} x.$$

La dérivée sera

$$f'(x) = \frac{1}{x}\,\frac{1}{\ln 10} = \frac{M}{x} \qquad (M = 0{,}43429\ldots),$$

et la formule de Lagrange nous donne

$$\lg_{10}(a+h)-\lg_{10}a=h\frac{M}{a+\theta h}\qquad (0<\theta<1)$$

soit

$$\lg_{10}(a+h)=\lg_{10}a+h\frac{M}{a+\theta h}.$$

En remplaçant l'accroissement par la différentielle, nous obtenons la formule approchée

$$\lg_{10}(a+h)-\lg_{10}a=h\frac{M}{a},\quad \lg_{10}(a+h)=\lg_{10}a+h\frac{M}{a}.$$

En comparant cette égalité approchée avec l'équation exacte obtenue par la formule de Lagrange, nous voyons que l'erreur sera

$$h\frac{M}{a}-h\frac{M}{a+\theta h}=\frac{\theta h^2 M}{a(a+\theta h)}.$$

En faisant $a = 100$ et $h = 1$, on obtient l'égalité approchée

$$\lg_{10}101=\lg_{10}100+\frac{M}{100}=2{,}00434\ldots$$

avec une erreur de

$$\frac{\theta M}{100(100+\theta)}\qquad (0<\theta<1).$$

En remplaçant dans le numérateur θ par 1 et dans le dénominateur par zéro, on augmente la valeur de la fraction et on peut dire que l'erreur sur la valeur calculée de $\lg_{10}$ 101 est inférieure à

$$\frac{M}{100^2}=0{,}00004\ldots$$

Mettons la formule de Lagrange sous la forme:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\qquad (a<c<b).$$

En examinant la courbe $y = f(x)$ (fig. 71), on voit que la relation

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}=\operatorname{tg}\widehat{CAB}$$

donne le coefficient angulaire de la corde AB, et que $f'(c)$ donne celui de la tangente en un certain point M de l'arc AB de la courbe. De sorte que la formule de Lagrange est équivalente à l'affirmation suivante: *sur l'arc de courbe il existe un point où la tangente est parallèle à la corde.* Un cas particulier de cette propriété est celui où la corde est parallèle à l'axe OX, c'est-à-dire que $f(a) = f(b)$: on a alors le théorème de Rolle.

R e m a r q u e. Les critères de croissance et de décroissance d'une courbe que nous avons établis à partir de la représentation graphique, résultent directement de la formule de Lagrange. En effet, supposons que dans un certain intervalle la dérivée première $f'(x)$ est positive et soit x et $x+h$ deux points de cet intervalle. On voit à partir de la formule de Lagrange

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h) \qquad (0<\theta<1)$$

que pour h positif la différence qui figure au premier membre est positive car les deux facteurs du produit situé à droite sont dans ce cas positifs. De sorte qu'en supposant que la dérivée est positive dans un certain intervalle, nous avons:

$$f(x+h)-f(x)>0,$$

c'est-à-dire que la fonction croît dans cet intervalle. D'une façon analogue, le critère de décroissance résulte de la formule citée.

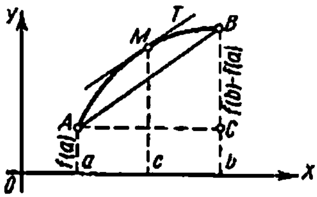

Fig. 71

Notons ici que les raisonnements faits lors de la démonstration du théorème de Fermat restent valables dans le cas où la fonction n'atteint pas forcément sa plus grande et sa plus petite valeur au point considéré mais admet simplement un maximum ou un minimum. Ces raisonnements nous montrent que pour de tels points la dérivée première, si elle existe, doit être nulle.

II-3-8. Formule de Cauchy. Supposons que $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont des fonctions continues dans l'intervalle (a, b), possédant une dérivée en chaque point de cet intervalle et que, de plus, $\varphi'(x)$ ne s'annule pas dans cet intervalle. En appliquant la formule de Lagrange à la fonction $\varphi(x)$, il vient:

$$\varphi(b)-\varphi(a)=(b-a)\varphi'(c_1) \qquad (a<c_1<b);$$

mais par hypothèse $\varphi'(c_1)\neq 0$, donc

$$\varphi(b)-\varphi(a)\neq 0.$$

Formons la fonction

$$F(x)=f(x)+\lambda\varphi(x),$$

où λ est une constante que nous prendrons telle que l'on ait:

$$F(a)=F(b),$$

c'est-à-dire

$$f(a)+\lambda\varphi(a)=f(b)+\lambda\varphi(b),$$

d'où

$$\lambda=-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$$

Pour un tel choix de λ le théorème de Rolle s'applique à $F(x)$ et il existe une valeur $x=c$ telle que

$$F'(c)=f'(c)+\lambda\varphi'(c)=0 \quad (a<c<b).$$

Cette équation nous donne

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=-\lambda \quad (\varphi'(c)\neq 0),$$

d'où, en remplaçant λ par sa valeur,

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \quad (a<c<b),$$

soit

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'[a+\theta(b-a)]}{\varphi'[(a+\theta(b-a)]} \quad (0<\theta<1), \tag{6}$$

ou:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)}=\frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)},$$

qui est *la formule de Cauchy*. En faisant dans cette formule $\varphi(x)=x$, nous aurons $\varphi'(x)=1$ et la formule sera:

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c),$$

c'est-à-dire que nous avons obtenu la formule de Lagrange, comme cas particulier de la formule de Cauchy.

II-3-9. Calcul des expressions indéterminées. Supposons que les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont continues pour $a<x\leqslant a+k$, où k est un nombre positif, qu'elles possèdent des dérivées continues et que $\psi'(x)$ n'est pas nulle pour les valeurs choisies pour x. Supposons de plus que $\lim\varphi(x)=0$ et $\lim\psi(x)=0$ pour $x\to a+0$ [I-2-2]. En supposant que $\varphi(a)=\psi(a)=0$, nous aurons des fonctions continues jusqu'à $x=a$, c'est-à-dire pour $a\leqslant x\leqslant a+k$. On ne peut pas appliquer le théorème de la limite d'un rapport à $\varphi(x)/\psi(x)$ pour $x\to a+0$ car pour $x=a$ il représente une détermination de type $\frac{0}{0}$. Indiquons un moyen pour lever l'indétermination, c'est-à-dire un moyen de trouver la limite de $\varphi(x)/\psi(x)$ pour $x\to a+0$.

Démontrons d'abord le théorème auxiliaire suivant: *si avec les hypothèses faites ci-dessus, le rapport $\varphi'(x)/\psi'(x)$ tend vers une limite b lorsque x tend vers $a+0$, le rapport $\varphi(x)/\psi(x)$ des fonctions tend vers la même limite.*

En tenant compte de ce que

$$\varphi(a)=\psi(a)=0,$$

et en utilisant la formule de Cauchy [II-3-8], il vient:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\psi(x)-\psi(a)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} \quad (\xi \text{ compris entre } a \text{ et } x). \tag{7}$$

Remarquons qu'avec les hypothèses faites sur $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, nous avons le droit d'appliquer la formule de Cauchy.

Si x tend vers $a+0$, ξ compris entre a et x et dépendant de x tendra vers a. Alors, par hypothèse, le deuxième membre de (7) tendra vers la limite b et le rapport $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ tendra vers la même limite.

Il est à noter que cette limite peut être infinie. De sorte que nous avons la règle :

Lorsque l'on cherche la limite du rapport $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ dans le cas d'une indétermination du type $\frac{0}{0}$, on peut remplacer le rapport des fonctions par celui de leurs dérivées et chercher la limite de ce nouveau rapport.

Cette règle a été trouvée par le mathématicien français L'Hospital et porte généralement son nom.

Si le rapport des dérivées $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ conduit aussi à une indétermination du type $\frac{0}{0}$, et si les fonctions $\varphi'(x)$ et $\psi'(x)$ vérifient les conditions que nous avons formulées ci-dessus pour $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, on peut appliquer la règle de L'Hospital également au rapport $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$, etc.

Nous avons considéré le cas où $a < x \leqslant a+k$. On peut examiner de même le cas $a-k \leqslant x < a$, c'est-à-dire $x \to a-0$. Dans les exemples suivants la limite ne dépend pas de ce que x tend vers a à gauche ou à droite, et nous écrivons $x \to a$.

Nous avons examiné le cas où x tend vers une limite finie a. Cette règle est aussi valable pour le cas où x tend vers ∞. Nous ne nous arrêterons pas sur la démonstration de ce fait.

Appliquons la règle de L'Hospital à quelques exemples.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{n(1+x)^{n-1}}{1}=n$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$,

c'est-à-dire que $x-\sin x$ est un infiniment petit du troisième ordre en x.

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+x\sin x}{1-\cos x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin x+x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x+\cos x-x\sin x}{\cos x}=3.$$

Le résultat de cet exemple fournit une méthode très pratique pour *rectifier un arc de cercle*.

Examinons un cercle de rayon unité. Pour axe OX prenons un des diamètres de ce cercle, et pour axe OY, la tangente au cercle à l'extrémité de ce diamètre (fig. 72). Prenons un arc OM, et soit ON un segment de l'axe OY dont la longueur est égale à l'arc OM. Traçons la droite NM. Soit P son point d'intersection avec l'axe OX. Soit u la longueur de l'arc OM (le rayon étant pris pour unité). L'équation de la droite NM par segments est:

$$\frac{x}{OP}+\frac{y}{u}=1.$$

Pour calculer la longueur du segment OP notons que le point M de coordonnées

$$x=OQ=1-\cos u, \quad y=QM=\sin u.$$

se trouve sur NM.

Ces coordonnées doivent vérifier l'équation

$$\frac{1-\cos u}{OP}+\frac{\sin u}{u}=1,$$

d'où

$$OP=\frac{u-u\cos u}{u-\sin u}.$$

L'exemple 3 montre que pour $OP \to 3$ on a $u \to 0$, c'est-à-dire que le point P de OX tendra vers le point D dont la distance à l'origine des coordonnées sera égale à 3 fois le rayon du cercle. D'où une méthode simple pour rectifier de façon approchée un arc de cercle. Pour rectifier l'arc OM il faut porter à partir de O le segment OD dont la longueur est égale à trois fois le rayon du cercle et tracer la droite DM. Le segment ON_1 formé par cette droite sur OY donne une valeur approchée de la longueur de l'arc OM. Cette méthode donne de très bons résultats, en particulier pour les arcs petits. Mais même pour un arc égal à $\frac{\pi}{2}$ l'erreur relative est d'environ 5 %.

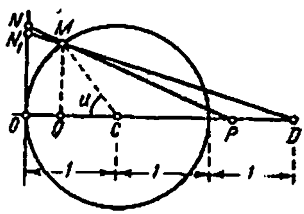

Fig. 72.

II-3-10. Diverses formes d'indétermination. Le théorème démontré au paragraphe [II-3-9] reste valable dans le cas d'indétermination du type $\frac{\infty}{\infty}$. Ci-dessous, sans distinguer si x tend vers a à gauche ou à droite, nous écrirons brièvement $x \to a$. Soit deux fonctions continues $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ tendant vers $(+\infty)$ ou $(-\infty)$. Soit

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\lim_{x\to a}\psi(x)=+\infty \tag{8}$$

et

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=b. \tag{9}$$

Montrons que le rapport $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ tend vers la même limite b; ce faisant nous supposerons que $\psi'(x)$ n'est pas nulle pour les valeurs de x proches de a.

Examinons deux valeurs de la variable indépendante x et x_0, proches de a et telles que x soit compris entre x_0 et a. D'après la formule de Cauchy nous aurons

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} \quad (\xi \text{ entre } x \text{ et } x_0),$$

Mais par ailleurs,

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,\frac{1-\frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1-\frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}}.$$

Notons que d'après (8) $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ ne sont pas nulles pour des valeurs de x proches de a. En comparant ces deux expressions, on obtient

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,\frac{1-\frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1-\frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}$$

soit

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}\,\frac{1-\frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}}{1-\frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}, \tag{10}$$

où ξ est compris entre x et x_0 et, par conséquent, entre a et x_0. Prenons x_0 suffisamment proche de a. Alors, d'après (9), nous pouvons considérer que le premier facteur du second membre de (10) différera infiniment peu de b pour tout x compris entre x_0 et a. Fixant ainsi la valeur x_0, faisons tendre x vers a. Alors, d'après (8), le second facteur du second membre de (10) tendra vers l'unité, c'est pourquoi on peut dire que le rapport $\varphi(x)/\psi(x)$ du premier membre de (10) pour x voisin de a sera aussi peu différent que l'on veut de b, c'est-à-dire

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=b.$$

Il résulte du théorème qu'on vient de démontrer que la règle de L'Hospital s'applique également pour lever des indéterminations du type $\frac{\infty}{\infty}$.

Voyons encore quelques types d'indétermination. Examinons le produit $\varphi(x)\,\psi(x)$, et soit

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=0$$

et

$$\lim_{x\to a}\psi(x)=\infty.$$

On aura une indétermination du type $0\cdot\infty$. On peut la mettre facilement sous la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\varphi(x)\psi(x)=\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}}=\frac{\psi(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}.$$

Examinons enfin l'expression $\varphi(x)^{\psi(x)}$, où

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a}\psi(x)=\infty.$$

On a une indétermination du type 1^∞. Examinons le logarithme de la fonction considérée:

$$\ln[\varphi(x)^{\psi(x)}]=\psi(x)\ln\varphi(x),$$

qui se ramène à une indétermination du type $0\cdot\infty$. En levant cette indétermination, c'est-à-dire en trouvant la limite du logarithme de l'expression donnée, nous connaîtrons la limite de l'expression elle-même. De la même façon on lève les indéterminations du type ∞^0 et 0^0.

Examinons les exemples suivants:

1. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty.$$

De même on peut voir que le rapport e^x/x^n tend vers l'infini pour $x\to+\infty$, si n est positif, c'est-à-dire que *la fonction exponentielle e^x croît plus vite que toute puissance positive de x, lorsque x tend vers l'infini.*

2. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{nx^n}=0 \qquad (n>0),$$

c'est-à-dire que $\ln x$ *croît moins vite que toute puissance positive de x.*

3. $$\lim_{x\to+0}x^n\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-n}{x^{n+1}}}=-\lim_{x\to+0}\frac{x^n}{n}=0 \qquad (n>0).$$

4. Cherchons la limite de x^x lorsque x tend vers 0 par valeur positive. En prenant le logarithme, on a une indétermination du type $0\cdot\infty$. Cette indétermination, comme on l'a vu dans l'exemple 3, donne zéro à la limite et

$$\lim_{x\to+0}x^x=1.$$

5. Cherchons la limite du rapport :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x}.$$

Le numérateur et le dénominateur de ce rapport tendent vers l'infini. En remplaçant (règle de L'Hospital) le rapport des fonctions par celui de leurs dérivées, il vient

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1}.$$

Mais $1+\cos x$ ne tend pas vers une limite lorsque x croît indéfiniment car $\cos x$ oscille sans cesse entre $(+1)$ et (-1), cependant il est facile de voir que le rapport lui-même tendra vers la limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1.$$

Ainsi dans ce cas on peut lever l'indétermination mais la règle de L'Hospital ne donne rien. Ce résultat ne contredit pas le théorème qu'on vient de démontrer car il affirmait seulement que si le rapport des dérivées tend vers une limite, le rapport des fonctions tend vers cette même limite, mais la réciproque n'est pas vraie.

6. Examinons encore des indéterminations du type $(\infty \pm \infty)$. Elles se ramènent généralement au type $\frac{0}{0}$. Par exemple,

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x+x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x+x^2-\sin x}{(x+x^2)\sin x}.$$

Cette dernière expression présente une indétermination du type $\frac{0}{0}$. En levant cette indétermination par le moyen déjà indiqué, on obtient :

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x+x^2}\right) = 1.$$

II-4. Fonctions de deux variables

II-4-1. Notions fondamentales. Jusqu'ici nous avons considéré les fonctions d'une variable indépendante. Examinons maintenant une fonction de deux variables indépendantes $u = f(x, y)$.

Pour déterminer les valeurs particulières d'une telle fonction on doit se donner les valeurs des variables indépendantes $x = x_0$, $y = y_0$. A chaque couple de valeurs de x et y correspond un point $M_0(x_0, y_0)$ situé sur le plan de coordonnées et au lieu de parler de la valeur de la fonction pour $x = x_0$, $y = y_0$, on peut parler de la valeur de la fonction au point $M_0(x_0, y_0)$ du plan. La fonction peut être définie *dans tout le plan* ou seulement dans une de ses parties, *dans un domaine*. Si $f(x, y)$ est un polynôme entier en

x et y, par exemple

$$u = f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x + 3y + 7,$$

on peut considérer que cette formule définit une fonction sur tout le plan. La formule

$$u = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$$

définit une fonction à l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 = 1$ dont le centre est à l'origine des coordonnées et dont le rayon est égal à l'unité, aussi bien que sur la circonférence elle-même où $u = 0$. L'analogue de l'intervalle dans le plan est le domaine défini par les inégalités $a_1 \leqslant x \leqslant b_1$, $a_2 \leqslant y \leqslant b_2$. C'est un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes et dont la frontière fait partie du domaine. Les inégalités $a_1 < x < b_1$ et $a_2 < y < b_2$ définissent seulement les points situés à l'intérieur du rectangle. Si la frontière du domaine fait partie du domaine, on dit qu'il est *fermé*. Si elle n'en fait pas partie, on dit qu'il est *ouvert* (cf. [I-1-4]). Définissons la notion de limite d'une fonction $f(x, y)$ de deux variables (cf. [I-2-8]). Supposons que la fonction est définie en tout point $M(x, y)$ suffisamment proche de $M_0(a, b)$.

D é f i n i t i o n. *On dit que le nombre A est la limite de $f(x, y)$ lorsque $M(x, y)$ tend vers $M_0(a, b)$, et on écrit*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A, \quad \text{ou} \quad \lim_{M \to M_0} f(x, y) = A,$$

si pour tout ε positif donné il existe un η positif tel que

$$|A - f(x, y)| < \varepsilon, \quad \text{si} \quad |x - a| < \eta \quad \text{et} \quad |y - b| < \eta.$$

On suppose que le couple de valeurs $x = a$, $y = b$ est exclu (M ne coïncide pas avec M_0). Si le point M_0 est sur la frontière du domaine où $f(x, y)$ est définie, M tendant vers M_0 doit appartenir à ce domaine. Soit une suite indexée de points $M_n(x_n, y_n)$ tendant vers $M_0(a, b)$, c'est-à-dire une suite telle que les x_n aient pour limite a et les y_n aient pour limite b. On peut démontrer que si la suite de nombres $u_n = f(x_n, y_n)$ pour toute suite de points $M_n(x_n, y_n)$ a une seule limite A, alors A est la limite de $f(x, y)$ lorsque $M(x, y)$ tend vers $M_0(a, b)$ au sens de la définition donnée ci-dessus.

Supposons que $f(x, y)$ est définie aux points $M_0(a, b)$ et dans tous les points voisins de $M_0(a, b)$ (cf. [I-2-8]).

D é f i n i t i o n. *La fonction $f(x, y)$ est dite continue au point $M_0(a, b)$ si*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = f(a, b), \quad \text{ou} \quad \lim_{M \to M_0} f(x, y) = f(a, b).$$

Une fonction est dite continue dans un domaine si elle est continue en tout point de ce domaine.

Ainsi la fonction $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ est continue dans le cercle où elle est définie. On peut aussi en dire qu'elle reste continue si on joint au cercle sa frontière, c'est-à-dire la circonférence sur laquelle $u = 0$.

Soit B un domaine fermé et fini dans un plan et $f(x, y)$, une fonction continue dans B (continue à l'intérieur de B et jusqu'à la frontière de B). Une telle fonction a des propriétés analogues aux propriétés des fonctions d'une variable indépendante continues sur un intervalle fermé et fini [I-2-11]. Le procédé pour démontrer ces propriétés est dans l'essentiel le même que dans [I-2-19]. Nous nous bornerons à en formuler les résultats.

1. *La fonction $f(x, y)$ est uniformément continue dans B, c'est-à-dire que pour tout nombre positif ε donné, il existe un nombre positif η tel que*

$$|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| < \varepsilon,$$

si (x_1, y_1) et (x_2, y_2) appartiennent à B et si

$$|x_2 - x_1| < \eta, \quad |y_2 - y_1| < \eta.$$

2. *La fonction $f(x, y)$ est bornée dans B, c'est-à-dire qu'il existe un nombre positif M tel que $|f(x, y)| < M$ pour tout (x, y) appartenant à B.*

3. *La fonction $f(x, y)$ passe par sa valeur la plus grande et la plus petite dans B.*

Indiquons un corollaire de la définition de la continuité de la fonction. Si $f(x, y)$ est continue au point (a, b) et si $y = b$, la fonction $f(x, b)$ d'une variable indépendante x est continue pour $x = a$. De même, $f(a, y)$ est continue pour $y = b$.

II-4-2. Dérivées partielles et différentielle totale d'une fonction de deux variables indépendantes. Supposons que la fonction $u = f(x, y)$ est telle que y reste constant et seul x varie, c'est-à-dire que u devient une fonction de x seulement, et on peut calculer son accroissement et sa dérivée. Soit $\Delta_x u$ l'accroissement de u, lorsque y reste constant et que x croît de Δx:

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

La dérivée s'obtient en cherchant la limite

$$\lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

La dérivée ainsi obtenue en supposant que y reste constant est la *dérivée partielle de la fonction u par rapport à x*, et on utilise la notation :

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad \text{ou} \quad f'_x(x, y), \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Notons que $\frac{\partial u}{\partial x}$ n'est pas une fraction mais un symbole désignant une dérivée partielle. Si $f(x, y)$ a une dérivée partielle par rapport à x, elle est une fonction continue de x pour un y constant donné.

De même on peut définir l'accroissement $\Delta_y u$ et *la dérivée partielle de u par rapport à y* calculée en supposant que x reste constant :

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f'_y(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to \pm 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to \pm 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Si par exemple, $u = x^2 + y^2$, alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y.$$

Examinons l'équation de Clapeyron

$$pv = RT.$$

A l'aide de cette équation on peut définir l'une des grandeurs p, v et T en fonction des deux autres qui doivent alors être considérées comme des variables indépendantes. Nous obtenons la table suivante:

Variables indépendantes	T, p	T, v	p, v
Fonctions	$v = \frac{RT}{p}$	$p = \frac{RT}{v}$	$T = \frac{pv}{R}$
Dérivées partielles	$\frac{\partial v}{\partial T} = \frac{R}{p}$, $\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{RT}{p^2}$	$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{v}$, $\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{RT}{v^2}$	$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{v}{R}$, $\frac{\partial T}{\partial v} = \frac{p}{R}$

D'où la relation

$$\frac{\partial v}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial v} = -1.$$

Si dans le premier membre on effectue la simplification, on aurait $(+1)$, et non (-1). Mais dans cette égalité les dérivées partielles sont calculées avec des hypothèses différentes:

pour $\frac{\partial v}{\partial T}$ on suppose p constant;

pour $\frac{\partial T}{\partial p}$ on suppose v constant;

pour $\frac{\partial p}{\partial v}$ on suppose T constant.

C'est pourquoi on ne peut pas faire cette simplification.

Désignons par Δu *l'accroissement total de la fonction* obtenu lorsque x et y varient simultanément:

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

En ajoutant et en retranchant $f(x, y+\Delta y)$, il vient

$$\Delta u = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)].$$

Le premier terme représente l'accroissement de u pour la valeur constante $(y+\Delta y)$ de la variable y, tandis que le second représente l'accroissement de u pour la valeur constante x.

Supposons que $f(x, y)$ est définie dans un certain domaine B, que le point (x, y) se trouve à l'intérieur de B et que Δx et Δy ont été choisis tellement petits par leur valeur absolue qu'un rectangle au centre (x, y) et à la longueur des côtés égale à $2\mid\Delta x\mid$ et $2\mid\Delta y\mid$ est situé également à l'intérieur de B. Supposons en outre que $f(x, y)$ a des dérivées partielles à l'intérieur de B. En appliquant la formule de Lagrange à chacun de ces accroissements faisant partie de Δu, ce qu'on peut faire parce que dans chaque cas, une seule variable indépendante varie, il vient:

$$\Delta u = f'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y)\,\Delta x + f'_y(x, y+\theta_1\Delta y)\,\Delta y,$$

où θ et θ_1 sont compris entre zéro et un. En supposant continues les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$, nous pouvons dire que lorsque Δx et Δy tendent vers zéro, le coefficient de Δx tendra vers $f'_x(x, y)$ tandis que le coefficient de Δy tendra vers $f'_y(x, y)$, c'est pourquoi

$$\Delta u = [f'_x(x, y) + \varepsilon]\,\Delta x + [f'_y(x, y) + \varepsilon_1]\,\Delta y$$

ou

$$\Delta u = f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y + \varepsilon\Delta x + \varepsilon_1\Delta y, \qquad (1)$$

où ε et ε_1 sont infiniment petits en même temps que Δx et Δy. Cette formule est analogue à:

$$\Delta y = y'\Delta x + \varepsilon\Delta x,$$

que nous avons démontré dans le cas d'une fonction de variable indépendante [II-1-6]. Les produits $\varepsilon\Delta x$ et $\varepsilon_1\Delta y$ seront des infiniment petits d'ordre supérieur par rapport à Δx et Δy.

Rappelons que dans les raisonnements précédents nous avons supposé non seulement l'existence mais aussi la continuité des dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ dans un certain domaine contenant le point (x, y).

Remplaçons dans la somme des deux premiers termes du second membre de (1), Δx et Δy par des nombres arbitraires dx et dy (différentielles des variables indépendantes). Ainsi on obtient:

$$du = f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy,$$

ou

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \tag{2}$$

qui porte le nom de *différentielle totale de la fonction* u [II-1-6].

Etant donné les propriétés déjà indiquées de $\varepsilon\Delta x$ et de $\varepsilon_1\Delta y$, on peut dire que *pour les petites valeurs de* $|dx|$ *et* $|dy|$ *la différentielle totale* du *est une valeur approchée de l'accroissement total* Δu *qui correspond aux accroissements* dx *et* dy *des variables indépendantes* [II-1-6].

Par ailleurs, il est évident que les produits $\frac{\partial u}{\partial x}dx$ et $\frac{\partial u}{\partial y}dy$ donnent une valeur approchée des accroissements $\Delta_x u$ et $\Delta_y u$ et, donc, *pour des accroissements petits des variables indépendantes, l'accroissement total de la fonction est approximativement égal à la somme de ses accroissements partiels*

$$\Delta u \sim du \sim \Delta_x u + \Delta_y u.$$

L'égalité (2) exprime une propriété importante d'une fonction de plusieurs variables indépendantes que l'on peut appeler la propriété de « superposition des petites actions ». Les effets conjugués de plusieurs actions petites Δx et Δy peuvent être remplacés avec une précision suffisante par la somme des effets de chacun d'eux.

II-4-3. Dérivées des fonctions composées et des fonctions implicites. Supposons maintenant que la fonction $u = f(x, y)$ dépende par l'intermédiaire de x et de y d'une variable indépendante t, c'est-à-dire supposons que x et y ne soient pas des variables indépendantes mais des fonctions de la variable indépendante t et calculons la dérivée $\frac{du}{dt}$ de u par rapport à t.

Si la variable independante t subit un accroissement Δt, les fonctions x et y subiront un accroissement Δx et Δy et u, un accroissement Δu:

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Nous avons vu [II-4-2] que l'accroissement peut être mis sous la forme

$$\Delta u = f'_x(x+\theta\Delta x,\ y+\Delta y)\,\Delta x + f'_y(x,\ y+\theta_1\Delta y)\,\Delta y.$$

Divisons les deux membres de cette égalité par Δt:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = f'_x(x+\theta\Delta x,\ y+\Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x,\ y+\theta_1\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Nous avons supposé que x et y admettent une dérivée par rapport à t et donc seront, à plus forte raison, des fonctions continues de t. C'est pourquoi lorsque Δt tend vers zéro, Δx et Δy tendent également vers zéro vu la continuité supposée de $\frac{\partial u}{\partial x}$ et de $\frac{\partial u}{\partial y}$, l'équation écrite deviendra en passant à la limite

$$\frac{du}{dt} = f'_x(x,\ y)\frac{dx}{dt} + f'_y(x,\ y)\frac{dy}{dt}. \tag{3}$$

Cette égalité exprime *la règle de différentiation d'une fonction composée de plusieurs variables.*

Supposons, en particulier, que la variable x joue le rôle de la variable indépendante t, c'est-à-dire que la fonction $u = f(x,\ y)$ dépend d'une variable indépendante x directement et par l'intermédiaire de la variable y qui est une fonction de x. Etant donné que $\frac{dx}{dx} = 1$, nous obtenons en tenant compte de (3):

$$\frac{du}{dx} = f'_x(x,\ y) + f'_y(x,\ y)\frac{dy}{dx}. \tag{4}$$

La dérivée $\frac{du}{dx}$ est appelée *la dérivée totale* de u par rapport à x par opposition à *la dérivée partielle* $f'_x(x,\ y)$.

La règle de différentiation des fonctions de fonction s'applique pour trouver *la dérivée d'une fonction implicite.* Supposons que l'équation

$$F(x,\ y) = 0 \tag{5}$$

définisse y comme fonction implicite de x ayant la dérivée

$$y' = \varphi'(x).$$

En faisant $y = \varphi(x)$ dans (5), nous devrions obtenir l'identité $0 = 0$ car $y = \varphi(x)$ est une solution de l'équation (5). Nous voyons de la sorte que la constante nulle doit être considérée comme une fonction de fonction de x qui dépend de x directement et par l'intermédiaire de $y = \varphi(x)$.

La dérivée par rapport à x de cette constante doit être nulle; en appliquant la règle (4) nous obtenons:

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y)\, y' = 0,$$

d'où

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

L'expression, ainsi obtenue, pour y' peut receler aussi bien x que y, et si on veut obtenir l'expression de y' uniquement en fonction de la variable indépendante x, il faudra résoudre l'équation (5) par rapport à y.

II-5. Applications géométriques de la notion de dérivée

II-5-1. Différentielle d'un arc. On montrera en calcul intégral comment trouver la longueur d'un arc de courbe, on obtiendra l'expression de la différentielle de la longueur d'un arc et l'on démontrera que le rapport d'une corde à son arc tend vers l'unité, lorsque les deux extrémités de l'arc se rapprochent indéfiniment pour former un point.

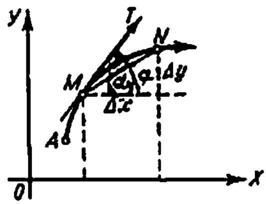

Fig. 73

Soit une courbe $y = f(x)$ donnée et nous allons chercher la longueur d'un arc de la courbe mesuré dans un certain sens à partir d'un point A donné de la courbe (fig. 73). Soit s la longueur de l'arc AM joignant le point A au point variable M. La grandeur s de même que l'ordonnée y est fonction de l'abscisse x du point M. Si le sens AM coïncide avec l'orientation choisie sur la courbe, on a $s > 0$, et dans le cas contraire $s < 0$. Soit $M(x, y)$ et $N(x + \Delta x, y + \Delta y)$ deux points de la courbe et soit Δs la différence de longueur des arcs AN et AM, c'est-à-dire l'accroissement de la longueur de l'arc lorsqu'on passe de M en N. La valeur absolue de Δs est la longueur de l'arc MN prise avec le signe (+). On voit sur le triangle rectangle

$$(\overline{MN})^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2,$$

d'où

$$\frac{(\overline{MN})^2}{\Delta x^2} = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$$

ou bien

$$\left(\frac{\overline{MN}^2}{\Delta s}\right)^2 \left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

La tangente $\overline{MT}$, si elle existe, est la position limite de la sécante $\overline{MN}$ lorsque N tend vers M le long de la courbe, c'est-à-dire lorsque $\Delta x \to \pm 0$.

En passant à la limite dans l'égalité précédente (on suppose l'existence de la tangente) et en tenant compte de ce que, d'après ce qui a déjà été dit, $\left(\frac{\overline{MN}}{\Delta s}\right)^2 \to 1$, nous avons:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

soit

$$\frac{ds}{dx} = \pm\sqrt{1+y'^2}. \tag{1}$$

Nous devons prendre le signe (+) si s croît avec x et le signe (—) si s décroît lorsque x croît. Pour préciser supposons que nous sommes dans le premier cas (représenté sur la fig. 73). Il résulte de (1) que

$$ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx \quad \text{ou, comme} \quad y' = \frac{dy}{dx},$$

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad ds^2 = dx^2 + dy^2. \tag{2}$$

Si le radical est considéré comme positif, on obtient la valeur arithmétique de ds. La formule (2) est, au fond, une autre expression de (1). Comme nous verrons par la suite, elle est très pratique. On étudiera plus en détail la longueur de l'arc au paragraphe [III-3-3].

Le paramètre naturel pour déterminer les positions du point M sur la courbe est la longueur s de l'arc AM. On peut prendre cette grandeur s pour variable indépendante et les coordonnées (x, y) de M seront des fonctions de s:

$$x = \varphi(s), \qquad y = \psi(s).$$

Nous parlerons plus en détail des courbes données sous forme paramétrique au paragraphe [II-5-5]. Nous allons expliciter la signification géométrique des dérivées de x et de y par rapport à s.

Supposons que le point N est disposé de telle façon que le sens de l'arc MN coïncide avec le sens pris sur la courbe, c'est-à-dire que $\Delta s > 0$. Lorsque N tend vers M, la direction de la sécante $\overline{MN}$ donne à la limite la direction déterminée de la tangente au point M. Cette direction de la tangente sera dite sens positif de la tangente. Elle dépend du sens positif de la courbe.

Soit α_1 l'angle formé par $\overline{MN}$ avec le sens positif de l'axe OX. L'accroissement Δx de l'abscisse x est la projection du segment $\overline{MN}$ sur l'axe OX, par suite:

$$\Delta x = \overline{MN}\cdot\cos\alpha_1 \qquad \left(\overline{MN} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right),$$

et dans cette égalité $\overline{MN}$ est considéré comme positif. En divisant les deux membres de cette égalité par la longueur de l'arc MN soit Δs, nous avons

$$\frac{\Delta x}{\Delta s}=\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta s}\cos\alpha_1.$$

Par hypothèse, $\Delta s>0$, c'est pourquoi lorsque N tend vers M, le rapport $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}/\Delta s$ tend vers $(+1)$ et l'angle α_1 tend vers l'angle α formé par le sens positif de la tangente $\overline{MT}$ avec le sens positif de l'axe OX. A la limite l'équation devient

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds}. \tag{3}$$

De même, en projetant $\overline{MN}$ sur l'axe OY, il vient

$$\sin\alpha=\frac{dy}{ds}. \tag{4}$$

II-5-2. Convexité, concavité, courbure. On a représenté sur les fig. 74 et 75 des cas de convexité et de concavité de courbes tournées du côté des ordonnées positives.

Une même courbe $y=f(x)$ peut, bien sûr, être formée de parties convexes comme de parties concaves (fig. 76). *Les points, qui sépa-*

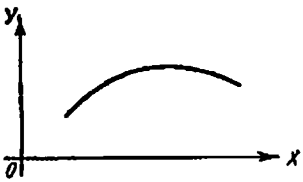

Fig. 74

Fig. 75

rent les parties convexes d'une courbe des parties concaves, sont des points d'inflexion.

Si l'on se déplace sur une courbe dans le sens des x croissant et si l'on considère les variations de l'angle α formé par la tangente et le sens positif de l'axe OX, on voit (fig. 76) que *sur les parties convexes cet angle décroît tandis que sur les parties concaves il croît.* $\operatorname{tg}\alpha$, c'est-à-dire $f'(x)$, présentera la même variation car lorsque α croît (décroît), $\operatorname{tg}\alpha$ lui aussi croît (décroît). Mais les intervalles où $f'(x)$ décroît sont ceux où la dérivée de cette fonction est négative, c'est-à-dire où $f''(x)<0$ et les intervalles où $f'(x)$ croît sont ceux où $f''(x)>0$. Nous avons ainsi le théorème:

La courbe présente une convexité vers les ordonnées positives dans les intervalles où $f''(x)<0$ et une concavité dans les intervalles où $f''(x)>0$. Les points d'inflexion sont ceux où $f''(x)$ change de signe.

A partir de ce théorème, en raisonnant comme nous l'avons déjà fait [II-3-2], nous obtenons la règle pour trouver les points d'inflexion. *Pour trouver les points d'inflexion d'une courbe, il faut trouver les valeurs de x pour lesquelles $f''(x)$ s'annule ou n'existe pas et étudier les changements de signe de $f''(x)$ lorsque x passe par ces valeurs, en utilisant la table suivante:*

$f''(x)$	point d'inflexion		pas de point d'inflexion	
	+ −	− +	− −	+ +
	concave convexe	convexe concave	convexe	concave

La représentation la plus naturelle de la déformation d'une courbe s'obtient en examinant les variations de l'angle α compris entre la tangente et l'axe OX lorsqu'on se déplace le long de la

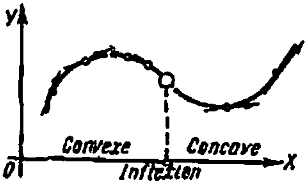

Fig. 76

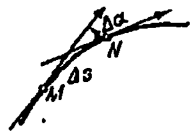

Fig. 77

courbe. De deux arcs de courbe de même longueur Δs la plus incurvée sera celle dont la tangente tournera le plus, c'est-à-dire celle pour laquelle l'accroissement $\Delta\alpha$ sera le plus grand. Ces considérations nous conduisent à la notion de courbure moyenne de Δs et de courbure en un point donné: *la courbure moyenne de l'arc Δs est la valeur absolue du rapport de l'angle $\Delta\alpha$ compris entre les tangentes aux extrémités de l'arc à la longueur Δs de l'arc. La limite de ce rapport lorsque Δs tend vers zéro est la courbure de la courbe au point considéré* (fig. 77).

De sorte que la courbure C s'écrit:

$$C = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|.$$

Mais $\operatorname{tg} \alpha$ est la dérivée première y', donc

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} y',$$

d'où en différentiant par rapport à x la fonction de fonction arc tg y' :

$$d\alpha = \frac{y''}{1+y'^2}\,dx.$$

Mais nous venons de démontrer que

$$ds = \pm\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

En divisant $d\alpha$ par ds, on obtient l'expression définitive de la courbure :

$$C = \pm\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}. \tag{5}$$

Sur les parties convexes il faut prendre le signe (—) tandis que sur les parties concaves il faut prendre le signe (+) ; ainsi C sera toujours positif.

Aux points de la courbe où soit y' soit y'' n'existent pas, il n'y a pas non plus de courbure. Au voisinage des points où y'' s'annule la courbure devient nulle et la courbe tend vers une droite. Ceci se produira par exemple au voisinage des points d'inflexion.

Supposons que les coordonnées x, y des points de la courbe s'expriment au moyen de la longueur de l'arc s. Dans ce cas, nous avons vu que :

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \sin\alpha = \frac{dy}{ds}.$$

L'angle α sera aussi une fonction de s, et en dérivant par rapport à s les égalités écrites, nous avons :

$$-\sin\alpha\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \cos\alpha\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d^2y}{ds^2}.$$

En élevant au carré et en additionnant ces deux égalités, il vient :

$$\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2,$$

ou

$$C^2 = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2,$$

d'où

$$C = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}.$$

L'inverse de la courbure de C : $\frac{1}{C}$ s'appelle *le rayon de courbure*. D'où pour le rayon de courbure R on aura, en vertu de (5), l'expression suivante :

$$R=\left|\frac{ds}{d\alpha}\right|=\pm\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}, \tag{6}$$

soit

$$R=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}},$$

et on prend la valeur positive de la racine.

Dans le cas d'une droite y est un polynôme du premier degré en x et, par conséquent, y'' est identiquement nulle, c'est-à-dire

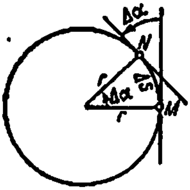

Fig. 78

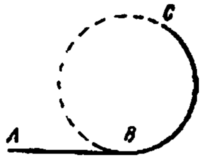

Fig. 79

que tout le long de la droite la courbure est nulle et le rayon de courbure est infini.

Dans le cas d'un cercle de rayon r il est évident que (fig. 78) :

$$\Delta s=r\,\Delta\alpha \quad \text{et} \quad R=\lim\frac{\Delta s}{\Delta\alpha}=r,$$

c'est-à-dire que le rayon de courbure est constant tout le long du cercle. Par la suite nous verrons que seul le cercle présente cette propriété.

Notons que les variations du rayon de courbure ne sont pas aussi sensibles que celles de la tangente. Examinons une ligne formée d'un segment de droite AB et d'un arc de cercle BC tangent au segment au point B (fig. 79). Sur AB le rayon de courbure est infini, sur BC il est égal au rayon r du cercle, et au point B il présente une discontinuité, alors que la direction de la tangente varie de façon continue. On explique ainsi les secousses des wagons dans les virages. Supposons que la vitesse v des wagons reste constante. On sait de la mécanique que la force sera dirigée suivant la normale à la trajectoire et que son intensité sera $m\frac{v^2}{R}$, où m est la masse du corps en mouvement et R le rayon de courbure de la trajectoire. On voit alors qu'aux points où il y a discontinuité du rayon de courbure il y aura discontinuité de la force, d'où apparition de secousses.

II-5-3. Asymptotes. Passons maintenant à l'étude *des branches infinies* des courbes où l'une des coordonnées x ou y ou les deux ensemble croissent indéfiniment. L'hyperbole et la parabole nous donnent des exemples de courbes à branches infinies.

L'asymptote d'une courbe à branche infinie est une droite telle que la distance des points de la courbe à la droite tend vers zéro lorsqu'on s'éloigne indéfiniment sur la branche infinie.

Montrons d'abord comment trouver les asymptotes d'une courbe qui sont parallèles à l'axe OY. L'équation d'une telle asymptote doit être de la forme

$$x = c,$$

où c est une constante; dans ce cas en se déplaçant sur la branche infinie x doit tendre vers c, et y vers l'infini (fig. 80). Nous obtenons ainsi la règle suivante:

Toutes les asymptotes de la courbe

$$y = f(x)$$

parallèles à l'axe OY peuvent être obtenues en trouvant les valeurs $x = c$ telles que lorsqu'on s'en approche, $f(x)$ tende vers l'infini.

Pour déterminer comment la courbe est disposée par rapport à l'asymptote il faut déterminer le signe de $f(x)$ lorsque x tend vers c à droite et à gauche.

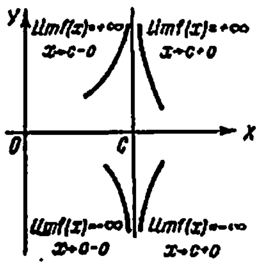

Fig. 80

Passons maintenant à la recherche d'asymptotes non parallèles à l'axe OY. Dans ce cas l'équation de l'asymptote doit être de la forme

$$\eta = a\xi + b,$$

où ξ et η sont les coordonnées de l'asymptote tandis que x, y sont celles du point courant de la courbe.

Soit ω l'angle compris entre l'asymptote et le sens positif de l'axe OX. Soit $\overline{MK}$ la distance du point de la courbe à l'asymptote et $\overline{MK_1}$ la différence des ordonnées de la courbe et de l'asymptote pour une même valeur de l'abscisse x (fig. 81). On voit sur le triangle rectangle que

$$|\overline{MK_1}| = \frac{|\overline{MK}|}{|\cos\omega|} \left(\omega \neq \frac{\pi}{2}\right),$$

donc, la condition

$$\lim \overline{MK} = 0$$

peut être remplacée par

$$\lim \overline{MK_1} = 0. \tag{7}$$

Dans le cas où l'asymptote n'est pas parallèle à l'axe OY, en se déplaçant sur la branche infinie correspondante, x tend vers l'infini.

En tenant compte de ce que $\overline{MK_1}$ est la différence des ordonnées de la courbe et de l'asymptote pour une même abscisse, on peut mettre la condition (7) sous la forme:

$$\lim_{x\to\infty} [f(x)-ax-b]=0, \tag{8}$$

d'où les valeurs de a et de b.

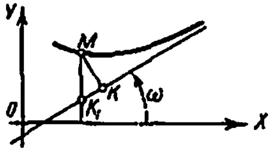

Fig. 81

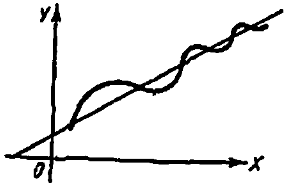

Fig. 82

La condition (8) peut être mise sous la forme:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right]=0.$$

Mais le premier facteur x tend vers l'infini, c'est pourquoi l'expression entre crochets doit tendre vers zéro:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-a=0,$$

c'est-à-dire

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Ayant trouvé a, on peut obtenir b à partir de la condition principale (8) qui peut être mise sous la forme:

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax].$$

Ainsi, *pour que la courbe*

$$y=f(x)$$

ait une asymptote non parallèle à l'axe OY, il faut et il suffit que lorsque l'on se déplace sur la branche infinie x croisse indéfiniment et qu'existent les limites:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax],$$

et alors l'équation de l'asymptote sera:

$$\eta=a\xi+b.$$

Pour étudier la position de la courbe par rapport à l'asymptote, il faut étudier séparément le cas où x tend vers $(+\infty)$, et celui où il tend vers $(-\infty)$, et dans chaque cas il faut déterminer le signe de la différence

$$f(x)-(ax+b).$$

Si elle est positive, la courbe est au-dessus de l'asymptote; si elle est négative, la courbe est au-dessous de l'asymptote. Si cette différence ne garde pas un signe constant lorsque x croît indéfiniment, la courbe oscille autour de l'asymptote (fig. 82).

II-5-4. Construction de courbes. Indiquons maintenant la manière de procéder pour construire la courbe représentative de la fonction

$$y=f(x),$$

de façon plus complète que l'exposé que nous avons déjà fait [II-3-3].

Il faut:

a) déterminer l'intervalle de variation de la variable indépendante x;

b) déterminer les points où la courbe coupe les axes de coordonnées;

c) déterminer les sommets de la courbe;

d) déterminer la convexité, la concavité et les points d'inflexion de la courbe;

e) déterminer les asymptotes à la courbe;

f) déterminer éventuellement la symétrie de la courbe par rapport aux axes de coordonnées.

Pour obtenir un tracé plus précis de la courbe, il est utile, en plus, de calculer les coordonnées d'un certain nombre de points de la courbe, ce qui est facile à réaliser à partir de l'équation.

1. Traçons la courbe représentative de

$$y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}.$$

a) x varie dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

b) Si $x=0$, on a $y=-\frac{9}{4}$; si $y=0$, on a $x=3$, c'est-à-dire que la courbe coupe les axes de coordonnées aux points $\left(0, -\frac{9}{4}\right)$ et $(3, 0)$.

c) Calculons les deux premières dérivées

$$f'(x)=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}, \quad f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}.$$

En appliquant la règle habituelle, nous aurons les sommets: un minimum $(3, 0)$ et un maximum $(-1, -2)$.

d) On voit à partir de l'expression de la dérivée seconde qu'elle est positive pour $x > 1$ et négative pour $x < 1$, c'est-à-dire que dans l'intervalle $(1, \infty)$ la courbe est concave et dans l'intervalle $(-\infty, 1)$ convexe. Il n'y a pas de point d'inflexion car $f''(x)$ ne change de signe que pour $x = 1$ et cette valeur correspond à une asymptote parallèle à l'axe OY, ainsi que nous allons le voir.

e) Pour $x = 1$ y devient infini et la courbe a pour asymptote

$$x = 1.$$

Cherchons maintenant les asymptotes qui ne sont pas parallèles à l'axe OY:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-3)^2}{4(x-1)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1-\frac{3}{x}\right)^2}{4\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{4}.$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{(x-3)^2}{4(x-1)} - \frac{x}{4}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x+9}{4(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5+\frac{9}{x}}{4\left(1-\frac{1}{x}\right)} = -\frac{5}{4},$$

c'est-à-dire que l'asymptote sera:

$$y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}.$$

Nous laisserons au lecteur le soin de chercher la disposition de la courbe par rapport à l'asymptote.

f) Il n'y a pas de symétrie.

En reportant tous les résultats obtenus on aura la courbe (fig. 83)

2. Etudions les courbes:

$$y = c(a^2 - x^2)(5a^2 - x^2), \quad y_1 = c(a^2 - x^2)^2, \quad (c < 0),$$

qui donnent la forme d'une poutre pesante déformée sous l'action de son poids La première équation correspond au cas où les extrémités peuvent tourner librement, tandis que la seconde correspond au cas où elles sont fixées. La longueur de la poutre est $2a$, l'origine des coordonnées est au milieu et l'axe OY est la verticale dirigée vers le haut.

a) Il est évident que seul l'intervalle de variation de x $(-a, +a)$ nous intéresse.

b) En supposant $x = 0$, on a $y = 5ca^4$ et $y_1 = ca^4$, c'est-à-dire que dans le premier cas la flèche de la poutre est 5 fois plus grande que dans le second. Pour $x = \pm a$, $y = y_1 = 0$, ce qui correspond aux extrémités.

c) Calculons les dérivées

$$y' = -4cx(3a^2 - x^2), \quad y'' = -12c(a^2 - x^2),$$

$$y_1' = -4cx(a^2 - x^2), \quad y_1'' = -4c(a^2 - 3x^2).$$

Dans les deux cas dans l'intervalle $(-a, +a)$ il y aura un minimum pour $x = 0$ qui correspond au fléchissement du milieu de la poutre que nous avons mentionné plus haut.

d) Dans le premier cas, $y'' > 0$ dans l'intervalle $(-a, +a)$, c'est-à-dire que la poutre présente une concavité orientée vers le haut. Dans le deuxième cas y_1'' s'annule pour $x = \pm a/\sqrt{3}$ et change de signe, c'est-à-dire que les points correspondants sont les points d'inflexion de la poutre.

e) Il n'y a pas de branches infinies.

f) Dans les deux cas l'équation ne change pas si on remplace x par $(-x)$, c'est-à-dire que dans les deux cas la courbe est symétrique par rapport à l'axe OY.

Sur la fig. 84 on a représenté les deux courbes. Pour simplifier nous avons pris $a = 1$, $c = -1$; en fait, la longueur de la poutre est notablement plus

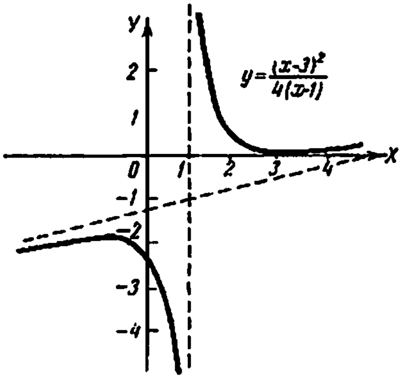

Fig. 83

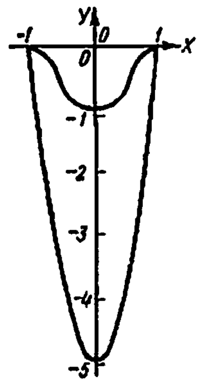

Fig. 84

grande que sa flèche, c'est-à-dire que a est beaucoup plus grand que c et la forme de la courbe sera quelque peu différente (laquelle?).

Nous proposons au lecteur de chercher les points d'inflexion de la courbe

$$y = e^{-x^2}$$

et de comparer avec la fig. 60 où on a représenté le graphique de cette fonction.

II-5-5. Définition paramétrique d'une courbe. En recherchant l'équation du lieu géométrique des points ayant une propriété donnée, il n'est pas toujours commode, ou même possible, d'exprimer cette propriété directement, sous forme d'une relation liant les coordonnées x, y du point courant. Dans de tels cas, il est pratique d'introduire une troisième variable, auxiliaire, au moyen de laquelle on peut exprimer séparément l'abscisse x et l'ordonnée y de tout point du lieu géométrique.

L'ensemble des deux équations ainsi obtenue

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{9}$$

peut servir pour construire et étudier la courbe, car pour chaque valeur de t il définit la position du point correspondant de la courbe.

Un tel moyen de se donner une courbe est dit *paramétrique*, et la variable auxiliaire t le *paramètre*. Pour obtenir l'équation de la courbe sous la forme habituelle (implicite ou explicite) d'une relation entre x et y, il faut *éliminer* le paramètre t des équations (9), ce que l'on peut faire, par exemple, en résolvant l'une des équations par rapport à t et en portant la valeur ainsi obtenue dans l'autre.

On rencontre souvent les courbes données en coordonnées paramétriques en mécanique, lorsqu'on étudie la trajectoire d'un point en mouvement et dont la position dépend du temps t, de sorte que les coordonnées sont des fonctions de t. En déterminant ces fonctions, nous avons la trajectoire sous forme paramétrique.

Ainsi, par exemple, l'équation paramétrique d'un cercle de rayon r, dont le centre est en (x_0, y_0), sera

$$x = x_0 + r\cos t, \quad y = y_0 + r\sin t, \tag{10}$$

que l'on peut mettre sous la forme:

$$x - x_0 = r\cos t, \quad y - y_0 = r\sin t.$$

En élevant au carré et en additionnant les deux équations membre à membre, nous éliminons le paramètre t et obtenons l'équation habituelle du cercle:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

De même, il est évident que

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t \tag{11}$$

est l'équation paramétrique de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Supposons que y, en tant que fonction de x, est définie par les formules paramétriques (9).

L'accroissement Δt du paramètre entraîne les accroissements correspondants Δx et Δy et, en divisant le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ par Δt, on obtient l'expression suivante pour la dérivée de y par rapport à x:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

soit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{12}$$

Formons la dérivée seconde de y par rapport à x:

$$y'' = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}.$$

En appliquant les règles de différentiation d'un rapport [II-1-6], il vient:

$$y'' = \frac{d^2y\,dx - d^2x\,dy}{(dx)^3}. \tag{13}$$

Mais d'après (9):

$$dx = \varphi'(t)\,dt, \quad d^2x = \varphi''(t)\,dt^2,$$
$$dy = \psi'(t)\,dt, \quad d^2y = \psi''(t)\,dt^2.$$

En portant ces valeurs dans (13) après simplification par dt^3, il vient

$$y'' = \frac{\psi''(t)\,\varphi'(t) - \varphi''(t)\,\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}. \tag{14}$$

Remarquons que l'expression (13) de y'' diffère de celle donnée par (3) [II-2-3] (pour $n=2$):

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \tag{15}$$

car cette dernière est obtenue en supposant que x est une variable indépendante, tandis que dans le cas de la représentation paramétrique (9) c'est t qui est la variable indépendante. Si x est une variable indépendante, dx est considéré comme constant [II-1-6], c'est-à-dire ne dépendant pas de x, et $d^2x = d(dx) = 0$ est la différentielle d'une constante. Alors la formule (13) se transforme en (15).

Pouvant déterminer y' et y'', nous pouvons trouver la direction de la tangente à la courbe, la convexité ou la concavité, etc.

Comme exemple prenons la courbe représentative de l'équation

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad (a > 0), \tag{16}$$

qui est appelée « folium de Descartes ».

Introduisons le paramètre variable t tel que

$$y = tx, \tag{17}$$

et examinons les points d'intersection de la droite (17) dont le coefficient angulaire t est variable avec la courbe (16). En remplaçant y par tx dans (16), après simplification par x^2, il vient:

$$x = \frac{3at}{1+t^3},$$

et (17) nous donne alors:

$$y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

On a ainsi l'équation paramétrique du folium de Descartes. Calculons les dérivées de x et y par rapport à t:

$$\left.\begin{aligned} x'_t &= 3a\,\frac{(1+t^3)-3t^2t}{(1+t^3)^2}=\frac{6a\left(\frac{1}{2}-t^3\right)}{(1+t^3)^2},\\ y'_t &= 3a\,\frac{2t\,(1+t^3)-3t^2t^2}{(1+t^3)^2}=\frac{3at\,(2-t^3)}{(1+t^3)^2}. \end{aligned}\right| \tag{18}$$

Pour étudier les variations de x et de y divisons l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ dans lequel t varie en parties telles que x'_t et y'_t gardent un signe constant dans chaque partie et ne deviennent pas infinis. Pour cela il faut considérer les valeurs:

$$t=-1,\ 0,\ \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\ \text{ et }\ \sqrt[3]{2},$$

pour lesquelles ces dérivées s'annulent ou deviennent infinies. Les signes de x'_t et y'_t dans ces intervalles s'obtiennent facilement à l'aide des formules (18); en calculant les valeurs de x et y aux bornes des intervalles nous obtenons la table ci-dessous:

Intervalle t	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty, -1)$	+	−	croît de 0 à $+\infty$	décroît de 0 à $-\infty$
$(-1, 0)$	+	−	croît de $-\infty$ à 0	décroît de $+\infty$ à 0
$\left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	+	+	croît de 0 à $\sqrt[3]{4a}$	croît de 0 à $\sqrt[3]{2a}$
$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2}\right)$	−	+	décroît de $\sqrt[3]{4a}$ à $\sqrt[3]{2a}$	croît de $\sqrt[3]{2a}$ à $\sqrt[3]{4a}$
$(\sqrt[3]{2}, +\infty)$	−	−	décroît de $\sqrt[3]{2a}$ à 0	décroît de $\sqrt[3]{4a}$ à 0

D'où la courbe représentée sur la fig. 85.

Pour calculer le coefficient angulaire de la tangente nous avons la formule:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{t\,(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2}-t^3\right)}. \tag{19}$$

Notons que x et y s'annulent pour $t=0$ et $t=\infty$ et, comme on voit d'après la représentation, la courbe se coupe elle-même à l'origine des coordonnées.

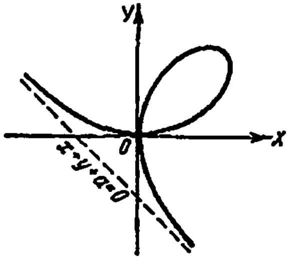

Fig. 85

La formule (19) nous donne

$$y'_x=0 \quad \text{pour} \quad t=0,$$

$$y'_x=\lim_{t\to\infty}\frac{t\,(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2}-t^3\right)}=\lim_{t\to\infty}\frac{t\left(\frac{2}{t^3}-1\right)}{2\left(\frac{1}{2t^3}-1\right)}=$$

$$=\infty \quad \text{pour} \quad t=\infty,$$

c'est-à-dire que les deux branches qui se coupent mutuellement à l'origine sont tangentes l'une à l'axe OX, l'autre à OY.

Lorsque t tend vers (-1), x et y tendent vers l'infini et la courbe a une branche infinie. Déterminons l'asymptote: le coefficient angulaire de l'asymptote est égal à $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{t\to-1}\frac{3at^2\,(1+t^3)}{3at\,(1+t^3)}=-1,$

$$b=\lim_{t\to-1}(y+x)=\lim_{t\to-1}\frac{3at^2+3at}{1+t^3}=\lim_{t\to-1}\frac{6at+3a}{3t^2}=-a,$$

c'est-à-dire que l'équation de l'asymptote sera:

$$y=-x-a \quad \text{ou} \quad x+y+a=0.$$

II-5-6. Equation de Van der Waals. Si on considère qu'un gaz vérifie exactement les lois de Boyle-Mariotte et de Gay-Lussac, on obtient la relation suivante entre la pression du gaz p, son volume v et sa température absolue T:

$$pv=RT,$$

où R est une constante, égale pour tous les gaz si on étudie une « molécule-gramme » du gaz, c'est-à-dire un poids de gaz égal à son poids moléculaire.

Les gaz réels n'obéissent pas exactement à cette relation, et Van der Waals a donné une autre formule qui décrit de façon plus précise le phénomène. Cette formule est de la forme:

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=RT,$$

où a et b sont des constantes positives qui dépendent de la nature du gaz. En résolvant l'équation par rapport à p, il vient:

$$p=\frac{RT}{v-b}-\frac{a}{v^2}. \tag{20}$$

Etudions la relation entre p et v en considérant que T est constant, c'est-à-dire le cas des variations isothermiques du gaz. Calculons la dérivée première de p par rapport à v:

$$\frac{dp}{dv}=-\frac{RT}{(v-b)^2}+\frac{2a}{v^3}=\frac{1}{(v-b)^2}\left[\frac{2a\,(v-b)^2}{v^3}-RT\right]. \tag{21}$$

Nous n'examinerons que les valeurs de v supérieures à b. En ce qui concerne le sens physique de cette condition et les courbes que nous obtiendrons, le lecteur devra se reporter à un cours de physique. En annulant cette dérivée, il vient

$$\frac{2a(v-b)^2}{v^3}-RT=0. \tag{22}$$

Etudions les variations du premier membre de cette équation lorsque v varie de b à $(+\infty)$, pour cela calculons sa dérivée par rapport à v, en tenant compte de ce que, par hypothèse, RT est constant:

$$\left[\frac{2a(v-b)^2}{v^3}\right]'=2a\frac{2(v-b)v^3-3v^2(v-b)^2}{v^6}=-\frac{2a(v-b)(v-3b)}{v^4},$$

d'où on voit que cette dérivée est positive si $b<v<3b$ et négative pour $v>3b$, c'est-à-dire que le premier membre de (22) croît dans l'intervalle $(b, 3b)$ et décroît lorsque v continue à croître, c'est pourquoi, pour $v=3b$, il admet un maximum égal à

$$\frac{8a}{27b}-RT.$$

Par substitution directe on voit que pour $v=b$ et $v=+\infty$ le premier membre de (22) devient $(-RT)$ et, par conséquent, il est négatif. Si le maximum est aussi négatif, c'est-à-dire si

$$RT>\frac{8a}{27b},$$

le premier membre de (22) est toujours négatif, et dans ce cas on voit sur (21) que $\frac{dp}{dv}$ est toujours négatif, c'est-à-dire que p décroît lorsque v croît.

Par contre, si

$$RT<\frac{8a}{27b},$$

le premier membre de (22) admet un maximum positif pour $v=3b$, et l'équation (22) a une racine v_1 dans l'intervalle $(b, 3b)$, et l'autre racine v_2 dans l'intervalle $(3b, +\infty)$. Lorsque v passe par la valeur v_1, le premier membre de (22), et par suite $\frac{dp}{dv}$, passe des valeurs négatives aux valeurs positives, c'est-à-dire qu'à cette valeur de v correspond un minimum de p. On voit de même qu'à la valeur de $v=v_2$ correspond un maximum de p.

Si enfin

$$RT=\frac{8a}{27b}, \tag{23}$$

le maximum du premier membre de l'équation (22) est nul et les valeurs de $v=v_1$ et de $v=v_2$ coïncident et ont pour valeur commune $v=3b$. Lorsqu'on passe par cette valeur, le premier membre de (22) et $\frac{dp}{dv}$ restent négatifs, c'est-à-dire que p décroît continûment avec la croissance de v, et au point $v=3b$ correspond le point d'inflexion C de la courbe. Au point d'inflexion de coordonnées $v = v_c$ et $p = p_c$ correspond la température T_c déterminée à partir de la condition (23). Ces valeurs sont dites critiques (respectivement: volume critique, pression critique et température critique); sur la fig. 86 on a représenté la forme des courbes correspondant aux trois cas considérés.

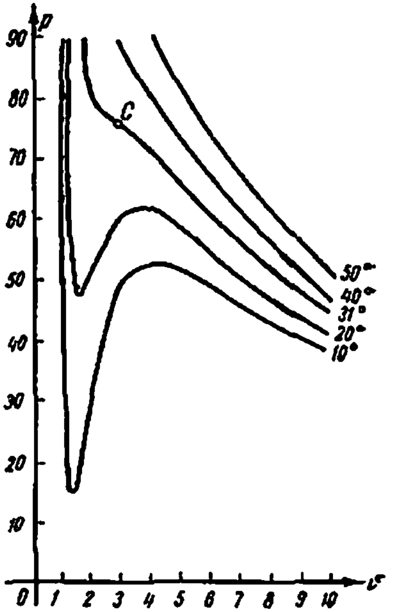

Fig. 86

II-5-7. Points singuliers des courbes. Considérons l'équation d'une courbe, donnée sous forme implicite:

$$F(x, y) = 0. \qquad (24)$$

Le coefficient angulaire de la tangente à cette courbe est défini par la formule [II-4-3]:

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \qquad (25)$$

où (x, y) sont les coordonnées du point de tangence.

Examinons le cas particulier où $F(x, y)$ est un polynôme entier en x et y. Dans ce cas la courbe (24) est dite algébrique. Les dérivées partielles $F'_x(x, y)$ et $F'_y(x, y)$ auront des valeurs définies, si on remplace x et y par les coordonnées d'un point quelconque M de la courbe (24), et l'équation (25) nous définit le coefficient angulaire de la tangente dans tous les cas sauf lorsque les dérivées partielles $F'_x(x, y)$ et $F'_y(x, y)$ s'annulent au point de coordonnées (x, y). Un tel point M est appelé point singulier de la courbe (24).

Un point singulier de la courbe algébrique (24) est un point qui vérifie l'équation (24) et les équations

$$F'_x(x, y) = 0, \quad F'_y(x, y) = 0. \qquad (26)$$

Pour l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

la condition (26) donne $x = y = 0$ mais le point $(0, 0)$ n'est pas sur l'ellipse, c'est pourquoi on dira que l'ellipse n'a pas de point singulier. Il en est de même de l'hyperbole et de la parabole.

Dans le cas du folium de Descartes:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

les conditions (26) deviennent:

$$3x^2 - 3ay = 0 \quad \text{et} \quad 3y^2 - 3ax = 0,$$

et on voit que le point $(0, 0)$ est un point singulier de la courbe. En étudiant le folium de Descartes nous avons montré que la courbe se coupe elle-même à l'origine des coordonnées et que les deux branches de la courbe qui se coupent en ce point y ont des tangentes distinctes: pour l'une des branches la tangente est OX tandis que pour l'autre c'est OY.

On appelle point nodal d'une courbe un point singulier où les différentes branches de la courbe qui se coupent ont des tangentes distinctes.

De la sorte l'origine des coordonnées est un point nodal pour le folium de Descartes.

Montrons sur des exemples quelques types de points singuliers des courbes algébriques.

1. Examinons la courbe

$$y^2 - ax^3 = 0 \quad (a > 0),$$

qui porte le nom de *parabole semi-cubique*.

Il est facile de voir que les coordonnées (0, 0) annulent le premier membre de cette relation et ses dérivées partielles par rapport à x et y. Il en résulte que l'origine des coordonnées est un point singulier pour cette courbe. Pour étudier la forme de la courbe au voisinage de ce point singulier construisons cette courbe. Son équation sous forme explicite sera:

$$y = \pm \sqrt{ax^3}.$$

Pour construire la courbe il suffit d'étudier la partie qui correspond au signe (+) car la partie correspondant au signe (—) sera symétrique à la première partie par rapport à l'axe OX. Il résulte de l'équation que x ne peut être négatif et que lorsque x croît de 0 à $(+\infty)$, y croît aussi de 0 à $(+\infty)$.

Déterminons les deux premières dérivées:

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{ax}, \quad y'' = \frac{3\sqrt{a}}{4\sqrt{x}}.$$

Pour $x = 0$ on a aussi $y' = 0$; si on tient compte aussi de ce que x ne peut tendre vers zéro que par valeurs positives, on peut dire que l'axe OX sera tangent à la courbe à droite à l'origine de coordonnées. De plus on voit que pour la partie étudiée de la courbe y'' garde un signe constant (+) dans l'intervalle $(0, +\infty)$, c'est-à-dire que la concavité de la partie de la courbe étudiée est tournée vers les ordonnées positives.

Sur la fig. 87 on a représenté la courbe étudiée (pour $a = 1$). *A l'origine on a deux branches de courbe; elles ont une même tangente au point de tangence et sont situées de part et d'autre de leur tangente commune au voisinage du point singulier* (dans le cas examiné, partout). Un tel point singulier s'appelle *point de rebroussement de première espèce.*

2. Examinons la courbe:

$$(y - x^2)^2 - x^5 = 0.$$

Il est facile de vérifier que l'origine des coordonnées est un point singulier de la courbe. L'équation de la courbe sous forme explicite sera:

$$y = x^2 \pm \sqrt{x^5}.$$

On voit que x peut varier de 0 à $(+\infty)$. Calculons les deux premières dérivées:

$$y' = 2x \pm \frac{5}{2}\sqrt{x^3}, \quad y'' = 2 \pm \frac{15}{4}\sqrt{x},$$

et étudions séparément les deux branches correspondant respectivement aux signes (+) et (—).

Notons tout d'abord que dans les deux cas pour $x = 0$ et $y' = 0$, comme dans l'exemple précédent, l'axe OX sera tangent aux deux branches de la courbe à droite.

En étudiant les deux branches de la courbe de la manière habituelle, on obtient les résultats suivants: sur la première branche y croît de 0 à $(+\infty)$ lorsque x croît de 0 à $(+\infty)$ et la courbe est concave; la deuxième branche a un sommet (maximum) pour $x = \frac{16}{25}$, un point d'inflexion pour $x = \frac{64}{225}$ et la courbe coupe l'axe OX pour $x = 1$.

Ceci étant, on peut tracer la courbe représentée sur la fig. 88.

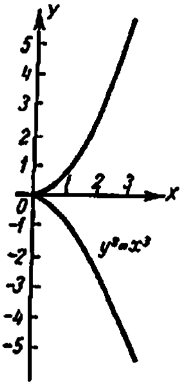

Fig. 87

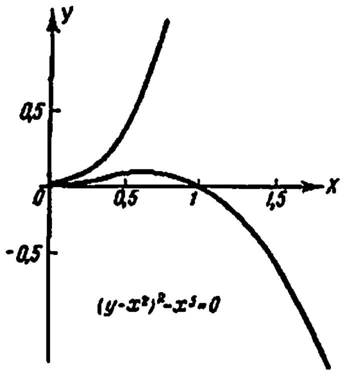

Fig. 88

A l'origine des coordonnées se rencontrent sans se continuer deux branches de la courbe, elles ont en ce point une tangente commune et sont situées du même côté de la tangente au voisinage du point singulier. On appelle un tel point *un point de rebroussement de deuxième espèce.*

3. Etudions la courbe

$$y^2 - x^4 + x^6 = 0.$$

L'origine est un point singulier de la courbe. Sous forme explicite l'équation de la courbe sera:

$$y = \pm x^2 \sqrt{1 - x^2}.$$

L'équation sous forme implicite ne contient que des puissances paires de x et y, c'est pourquoi les axes de coordonnées seront des axes de symétrie de la courbe et il suffit d'étudier la partie de la courbe correspondant aux valeurs positives de x et de y. Il résulte de l'équation de la courbe sous forme explicite que x peut varier de (-1) à $(+1)$. Bornons-nous à calculer la dérivée première:

$$y' = \frac{x(2 - 3x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Pour $x = 0$ on a $y = y' = 0$, c'est-à-dire qu'à l'origine la tangente coïncide avec l'axe OX, et pour $x = 1$ on a $y = 0$ et $y' = \infty$, c'est-à-dire qu'au point $(1, 0)$ la tangente est parallèle à l'axe OY. Avec les méthodes habituell s on trouvera que la courbe a un sommet pour $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$. En tenant compte de ce qui a déjà été dit et en particulier de la symétrie de la courbe, on aura la courbe représentée sur la fig. 89. A l'origine *les deux branches de la courbe* correspondant

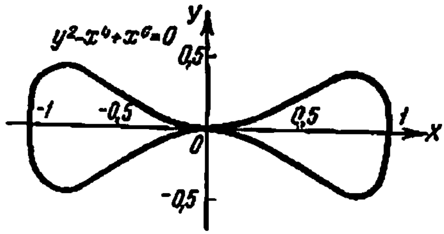

Fig. 89

aux signes (+) et (—) devant le radical *sont tangentes l'une à l'autre.* Un tel point singulier s'appelle *point de tangence.*

4. Examinons la courbe

$$y^2-x^2(x-1)=0.$$

L'origine est un point singulier. L'équation explicite de la courbe sera

$$y=\pm\sqrt{x^2(x-1)}.$$

En remarquant que le terme sous le radical ne peut pas être négatif, on en déduit que soit $x=0$, soit $x\geqslant 1$. Pour $x=0$ on a $y=0$. Examinons la branche de

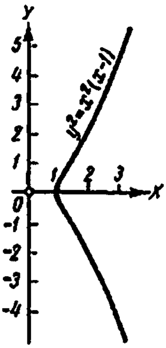

Fig. 90

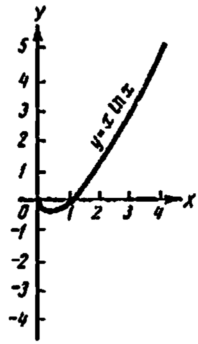

Fig. 91

la courbe qui correspond au signe (+). Lorsque x croît de 1 à $(+\infty)$ y croît de 0 à $(+\infty)$. On voit d'après l'expression de la dérivée première

$$y'=\frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}$$

que pour $x=1$, y' devient infini, c'est-à-dire qu'au point (1, 0) la tangente est parallèle à l'axe OY. La deuxième branche de la courbe correspondant au signe (—) sera symétrique de la branche étudiée par rapport à l'axe OX. On obtient ainsi la courbe représentée sur la fig. 90. Dans le cas considéré les coordonnées de l'origine O (0, 0) vérifient l'équation de la courbe, *mais dans son voisinage, il n'y a pas d'autres points de la courbe. Dans ce cas le point singulier est un point isolé.*

Avec les types de points singuliers que nous venons d'examiner nous avons épuisé tous les cas possibles de points singuliers de courbes algébriques, mais il peut arriver qu'en un certain point d'une courbe algébrique coïncident plusieurs types de points singuliers, de même type ou de types différents.

Les courbes non algébriques sont dites *transcendantes.*

Nous proposons au lecteur de montrer qu'à l'équation

$$y = x \ln x$$

correspond la courbe représentée sur la fig. 91. L'origine des coordonnées est *un point d'arrêt* de la courbe.

II-5-8. Eléments d'une courbe. Donnons les principales formules liées à la notion de tangente et de courbure d'une courbe, et introduisons quelques notions nouvelles.

Si l'équation de la courbe est de la forme

$$y = f(x), \tag{27}$$

le coefficient angulaire de la tangente est la dérivée $f'(x)$ de y par rapport à x et l'équation de la tangente peut être mise sous la forme:

$$Y - y = y'(X - x) \quad (y' = f'(x)), \tag{28}$$

où (x, y) sont les coordonnées du point de tangence, tandis que (X, Y) sont les coordonnées du point courant de la tangente. *La normale à la courbe au point (x, y) de la courbe est une droite passant par ce point et perpendiculaire à la tangente en ce point.* On montre en géométrie analytique que les coefficients angulaires de droites perpendiculaires sont inverses en valeur et de signes opposés, c'est-à-dire que le coefficient angulaire de la normale sera $\left(-\frac{1}{y'}\right)$, et l'équation de la normale peut s'écrire

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

ou

$$(X - x) + y'(Y - y) = 0. \tag{29}$$

Soit M un point quelconque de la courbe, T et N les points d'intersection de la tangente et de la normale à la courbe au point M avec l'axe OX. Soit Q le pied de la perpendiculaire menée du point M sur l'axe OX (fig. 92). *Les segments QT et QN portés par l'axe OX sont appelés la sous-tangente et la sous-normale à la courbe au point M.* Les nombres déterminés qui correspondent à ces segments sont positifs ou négatifs suivant l'orientation des segments sur l'axe OX. Les longueurs des segments MT et MN s'appellent *la longueur de la tangente et la longueur de la normale à la courbe au point M*. On les considérera ici toujours comme positives. L'abscisse du point Q de l'axe OX est égale, évidemment, à l'abscisse x de M. Les points T et N sont les points d'intersection de la tangente et de la normale avec l'axe OX et pour déterminer les abscisses de ces points il faut faire $Y = 0$ dans les équations de la tangente et de la normale et résoudre les équations ainsi obtenues par rapport à X. Nous obtiendrons ainsi pour l'abscisse de T: $\left(x - \frac{y}{y'}\right)$ et pour celle de N: $(x + yy')$. Il est maintenant facile de déterminer la sous-tangente et la sous-normale :

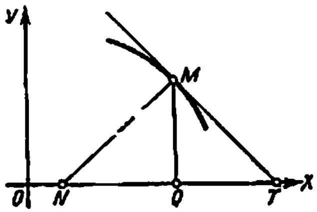

Fig. 92

$$\left.\begin{aligned} \overline{QT} &= \overline{OT} - \overline{OQ} = x - \frac{y}{y'} - x = -\frac{y}{y'}, \\ \overline{QN} &= \overline{ON} - \overline{OQ} = x + yy' - x = yy'. \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Maintenant, on peut obtenir la longueur de la tangente et de la normale à partir des triangles rectangles MQT et MQN :

$$\left.\begin{aligned} |\overline{MT}| &= \sqrt{\overline{MQ}^2 + \overline{QT}^2} = \sqrt{y^2 + \frac{y^2}{y'^2}} = \pm \frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}, \\ |\overline{MN}| &= \sqrt{\overline{MQ}^2 + \overline{QN}^2} = \sqrt{y^2 + y^2y'^2} = \pm y\sqrt{1+y'^2}, \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

et il faut choisir les signes ($\pm$) de façon à ce que les expressions du second membre soient positives.

Rappelons encore la formule du rayon de courbure d'une courbe [II-5-2] :

$$R = \pm \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}. \quad (32)$$

Désignant par n la longueur de la normale, nous obtenons à partir de la deuxième formule (31) :

$$\sqrt{1+y'^2} = \pm \frac{n}{y},$$

et en portant cette valeur de $\sqrt{1+y'^2}$ dans (32), nous aurons l'expression suivante du rayon de courbure :

$$R = \pm \frac{n^3}{y^3y''}. \quad (32_1)$$

Si la courbe est donnée sous forme paramétrique

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

les deux premières dérivées y' et y'' de y par rapport à x s'écrivent [II-5-5]:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

$$y'' = \frac{d^2y\,dx - d^2x\,dy}{dx^3} = \frac{\psi''(t)\,\varphi'(t) - \varphi''(t)\,\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}. \quad (33)$$

En particulier, en portant ces valeurs dans la formule (32), nous obtenons l'expression du rayon de courbure pour le cas considéré:

$$R = \pm\frac{(dx^2 + dy^2)^{3/2}}{d^2y\,dx - d^2x\,dy} = \pm\frac{\{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2\}^{3/2}}{\psi''(t)\,\varphi'(t) - \varphi''(t)\,\psi'(t)} = \pm\frac{ds}{d\alpha}, \quad (34)$$

où α est l'angle formé par la tangente avec l'axe OX.

Si la courbe est donnée sous forme implicite,

$$F(x, y) = 0,$$

d'après (25), on aura pour la tangente l'équation

$$F'_x(x, y)(X - x) + F'_y(x, y)(Y - y) = 0. \quad (35)$$

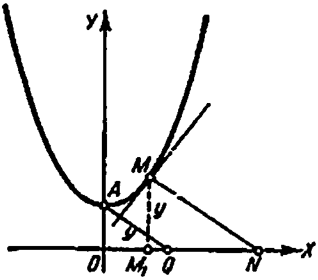

Fig. 93

II-5-9. La chaînette. On appelle *chaînette* la courbe qui pour un choix convenable des axes de coordonnées peut se mettre sous la forme:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \quad (a > 0).$$

Cette courbe représente la position d'équilibre d'un fil homogène pesant suspendu à ses deux extrémités. On peut construire facilement cette courbe en utilisant les règles indiquées [II-5-4] et on l'a représentée sur la fig. 93.

Calculons les deux premières dérivées de y:

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right), \quad y'' = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a^2},$$

d'où

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}{4} = \frac{4 + e^{\frac{2x}{a}} - 2 + e^{-\frac{2x}{a}}}{4} = \frac{\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}{4} = \frac{y^2}{a^2}.$$

En portant cette expression de $(1 + y'^2)$ dans la deuxième formule (31), on obtient la longueur de la normale à la courbe:

$$n = \frac{y^2}{a},$$

et en portant l'expression de n et y'' dans (32_1), il vient :

$$R=\frac{y^6a^2}{a^3y^3y}=\frac{y^2}{a}=n,$$

c'est-à-dire que *le rayon de courbure d'une chaînette est égal à la longueur de la normale MN*. Pour $x=0$ l'ordonnée y prend sa plus petite valeur $y=a$ et le point A correspondant est *le sommet*.

Sur la fig. 93 on a représenté en plus quelques lignes auxiliaires dont nous aurons besoin par la suite. Si on remplace x par $(-x)$, l'équation de la chaînette n'est pas modifiée, c'est-à-dire que l'axe OY est un axe de symétrie de la chaînette

II-5-10. La cycloïde. Soit un cercle de rayon a qui roule sans glisser sur une droite immobile. Le lieu géométrique décrit lors d'un tel mouvement par un point M fixé sur le cercle s'appelle *une cycloïde*.

Prenons pour axe OX la droite sur laquelle roule le cercle ; pour origine des coordonnées prenons la position initiale du point M, lorsqu'il est le point

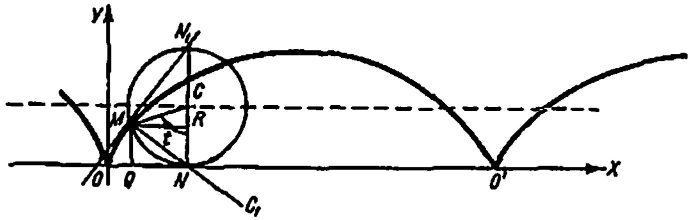

Fig. 94

de tangence du cercle avec l'axe OX et soit t l'angle dont a tourné le cercle. Soit de plus C le centre du cercle, N le point de tangence du cercle avec l'axe OX dans une certaine position, Q le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur l'axe OX et R le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur le diamètre NN_1 du cercle (fig. 94).

Etant donné l'absence de glissement, on a

$$\overline{ON}=\text{arc}\, NM=at,$$

et on peut exprimer les coordonnées du point M qui décrit la cycloïde au moyen du paramètre $t=\widehat{NCM}$:

$$x=\overline{OQ}=\overline{ON}-\overline{QN}=at-a\sin t=a\,(t-\sin t),$$
$$y=\overline{QM}=\overline{NC}-\overline{RC}=a-a\cos t=a\,(1-\cos t).$$

Ce qui donne la représentation paramétrique de la cycloïde.

Notons tout d'abord qu'il suffit d'étudier les variations de t dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ qui correspond à une rotation complète du cercle. Après une rotation complète le point M coïncide à nouveau avec le point de contact O' du cercle avec l'axe OX mais avec une translation $\overline{OO'}=2\pi a$. La partie de courbe obtenue au-delà sera identique à l'arc OO' avec translation de cet arc de $2\pi a$

à droite, etc. Calculons les deux premières dérivées de x et y par rapport à t:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varphi'(t) = a(1-\cos t), & \frac{dy}{dt} &= \psi'(t) = a \sin t, \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \varphi''(t) = a \sin t, & \frac{d^2y}{dt^2} &= \psi''(t) = a \cos t. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Le coefficient angulaire de la tangente en vertu de la première des formules (33):

$$y' = \frac{a \sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{cotg} \frac{t}{2}.$$

Cette formule donne un moyen simple de construire la tangente à la cycloïde. Joignons le point N_1 au point M de la courbe. L'angle MN_1N est un angle inscrit correspondant à l'arc $NM = t$ et il est égal à $\frac{t}{2}$. On obtient à partir du triangle rectangle RMN_1 (fig. 94):

$$\widehat{RMN_1} = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}, \quad \operatorname{tg} \widehat{RMN_1} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right) = \operatorname{cotg} \frac{t}{2}.$$

En comparant cette expression avec celle de y', on voit que la droite MN_1 est la tangente à la cycloïde, c'est-à-dire que:

Pour construire la tangente à la cycloïde au point M de celle-ci, il suffit de joindre ce point à l'extrémité N_1 du diamètre du cercle roulant dont l'autre extrémité est le point de tangence du cercle avec l'axe OX.

La droite MN joignant le point M à l'autre extrémité du diamètre cité ci-dessus est perpendiculaire à la droite MN_1 car l'angle N_1MN, interceptant un demi-cercle est un angle droit et on peut affirmer que *MN est la normale à la cycloïde*. La longueur de la normale $n = \overline{MN}$ s'obtient directement à partir du triangle rectangle N_1MN:

$$n = 2a \sin \frac{t}{2}.$$

Le rayon de courbure de la cycloïde s'obtient à l'aide de la formule (34) et des expressions (36):

$$R = \pm \frac{[a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t]^{3/2}}{a \cos t \cdot a(1-\cos t) - a \sin t \cdot a \sin t} = \pm \frac{a(2-2\cos t)^{3/2}}{\cos t - 1} =$$

$$= a \cdot 2^{3/2}(1-\cos t)^{1/2} = 4a \sin \frac{t}{2}.$$

Dans cette dernière expression nous n'avons laissé que le signe (+), car pour la première branche de la cycloïde t est dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ et $\sin \frac{t}{2}$ ne peut pas être négatif.

En comparant cette expression avec celle de la normale n, nous avons $R = 2n$, c'est-à-dire que *le rayon de courbure de la cycloïde est égal au double de la normale* ($\overline{MC_1}$ sur la fig. 94).

Si le point M qui décrivait la cycloïde n'était pas sur le cercle mais à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle, alors au cours de la rotation il décrirait une *cycloïde raccourcie* ou *allongée* (parfois on donne à ces deux courbes le nom de *trochoïde*).

Soit h la distance CM du point M au centre du cercle roulant, les autres notations restant inchangées. Examinons d'abord le cas où $h < a$, c'est-à-dire

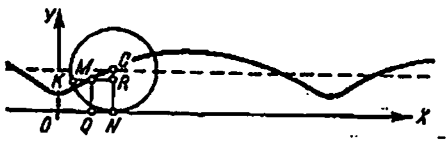

Fig. 95

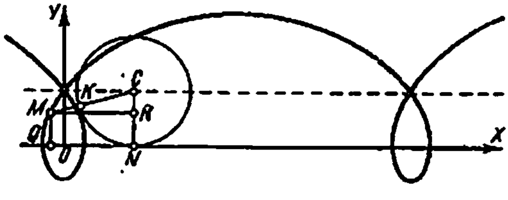

Fig. 96

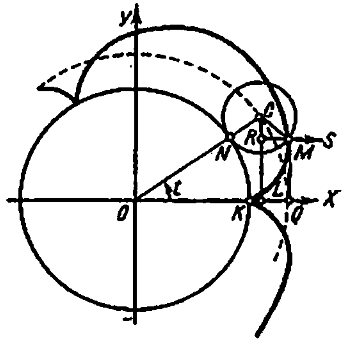

Fig. 97

le cas où le point M est à l'intérieur du cercle (fig. 95). On voit sur la figure que

$$x=\overline{OQ}=\overline{ON}-\overline{QN}=at-h\sin t,$$
$$y=\overline{QM}=\overline{NC}-\overline{RC}=a-h\cos t.$$

Dans le cas où $h > a$ les équations seront les mêmes mais la courbe aura a forme indiquée sur la fig. 96.

II-5-11. Epicycloïdes et hypocycloïdes. Si le cercle sur la circonférence duquel est fixé le point M roule non sur la droite OX, mais sur un cercle immobile, on obtient deux classes de courbes importantes: *les épicycloïdes* si le cercle roulant est *extérieur* et *les hypocycloïdes* s'il est *intérieur* à l'immobile.

Donnons l'équation de *l'épicycloïde*. Plaçons l'origine des coordonnées O au centre du cercle immobile. L'axe OX sera dirigé suivant la droite joignant O au point K qui est la position initiale du point M, lorsque les deux cercles sont tangents en ce point. Soit a le rayon du cercle mobile et b celui du cercle immobile, et prenons pour paramètre t l'angle formé par l'axe OX avec le rayon ON du cercle fixe mené au point de tangence des cercles, lorsque le cercle mobile a tourné de l'angle $\varphi = \widehat{NCM}$ (fig. 97).

Etant donné que le roulement du cercle se produit sans glissement, on peut écrire

$$\text{arc } KN=\text{arc } NM,$$

c'est-à-dire:

$$bt=a\varphi,\quad \varphi=\frac{bt}{a}.$$

On voit sur la figure que

$$\left.\begin{aligned} x &= \overline{OQ} = \overline{OL} + \overline{LQ} = \overline{OC}\cos\widehat{KOC} - \overline{CM}\cos\widehat{SMC} = \\ &= (a+b)\cos t - a\cos(t+\varphi) = (a+b)\cos t - a\cos\frac{a+b}{a}t, \\ y &= \overline{QM} = \overline{LC} - \overline{RC} = \overline{OC}\sin\widehat{KOC} - \overline{CM}\sin\widehat{SMC} = \\ &= (a+b)\sin t - a\sin(t+\varphi) = (a+b)\sin t - a\sin\frac{a+b}{a}t. \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

La courbe est formée d'une série d'arcs identiques qui correspondent à une rotation complète du cercle mobile, c'est-à-dire à une augmentation de l'angle φ de 2π et de l'angle t de $\frac{2a\pi}{b}$. Donc, les extrémités de ces arcs correspondent aux valeurs:

$$t=0, \quad \frac{2a\pi}{b}, \quad \frac{4a\pi}{b}, \ldots, \frac{2pa\pi}{b}, \ldots$$

Pour que nous puissions revenir au point initial de la courbe K, il faut et il suffit qu'une extrémité d'un des arcs coïncide avec K, c'est-à-dire qu'il existe des nombres entiers p et q qui vérifient la condition:

$$\frac{2pa\pi}{b} = 2q\pi,$$

c'est-à-dire qu'au point K correspond un certain nombre de rotations complètes autour du point O. La condition précédente peut encore s'écrire:

$$\frac{a}{b} = \frac{q}{p}.$$

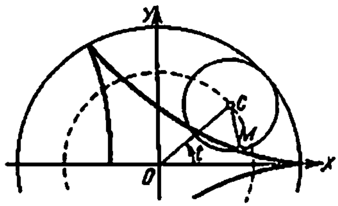

Fig. 98

De tels nombres p et q existeront si, et seulement si, a et b sont des segments commensurables, sinon le rapport $\frac{a}{b}$ est un nombre irrationnel qui ne peut pas être égal au rapport de deux entiers.

Il en résulte que l'épicycloïde est une courbe fermée si, et seulement si, les rayons des cercles mobile et fixe sont des multiples d'une même longueur, sinon la courbe n'est pas fermée et, partant du point K, elle ne peut jamais y revenir.

Cette remarque s'applique également à *l'hypocycloïde* (fig. 98) dont l'équation peut être obtenue à partir de celle de l'épicycloïde en remplaçant a par $(-a)$:

$$\left.\begin{aligned} x &= (b-a)\cos t + a\cos\frac{b-a}{a}t, \\ y &= (b-a)\sin t - a\sin\frac{b-a}{a}t. \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

Indiquons quelques cas particuliers. Supposons que dans le cas de l'épicycloïde $b = a$, c'est-à-dire que les rayons des cercles mobile et fixe sont égaux.

Nous obtiendrons dans ce cas une courbe formée d'une seule branche (fig. 99) et en faisant $b = a$ dans les équations (37), nous obtenons les équations de cette courbe:

$$x = 2a \cos t - a \cos 2t,$$
$$y = 2a \sin t - a \sin 2t.$$

Cette courbe s'appelle *une cardioïde*.

Déterminons la distance r des points M (x, y) de cette courbe au point K de coordonnées $(a, 0)$, et pour cela mettons sous une forme plus commode les expressions de $(x - a)$ et de y:

$$x - a = 2a \cos t - a (\cos^2 t - \sin^2 t) - a = 2a \cos t - 2a \cos^2 t = 2a \cos t (1 - \cos t),$$
$$y = 2a \sin t - 2a \sin t \cos t = 2a \sin t (1 - \cos t),$$

d'où

$$r = |\overline{KM}| = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} =$$
$$= \sqrt{4a^2 \cos^2 t (1 - \cos t)^2 + 4a^2 \sin^2 t (1 - \cos t)^2} = 2a (1 - \cos t).$$

Les grandeurs $(x - a)$ et y sont les projections du segment KM sur les xes OX et OY mais on voit dans les expressions écrites que $(x - a)$ et y sont

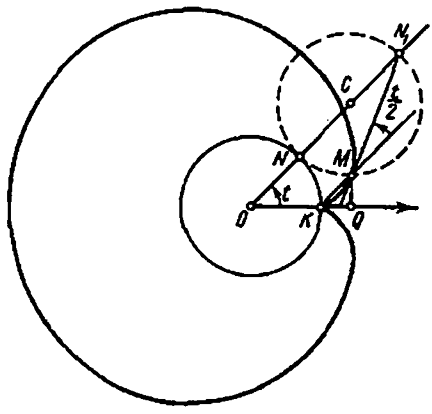

Fig. 99

égales au produit de la longueur du segment $\overline{KM}$ respectivement par $\cos t$ et $\sin t$, c'est pourquoi nous voyons que $\overline{KM}$ forme un angle t avec la direction positive de l'axe OX, c'est-à-dire qu'il est parallèle au rayon ON. Ce résultat sera utilisé pour déduire la règle de construction de la tangente à la cardioïde.

Introduisons l'angle $\theta = \pi - t$ formé par le segment KM avec la direction négative de l'axe OX. Pour r nous obtenons alors:

$$r = 2a (1 + \cos \theta).$$

C'est l'équation en coordonnées polaires de la cardioïde et nous étudierons cette courbe plus en détail lorsque nous parlerons des coordonnées polaires.

Indiquons maintenant quelques hypocycloïdes particulières. En faisant $b = 2a$ dans (38), il vient

$$x = 2a\cos t = b\cos t, \quad y = 0,$$

c'est-à-dire que si le rayon du cercle fixe est double de celui du cercle mobile, le point M se déplace sur un diamètre du cercle fixe.

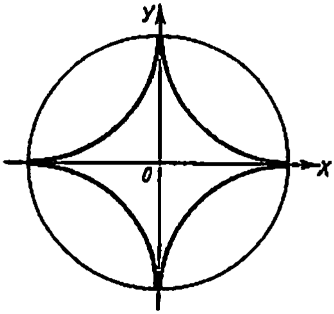

Fig. 100

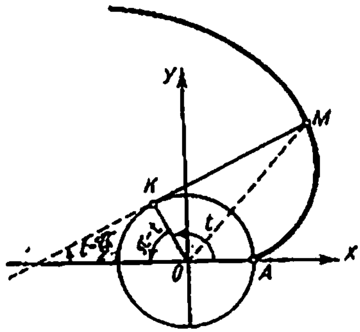

Fig. 101

Supposons maintenant que $b = 4a$. Dans ce cas l'hypocycloïde sera formée de quatre branches (fig. 100) et on appelle cette courbe *une astroïde*. Pour $b = 4a$ les équations (38) deviennent

$$x = 3a\cos t + a\cos 3t = 3a\cos t + a(4\cos^3 t - 3\cos t) = 4a\cos^3 t = b\cos^3 t,$$
$$y = 3a\sin t - a\sin 3t = 3a\sin t - a(3\sin t - 4\sin^3 t) = 4a\sin^3 t = b\sin^3 t.$$

Elevant les deux équations à la puissance $^2/_3$ et on les additionnant membre à membre on élimine le paramètre t et obtient l'équation implicite de l'astroïde

$$x^{2/3} + y^{2/3} = b^{2/3}.$$

II-5-12. Développante du cercle. On appelle *développante d'un cercle* la courbe décrite par l'extrémité M d'un fil souple qui se déroule progressivement à partir d'un cercle fixe de rayon a, de sorte qu'au point K, où le fil quitte le cercle, il reste toujours tangent au cercle (fig. 101).

En prenant pour paramètre l'angle t formé par la direction positive de l'axe OX avec le rayon passant par le point K et en tenant compte de ce que $\overline{KM} = \widehat{AK} = at$, on obtient l'équation de la développante d'un cercle sous forme paramétrique:

$$x = \text{Proj}_{OX}\,\overline{OM} = \text{Proj}_{OX}\,\overline{OK} + \text{Proj}_{OX}\,\overline{KM} = a\cos t + at\sin t,$$
$$y = \text{Proj}_{OY}\,\overline{OM} = \text{Proj}_{OY}\,\overline{OK} + \text{Proj}_{OY}\,\overline{KM} = a\sin t - at\cos t.$$

En utilisant la première des formules (33), on obtient le coefficient angulaire de la tangente

$$y' = \frac{a\cos t - a\cos t + at\sin t}{-a\sin t + a\sin t + at\cos t} = \operatorname{tg} t.$$

Le coefficient angulaire de la normale à la développante du cercle sera donc égal à

$$-\operatorname{cotg} t = \operatorname{tg}\left(t - \frac{\pi}{2}\right),$$

d'où il résulte que la droite MK sera la normale à la développante du cercle. On verra par la suite que cette propriété est vraie pour les développantes de toutes les courbes.

II-5-13. Courbes en coordonnées polaires. La position d'un point M du plan (fig. 102) peut être définie au moyen *des coordonnées polaires*: 1) la distance r de ce point à un certain point O (*pôle*) et 2) l'angle θ formé par la direction du segment OM avec une

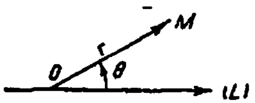

Fig. 102

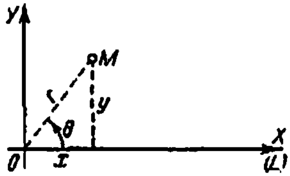

Fig. 103

direction donnée (L) (*axe polaire*). On appelle souvent r *le rayon vecteur* et θ *l'angle polaire*. Si on prend l'axe polaire pour OX le pôle pour l'origine des coordonnées, il est évident que (fig. 103):

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta. \tag{39}$$

A une position donnée du point M correspond une valeur positive de r et un ensemble infini de valeurs de θ qui diffèrent d'un multiple entier de 2π. Si M coïncide avec O, $r = 0$ et θ est indéfini.

Toute relation fonctionnelle de forme $r = f(\theta)$ (explicite) ou $F(r, \theta) = 0$ (implicite) définit une courbe dans le système de coordonnées polaires. Dans le cas le plus fréquent on a des équations explicites:

$$r = f(\theta). \tag{40}$$

Dans la suite, nous aurons des valeurs de r non seulement positives, mais aussi négatives. Si à une valeur de θ correspond un r négatif, on conviendra de porter cette valeur r dans la direction opposée à celle définie par la valeur de θ.

En considérant que pour une courbe donnée r est fonction de θ, nous voyons que les équations (39) donnent une représentation paramétrique de cette courbe, et que x et y dépendent du paramètre θ directement et par l'intermédiaire de r; c'est pourquoi nous pouvons utiliser les formules (33) et (34) [II-5-8]. En désignant par α l'angle formé par la tangente avec l'axe OX, on aura en utilisant la première des formules (33):

$$\operatorname{tg}\alpha = y' = \frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta},$$

où r' désigne la dérivée de r par rapport à θ.

Introduisons l'angle μ compris entre les directions positives du rayon vecteur et la tangente à la courbe (fig. 104). Nous avons:

$$\mu = \alpha - \theta,$$

d'où

$$\cos\mu = \cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta,$$

$$\sin\mu = \sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta.$$

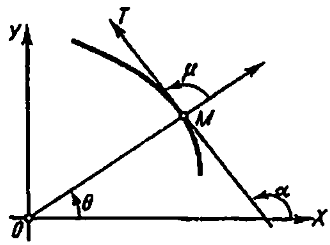

Fig. 104

En dérivant les équations (39) par rapport à s et en tenant compte de ce que $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$ sont respectivement égaux à $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$, il vient:

$$\cos\alpha = \cos\theta\frac{dr}{ds} - r\sin\theta\frac{d\theta}{ds}, \quad \sin\alpha = \sin\theta\frac{dr}{ds} - r\cos\theta\frac{d\theta}{ds}.$$

En portant ces valeurs de $\cos\alpha$ et de $\sin\alpha$ dans les expressions écrites pour $\cos\mu$ et $\sin\mu$, on obtient:

$$\cos\mu = \frac{dr}{ds}, \quad \sin\mu = \frac{r\,d\theta}{ds}, \tag{41}$$

d'où

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{r\,d\theta}{dr} = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = \frac{r}{r'}. \tag{41$_1$}$$

Il résulte de (39) que

$$dx = \cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta,$$
$$dy = \sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta,$$

d'où

$$ds = \sqrt{(dx^2) + (dy)^2} = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\theta)^2}, \tag{42}$$

et l'égalité $\alpha = \mu + \theta$ donne en divisant numérateur et dénominateur par $d\theta$:

$$R = \pm\frac{ds}{d\alpha} = \frac{[(dr)^2 + r^2(d\theta)^2]^{1/2}}{d\mu + d\theta} = \pm\frac{(r^2 + r'^2)^{1/2}}{1 + \frac{d\mu}{d\theta}}.$$

De la formule (41_1) il résulte que

$$\mu = \operatorname{arc\,tg} \frac{r}{r'}, \quad \frac{d\mu}{d\theta} = \frac{1}{1+\left(\frac{r}{r'}\right)^2} \cdot \frac{r'^2 - rr''}{r'^2} = \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2},$$

où r' et r'' sont les deux premières dérivées de r par rapport à θ. En portant les expressions obtenues des dérivées dans la formule précédente, on obtient pour le rayon de courbure:

$$R = \pm \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}. \tag{43}$$

II-5-14. **Spirales.** Nous examinerons trois types de spirales:

la spirale d'Archimède: $r = a\theta$,

la spirale hyperbolique: $r\theta = a$, $(a > 0,\ b > 0)$,

la spirale logarithmique: $r = be^{a\theta}$.

La spirale d'Archimède est représentée sur la fig. 105. La courbe en pointillé correspond à la partie de la courbe pour laquelle $\theta < 0$. Les valeurs négatives

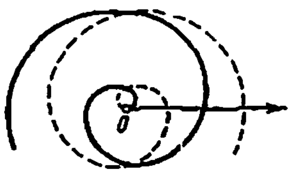

Fig. 105

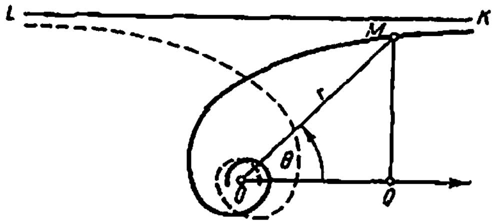

Fig. 106

de θ donnent des valeurs négatives pour r, et il faut les porter dans une direction opposée à celle définie par la valeur de θ.

Tout rayon vecteur rencontre la courbe un nombre infini de fois, et la distance entre deux points d'intersection successifs est une constante égale à $2a\pi$. Ceci résulte de ce que la direction d'un rayon vecteur correspondant à une certaine valeur donnée de θ ne change pas, si θ augmente de 2π, 4π, ..., tandis que la longueur de r qui est déterminée par l'équation $r = a\theta$, augmentera de $2a\pi$, $4a\pi$, ...

La spirale hyperbolique est représentée sur la fig. 106. En supposant $\theta > 0$, examinons ce que devient la courbe lorsque θ tend vers zéro. L'équation

$$r = \frac{a}{\theta}$$

montre que r tend alors vers l'infini. Soit M un point de la courbe correspondant à une valeur suffisamment petite de θ; abaissons la perpendiculaire MQ à l'axe polaire X. On voit sur le triangle rectangle MOQ (fig. 106) que

$$\overline{QM} = r \sin\theta = \frac{a \sin\theta}{\theta},$$

et lorsque θ tend vers zéro :

$$\lim_{\theta\to 0} \overline{QM} = \lim_{\theta\to 0} a \frac{\sin\theta}{\theta} = a.$$

Ainsi, la distance du point M à l'axe polaire tend vers a lorsque θ tend vers zéro, et la courbe aura une asymptote LK parallèle à l'axe polaire et distante de a de cet axe.

On voit que r n'est nul pour aucune valeur finie de θ, seulement il tend vers zéro lorsque θ tend vers l'infini. Contrairement au cas de la spirale d'Archimède, la courbe tendra indéfiniment vers le pôle O, s'enroulant autour de ce point, sans jamais passer par lui. Un tel point est appelé généralement *point asymptote* de la courbe.

La spirale logarithmique est représentée sur la fig. 107.

Pour $\theta = 0$, $r = b$ et lorsque θ tend vers $(+\infty)$, r tend aussi vers $(+\infty)$, et lorsque θ tend vers $(-\infty)$, r tend vers zéro sans jamais devenir nul. Dans le cas considéré

$$r' = abe^{a\theta} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg}\mu = \frac{r}{r'} = \frac{1}{a},$$

c'est-à-dire que *le rayon vecteur forme avec la tangente à la spirale logarithmique un angle constant* μ.

II-5-15. **Cissoïdes et cardioïde.** Construisons un cercle de diamètre $OA = 2a$ (fig. 108) ; du point O de la circonférence menons des rayons vecteurs et sur chacun d'eux portons une longueur constante $h = \overline{DM}$ depuis le point d'intersection D de cette droite avec la circonférence. Le lieu géométrique des points M est appelé généralement *cissoïde*.

En remarquant que

$$\overline{OD} = 2a\cos\theta \quad \text{et} \quad \overline{OM} = r,$$

on a l'équation de la cissoïde :

$$r = 2a\cos\theta + h.$$

Si $h > 2a$, cette équation ne donne pour r que des valeurs positives, et on a la courbe (fig. 109). Si $h < 2a$, r peut prendre des valeurs négatives et positives, et on a la courbe (fig. 110). Au point O la courbe se coupe elle-même. Enfin pour $h = 2a$ l'équation de la cissoïde devient

$$r = 2a(1+\cos\theta),$$

c'est-à-dire que l'on a *une cardioïde* [II-5-11] qui n'est pas disposée de la même façon qu'au paragraphe [II-5-11] (fig. 111). Pour $\theta = \pi$ on a $r = 0$, c'est-à-dire que la courbe passe par le point O.

Déterminons les deux premières dérivées de r par rapport à θ :

$$r' = -2a\sin\theta, \quad r'' = -2a\cos\theta.$$

Calculons $\operatorname{tg}\mu$:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{r}{r'} = \frac{2a(1+\cos\theta)}{-2a\sin\theta} = -\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right),$$

c'est-à-dire que :

$$\mu = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}. \tag{44}$$

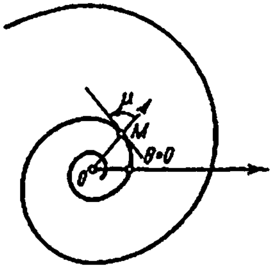

Fig. 107

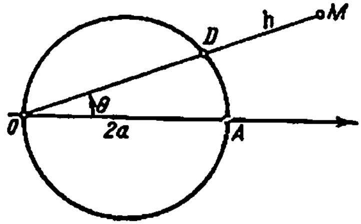

Fig 108

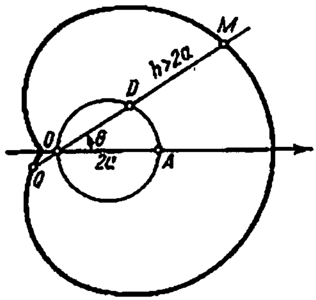

Fig. 109

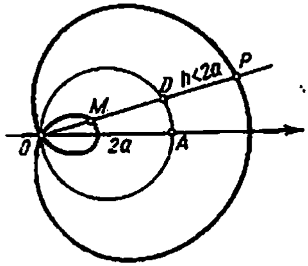

Fig. 110

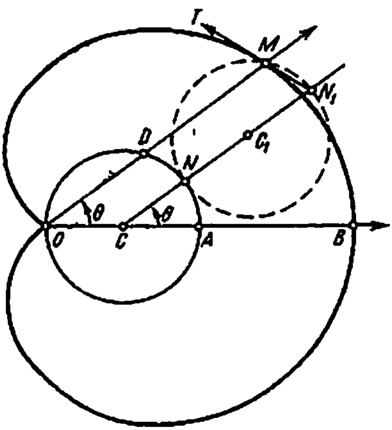

Fig. 111

On a déjà montré [II-5-11] que la cardioïde peut être considérée comme une courbe décrite par un point fixé sur un cercle roulant sur le cercle susmentionné de diamètre $OA = 2a$, le diamètre du cercle mobile étant égal à celui du cercle fixe. Soit C le centre du cercle fixe, M un point de la cardioïde, N le point de tangence du cercle mobile avec le cercle fixe et NN_1 le diamètre du cercle mobile (fig. 111). Nous avons déjà vu [II-5-11] que les droites OM et CN_1 sont parallèles *, c'est-à-dire que $\widehat{ACN} = \theta$, et, par conséquent,

$$\overset{\frown}{NM} = \overset{\frown}{ON} = \pi - \theta.$$

L'angle MN_1N qui est inscrit sur l'arc NM est égal à $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$, et enfin l'angle formé par les directions OM et N_1M est égal à:

$$\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} = \mu,$$

donc N_1M est la tangente à la cardioïde au point M. D'où la règle:

Pour construire la tangente à la cardioïde au point M, il suffit de joindre ce point à l'extrémité N_1 du diamètre du cercle mobile dont l'autre extrémité se trouve au point de tangence du cercle mobile avec le cercle fixe; la normale sera portée par la droite MN

La règle obtenue ci-dessus pour construire une tangente à une cardioïde s'obtient simplement au moyen de considérations cinématiques. On sait que tout mouvement dans un plan d'un système indéformable peut se ramener à chaque instant donné à une rotation autour d'un point fixe (centre instantané de rotation) et, généralement, ce point varie au cours du temps. Dans le cas de la rotation indiquée sur la fig. 111, le centre instantané de rotation est le point de contact N du cercle mobile avec le cercle fixe, et, par conséquent, la vitesse du point mobile M, qui est orientée suivant la tangente à la cardioïde, est perpendiculaire au rayon NM qui est une normale à la cardioïde, et la droite N_1M perpendiculaire au rayon NM est une tangente à la cardioïde. De ces considérations il résulte que la règle citée de construction d'une tangente reste valable pour toute courbe obtenue en faisant rouler sans glissement un cercle sur une courbe fixe.

II-5-16. Ovale de Cassini et lemniscate. *L'ovale de Cassini* est le lieu géométrique des points M dont le produit des distances à deux points fixes F_1 et F_2 est constant:

$$\overline{F_1M}\ \overline{F_2M} = b^2.$$

Soit $2a = \overline{F_1F_2}$; orientons l'axe polaire suivant $\overline{F_1F_2}$ et plaçons le pôle O au milieu du segment $\overline{F_1F_2}$. On voit sur les triangles OMF_1 et OMF_2 (fig. 112) que:

$$\overline{F_1M}^2 = r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta, \quad \overline{F_2M}^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta.$$

En portant ces valeurs dans l'équation des ovales, en en l'élevant au carré, il vient après simplification:

$$r^4 - 2a^2r^2\cos 2\theta + a^4 - b^4 = 0,$$

d'où

$$r^2 = a^2\cos 2\theta \pm \sqrt{a^4\cos^2 2\theta - (a^4 - b^4)}.$$

Les cas correspondant à $a^2 < b^2$ et $a^2 > b^2$ sont représentés sur la fig. 112. Si $a^2 > b^2$, la courbe est formée de deux courbes fermées. Nous examinerons

---

* En [II-5-11] ces deux droites étaient désignées par KM et ON_1 (v. fig. 99).

plus en détail le cas important où $a^2 = b^2$. La courbe correspondante est *la lemniscate* dont l'équation sera

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta.$$

Cette équation ne donne pour r des valeurs réelles que si $\cos 2\theta \geqslant 0$, c'est-à-dire lorsque θ est dans l'un des intervalles:

$$\left(0, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right), \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right),$$

et r est nul pour

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}.$$

Il est facile alors de construire la courbe (fig. 113).

Au point O la courbe se coupe elle-même et les droites pointillées sont les tangentes aux deux branches de la courbe se coupant au point O. En dérivant

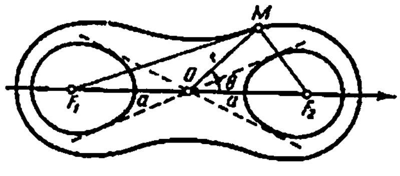

Fig. 112

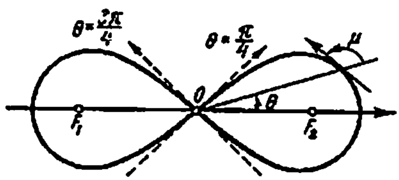

Fig. 113

les deux membres de l'équation de la lemniscate par rapport à θ, il vient:

$$2rr' = -4a^2 \sin 2\theta, \quad \text{soit} \quad r' = -\frac{2a^2 \sin 2\theta}{r},$$

d'où

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{r}{r'} = -\frac{r^2}{2a^2 \sin 2\theta} = -\frac{2a^2 \cos 2\theta}{2a^2 \sin 2\theta} = -\operatorname{cotg} 2\theta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right),$$

$$\mu = \frac{\pi}{2} + 2\theta.$$

Passant des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes, on a (39):

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \sin \theta = \frac{y}{r}.$$

L'équation de la lemniscate peut s'écrire ainsi:

$$r^2 = 2a^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta),$$

en y portant les expressions précédentes, on aura l'équation de la lemniscate en coordonnées orthogonales:

$$x^2 + y^2 = 2a^2 \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right), \quad \text{soit} \quad (x^2 + y^2)^2 = 2a^2 (x^2 - y^2),$$

d'où il résulte que la lemniscate est une courbe algébrique de quatrième degré.

Chapitre III

NOTION D'INTÉGRALE ET APPLICATIONS

III-1. Problèmes fondamentaux du calcul intégral et intégrale indéfinie

III-1-1. Notion d'intégrale indéfinie. Un des problèmes fondamentaux du calcul différentiel est celui de la recherche de la dérivée ou de la différentielle d'une fonction donnée.

Le premier problème fondamental du calcul intégral est le problème inverse: la recherche d'une fonction connaissant sa dérivée ou sa différentielle.

Soit donnée la dérivée

$$y' = f(x)$$

ou la différentielle

$$dy = f(x)\,dx$$

d'une fonction inconnue y.

Une fonction $F(x)$ qui a pour dérivée la fonction donnée $f(x)$ ou pour différentielle l'expression $f(x)\,dx$ est appeleé fonction primitive de la fonction donnée $f(x)$.

Si, par exemple,

$$f(x) = x^2,$$

alors une fonction primitive sera, par exemple, $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. En effet,

$$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 = x^2.$$

Admettons que nous avons trouvé une primitive quelconque $F(x)$ d'une fonction donnée $f(x)$, qui possède $f(x)$ comme dérivée, c'est-à-dire satisfait à la relation

$$F'(x) = f(x).$$

Comme la dérivée d'une constante arbitraire C est nulle, nous avons aussi:

$$[F(x) + C]' = F'(x) = f(x),$$

c'est-à-dire qu'avec $F(x)$ toute fonction $F(x) + C$ est aussi une primitive de $f(x)$.

De là il résulte que si le problème de la recherche d'une fonction primitive possède au moins une solution, alors il possède une infinité d'autres solutions, différant de celle-ci d'une constante additive arbitraire. On peut, cependant, montrer que de cette façon toutes les solutions du problème sont englobées, à savoir:

Si $F(x)$ est une fonction primitive quelconque de la fonction donnée $f(x)$, alors n'importe quelle fonction primitive se présente sous la forme:

$$F(x)+C,$$

où C est une constante arbitraire.

En effet, soit $F_1(x)$ une fonction arbitraire qui a pour dérivée $f(x)$. Nous avons:

$$F_1'(x)=f(x).$$

D'autre part, considérons la fonction étudiée $F(x)$ qui possède $f(x)$ comme dérivée, c'est-à-dire:

$$F'(x)=f(x).$$

En retranchant cette égalité de la précédente, il vient:

$$F_1'(x)-F'(x)=[F_1(x)-F(x)]'=0,$$

d'où, en vertu du théorème connu [II-3-7],

$$F_1(x)-F(x)=C,$$

où C est une constante: ce qu'il fallait démontrer.

Le résultat obtenu précédemment peut encore être formulé ainsi: *si les dérivées (ou différentielles) de deux fonctions sont identiques, alors ces fonctions ne diffèrent que d'une constante additive.*

L'expression la plus générale de la fonction primitive est aussi appelée intégrale indéfinie d'une fonction donnée $f(x)$ ou d'une différentielle donnée $f(x)\,dx$; elle est désignée par le symbole:

$$\int f(x)\,dx,$$

tandis que la fonction $f(x)$ s'appelle fonction à intégrer, et $f(x)\,dx$ expression à intégrer.

Ayant trouvé une fonction primitive quelconque $F(x)$, en vertu de ce qui a été démontré plus haut, nous pouvons écrire:

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C,$$

où C est une constante arbitraire.

Donnons une interprétation mécanique et géométrique de l'intégrale indéfinie. Supposons connue la loi de la dépendance analytique de la vitesse en fonction du temps:

$$v = f(t)$$

et que l'on doit trouver l'expression du chemin s en fonction du temps. Comme la vitesse du mouvement d'un point sur une trajectoire donnée est la dérivée $\frac{ds}{dt}$ du chemin par rapport au temps, le problème se ramène à la recherche d'une primitive de la fonction donnée $f(t)$, c'est-à-dire:

$$s = \int f(t)\, dt.$$

Nous obtenons une infinité de solutions, différant d'une constante additive. Cette incertitude de la réponse est due au fait que nous n'avons pas fixé l'origine à partir de laquelle nous calculons le chemin s. Si, par exemple, $v = gt + v_0$ (mouvement uniformément accéléré), nous obtenons pour s l'expression:

$$s = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + C. \qquad (1)$$

En effet, il n'est pas difficile de vérifier que la dérivée de l'expression (1) par rapport à t coïncide avec l'expression précitée $v = gt + v_0$. Si nous convenons de compter s à partir d'un certain point, qui correspond à la valeur $t = 0$, c'est-à-dire si nous convenons de compter $s = 0$ pour $t = 0$, alors nous devrons avoir dans la formule (1) la constante $C = 0$. Dans les raisonnements précédents nous avons désigné la variable indépendante non par x, mais par t, ce qui, à vrai dire, n'a pas une grande importance.

Passons maintenant à une interprétation géométrique du problème de la recherche d'une fonction primitive. La relation $y' = f(x)$ montre que le graphique de la fonction primitive cherchée ou, comme on dit, *la courbe intégrale*

$$y = F(x),$$

est une courbe, dont la tangente pour n'importe quelle valeur de x possède une direction donnée, de coefficient angulaire égal à:

$$y' = f(x). \qquad (2)$$

En d'autres termes, pour une valeur quelconque de la variable indépendante x la relation (2) donne la direction de la tangente à la courbe, et on demande de trouver cette courbe. Une courbe intégrale étant ainsi tracée, toutes les courbes que nous obtenons en la déplaçant d'un segment quelconque parallèlement à l'axe OY, posséderont pour une même valeur de x des tangentes parallèles de même coefficient angulaire $y' = f(x)$ (fig. 114) que la courbe de départ. La translation mentionnée équivaut à ajouter aux ordonnées de la courbe la constante additive C, et l'équation générale des courbes, répondant au problème, sera:

$$y = F(x) + C. \tag{3}$$

C'est pourquoi pour déterminer complètement la position de la courbe intégrale cherchée, c'est-à-dire l'expression de la fonction primitive cherchée, il faut se donner encore un point quelconque,

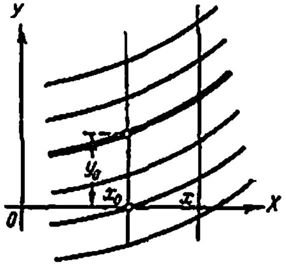

Fig. 114

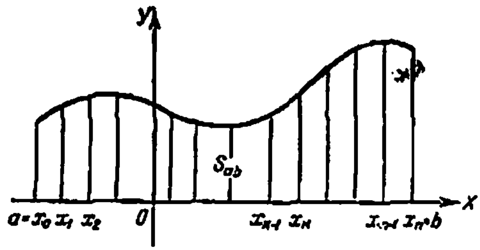

Fig. 115

par lequel devra passer la courbe intégrale, mettons le point d'intersection de cette courbe avec une droite quelconque

$$x = x_0,$$

parallèle à l'axe OY. Cette manière de donner la courbe équivaut à fixer la valeur initiale y_0 de la fonction cherchée $y = F(x)$, qu'elle doit prendre pour la valeur donnée $x = x_0$. Reportant ces valeurs initiales dans l'équation (3) nous obtenons une équation pour déterminer la constante arbitraire C:

$$y_0 = F(x_0) + C,$$

et enfin la fonction primitive, satisfaisant à la condition initiale imposée, se présentera sous la forme:

$$y = F(x) + [y_0 - F(x_0)].$$

Avant d'éclaircir les propriétés de l'intégrale indéfinie et les procédés de recherches de la fonction primitive, nous exposerons le deuxième problème fondamental du calcul intégral, et montrerons ses liens avec la formulation de notre premier problème, celui de la recherche de la fonction primitive.

Pour la suite de notre exposé une nouvelle notion sera essentielle, la notion d'intégrale définie. Pour parvenir naturellement à cette nouvelle notion, nous partirons de la représentation intuitive d'aire. Elle nous servira également pour élucider la liaison entre les notions d'intégrale définie et de fonction primitive. Ainsi les raisonnements des deux paragraphes suivants basés sur la représentation intuitive d'aire ne constituent pas une démonstration rigoureuse de faits nouveaux. Le schéma rigoureux de la construction logique de l'édifice du calcul intégral est indiqué à la fin de [III-1-3]. Il est entièrement exposé à la fin du présent chapitre.

III-1-2. L'intégrale définie comme limite d'une somme. Traçons sur le plan XOY la courbe représentative de la fonction $f(x)$, en admettant qu'elle se présente comme une courbe continue, entièrement située au-dessus de l'axe OX, c'est-à-dire que toutes les ordonnées de cette courbe sont positives. Examinons l'aire S_{ab}, limitée par l'axe OX, par la courbe et les deux ordonnées $x = a$ et $x = b$ (fig. 115), et essayons de trouver la grandeur de cette aire. Découpons l'intervalle (a, b) en n parties définies par les points:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

L'aire S_{ab} apparaît décomposée en n bandes verticales, dont la $k^{\text{ième}}$ a une base de longueur $(x_k - x_{k-1})$. Désignons respectivement par m_k et M_k la plus petite et la plus grande valeur de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle (x_{k-1}, x_k), c'est-à-dire la plus petite et la plus grande ordonnée de notre courbe dans cet intervalle. L'aire de la bande est comprise entre les aires des deux rectangles de même base (x_{k-1}, x_k) (fig. 116) et de hauteur m_k et M_k. Ces deux rectangles sont des rectangles intérieurs et extérieurs pour la $k^{\text{ième}}$ bande.

De cette façon la grandeur de l'aire de la $k^{\text{ième}}$ bande est comprise entre l'aire des deux rectangles cités, c'est-à-dire entre les deux nombres:

$$m_k(x_k - x_{k-1}) \quad \text{et} \quad M_k(x_k - x_{k-1}),$$

c'est pourquoi l'aire S_{ab} tout entière est comprise entre les sommes des aires de tels rectangles intérieurs et extérieurs, c'est-à-dire que l'aire S_{ab} est comprise entre les sommes:

$$\begin{aligned} s_n = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_k(x_k - x_{k-1}) + \ldots + \\ + m_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}) + m_n(x_n - x_{n-1}), \qquad (4) \\ S_n = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_k(x_k - x_{k-1}) + \ldots + \\ + M_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}) + M_n(x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

De cette façon, nous avons l'inégalité :

$$s_n < S_{ab} < S_n. \tag{5}$$

Construisons maintenant, au lieu des rectangles intérieurs et extérieurs pour chacune des bandes, un rectangle moyen quelconque, en conservant, comme précédemment, pour base $(x_k - x_{k-1})$ et en prenant comme hauteur une ordonnée quelconque $f(\xi_k)$ de notre

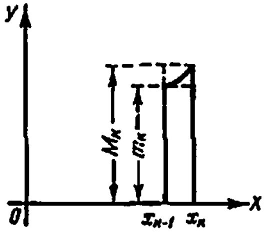

Fig. 116

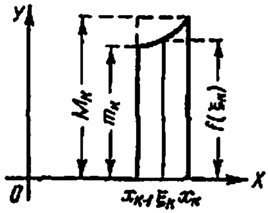

Fig. 117

courbe, correspondant à un point quelconque ξ_k du segment (x_{k-1}, x_k) (fig. 117). Considérons la somme des aires de ces rectangles *moyens* :

$$S'_n = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \\ + \ldots + f(\xi_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2}) + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}). \tag{6}$$

Elle est, de même que l'aire S_{ab}, comprise entre les sommes des aires des rectangles intérieurs et extérieurs, c'est-à-dire que nous aurons l'inégalité

$$s_n \leqslant S'_n \leqslant S_n. \tag{7}$$

Augmentons maintenant indéfiniment le nombre n de divisions du segment (a, b) de façon que simultanément la plus grande des différences $(x_k - x_{k-1})$ tende vers zéro.

Comme par hypothèse $f(x)$ est une fonction continue, la différence $(M_k - m_k)$ entre ses plus grande et plus petite valeurs sur le segment (x_{k-1}, x_k) tendra vers zéro par réduction continue de la longueur de ce segment, indépendamment de sa situation sur le segment de base (a, b) (continuité de la fonction [I-2-11]). De la même façon, si nous désignons par ε_n la plus grande des différences :

$$(M_1 - m_1),\ (M_2 - m_2),\ \ldots,\ (M_k - m_k),\ \ldots,\ (M_{n-1} - m_{n-1}),\ (M_n - m_n),$$

d'après le raisonnement précédent, au cours du passage à la limite précité, le nombre ε_n tendra vers zéro. Déterminons maintenant la différence entre la somme des aires des rectangles extérieurs et la somme des aires des rectangles intérieurs:

$$S_n - s_n = (M_1 - m_1)(x_1 - x_0) + (M_2 - m_2)(x_2 - x_1) + \ldots + \\ + (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) + \ldots + (M_n - m_n)(x_n - x_{n-1}),$$

d'où, remplaçant toutes les différences $(M_k - m_k)$ par le plus grand ε_n, et se rappelant que toutes les différences $(x_k - x_{k-1})$ sont positives, on a:

$$S_n - s_n \leqslant \varepsilon_n (x_1 - x_0) + \varepsilon_n (x_2 - x_1) + \ldots + \varepsilon_n (x_k - x_{k-1}) + \ldots + \\ + \varepsilon_n (x_n - x_{n-1}),$$

c'est-à-dire:

$$S_n - s_n \leqslant \varepsilon_n [(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_k - x_{k-1}) + \ldots + \\ + (x_n - x_{n-1})] = \varepsilon_n (x_n - x_0) = \varepsilon_n (b - a).$$

Nous pouvons écrire de cette façon:

$$0 \leqslant S_n - s_n \leqslant \varepsilon_n (b - a),$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n \to \infty} (S_n - s_n) = 0. \tag{8}$$

D'autre part, pour tout n, nous avions:

$$s_n \leqslant S_{ab} \leqslant S_n \tag{9}$$

et la grandeur de l'aire S_{ab} est un nombre déterminé. Des formules (8) et (9) il résulte immédiatement que la grandeur de l'aire S_{ab} apparaît comme la limite commune de s_n et S_n, c'est-à-dire des aires des rectangles extérieurs et intérieurs:

$$\lim s_n = \lim S_n = S_{ab}.$$

Puisque, d'autre part, la somme des rectangles moyens S'_n, comme nous l'avions vu, est comprise entre s_n et S_n, elle doit aussi tendre vers l'aire S_{ab}, autrement dit:

$$\lim S'_n = S_{ab}.$$

Cette somme S'_n apparaît plus générale que les sommes s_n et S_n, car pour la calculer nous pouvons choisir arbitrairement ξ_k dans le segment (x_{k-1}, x_k), et, en particulier, nous pouvons prendre $f(\xi_k)$ égal à la plus petite ordonnée m_k ou à la plus grande ordonnée M_k. Lors d'un tel choix la somme S'_n se transforme en sommes s_n et S_n.

Les raisonnements précédents nous conduisent à la proposition:
Si une fonction $f(x)$ est continue sur un segment (a, b) et si, ayant découpé ce segment en n parties selon les points:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

et ayant désigné par $x = \xi_k$ une valeur quelconque du segment (x_{k-1}, x_k), nous calculons la valeur correspondante $f(\xi_k)$ de la fonction et composons la somme *

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \tag{10}$$

alors lorsque le nombre de divisions du segment n croît indéfiniment, la plus grande des différences $(x_k - x_{k-1})$, tendant vers zero, cette somme tend vers une limite finie. Cette limite est égale à l'aire, limitée par l'axe OX, la courbe représentative de la fonction $f(x)$ et les deux ordonnées $x = a$, $x = b$.

La limite précitée est appelée *intégrale définie* de la fonction $f(x)$, prise pour les valeurs de x comprises entre la borne inférieure $x = a$ et la borne supérieure $x = b$; on la désigne par le symbole suivant:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Remarquons que l'existence de la limite I de la somme (10) lorsque la plus grande des différences $(x_k - x_{k-1})$ tend vers zéro, revient à l'affirmation suivante: pour tout nombre positif donné ε il existe un nombre positif η, tel que

$$\left| I - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon,$$

quel que soit la mode de découpage et de choix des points ξ_k dans le segment (x_{k-1}, x_k), si seulement la plus grande des différences (positives) $x_k - x_{k-1} < \eta$. Cette limite I est une intégrale définie.

Notons que l'ensemble des valeurs des sommes (10) pour tous les découpages de l'intervalle (a, b) et pour tout choix de ξ_k, ne peut être ordonné de sorte que s'élabore une variable ordonnée. La limite de la somme ne doit être comprise que dans le sens indiqué plus haut (à l'aide des nombres ε et η).

Plus haut nous avons supposé que la courbe représentative de la fonction $f(x)$, se trouve entièrement au-dessus de l'axe OX,

* Le symbole $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ est la notation abrégée de la somme (6).

c'est-à-dire que toutes les ordonnées de cette courbe sont positives. Considérons maintenant le cas plus général, où certaines parties de la courbe se trouvent au-dessus de l'axe OX, et d'autres au-dessous (fig. 118).

Si dans ce cas nous composons la somme (6), alors les termes $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$, correspondant aux parties de la courbe se trouvant sous l'axe OX, seront négatifs, puisque la différence $(x_k - x_{k-1})$ est positive et l'ordonnée $f(\xi_k)$ négative.

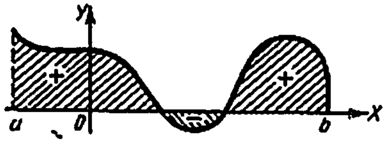

Fig. 118

Après passage à la limite on obtient une intégrale définie, qui introduira les aires, se trouvant au-dessus de l'axe OX avec le signe (+) et celles situées sous l'axe OX avec le signe (—), c'est-à-dire que dans le cas général *l'intégrale définie*

$$\int_b^a f(x)\,dx$$

donnera la somme algébrique des aires, comprises entre l'axe OX, la courbe de la fonction $f(x)$ et les ordonnées $x = a$ et $x = b$.

Les aires situées au-dessus de l'axe OX seront alors affectées du signe positif, et celles situées au-dessous de l'axe OX du signe négatif.

Comme nous le verrons par la suite, nous sommes conduit à la recherche de la limite d'une somme de la forme (6) non seulement dans la question du calcul de l'aire, mais aussi dans de nombreux autres problèmes des sciences naturelles des plus divers. Citons seulement un exemple. Soit un point M quelconque se déplaçant sur l'axe OX de l'abscisse $x = a$ à l'abscisse $x = b$ sur lequel s'exerce une force quelconque T, dirigée aussi suivant l'axe OX. Si la force T est constante, alors le travail qu'elle accomplit dans le déplacement du point de la position $x = a$ à la position $x = b$, se représente par le produit $R = T(b - a)$, c'est-à-dire par le produit de la grandeur de la force par le chemin parcouru par le point. Si la force T est variable, la formule écrite n'est plus valable. Supposons que la grandeur de la force dépende de la position du point sur l'axe OX, c'est-à-dire soit une fonction de l'abscisse du point $T = f(x)$.

Pour calculer le travail de la force dans ce cas, découpons tout le chemin par des points successifs, en parties:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

et considérons une de ces parties (x_{k-1}, x_k). Avec une erreur minime d'autant plus petite qu'est petite la longueur $(x_k - x_{k-1})$ nous pouvons admettre que la force, qui agissait sur le point dans son déplacement de x_{k-1} à x_k, est constante et coïncide avec la valeur de cette force $f(\xi_k)$ en un certain point ξ_k de l'intervalle (x_{k-1}, x_k). De sorte que pour le travail sur l'élément (x_{k-1}, x_k) nous obtenons l'expression approchée

$$R_k \sim f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

et pour le travail global nous aurons l'expression approchée de la forme :

$$R \sim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Avec l'accroissement infini du nombre de divisions n et la diminution infinie de la plus grande des différences $(x_k - x_{k-1})$ nous obtenons à la limite une intégrale définie, donnant la grandeur exacte du travail cherché :

$$R = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Laissant de côté les interprétations géométriques ou mécaniques, nous pouvons maintenant établir le concept d'intégrale définie de la fonction $f(x)$ sur le segment $a \leqslant x \leqslant b$ comme la limite d'une somme de la forme (6). Le deuxième problème fondamental du calcul intégral est l'étude des propriétés de l'intégrale définie, et avant tout son évaluation. Si $f(x)$ est une fonction donnée, et $x = a$ et $x = b$ deux nombres donnés, alors l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

est un certain nombre déterminé. Le symbole $\int$ se présente comme la lettre stylisée S et doit rappeler la somme qui, lors du passage à la limite, donnait la grandeur de l'intégrale définie. L'expression sous le signe intégral $f(x)\,dx$ doit rappeler l'aspect des termes de cette somme, et plus précisément $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$. La lettre x, figurant sous le signe de l'intégrale définie, s'appelle habituellement *variable d'intégration*. Remarquons à propos de cette lettre une circonstance importante. La valeur de l'intégrale, comme nous l'avons déjà mentionné, est un nombre déterminé ne dépendant pas, bien entendu, de la désignation de la variable d'intégration x, et nous pouvons, dans l'intégrale définie, désigner la variable d'intégration par n'importe quelle lettre. Cela n'aura, évidemment, aucune influence sur la valeur de l'intégrale, qui dépend seulement des ordonnées de la courbe $f(x)$ et des bornes d'intégration a et b. Ainsi la désignation de la variable indépendante ne joue aucun rôle, c'est-à-dire, par exemple:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Le deuxième problème du calcul intégral qui est le calcul de l'intégrale définie se présente à première vue comme le problème assez complexe de l'établissement d'une somme de la forme (6) puis du passage à la limite. Remarquons que dans le passage à la limite, le nombre de termes dans la somme mentionnée croîtra indéfiniment, et que chacun d'entre eux tendra vers zéro. En outre, à première vue, ce deuxième problème du calcul intégral n'a rien de commun avec le premier problème de la recherche de la fonction primitive d'une fonction donnée $f(x)$. Dans le paragraphe suivant nous montrerons que les deux problèmes sont étroitement liés l'un à l'autre et que le calcul de l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$ s'accomplit très simplement, si la fonction primitive de $f(x)$ est connue.

III-1-3. Relation entre les intégrales définie et indéfinie. Considérons de nouveau l'aire S_{ab}, limitée par l'axe OX, la courbe représentative de la fonction $f(x)$ et les ordonnées $x = a$ et $x = b$.

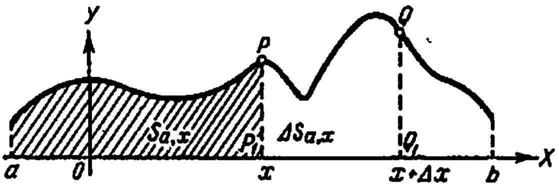

Fig. 119

Considérons simultanément une portion de cette aire, limitée par l'ordonnée de gauche $x = a$ et une ordonnée mobile arbitraire correspondant à une valeur variable de x (fig. 119). La grandeur de cette aire S_{ax} dépendra évidemment de l'endroit où nous placerons l'ordonnée de droite, c'est-à-dire sera fonction de x. Cette grandeur sera représentée par une intégrale définie de la fonction $f(x)$, prise de la borne inférieure a à la borne supérieure x. Puisque la lettre x est utilisée pour la désignation de la borne supérieure, nous pouvons, pour éviter toute confusion, désigner la variable d'intégration par une autre lettre, notamment, par la lettre t. De cette façon, nous pouvons écrire:

$$S_{ax} = \int_a^x f(t)\,dt. \qquad (11)$$

Ici nous avons une intégrale définie avec une borne supérieure variable x, dont la valeur est, évidemment, fonction de cette borne. Montrons que cette fonction est l'une des fonctions primitives de $f(x)$. Pour calculer la dérivée de cette fonction, considérons d'abord un accroissement de celle-ci ΔS_{ax}, correspondant à un accroissement Δx de la variable indépendante x. Evidemment, nous avons (fig. 120):

$$\Delta S_{ax} = \text{aire } P_1PQQ_1.$$

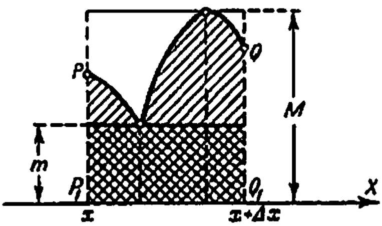

Fig. 120

Désignons par m et M, respectivement, la plus petite et la plus grande des ordonnées de la courbe $f(x)$ dans l'intervalle $(x, x + \Delta x)$. La figure curviligne P_1PQQ_1 tracée à grande échelle sur la fig. 120 est située entièrement à l'intérieur du rectangle de hauteur M et de base Δx, et contiendra le rectangle de hauteur m et de même base, de sorte que:

$$m\,\Delta x \leqslant \Delta S_{ax} \leqslant M\,\Delta x,$$

ou, en divisant par Δx:

$$m \leqslant \frac{\Delta S_{ax}}{\Delta x} \leqslant M.$$

Quand Δx tend vers zéro, les deux grandeurs m et M, en vertu de la continuité de la fonction $f(x)$, tendent vers la même limite, l'ordonnée $P_1P = f(x)$ de la courbe au point x, par suite

$$\lim \frac{\Delta S_{ax}}{\Delta x} = f(x),$$

ce que nous voulions montrer. Ce résultat étant acquis, nous pouvons formuler la règle suivante: *une intégrale définie avec une borne supérieure variable*

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

est une fonction de cette borne supérieure, et dont la dérivée est égale à la valeur de fonction à intégrer $f(x)$ pour cette borne supérieure. Autrement dit, *l'intégrale définie avec une borne supérieure variable est une fonction primitive de la fonction à intégrer.*

Ayant établi le lien entre les concepts d'intégrales définie et indéfinie, montrons maintenant, de quelle façon on peut calculer la grandeur de l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

si on connaît une fonction primitive quelconque $F(x)$ pour $f(x)$. Comme nous l'avons montré, l'intégrale définie avec une borne supérieure variable est aussi une fonction primitive pour $f(x)$, et en vertu de [III-1-1] nous pouvons écrire:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C, \tag{12}$$

où C est une constante arbitraire. Pour la détermination de cette constante nous remarquons que si dans la surface S_{ax} l'ordonnée de droite coïncide avec celle de gauche, c'est-à-dire si $x = a$, alors l'aire devient, évidemment, nulle, le premier membre de la formule (12) est donc nul pour $x = a$. Par conséquent, l'identité pour $x = a$ donne:

$$0 = F(a) + C, \text{ c'est-à-dire } C = -F(a).$$

Reportant la valeur trouvée de C dans (12), nous obtenons:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Enfin, supposant ici $x = b$, nous aurons:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) \text{ ou } \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{13}$$

Dans ce qui suit nous désignerons la différence du type $[F(b) - F(a)]$ par le symbole $F(x)\big|_a^b$.

Nous parvenons, de cette façon, à la règle suivante exprimant la valeur de l'intégrale définie par celle de la fonction primitive: *l'intégrale définie est égale à la différence des valeurs de la fonction primitive de la fonction à intégrer pour les bornes supérieure et inférieure d'intégration.*

La règle ainsi formulée montre que la recherche de la fonction primitive, c'est-à-dire la solution du premier problème du calcul intégral, nous conduit au deuxième problème, celui du calcul de l'intégrale définie, et nous délivre, de cette façon, pour le calcul de l'intégrale définie, des opérations complexes de formation de la somme (6) et de passage à la limite.

A titre d'exemple cherchons l'intégrale définie:

$$\int_0^1 x^2\,dx.$$

La fonction $\frac{1}{3}x^3$ [III-1-1] est une fonction primitive de x^2.

Utilisant la règle démontrée, nous aurons:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \frac{1}{3}.$$

Si, sans utiliser la fonction primitive, nous avions calculé directement l'intégrale définie, immédiatement à partir de sa définition comme limite d'une somme, alors nous aurions été conduit à un calcul bien plus complexe, que nous reproduisons succinctement. Découpons le segment (0, 1) en n parties égales par les points:

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < 1.$$

Dans ce cas nous avons les n segments suivants:

$$\left(0, \frac{1}{n}\right), \ \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \ \left(\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right), \ \ldots, \ \left(\frac{n-1}{n}, 1\right),$$

la longueur de chacun d'eux étant égale à $\frac{1}{n}$. Pour former la somme (6) adoptons l'extrémité gauche de l'intervalle en qualité de ξ_k, c'est-à-dire:

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \frac{1}{n}, \quad \xi_3 = \frac{2}{n}, \ \ldots, \ \xi_n = \frac{n-1}{n}.$$

Toutes les différences $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$, et remarquant que les valeurs de la fonction à intégrer $f(x) = x^2$ pour les extrémités gauches seront:

$$f(\xi_1) = 0, \quad f = (\xi_2) = \frac{1}{n^2}, \ f(\xi_3) = \frac{2^2}{n^2}, \ \ldots, \ f(\xi_n) = \frac{(n-1)^2}{n^2},$$

nous pouvons écrire:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[0\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n} + \frac{2^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}. \tag{14}$$

Pour le calcul de la somme, placée dans le numérateur, écrivons les égalités évidentes suivantes:

$$(1+1)^3 = 1 + 3\cdot 1 + 3\cdot 1^2 + 1^3$$
$$(1+2)^3 = 1 + 3\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 2^3$$
$$(1+3)^3 = 1 + 3\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + 3^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[1+(n-1)]^3 = 1 + 3(n-1) + 3(n-1)^2 + (n-1)^3$$

Par regroupement, nous obtenons :

$$2^3+3^3+\ldots+n^3=(n-1)+3\,[1+2+\ldots+(n-1)]+$$
$$+3\,[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2]+1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3.$$

Effectuant les réductions qui s'imposent et utilisant la formule de la somme d'une progression arithmétique, nous pouvons écrire :

$$n^3=(n-1)+3\frac{n(n-1)}{2}+3\,[1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2]+1,$$

d'où

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2=\frac{n^3-n}{3}-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

Reportant l'expression obtenue dans (14), nous obtenons :

$$\int_0^1 x^2\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Ayant expliqué les problèmes fondamentaux du calcul intégral et le lien entre eux, nous consacrerons le paragraphe suivant à l'examen plus approfondi du premier problème du calcul intégral, à savoir celui de l'étude des propriétés de l'intégrale indéfinie et de son calcul.

Nos raisonnements précédents sur l'intégrale définie étaient basés sur des considérations purement géométriques, à savoir l'examen des aires S_{ab} et S_{ax}. En particulier, la démonstration d'un fait fondamental, celui que la somme (6) possède une limite, découlait de l'hypothèse que pour chaque courbe continue il existe un nombre mesurant l'aire S_{ab}. Malgré l'évidence d'une telle hypothèse, elle n'est pas rigoureusement fondée et la seule méthode rigoureuse du point de vue mathématique serait la voie inverse : ne s'appuyant pas sur l'interprétation géométrique, démontrer directement par une voie analytique l'existence de la limite de la somme S :

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}),$$

et prendre ensuite celle-ci comme définition de l'aire S_{ab}. Cette démonstration nous la donnerons à la fin du présent chapitre avec des hypothèses relatives à la fonction $f(x)$, plus générales que sa continuité.

Remarquons encore que l'interprétation géométrique paraissait être également un point essentiel de la démonstration de cette proposition fondamentale, que sous réserve de la continuité de la fonction à intégrer, la dérivée de l'intégrale définie par rapport à la borne supérieure est égale à la valeur de la fonction sous le signe d'intégration pour la borne supérieure. Dans le paragraphe suivant du présent chapitre nous donnerons la démonstration analytique rigoureuse de cette proposition. Associée à la démonstration de l'existence de l'intégrale définie d'une fonction continue, elle permet d'affirmer que chaque fonction continue possède une fonction primitive, c'est-à-dire une intégrale indéfinie. Plus loin nous mettrons en évidence les propriétés fondamentales de l'intégrale indéfinie, et nous considérerons que nous avons affaire seulement aux fonctions continues.

Pour l'exposé des propriétés de l'intégrale définie nous démontrerons rigoureusement la formule fondamentale (13). De cette façon, le fait de l'existence de la limite d'une somme (10) pour une fonction $f(x)$ continue demeurera le seul fait non prouvé. Cette démonstration, comme nous l'avons déjà dit, sera faite à la fin du chapitre.

III-1-4. Propriétés de l'intégrale indéfinie. Dans [III-1-1] nous avons vu que deux fonctions primitives pour une seule et même fonction ne diffèrent que d'une constante additive. Cela nous conduit à la première propriété de l'intégrale indéfinie:

I. *Si deux fonctions ou deux différentielles sont identiques, alors leurs intégrales indéfinies peuvent différer seulement d'une constante additive.*

Réciproquement, *pour prouver que deux fonctions diffèrent d'une constante additive, il suffit de démontrer que leurs dérivées (ou leurs différentielles) sont identiques.*

Les propriétés suivantes II et III découlent immédiatement de la notion d'intégrale indéfinie en tant que fonction primitive, c'est-à-dire que l'*intégrale indéfinie*

$$\int f(x)\,dx$$

est une fonction telle que sa dérivée par rapport à x est égale à la fonction à intégrer $f(x)$, ou que sa différentielle est égale à l'expression $f(x)\,dx$ sous le signe d'intégration.

II. *La dérivée de l'intégrale indéfinie est égale à la fonction à intégrer, et la différentielle est égale à l'expression sous le signe d'intégration:*

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'_x = f(x), \quad d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx. \tag{15}$$

III. Simultanément avec (15) nous avons:

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C,$$

et nous pouvons encore écrire cette formule comme [II-1-6]:

$$\int dF(x) = F(x) + C, \tag{16}$$

qui, compte tenu de II, donne la propriété: *placés côte à côte les signes d et* $\int$, *s'ils se suivent dans un ordre quelconque, se détruisent réciproquement*, à condition de convenir de négliger la constante arbitraire dans l'égalité parmi les intégrales indéfinies.

IV. *On peut sortir un facteur constant de sous le signe d'intégration*:

$$\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx + C\,*. \tag{17}$$

V. *L'intégrale d'une somme algébrique est égale à la somme algébrique des intégrales de chacun des termes*:

$$\int (u+v-w)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx - \int w\,dx + C. \tag{18}$$

Il n'est pas difficile de contrôler l'exactitude des formules (17) et (18), en dérivant les deux membres et en s'assurant de l'identité des dérivées obtenues. Par exemple pour l'égalité (17):

$$\left(\int Af(x)\,dx\right)' = Af(x),$$

$$\left(A\int f(x)\,dx + C\right)' = A\left(\int f(x)\,dx\right)' = Af(x).$$

III-1-5. Table des intégrales les plus simples. Pour dresser cette table, il suffit de lire dans l'ordre inverse la table [II-1-5] des dérivées les plus usuelles, de laquelle nous tirons:

$$\int dx = x + C,$$

$$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \text{ avec } m \neq -1,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \qquad \int e^x\,dx = e^x + C,$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

* Parfois on n'écrit pas la constante additive arbitraire après l'intégrale indéfinie, sous-entendant que l'intégrale indéfinie comprend déjà un tel terme. L'égalité (17) dans ce cas sera:

$$\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx.$$

Pour vérifier ce tableau il suffit d'établir que la dérivée du second membre de l'égalité est identique à la fonction à intégrer du premier membre. En général, sachant que telle fonction a pour dérivée une fonction donnée $f(x)$, nous connaissons par là même son intégrale indéfinie. Mais généralement, même dans les cas les plus simples, les fonctions données ne se trouvent pas dans la table des dérivées, ce qui rend le problème du calcul intégral beaucoup plus difficile que le problème du calcul différentiel. Tout consiste à ramener l'intégrale donnée à d'autres, qui soient contenues dans la table des intégrales immédiates, ainsi que des propriétés IV, V de [III-1-4].

Cette transformation exige de l'habitude et de la pratique et s'allège par l'emploi des règles fondamentales du calcul intégral exposées ci-dessous.

III-1-6. Règle d'intégration par parties. Nous savons que si u, v sont deux fonctions arbitraires de x avec des dérivées continues, alors d'après [II-1-6] :

$$d(uv) = u\,dv + v\,du \quad \text{ou} \quad u\,dv = d(uv) - v\,du.$$

En vertu des propriétés I, V et III, nous déduisons que :

$$\int u\,dv = \int [d(uv) - v\,du] + C = \int d(uv) - \int v\,du + C =$$

$$= uv - \int v\,du + C,$$

d'où l'on tire la formule d'intégration par parties :

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{19}$$

Elle remplace le calcul de l'intégrale $\int u\,dv$ par le calcul de l'intégrale $\int v\,du$, cette dernière pouvant se trouver être plus simple.

Exemples.

1. $\int \ln x\,dx.$

Posant :

$$u = \ln x, \quad dx = dv,$$

nous avons :

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = x,$$

et d'après (19) :

$$\int \ln x\,dx = x \ln x - \int x\frac{dx}{x} + C = x\ln x - x + C.$$

En pratique il n'y a pas lieu d'inscrire ces transformations particulières ; toutes ces opérations s'effectuent, si possible, mentalement :

2. $\int e^x x^2\,dx = \int x^2 e^x\,dx = \int x^2\,de^x = x^2 e^x - \int e^x\,dx^2 = x^2 e^x - 2\int e^x x\,dx,$

$$\int e^x x\,dx = \int x\,de^x = xe^x - \int e^x\,dx = e^x x - e^x,$$

qui donne enfin :

$$\int e^x x^2\,dx = e^x\,[x^2 - 2x + 2] + C.$$

3. $\int \sin x \cdot x^3 dx = \int x^3 \sin x\,dx = \int x^3 d\,(-\cos x) =$

$= -x^3\cos x - \int (-\cos x)\,dx^3 = -x^3\cos x + 3\int x^2\cos x\,dx =$

$= -x^3\cos x + 3\int x^2 d\sin x = -x^3\cos x + 3x^2\sin x -$

$-3\int \sin x\,dx^2 = -x^3\cos x + 3x^2\sin x - 6\int x\sin x\,dx =$

$= -x^3\cos x + 3x^2\sin x - 6\int x d\,(-\cos x) =$

$= -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\int \cos x\,dx =$

$= -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x + C.$

La méthode, développée dans ces exemples, est employée surtout pour le calcul des intégrales du type :

$$\int e^{ax}x^m\,dx, \quad \int \sin bx\,x^m dx, \quad \int \cos bx\,x^m dx,$$

où m est un nombre entier positif quelconque : il faut seulement veiller à ce qu'au cours des opérations successives, le degré de x s'abaisse, jusqu'à ce qu'il devienne nul.

III-1-7. Intégration par changement de variables. Exemples. On peut souvent simplifier l'intégrale $\int f(x)\,dx$, en introduisant au lieu de x une nouvelle variable t, en posant

$$x = \varphi(t). \tag{20}$$

La règle du changement de variable dans l'intégrale indéfinie d'après la formule (20) *revient tout simplement à remplacer dans cette intégrale l'expression sous le signe somme en fonction de la nouvelle variable t :*

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt + C. \tag{21}$$

Pour la démonstration, en vertu de la propriété I [III-1-4] il nous faut établir que les différentielles des membres de gauche et de droite de la formule (21) coïncident. Prenant les différentielles, nous avons :

$$d\left(\int f(x)\,dx\right)=f(x)\,dx=f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

$$d\left(\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt\right)=f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Souvent on emploie au lieu de (20) la substitution inverse :

$$t=\psi(x)$$

et

$$\psi'(x)\,dx=dt.$$

Exemples.

1. $\int (ax+b)^m\,dx$ (pour $m\neq -1$).

Pour simplifier l'intégrale, posons :

$$ax+b=t,\quad a\,dx=dt,\quad dx=\frac{dt}{a},$$

et opérant cette substitution dans l'intégrale donnée, nous trouvons :

$$\int (ax+b)^m\,dx=\frac{1}{a}\int t^m\,dt=\frac{1}{a}\,\frac{t^{m+1}}{m+1}+C=\frac{1}{a}\,\frac{(ax+b)^{m+1}}{m+1}+C.$$

2. $\displaystyle\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{a}\ln t+C=\frac{\ln(ax+b)}{a}+C.$

3. $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\int\frac{dx}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C$

$\left(\text{substitution } t=\frac{x}{a}\right)$.

4. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C.$

5. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}.$

Pour le calcul de cette intégrale nous emploierons la substitution d'Euler, dont il sera parlé plus bas de façon plus détaillée. La nouvelle variable t se présente ici d'après la formule :

$$\sqrt{x^2+a}=t-x,\quad t=x+\sqrt{x^2+a}.$$

Pour la détermination de x et dx, élevons au carré :

$$x^2+a=t^2-2tx+x^2,\quad x=\frac{t^2-a}{2t}=\frac{1}{2}\left(t-\frac{a}{t}\right),$$

$$\sqrt{x^2+a}=t-\frac{t^2-a}{2t}=\frac{t^2+a}{2t},\quad dx=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{t^2}\right)dt=\frac{1}{2}\,\frac{t^2+a}{t^2}\,dt.$$

Reportant l'ensemble dans l'intégrale donnée, nous avons :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\frac{2t}{t^2+a}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{t^2+a}{t^2}\,dt=$$

$$=\int\frac{dt}{t}=\ln t+C=\ln(x+\sqrt{x^2+a})+C.$$

6. L'intégrale

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}$$

se calcule à l'aide d'un procédé particulier, que nous étudierons par la suite, à savoir, à l'aide *du développement de la fonction à intégrer en fractions simples*.

Développant le dénominateur de la fonction à intégrer en facteurs :

$$x^2-a^2=(x-a)(x+a),$$

nous la présentons sous l'aspect d'une somme de fractions plus simples :

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}.$$

Pour la détermination des constantes A et B, réduisons au même dénominateur, ce qui donne l'identité :

$$1=A(x+a)+B(x-a)=(A+B)x+a(A-B),$$

qui doit avoir lieu pour toutes les valeurs de x. Cette identité sera vérifiée, si nous définissons A et B à partir des conditions

$$a(A-B)=1,\quad A+B=0,\quad A=-B=\frac{1}{2a}.$$

De cette façon, nous avons :

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right],$$

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right]=$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\ln(x-a)-\ln(x+a)\right]+C=\frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}+C.$$

7. Les intégrales d'aspect plus général :

$$\int\frac{mx+n}{x^2+px+q}\,dx$$

se réduisent à celles qui ont déjà été étudiées plus tôt, lorsque le dénominateur de la fonction à intégrer est *décomposé en carrés parfaits*. Nous avons :

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}.$$

Posons alors :

$$x+\frac{p}{2}=t, \quad x=t-\frac{p}{2}, \quad dx=dt,$$

ce qui donne :

$$mx+n=m\left(t-\frac{p}{2}\right)+n=At+B,$$

où nous avons posé $A=m$ et $B=n-\frac{mp}{2}$. Posant, enfin,

$$q-\frac{p^2}{4}=\pm a^2,$$

où on doit prendre le signe (+) ou (—) selon le premier membre de cette égalité, avec a considéré comme positif ; nous pouvons transcrire l'intégrale donnée sous la forme :

$$\int \frac{mx+n}{x^2+px+q}\,dx=\int \frac{At+B}{t^2\pm a^2}\,dt=A\int \frac{t\,dt}{t^2\pm a^2}+B\int \frac{dt}{t^2\pm a^2}.$$

La première de ces intégrales se calcule facilement, si l'on pose :

$$t^2\pm a^2=z, \qquad 2t\,dt=dz,$$

ce qui donne :

$$\int \frac{t\,dt}{t^2\pm a^2}=\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z}=\frac{1}{2}\ln z=\frac{1}{2}\ln(t^2\pm a^2).$$

La deuxième intégrale possède l'aspect, examiné dans les exemples 3 (+) et 6 (—).

8. Les intégrales de la forme

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx$$

se réduisent à celles qui ont été étudiées plus haut avec le même procédé de la décomposition en carrés parfaits. Utilisant les symboles de l'exemple (7), nous pouvons transcrire l'intégrale donnée sous la forme :

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx=\int \frac{At+B}{\sqrt{t^2+b}}\,dt=$$

$$=A\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+b}}+B\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+b}}\left(b=\pm a^2=q-\frac{p^2}{4}\right).$$

La première de ces intégrales se calcule à l'aide de la substitution :

$$t^2+b=z^2, \quad 2t\,dt=2z\,dz,$$

laquelle donne :

$$\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+b}}=\int \frac{z\,dz}{z}=\int dz=z=\sqrt{t^2+b}.$$

La deuxième intégrale a été déjà étudiée dans l'exemple 5 et est égale à $\ln(t+\sqrt{t^2+b})$.

9. Avec le procédé analogue de la décomposition en carrés parfaits, on peut transformer l'intégrale

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{q+px-x^2}}\,dx$$

sous l'aspect :

$$A_1\int \frac{t\,dt}{\sqrt{a^2-t^2}}+B_1\int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}},$$

et nous avons :

$$\int \frac{t\,dt}{\sqrt{a^2-t^2}}=-\sqrt{a^2-t^2}+C$$

à l'aide de la substitution $a^2-t^2=z^2$. La deuxième intégrale a été étudiée dans l'exemple 4.

10. $$\int \sin^2 x\,dx=\int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C=$$
$$=\frac{1}{2}(x-\sin x\cos x)+C.$$

$$\int \cos^2 x\,dx=\int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C=$$
$$=\frac{1}{2}(x+\sin x\cos x)+C.$$

11. L'intégrale

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx$$

se présente sous une forme déjà étudiée à l'aide de l'intégration par parties :

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx=x\sqrt{x^2+a}-\int x\cdot d\sqrt{x^2+a}=$$
$$=x\sqrt{x^2+a}-\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}\,dx.$$

Ajoutant et soustrayant a dans le numérateur de la fonction à intégrer de la dernière intégrale, nous transcrivons l'égalité précédente sous la forme :

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx=x\sqrt{x^2+a}-\int \sqrt{x^2+a}\,dx+a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}},$$

ou

$$2\int \sqrt{x^2+a}\,dx=x\sqrt{x^2+a}+a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}},$$

d'où enfin :

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a}+a\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)\right]+C.$$

III-1-8. Exemples d'équations différentielles du premier ordre. Au paragraphe [II-1-7] nous avons examiné les équations différentielles les plus simples. L'équation différentielle la plus générale du premier ordre a l'aspect suivant:

$$F(x, y, y') = 0.$$

C'est une relation, liant la variable indépendante x, la fonction inconnue y et sa dérivée première y'. On peut généralement résoudre cette équation par rapport à y' et l'écrire sous la forme:

$$y' = f(x, y),$$

où $f(x, y)$ est une fonction connue de x et y.

Ne considérant pas cette équation dans le cas général, ce qui sera fait dans le deuxième tome, nous nous arrêterons seulement à quelques exemples les plus simples.

Equation aux variables séparées,— cas où la fonction $f(x, y)$ se présente sous la forme d'un rapport de deux fonctions, dont l'une dépend seulement de x et l'autre seulement de y:

$$y' = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)}. \tag{22}$$

Se rappelant que $y' = \frac{dy}{dx}$, nous pouvons écrire cette équation sous la forme:

$$\psi(y)\,dy = \varphi(x)\,dx,$$

de sorte qu'au premier membre de l'équation n'apparaisse que la lettre x et au deuxième membre seulement la lettre y; cette transformation s'appelle *séparation des variables*. Comme

$$\psi(y)\,dy = d\int \psi(y)\,dy, \quad \varphi(x)\,dx = d\int \varphi(x)\,dx,$$

en vertu de la propriété I [III-1-4] nous obtenons:

$$\int \psi(y)\,dy = \int \varphi(x)\,dx + C, \tag{23}$$

d'où on peut, en prenant les intégrales, déterminer la fonction cherchée y.

E x e m p l e s. 1. *Réactions chimiques du 1^er^ ordre.* Désignant par a la quantité de matière, existant au départ d'une réaction, et par x la quantité de matière, entrée en réaction au moment t, nous avons [II-1-7] l'équation:

$$\frac{dx}{dt} = c(a - x), \tag{24}$$

où c est la constante de réaction. De plus nous avons la condition:

$$x|_{t=0} = 0. \tag{25}$$

Séparant les variables, nous trouvons:

$$\frac{dx}{a-x} = c\,dt,$$

ou, en intégrant:

$$\int \frac{dx}{a-x} = \int c\,dt + C_1; \qquad -\ln(a-x) = ct + C_1,$$

où C_1 est une constante arbitraire. D'où nous extrayons:

$$a - x = e^{-ct-C_1} = Ce^{-ct},$$

où $C=e^{-C_1}$ est aussi une constante arbitraire. On peut la déterminer à partir de la condition (25), en vertu de laquelle l'égalité précédente pour $t=0$ donne $a=$ $=C$, soit finalement:

$$x=a(1-e^{-ct}).$$

2. *Réactions chimiques du 2ᵉ ordre.* Soit deux substances se trouvant dans une solution, dont les quantités au début de la réaction ont pour expression en molécules-grammes a et b. Admettons qu'au moment t entrent en réaction des quantités égales de chaque substance, que nous désignerons par x, de sorte que les quantités de substances qui restent sont $a-x$ et $b-x$.

D'après la loi fondamentale des réactions chimiques du deuxième ordre la vitesse de la réaction est proportionnelle aux produits de ces quantités restantes, c'est-à-dire:

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x).$$

Il faut intégrer cette équation avec la condition initiale

$$x|_{t=0}=0.$$

Séparant les variables, nous avons:

$$\frac{dx}{(a-x)(b-x)}=k\,dt,$$

ou, en intégrant

$$\int\frac{dx}{(a-x)(b-x)}=kt+C_1, \tag{26}$$

où C_1 est une constante arbitraire.

Pour le calcul de l'intégrale du premier membre, nous appliquerons la méthode de la décomposition en fractions simples (exemple 6) [III-1-7]:

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)}=\frac{A}{a-x}+\frac{B}{b-x},$$

$$1=A(b-x)+B(a-x)=-(A+B)x+(Ab+Ba),$$

qui donne:

$$-(A+B)=0;\quad Ab+Ba=1,$$

d'où

$$A=-B=\frac{1}{b-a},$$

de sorte que:

$$\int\frac{dx}{(a-x)(b-x)}=\frac{1}{b-a}\left[\int\frac{dx}{a-x}-\int\frac{dx}{b-x}\right]=\frac{1}{b-a}\ln\frac{b-x}{a-x}.$$

Substituant dans (26) nous avons:

$$\ln\frac{b-x}{a-x}=(b-a)kt+(b-a)C_1,$$

$$\frac{b-x}{a-x}=Ce^{(b-a)kt},$$

où $C=e^{(b-a)C_1}$. La fonction cherchée x s'en déduit sans aucune difficulté.

Nous proposons au lecteur d'analyser le cas particulier où $a = b$, quand les formules précédentes perdent leur sens.

3. *Trouver toutes les courbes, coupant sous un angle constant donné les rayons vecteurs, issus de l'origine des coordonnées* * (fig. 121). Soit $M(x, y)$ un point de la courbe cherchée. D'après la figure nous avons:

$$\omega = \alpha - \theta,$$

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}(\alpha - \theta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\theta} = \frac{y' - \frac{y}{x}}{1 + y'\frac{y}{x}}.$$

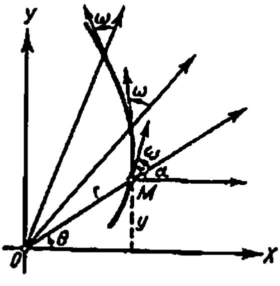

Fig. 121

Désignant pour la commodité du calcul

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{a}$$

et, en supprimant les dénominateurs, écrivons l'équation différentielle obtenue sous la forme:

$$x + yy' = a(y'x - y)$$

ou, multipliant les deux membres par dx:

$$x\,dx + y\,dy = a(x\,dy - y\,dx). \tag{27}$$

Cette équation s'intègre très simplement, en passant des coordonnées rectangulaires x, y aux polaires r, θ en prenant l'axe OX comme axe polaire et l'origine des coordonnées O comme pôle. Nous avons [II-5-18]:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},$$

ce qui donne:

$$x\,dx + y\,dy = r\,dr, \quad d\theta = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}}\, d\frac{y}{x} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}.$$

L'équation (27) s'écrit par suite sous la forme:

$$r\,dr = ar^2\,d\theta \quad \text{ou} \quad \frac{dr}{r} = a\,d\theta.$$

En intégrant, nous en déduisons:

$$\ln r = a\theta + C_1, \quad \text{c.-à-d.} \quad r = Ce^{a\theta}, \quad \text{où } C = e^{C_1}.$$

Les courbes obtenues s'appellent spirales logarithmiques.

III-2. Propriétés des intégrales définies

III-2-1. Propriétés fondamentales des intégrales définies. Nous avons vu que l'intégrale définie

$$I = \int_a^b f(x)\,dx, \quad a < b, \tag{1}$$

* D'une façon générale, par angle entre deux courbes on désigne l'angle entre leurs tangentes, issues au point d'intersection des courbes.

où (a, b) est un intervalle fini et $f(x)$, fonction continue dans cet intervalle, est la limite des sommes du type [III-1-2]:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}). \tag{2}$$

Cette limite doit être comprise de la manière suivante: pour tout ε positif fixé à l'avance il existe un nombre positif η tel que:

$$\left| I - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

pour tout choix des points ξ_k dans les intervalles (x_{k-1}, x_k) et pour tout découpage, si la plus grande des différences (positives) $x_k - x_{k-1} < \eta$.

En un mot, l'intégrale (1) est la limite des sommes (2) pour tout choix de ξ_k et toute manière suivant laquelle la plus grande des différences $x_k - x_{k-1}$ tend vers zéro.

Notons qu'alors le nombre des termes dans la somme (2) augmente indéfiniment. Rigoureusement parlant, la définition de la limite mentionnée (2) doit être comprise comme nous l'avons déjà indiqué plus haut (avec l'aide de ε et η).

A la fin du chapitre nous démontrerons l'existence de la limite susmentionnée des sommes (2) pour les fonctions continues et certaines classes de fonctions discontinues. Par la suite, sauf indication spéciale, nous estimerons que la fonction à intégrer est continue sur l'intervalle d'intégration.

Nous avons supposé que la borne inférieure a de l'intégrale est plus petite que la borne supérieure b. Si $a = b$, alors il résulte de l'interprétation de l'intégrale en tant que surface qu'il est naturel d'estimer que

$$\int_b^a f(x)\,dx = 0. \tag{3}$$

Cette égalité est la définition de l'intégrale pour le cas où la borne supérieure est égale à la borne inférieure.

Pour $a > b$ on adopte la définition suivante:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{4}$$

Dans l'intégrale figurant au second membre la borne inférieure b est plus petite que la borne supérieure a et l'intégrale peut être comprise de la manière usuelle, comme indiqué plus haut. Si nous avions construit pour l'intégrale du premier membre la somme (2), nous aurions obtenu pour elle $(a > b)$:

$$a = x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_{k-1} > x_k > \ldots > x_{n-1} > x_n = b,$$

et toutes les différences $(x_k - x_{k-1})$ sont négatives. Si nous passons à l'intégrale figurant au second membre de l'égalité (4), autrement dit, si nous estimons que a est la borne supérieure et b la borne inférieure, il faudra compter les points intermédiaires x_k dans l'ordre inverse et toutes les différences dans la somme (2) changeront de signe. Ces considérations plaident naturellement en faveur de la définition (4) dans le cas où $a > b$.

Notons l'égalité évidente

$$\int_a^b dx = \int_a^b 1\, dx = b - a. \tag{5}$$

En effet, comme la fonction à intégrer est égale à l'unité pour tout x, alors

$$\int_a^b dx = \lim [(x_1 - a) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + \\ + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (b - x_{n-1})].$$

Mais la somme figurant entre crochets est égale à la constante $(b - a)$.

Passons maintenant à l'énoncé et à la démonstration des propriétés de l'intégrale définie. Les deux premières sont les définitions exprimées par les égalités (3) et (4).

I. *L'intégrale définie avec des bornes inférieure et supérieure identiques a une valeur nulle.*

II. *Par permutation des bornes supérieure et inférieure l'intégrale définie conserve sa valeur absolue et change seulement de signe*:

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx.$$

III. *La grandeur de l'intégrale définie ne dépend pas de la désignation de la variable d'intégration*:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Ceci avait été déjà mis en évidence dans [III-1-2].

IV. *Soit la série de nombres*

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ k,\ l,$$

disposés dans un ordre quelconque, alors

$$\int_a^l f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx + \ldots + \int_k^l f(x)\, dx. \tag{6}$$

Il suffit d'établir cette formule pour le cas de trois nombres a, b, c, après quoi il n'est pas difficile d'étendre la démonstration à un nombre quelconque de termes.

Montrons-le d'abord, pour $a < b < c$. De la définition il résulte que

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

et que cette limite est unique quelle que soit la façon dont on découpe en intervalles le segment (a, c), sous réserve que la plus grande des différences $(x_i - x_{i-1})$ tende vers zéro. Nous pouvons convenir de découper le segment (a, c) de façon que le point b, se trouvant entre a et c, apparaisse à chaque fois comme un des points du découpage. Alors la somme

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

se décompose en deux sommes du même type, avec la seule différence, que pour établir l'une nous découperons en intervalles le segment (a, b) et pour établir l'autre — le segment (b, c), et que, dans les deux cas, la plus grande des différences $(x_i - x_{i-1})$ tende vers zéro. Ces deux sommes tendent respectivement vers:

$$\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_b^c f(x)\,dx,$$

et nous obtenons enfin en choisissant un ordre fixé quelconque du découpage et des points fixés ξ_i

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Supposons maintenant que b se trouve en dehors du segment (a, c), par exemple $a < c < b$. D'après la démonstration nous pouvons écrire maintenant:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

d'où

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx.$$

Et en vertu de la propriété II, nous avons:

$$-\int_c^b f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx,$$

c'est-à-dire de nouveau:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

De façon analogue, on peut examiner tous les autres cas possibles de disposition des points.

V. *On peut extraire un facteur multiplicatif constant de sous le signe d'intégrale définie*, c'est-à-dire

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx,$$

en effet,

$$\int_a^b Af(x)\,dx = \lim \sum_{i=1}^{n} Af(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= A\lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = A\int_a^b f(x)\,dx.$$

VI. *L'intégrale définie d'une somme algébrique est égale à la somme algébrique des intégrales définies de chacun de ses termes*, en effet, par exemple

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\,dx = \lim \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - \varphi(\xi_i)] \times$$

$$\times (x_i - x_{i-1}) = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \lim \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

III-2-2. Théorème de la moyenne. VII. *Si sur le segment* (a, b) *les fonctions* $f(x)$ *et* $\varphi(x)$ *satisfont à la condition*:

$$f(x) \leqslant \varphi(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{7}$$

alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx \qquad (b > a), \tag{8}$$

ou, plus brièvement, *on peut intégrer les inégalités*.

Etablissons la différence:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [\varphi(x) - f(x)]\,dx =$$

$$= \lim \sum_{i=1}^{n} [\varphi(\xi_i) - f(\xi_i)](x_i - x_{i-1}).$$

En vertu de l'inégalité (7), les termes sous le signe somme sont positifs ou, du moins, non négatifs. Par conséquent, on peut en dire autant de la somme et de sa limite, ce qui conduit à l'inégalité (8).

Donnons encore une explication géométrique de ce qui a été dit. Admettons d'abord que les deux courbes

$$y = f(x), \quad y = \varphi(x)$$

se trouvent au-dessus de l'axe OX (fig. 122). Alors la figure, limitée par la courbe $y = f(x)$, l'axe OX et les ordonnées $x = a$ et $x = b$, se trouve entièrement à l'intérieur de la figure analogue, limitée

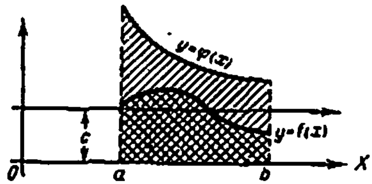

Fig. 122

à la courbe $y = \varphi(x)$, c'est pourquoi l'aire de la première figure ne dépasse pas l'aire de la deuxième, c'est-à-dire

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Le cas général d'un arrangement de courbes données placées de façon quelconque par rapport à l'axe OX et vérifiant la condition (7) se ramène au cas précédent, par une translation verticale suffisante du graphique pour que les deux courbes se trouvent au-dessus de l'axe OX ; cette translation ajoute à chacune des fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ une seule et même grandeur constante c.

Il est facile de démontrer que si dans (7) il y a le signe $<$, alors dans (8) il y a le signe $<$. Rappelons que les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont considérées comme étant continues.

C o r o l l a i r e. *Si sur le segment* (a, b)

$$|f(x)| \leqslant \varphi(x) \leqslant M, \tag{9}$$

alors

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant M(b-a), \quad b > a. \tag{10}$$

En effet, les conditions (9) sont équivalentes aux suivantes:

$$-M \leqslant -\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant +M.$$

En intégrant ces inégalités entre les bornes a à b (propriété VII) et en appliquant (5) nous obtenons:

$$-M(b-a) \leqslant -\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant M(b-a),$$

qui est équivalent aux inégalités (10).

Posant $\varphi(x) = |f(x)|$, nous tirons de (10) l'inégalité importante:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx, \tag{10$_1$}$$

qui se présente comme la généralisation au cas de l'intégrale de la propriété connue pour une somme: la valeur absolue d'une somme de termes est plus petite ou égale à la somme des valeurs absolues des termes. Dans la formule inscrite, le signe d'égalité a lieu, comme il n'est pas difficile de le voir, seulement dans le cas où $f(x)$ ne change pas de signe sur le segment (a, b).

De la propriété VII découle un théorème très important:

Théorème de la moyenne. *Si une fonction* $\varphi(x)$ *conserve un signe constant sur le segment* (a, b), *alors*

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx, \tag{11}$$

où ξ *est une valeur quelconque, appartenant au segment* (a, b).

Pour préciser nous considérerons $\varphi(x) \geqslant 0$ sur le segment (a, b) et désignerons par m et M respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs de $f(x)$ sur le segment (a, b). De sorte que

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

(les deux signes d'égalité peuvent avoir lieu en même temps, seulement quand $f(x)$ est une constante) et $\varphi(x) \geqslant 0$, alors

$$m\varphi(x) \leqslant f(x)\,\varphi(x) \leqslant M\varphi(x),$$

et en vertu de la propriété VII, considérant que $b > a$,

$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \leqslant M\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Il en résulte qu'il existe un certain nombre P, vérifiant l'inégalité $m \leqslant P \leqslant M$, tel que

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = P\int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{12}$$

Comme la fonction $f(x)$ est continue, elle possède sur le segment (a, b) toutes les valeurs, comprises entre la plus petite m et la plus grande M, et parmi elles la valeur P [I-2-11]. Par conséquent, il existe une telle valeur ξ à l'intérieur du segment (a, b), pour laquelle

$$f(\xi) = P,$$

ce qui démontre la formule (11).

Si $\varphi(x) \leqslant 0$ sur le segment (a, b) alors $-\varphi(x) \geqslant 0$ sur le segment (a, b). En appliquant le théorème qui a été démontré, nous obtenons:

$$\int_a^b f(x)[-\varphi(x)]\,dx = f(\xi)\int_a^b [-\varphi(x)]\,dx;$$

sortant le signe (—) de sous le signe d'intégration et multipliant les deux membres par (—1) nous retrouverons la formule (11).

De même, pour $b < a$, la formule:

$$\int_b^a f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_b^a \varphi(x)\,dx.$$

résulte de ce qui précède.

Permutant dans les deux membres les bornes d'intégration et multipliant par (—1) nous retrouvons la formule (11), qui a été démontrée, de cette façon, dans toute sa généralité.

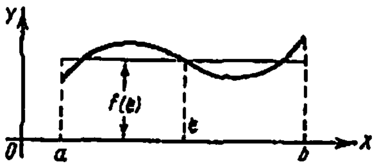

Fig. 123

En particulier, en posant $\varphi(x) = 1$, nous obtenons *l'important cas particulier du théorème de la moyenne*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b dx = f(\xi)(b-a). \tag{13}$$

La valeur de l'intégrale définie est égale au produit de la longueur du segment d'intégration par la valeur de la fonction à intégrer pour une certaine valeur de la variable indépendante prise sur le segment.

Si $a > b$, il faut prendre cette longueur avec le signe (—). La proposition géométrique équivalente est que, si on considère l'aire limitée par une courbe quelconque, l'axe OX et les deux ordonnées $x = a$, $x = b$, on peut toujours trouver un rectangle ayant la même surface, de même base $(b - a)$ et dont la hauteur *est égale à l'une des ordonnées de la courbe sur le segment* (a, b) (fig. 123).

Il n'est pas difficile de montrer que le nombre ξ, entrant dans la formule (11) ou (13), peut toujours être considéré comme se trouvant à l'intérieur du segment (a, b).

III-2-3. Existence de la fonction primitive. VIII. *Si la borne supérieure de l'intégrale définie est une grandeur variable, alors la dérivée de l'intégrale par rapport à la borne supérieure est égale à la valeur de la fonction à intégrer pour cette borne supérieure.*

Remarquons que la grandeur de l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

pour une fonction à intégrer donnée dépend des bornes d'intégration a et b. Considérons l'intégrale

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

ayant une limite inférieure constante a et une borne supérieure variable x, avec une variable d'intégration que nous désignons par la lettre t pour la distinguer de la borne supérieure x. La valeur de cette intégrale sera une fonction de la borne supérieure x:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt, \tag{14}$$

et il faut montrer que

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x).$$

Pour la démonstration, nous calculerons la dérivée de la fonction $F(x)$ à partir de la définition de la dérivée [II-1-1]:

$$\frac{dF(x)}{dx}=\lim_{h\to\pm 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}.$$

Nous avons:

$$F(x+h)=\int_a^{x+h} f(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

(en vertu de la propriété IV), d'où

$$F(x+h)=F(x)+\int_x^{x+h} f(t)\,dt,$$

et

$$F(a)=\int_a^a f(t)\,dt=0.$$

Utilisant (13), nous avons:

$$F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} f(t)\,dt=f(\xi)\,h,$$

où h peut être aussi bien positif que négatif, si $a<x<b$; $h>0$ pour $x=a$ et $h<0$ pour $x=b$. Le nombre ξ appartient à l'intervalle dont les extrémités sont x et $x+h$ de sorte que si h tend vers zéro, alors ξ tendra vers x et $f(\xi)$ vers $f(x)$ en vertu de la continuité de cette fonction. Il découle immédiatement de cette dernière formule que $F(x)$ est une fonction continue pour $a\leqslant x\leqslant b$, autrement dit, *l'intégrale définie considérée comme une fonction de sa borne supérieure est une fonction continue dans l'intervalle* (a, b). Divisant les deux parties de cette dernière formule par h:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(\xi)$$

et faisant tendre h vers zéro ($h \to +0$ pour $x = a$ et $h \to -0$ pour $x = b$), nous obtenons:

$$F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\lim_{\xi\to x} f(\xi)=f(x).$$

Nous avons déjà parlé de la définition de la dérivée aux extrémités d'un intervalle fermé au paragraphe [II-1-2].

Des raisonnements précédents, il résulte aussi que:

IX. *Toute fonction continue $f(x)$ possède une fonction primitive ou une intégrale indéfinie.*

La fonction (14) est la fonction primitive de $f(x)$, qui s'annule pour $x = a$.

Si $F_1(x)$ *est une des expressions de la fonction primitive*, comme nous avons vu dans [III-1-3]:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F_1(b)-F_1(a). \tag{15}$$

III-2-4. Cas des fonctions discontinues sous le signe d'intégrale. Dans tous les raisonnements qui ont précédé, il a été supposé que la fonction à intégrer $f(x)$ était continue sur tout l'intervalle d'intégration (a, b).

Introduisons maintenant le concept d'intégrale pour des fonctions discontinues quelconques.

Si dans l'intervalle (a, b) se trouve un point c, pour lequel la fonction à intégrer $f(x)$ possède une discontinuité, mais les intégrales

$$\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)\,dx, \qquad \int_{c+\varepsilon''}^{b} f(x)\,dx \qquad (a<b)$$

tendent vers des limites déterminées, quand les nombres positifs ε' et ε'' tendent vers zéro, ces limites s'appellent intégrales définies de la fonction $f(x)$, prises respectivement entre les bornes (a, c) et (c, b), c'est-à-dire:

$$\int_a^c f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon'\to+0}\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)\,dx,$$

$$\int_c^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon''\to+0}\int_{c+\varepsilon''}^{b} f(x)\,dx,$$

si ces limites existent.

Nous obtenons dans ce cas:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

La fonction $F(x)$ définie par la formule (14) possède, comme il n'est pas difficile de le voir, les propriétés suivantes:

$F'(x) = f(x)$ pour tous les points (a, b), excepté $x = c$, et $F(x)$ est continue dans tout l'intervalle (a, b), y compris $x = c$.

Si le point c coïncide avec l'une des extrémités de l'intervalle (a, b) il faut considérer au lieu des deux, seulement une des limites:

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \quad \text{ou} \quad \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Enfin, s'il n'y a pas un mais plusieurs points de discontinuité dans l'intervalle (a, b), il faut découper l'intervalle en parties, dans chacune desquelles il n'y a qu'un point de discontinuité.

Compte tenu de la convention ci-dessus sur le sens du symbole,

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

la propriété IX *et la formule* (15)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F_1(b) - F_1(a)$$

auront probablement lieu, si $F_1'(x) = f(x)$ pour tous les points (a, b), hormis $x = c$, et $F_1(x)$ est continue dans tout l'intervalle (a, b) y compris $x = c$.

Il suffit de le démontrer dans le cas d'un point de discontinuité c à l'intérieur de l'intervalle (a, b); car le cas de plusieurs points de discontinuité ainsi que le cas où $c = a$ ou b, sont étudiés de façon analogue.

Comme dans les intervalles $(a, c - \varepsilon')$, $(c + \varepsilon'', b)$ la fonction $f(x)$ est continue, la formule (15) est donc valable ici, et nous avons:

$$\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)\,dx = F_1(c - \varepsilon') - F_1(a),$$

$$\int_{c+\varepsilon''}^{b} f(x)\,dx = F_1(b) - F_1(c + \varepsilon'').$$

En vertu de la discontinuité de $F_1(x)$ nous pouvons écrire:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon' \to +0} [F_1(c - \varepsilon') - F_1(a)] = F_1(c) - F_1(a),$$

$$\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon'' \to +0} [F_1(b) - F_1(c + \varepsilon'')] = F_1(b) - F_1(c),$$

c'est-à-dire

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx =$$

$$= [F_1(c) - F_1(a)] + [F_1(b) - F_1(c)] = F_1(b) - F_1(a),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Du point de vue géométrique, ce cas se rencontre quand la courbe $y = f(x)$ possède une discontinuité en un point c, mais de façon que *la surface* de la courbe existe tout de même. Considérons, par exemple, le graphique de la fonction, définie de la façon suivante:

$$f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad 0\leqslant x<2,$$

$$f(x)=x \quad \text{pour} \quad 2\leqslant x\leqslant 3$$

(fig. 124). L'aire délimitée par cette courbe, l'axe OX, l'ordonnée $x = 0$ et l'ordonnée variable $x = x_1$, est une fonction continue de x, bien que la fonction $f(x)$ présente une discontinuité pour $x = 2$.

D'autre part, il n'est pas difficile de trouver une fonction primitive pour $f(x)$, qui soit continue sur tout le segment $(0, 3)$. Cela sera, par exemple, la fonction $F_1(x)$, présentant la forme suivante:

$$F_1(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2} \quad \text{pour} \quad 0\leqslant x\leqslant 2,$$

$$F_1(x)=\frac{x^2}{2} \quad \text{pour} \quad 2\leqslant x\leqslant 3.$$

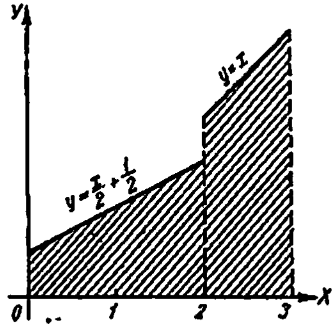

Fig. 124

Effectivement, en différentiant, on se convainc que

$$F_1'(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$$

sur le segment $(0, 2)$ et $F_1'(x) = x$ sur le segment $(2, 3)$. Les deux expressions de $F_1(x)$ écrites ci-dessus donnent pour $x = 2$ une seule et même valeur 2, qui assure la continuité de $F_1(x)$. L'aire, délimitée par notre courbe, l'axe OX et les ordonnées $x = 0$, $x = 3$, est représentée par la formule:

$$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^3 f(x)\,dx=F_1(3)-F_1(0)=\frac{9}{2},$$

ce dont il n'est pas difficile de se convaincre en considérant la figure.

Considérons encore la fonction $y = x^{-2/3}$ (fig. 125). Elle présente une branche infinie pour $x = 0$, mais sa fonction primitive $3x^{1/3}$ reste continue pour cette valeur de x, c'est pourquoi nous pouvons écrire:

$$\int_{-1}^{+1} x^{-2/3}\,dx=3x^{1/3}\Big|_{-1}^{+1}=6;$$

en d'autres termes, quoique la courbe considérée pour x voisine de zéro s'éloigne à l'infini, elle possède néanmoins une aire véritablement définie entre les ordonnées $x = -1$ et $x = 1$.

Pour la fonction $\frac{1}{x^2}$ la fonction primitive $\left(-\frac{1}{x}\right)$ devient infinie pour $x = 0$, la formule (15) est inapplicable pour cette fonction dans le cas, où le point 0 se trouve à l'intérieur du segment (a, b); la courbe $\frac{1}{x^2}$ dans cet intervalle ne possède pas d'aire finie.

Notons que dans certains cas les intégrales des fonctions discontinues dans un intervalle fini (a, b) ont aussi un sens découlant immédiatement de la notion de limite des sommes indiquées au début de [III-2-1]. Cela sera le cas par exemple quand $f(x)$ aura un nombre fini de points de discontinuité sur l'intervalle (a, b) et est bornée sur cet intervalle, autrement dit, il existe un nombre positif M tel que $|f(x)| < M$ pour tous les x de (a, b). Les valeurs

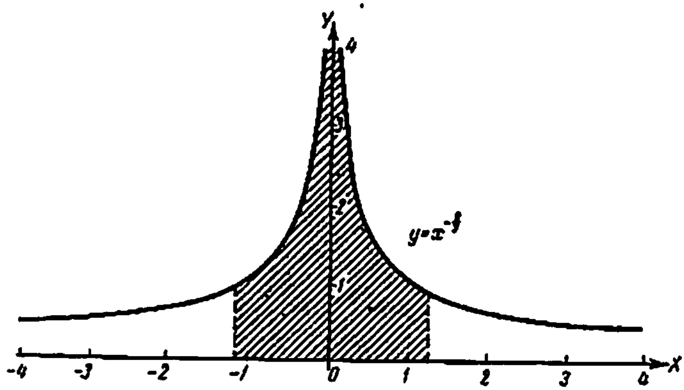

Fig. 125

aux points de discontinuité n'influent pas sur la valeur de l'intégrale. Nous en parlerons dans [III-4-3]. Si par contre la fonction $f(x)$ n'est pas bornée, c'est-à-dire si $|f(x)|$ prend des valeurs arbitrairement grandes, il n'est plus possible de définir directement l'intégrale en tant que limite d'une somme. Cela a lieu pour l'exemple correspondant à la fig. 125. Il est ici nécessaire de définir l'intégrale comme une intégrale sur un intervalle raccourci en passant ensuite à la limite

$$\int_{-1}^{+1} x^{-\frac{2}{3}}\,dx = \lim_{\varepsilon' \to -0} \int_{-1}^{\varepsilon'} x^{-\frac{2}{3}}\,dx + \lim_{\varepsilon'' \to +0} \int_{\varepsilon''}^{1} x^{-\frac{2}{3}}\,dx.$$

De telles intégrales sont usuellement appelées intégrales *impropres*.

Pour la fonction $\frac{1}{x^2}$ il n'existe pas de limite finie

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = +\infty.$$

De telles intégrales sont dites *divergentes*. L'intégrale mentionnée plus haut de $x^{-2/3}$ est dite *convergente* car les limites indiquées plus haut existent quand $\varepsilon' \to -0$ et $\varepsilon'' \to +0$.

Dans le paragraphe suivant nous allons considérer les intégrales impropres sur un intervalle infini. Dans ce dernier cas il n'est pas possible de définir directement l'intégrale en tant que limite de somme et l'intégrale est foncièrement impropre.

III-2-5. Limites d'intégration infinies. On peut étendre les raisonnements précédents au cas *du segment infini*, et poser

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx, \tag{16}$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx; \tag{17}$$

si ces limites existent.

Cette condition est effectivement remplie, si la fonction primitive $F_1(x)$ tend vers des limites finies, quand x tend vers $(+\infty)$ ou $(-\infty)$. Désignant simplement ces limites par $F_1(+\infty)$ et $F_1(-\infty)$, nous aurons:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}[F_1(b)-F_1(a)] = F_1(+\infty)-F_1(a), \tag{18}$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}[F_1(b)-F_1(a)] = F_1(b)-F_1(-\infty), \tag{19}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx = F_1(+\infty)-F_1(-\infty), \tag{20}$$

ce qui apparaît comme une généralisation de la formule (15) au cas d'un segment infini.

Souvent on écrit la relation (16) sous la forme

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Du point de vue géométrique, quand la condition précédente est remplie, nous pouvons dire que la branche infinie de la courbe $y = f(x)$ qui correspond à $x \to \pm\infty$ a une surface.

Si les limites (16) et (17) existent alors on dit que les intégrales correspondantes *convergent* ou que ce sont des intégrales convergentes. Dans le cas contraire on dit que les intégrales *divergent*.

Exemple. La courbe $y=\frac{1}{1+x^2}$, s'éloignant à l'infini pour $x = \pm\infty$, limite cependant avec l'axe OX une aire finie (fig. 126), telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Pour le calcul de cette intégrale il convient de se rappeler que pour la fonction arc tg x il ne faut pas prendre n'importe quelle détermination de cette fonction à plusieurs déterminations, mais précisément celle définie dans [I-1-24],

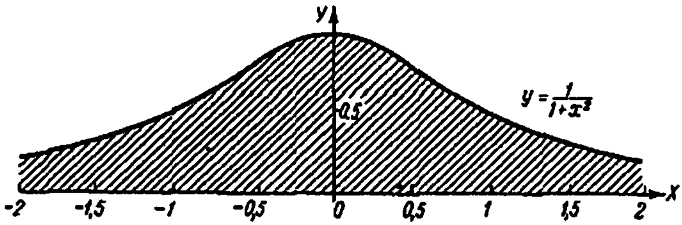

Fig. 126

pour laquelle on avait retenu une détermination unique, c'est-à-dire entre $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$; dans le cas contraire la formule qui précède perd son sens.

III-2-6. Changement de variable pour une intégrale définie. Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle (a, b), ou même dans l'intervalle plus large (A, B), dont il sera question ci-dessous. Soit aussi la fonction $\varphi(t)$ univoque, continue qui possède une dérivée continue $\varphi'(t)$ dans l'intervalle (α, β), de sorte que:

$$\varphi(\alpha) = a \quad \text{et} \quad \varphi(\beta) = b. \tag{21}$$

Posons encore que les valeurs $\varphi(t)$ pour les variations de t dans l'intervalle (α, β) ne sortent pas de l'intervalle (a, b) ou du plus grand intervalle (A, B), dans lequel $f(x)$ est continue. La fonction composée $f[\varphi(t)]$ est alors une fonction continue de t dans l'intervalle (α, β).

Avec les hypothèses choisies, si on introduit au lieu de x la nouvelle variable d'intégration t:

$$x = \varphi(t), \tag{22}$$

l'intégrale définie se présente sous la formule:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{23}$$

Introduisons au lieu des intégrales envisagées, les intégrales avec bornes variables:

$$F(x) = \int_a^x f(y)\,dy, \quad \Psi(t) = \int_\alpha^t f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz$$

En vertu de (22) $F(x)$ est une fonction composée de t:

$$F(x) = F[\varphi(t)] = \int_a^{\varphi(t)} f(y)\,dy.$$

Calculant sa dérivée d'après la règle de différentiation des fonctions composées, nous avons:

$$\frac{dF(x)}{dt} = \frac{dF(x)}{dx}\frac{dx}{dt},$$

et en vertu de la propriété VIII [III-2-3],

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x);$$

et de la formule (22), il résulte que:

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t),$$

d'où

$$\frac{dF(x)}{dt} = f(x)\,\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t).$$

Calculons maintenant la dérivée de la fonction $\Psi(t)$. En vertu de la propriété VIII et des hypothèses que nous avons énoncées, nous avons:

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t).$$

Les fonctions $\Psi(t)$ et $F(x)$, considérées comme fonctions de t, possèdent, de cette façon, des dérivées égales dans l'intervalle (α, β), et d'après [III-1-4] elles ne peuvent différer que d'une constante additionnelle, mais pour $t = \alpha$ nous avons:

$$x = \varphi(\alpha) = a, \quad F(x)|_{t=\alpha} = F(a) = 0, \quad \Psi(\alpha) = 0,$$

parce que ces deux fonctions sont égales pour $t = \alpha$; elles le sont par suite pour toutes les valeurs de t dans l'intervalle (α, β). En particulier, pour $t = \beta$ nous avons:

$$F(x)|_{t=\beta} = F(b) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Bien souvent à la place de la substitution (22):

$$x = \varphi(t)$$

on emploie la substitution inverse

$$t = \psi(x). \tag{24}$$

Alors les bornes α et β se définissent d'emblée d'après les formules:

$$\alpha = \psi(a), \quad \beta = \psi(b),$$

mais il faut ici garder à l'esprit que *l'expression* (22), *que nous obtenons pour* x, *si nous résolvons l'équation* (24) *relativement à* x, *doit satisfaire à toutes les conditions indiquées plus haut*, en particulier, la fonction $\varphi(t)$ doit être une fonction univoque de t. Si $\varphi(t)$ ne remplit pas cette condition, la formule (23) peut se trouver en défaut.

Introduisant dans l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} dx = 2$$

à la place de x la nouvelle variable indépendante t d'après la formule

$$t = x^2,$$

dans la partie droite de la formule (23), nous obtenons l'intégrale avec les bornes uniques $+1$, $+1$, égale, par conséquent, à zéro, ce qui n'est pas possible. La faute se produit par ce que l'expression x donnée par t:

$$x = \pm\sqrt{t}$$

est une fonction multivoque.

Exemple. La fonction $f(x)$ s'appelle *fonction paire* de x, si $f(-x) = f(x)$, et *fonction impaire*, si $f(-x) = -f(x)$. Par exemple, $\cos x$ est une fonction paire et $\sin x$ une fonction impaire.

Montrons que

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx,$$

si $f(x)$ est paire, et

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0,$$

si $f(x)$ est impaire.

Décomposons l'intégrale en deux [III-2-1, IV]:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Dans la première intégrale, effectuons le changement de variable $x = -t$ et appliquons les propriétés II et III [III-2-1]:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx,$$

d'où, en reportant dans la formule précédente:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} [f(-x) + f(x)]\,dx.$$

Si $f(x)$ est une fonction paire, alors la somme $[f(-x) + f(x)]$ est égale à $2f(x)$, et si $f(x)$ est impaire, alors cette somme est égale à zéro, ce qui prouve notre affirmation.

III-2-7. Intégration par parties. *La formule d'intégration par parties* [III-1-6] *pour des intégrales définies peut être écrite sous la forme*:

$$\int_{a}^{b} u(x)\,dv(x) = u(x)\,v(x)\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v(x)\,du(x). \qquad (25)$$

Effectivement, en intégrant terme à terme l'identité [III-1-6]

$$u(x)\,dv(x)=d\,[u(x)\,v(x)]-v(x)\,du(x),$$

nous obtenons

$$\int_a^b u(x)\,dv(x)=\int_a^b d\,[u(x)\,v(x)]-\int_a^b v(x)\,du(x)$$

et en vertu de la propriété IX [III-2-3]:

$$\int_a^b d\,[u(x)\,v(x)]=\int_a^b \frac{d\,[u(x)\,v(x)]}{dx}\,dx=u(x)\,v(x)\Big|_a^b,$$

ce qui donne la formule (25). On considère, bien sûr, que $u(x)$ et $v(x)$ possèdent des dérivées continues dans l'intervalle (a, b).

Exemple. Calculons les intégrales

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx,\quad \int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx.$$

Posons

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx.$$

En intégrant par parties, nous avons:

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^{n-1}x\sin x\,dx=-\int_0^{\pi/2}\sin^{n-1}x\,d\cos x=$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}(n-1)\sin^{n-2}x\cos x\cdot\cos x\,dx=$$

$$=(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx=(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\,(1-\sin^2 x)\,dx=$$

$$=(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx=(n-1)\,I_{n-2}-(n-1)\,I_n,$$

c'est-à-dire

$$I_n=(n-1)\,I_{n-2}-(n-1)\,I_n,$$

d'où, en résolvant par rapport à I_n:

$$I_n=\frac{n-1}{n}\,I_{n-2}. \tag{26}$$

Cette formule s'appelle *formule de récurrence*, car elle conduit le calcul de l'intégrale I_n à une intégrale semblable, mais avec un indice plus faible $(n-2)$.

Distinguons maintenant deux cas, selon que n est un nombre pair ou impair.

1. $n=2k$ (pair). Nous avons en vertu de (26):

$$I_{2k}=\frac{2k-1}{2k}\,I_{2k-2}=\frac{(2k-1)(2k-3)}{2k\cdot(2k-2)}\,I_{2k-4}=\ldots=\frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 3\cdot 1}{2k\,(2k-2)\ldots 4\cdot 2}\,I_0,$$

et puisque

$$I_0=\int_0^{\pi/2} dx=\frac{\pi}{2},$$

finalement

$$I_{2k}=\frac{(2k-1)(2k-3)\dots 3\cdot 1}{2k(2k-2)\dots 4\cdot 2}\,\frac{\pi}{2}.$$

2. $n=2k+1$ (impair). Nous obtenons de la même façon que précédemment :

$$I_{2k+1}=\frac{2k(2k-2)\dots 4\cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\dots 5\cdot 3}I_1,$$

$$I_1=\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi/2}=1,$$

et donc

$$I_{2k+1}=\frac{2k(2k-2)\dots 4\cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\dots 5\cdot 3}.$$

L'intégrale

$$\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx$$

peut se calculer par la même voie, mais aussi plus simplement, en la réduisant à la forme précédente, ayant remarqué en effet que,

$$\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx=\int_0^{\pi/2}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx,$$

d'où, ayant posé

$$\frac{\pi}{2}-x=t,\qquad x=\frac{\pi}{2}-t,$$

et par application de la formule (23) et de la propriété II [III-2-1] nous avons :

$$\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx=-\int_{\pi/2}^{0}\sin^n t\,dt=\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,dt.$$

Regroupant les résultats obtenus, nous pouvons écrire :

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2k}x\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos^{2k}x\,dx=\frac{(2k-1)(2k-3)\dots 3\cdot 1}{2k(2k-2)\dots 4\cdot 2}\,\frac{\pi}{2},\tag{27}$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2k+1}x\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos^{2k+1}x\,dx=\frac{2k(2k-2)\dots 4\cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\dots 5\cdot 3}.\tag{28}$$

III-3. Compléments sur la notion d'intégrale définie

III-3-1. Calcul des surfaces. Nous passons à l'application de la notion d'intégrale définie au calcul des surfaces, des volumes et des longueurs des arcs. Nous utiliserons alors pour beaucoup les considérations concrètes. Nous donnerons une définition exacte des surfaces et des volumes de divers points de vue, dans les tomes suivants.

Dans [III-1-2] nous avons vu que la surface, limitée à une courbe donnée $y=f(x)$, l'axe OX et deux ordonnées $x=a$ et

$x = b$, se représentait par l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad (a < b).$$

Cette intégrale, comme nous l'avons vu, donne la somme algébrique des surfaces dans laquelle chaque surface située sous l'axe OX porte le signe (—).

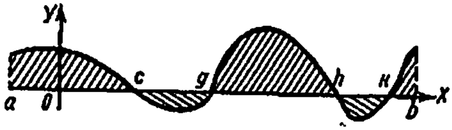

Fig. 127

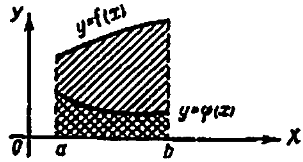

Fig. 128

Pour obtenir la somme de ces aires au sens habituel il faut calculer

$$\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Ainsi la somme des aires hachurées sur la fig. 127 est égale à :

$$\int_a^c f(x)\,dx - \int_c^g f(x)\,dx + \int_g^h f(x)\,dx - \int_h^k f(x)\,dx + \int_k^b f(x)\,dx.$$

L'aire, comprise entre les deux courbes :

$$y = f(x), \qquad y = \varphi(x) \tag{1}$$

et les deux ordonnées :

$$x = a, \qquad x = b,$$

dans le cas, où l'une des courbes est au-dessus de l'autre, c'est-à-dire quand

$$f(x) > \varphi(x)$$

dans l'intervalle (a, b), *s'exprime par l'intégrale définie*

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\,dx. \tag{2}$$

Admettons d'abord que les deux courbes sont au-dessus de l'axe OX. On voit immédiatement sur la fig. 128 que l'aire cherchée S est égale à la différence des aires, limitées par les courbes données et l'axe OX :

$$S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\,dx,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Le cas général de n'importe quelle disposition des courbes par rapport à l'axe OX se ramène au cas précédent en translatant l'axe OX vers le bas, d'une certaine grandeur de façon que les deux courbes apparaissent au-dessus de l'axe OX ; cette translation est équivalente à l'addition aux deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ d'une seule et même constante, tandis que la différence $f(x) - \varphi(x)$ reste sans changement.

Nous proposons à titre d'exercice de montrer, que *si deux courbes données se coupent de façon qu'une courbe soit une partie en dessous, et une partie au-dessus de l'autre, alors la somme des aires comprises entre chacune d'elles et les ordonnées $x = a$, $x = b$, est égale à*

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\, dx. \tag{3}$$

On appelle souvent le calcul de l'intégrale définie *une quadrature*. Cela tient à ce que les aires, comme il a été montré ci-dessus, sont obtenues par le calcul d'une intégrale définie.

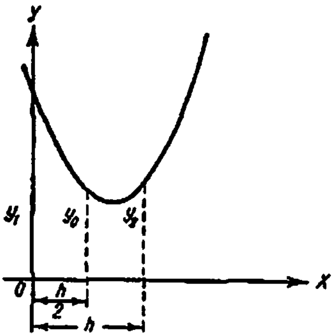

Fig. 129

Exemples. 1. L'aire, limitée par la parabole du second degré est égale à

$$y = ax^2 + bx + c,$$

l'axe OX et deux ordonnées, la distance entre lesquelles est égale à h, est égale à

$$\frac{h}{6}(y_1 + y_2 + 4y_0), \tag{4}$$

où y_1 et y_2 représentent les deux ordonnées extrêmes de la courbe, et y_0 l'ordonnée, correspondant à l'abscisse équidistante des deux extrémités.

Pour cela, on suppose que la courbe est au-dessus de l'axe OX.

Pour la démonstration de la formule (4) nous pouvons, sans restreindre la généralité, dire que l'ordonnée extrême de gauche est confondue avec l'axe OY (fig. 129), vu qu'une translation de toute la figure parallèlement à l'axe OX ne modifie ni la grandeur de l'aire considérée, ni la disposition réciproque des ordonnées extrêmes et moyenne, ni les grandeurs de ces ordonnées. Avec ces hypothèses, admettant que l'équation de la parabole se présente sous la forme :

$$y = ax^2 + bx + c,$$

nous exprimons l'aire cherchée S sous l'aspect de l'intégrale définie :

$$S = \int_0^h (ax^2 + bx + c)\, dx = a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx \Big|_0^h =$$

$$= a\frac{h^3}{3} + b\frac{h^2}{2} + ch = \frac{h}{6}(2ah^2 + 3bh + 6c).$$

Avec nos notations nous avons :

$$y_0 = ax^2 + bx + c \Big|_{x=\frac{h}{2}} = \frac{1}{4}ah^2 + \frac{1}{2}bh + c,$$

$$y_1 = ax^2 + bx + c\,|_{x=0} = c,$$

$$y_2 = ax^2 + bx + c\,|_{x=h} = ah^2 + bh + c,$$

d'où il résulte:

$$y_1 + y_2 + 4y_0 = 2ah^2 + 3bh + 6c,$$

ce qui prouve notre affirmation.

2. Aire de l'ellipse. L'ellipse, dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

est symétrique par rapport aux axes de coordonnées, par conséquent son aire cherchée S est égale à quatre fois l'aire de la partie de l'ellipse, qui se trouve dans le premier quadrant, c'est-à-dire

$$S = 4\int_0^a y\,dx$$

(fig. 130). Au lieu de déterminer y à partir de l'équation de l'ellipse et de porter l'expression obtenue dans la fonction à intégrer, nous utiliserons la représentation paramétrique de l'ellipse:

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t, \qquad (5)$$

et introduirons au lieu de x la nouvelle variable t; y s'exprime alors directement

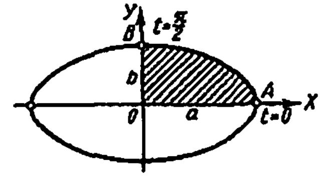

Fig. 130

à partir de la deuxième des égalités (5). Quand x varie de 0 à a, t varie de $\frac{\pi}{2}$ 0, et comme toutes les conditions de la règle du changement de variables à[III-2-6] dans ce cas sont remplies, alors

$$S = 4\int_{\pi/2}^{0} b\sin t\,d(a\cos t) = -4ab\int_{\pi/2}^{0}\sin^2 t\,dt = 4ab\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,dt.$$

D'après la formule (27) [III-2-7] pour $k = 1$, nous avons:

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4},$$

d'où nous trouvons enfin:

$$S = \pi ab. \qquad (6)$$

Pour $a = b$, quand l'ellipse se transforme en un cercle de rayon a, nous obtenons l'expression connue πa^2 pour l'aire du cercle.

3. Calculer l'aire, comprise entre les deux courbes

$$y = x^2, \qquad x = y^2.$$

Les courbes données (fig. 131) se coupent en deux points (0, 0), (1, 1), les coordonnées que nous obtenons satisfaisant ensemble les équations de ces courbes. Comme dans l'intervalle (0, 1) nous avons:

$$\sqrt{x} \geqslant x^2,$$

alors l'aire cherchée S en vertu de (2) s'exprime par la formule:

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

III-3-2. Aire d'un secteur. *L'aire d'un secteur, lim itée à la courb dont l'équation en coordonnées polaires est*:

$$r = f(\theta), \qquad (7)$$

et à deux rayons vecteurs

$$\theta = \alpha, \quad \theta = \beta, \tag{8}$$

issus de l'origine et d'angles α *et* β *par rapport à l'axe polaire, s'exprime par la formule:*

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 \, d\theta. \tag{9}$$

Pour obtenir la formule (9) décomposons l'aire envisagée (fig. 132) en petits éléments, en partageant l'angle compris entre les deux rayons vecteurs (8) en n parties. Considérons l'aire d'un de ces

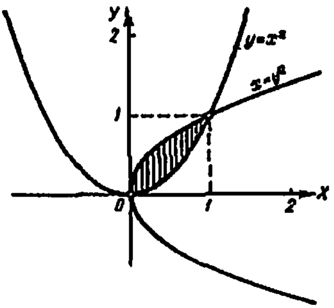

Fig. 131

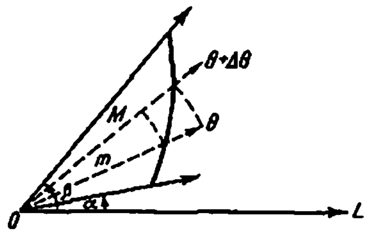

Fig. 132

petits secteurs, limitée par les rayons θ et $\theta + \Delta\theta$. Ayant désigné par ΔS son aire, par m et M la plus petite et la plus grande valeur de la fonction $r = f(\theta)$ dans l'intervalle $(\theta, \theta + \Delta\theta)$, nous voyons que ΔS est comprise entre les aires des deux secteurs circulaires de même ouverture $\Delta\theta$, mais de rayons m et M, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2} m^2 \Delta\theta < \Delta S \leqslant \frac{1}{2} M^2 \Delta\theta,$$

et par conséquent, ayant désigné par P un nombre quelconque, intermédiaire entre m et M, nous pouvons écrire:

$$\Delta S = \frac{1}{2} P^2 \Delta\theta.$$

Comme la fonction $f(\theta)$ continue dans l'intervalle $(\theta, \theta + \Delta\theta)$, prend toutes les valeurs comprises entre m et M, dans cet intervalle il se trouve sûrement une certaine valeur θ', pour laquelle

$$f(\theta') = P,$$

et alors

$$\Delta S = \frac{1}{2}[f(\theta')]^2 \Delta\theta. \tag{10}$$

Si maintenant nous augmentons le nombre de secteurs élémentaires ΔS de sorte que la plus grande des valeurs $\Delta\theta$ tende vers zéro, et si nous nous rappellons de ce qui a été dit en [III-1-2], nous obtenons à la limite:

$$S = \lim \sum \frac{1}{2}[f(\theta')]^2 \Delta\theta = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\theta,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Nous remarquons que l'idée fondamentale de la démonstration citée de la formule (9) réside en transformation de l'aire du secteur ΔS en l'aire d'un secteur circulaire dont l'ouverture est $\Delta\theta$ et le rayon $f(\theta')$. Ayant pris à la place de l'expression *rigoureuse* (10) celle *approximative*:

$$\Delta S = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta,$$

où $r = f(\theta'')$ et θ'' est une valeur quelconque de l'intervalle $(\theta, \theta + \Delta\theta)$, pour l'aire de ce secteur, nous obtenons à la limite le même résultat:

$$\lim \sum \frac{1}{2}[f(\theta'')]^2 \Delta\theta = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2 d\theta. \tag{11}$$

Pour cette raison l'expression à intégrer dans la formule (11) reçoit l'interprétation géométrique simple: $\frac{1}{2} r^2 d\theta$ est l'expression approximative de l'aire du secteur élémentaire d'ouverture $d\theta$ et par conséquent s'appelle simplement *aire élémentaire en coordonnées polaires*.

E x e m p l e. Trouver l'aire limitée par la courbe fermée

$$r = \cos 3\theta \qquad (a > 0).$$

Cette courbe, dont la construction par points ne présente aucune difficulté, est représentée sur la fig. 133 et s'appelle *rosace à trois branches*. L'aire complète qu'elle limite est égale au sextuple de l'aire de la partie hachurée, correspondant aux variations de θ et 0 à $\frac{\pi}{6}$ de sorte que d'après la formule (9) nous avons:

$$S = 6\int_0^{\pi/6} \frac{1}{2} a^2 \cos^2 3\theta \, d\theta = a^2 \int_0^{\pi/6} \cos^2 3\theta \, d(3\theta) = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \frac{\pi a^2}{4}.$$

III-3-3. Longueur d'un arc. Soit l'arc AB d'une courbe quelconque. Inscrivons à l'intérieur une ligne brisée (fig. 134) et augmentons le nombre de côtés, de façon que la plus grande des longueurs des côtés tende vers zéro. Si avec cela le périmètre de la ligne brisée tend vers une limite finie, ne dépendant pas de la façon dont

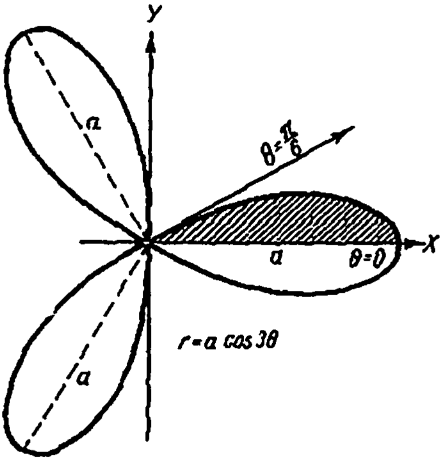

Fig. 133

les segments ont été inscrits, alors l'arc est *rectifiable*, et la limite mentionnée s'appelle *longueur de cet arc*. La même définition de la longueur d'un arc est valable également pour une courbe fermée.

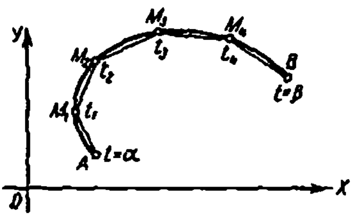

Fig. 134

Soit une courbe donnée par l'équation explicite $y = f(x)$, et avec elle les valeurs $x = a$ et $x = b$ $(a < b)$ qui correspondent aux points A et B, et supposons que $f(x)$ possède une dérivée continue dans l'intervalle $a \leqslant x \leqslant b$, auquel correspond l'arc AB. Nous allons montrer que dans ces conditions l'arc AB est rectifiable et que sa longueur s'exprime par une intégrale définie.

Soient $AM_1M_2 \ldots M_{n-1}B$ la ligne brisée inscrite, aux sommets de laquelle correspondent les valeurs

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

et désignons $y_i = f(x_i)$. Se remémorant la formule donnant la longueur d'un segment en géométrie analytique, nous obtenons pour le périmètre de la ligne brisée la formule suivante:

$$p=\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2}=$$
$$=\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+[f(x_i)-f(x_{i-1})]^2}.$$

Utilisant la formule des accroissements finis

$$f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) \qquad (x_{i-1}<\xi_i<x_i),$$

nous obtenons pour la longueur individuelle du côté de la ligne brisée l'expression

$$\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,(x_i-x_{i-1}),$$

dans laquelle nous voyons que, pour que le plus grand des côtés tende vers zéro, il faut et il suffit que la plus grande des différences $(x_i - x_{i-1})$ tende vers zéro. Pour le périmètre de la ligne brisée nous obtenons l'expression

$$p=\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,(x_i-x_{i-1}),$$

qui effectivement possède une limite, égale à l'intégrale

$$\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

De cette façon, la longueur l de l'arc AB s'exprime par la formule

$$l=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \tag{12}$$

Soit $x' < x''$ deux valeurs quelconques de l'intervalle (a, b), et M' et M'' les points correspondants sur l'arc AB. Appliquant le théorème de la moyenne, nous obtenons pour la longueur l' de l'arc $M'M''$:

$$l'=\int_{x'}^{x''} \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx=\sqrt{1+f'^2(\xi_1)}\,(x''-x') \qquad (x'<\xi_1<x'').$$

Pour la longueur de la corde $M'M''$, utilisant la formule des accroissements finis, nous obtenons la formule:

$$M'M''=\sqrt{(x''-x')^2+[f(x'')-f(x')]^2}=$$
$$=\sqrt{1+f'^2(\xi_2)}\,(x''-x') \qquad (x'<\xi_2<x'').$$

D'où il vient:

$$\frac{M'M''}{l'}=\frac{\sqrt{1+f'^2(\xi_2)}}{\sqrt{1+f'^2(\xi_1)}}.$$

Si les points M' et M'' tendent vers le point M d'abscisse x, alors x' et $x'' \to x$, donc ξ_1 et $\xi_2 \to x$, et de la dernière formule nous obtenons:

$$\frac{M'M''}{l'} \to 1.$$

C'est ce que nous avons utilisé en [II-5-1].

Supposons maintenant la courbe donnée sous forme paramétrique

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

avec les points A et B auxquels correspondent les valeurs $t = \alpha$ et $t = \beta$ $(\alpha < \beta)$. Nous supposerons qu'aux valeurs t de l'intervalle $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ correspondent les points de la courbe AB, de sorte qu'à des valeurs distinctes de t correspondent des points distincts de la courbe, qu'elle-même ne se coupe pas en faisant une boucle (fig. 134). Enfin nous supposerons que dans l'intervalle $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ existent les dérivées continues $\varphi'(t)$ et $\psi'(t)$.

Soit, comme plus haut, $AM_1M_2 \ldots M_{n-1}B$ la ligne brisée inscrite et $t_0 = \alpha < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta$ les valeurs correspondantes du paramètre t. Pour le périmètre de la ligne brisée nous obtenons l'expression:

$$p = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2}$$

ou, en appliquant la formule des accroissements finis,

$$p = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i')}\,(t_i - t_{i-1}) \quad (t_{i-1} < \tau_i \text{ et } \tau_i' < t_i). \tag{13}$$

On peut montrer que pour que le plus grand des côtés de la ligne brisée tende vers zéro il faut et il suffit à ce que la plus grande des différences $(t_i - t_{i-1})$ tende vers zéro. Cela peut être démontré sans supposer l'existence des dérivées $\varphi'(t)$ et $\psi'(t)$.

L'expression (13) se distingue de la somme, donnant à la limite l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt, \tag{14}$$

car les arguments τ_i et τ_i' sont différents. Faisons apparaître la somme

$$q = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i)}\,(t_i - t_{i-1}),$$

qui à la limite donne l'intégrale (14). Afin de pouvoir démontrer que la somme (13) tend aussi vers une limite (14), il faut montrer que la différence

$$p-q=\sum_{i=1}^{n}\left[\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i')}-\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)}\right](t_i-t_{i-1})$$

tend vers zéro.

En multipliant et divisant par la grandeur conjuguée du facteur contenant les radicaux, nous obtenons:

$$p-q=\sum_{i=1}^{n}\frac{\psi'(\tau_i')+\psi'(\tau_i)}{\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i')}+\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)}}\times$$
$$\times[\psi'(\tau_i')-\psi'(\tau_i)](t_i-t_{i-1}).$$

Comme

$$|\psi'(\tau_i')+\psi'(\tau_i)|\leqslant\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i')}+\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)},$$

alors

$$|p-q|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\psi'(\tau_i')-\psi'(\tau_i)|(t_i-t_{i-1}).$$

Les nombres τ_i et τ_i' appartiennent à l'intervalle (t_{i-1}, t_i) et en vertu de la continuité uniforme de $\psi'(t)$ dans l'intervalle $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, on peut affirmer que la plus grande des grandeurs $|\psi'(\tau_i')-\psi'(\tau_i)|$, que nous désignerons par δ, tend vers zéro, si la plus grande des différences (t_i-t_{i-1}) tend vers zéro. Mais de la formule précédente il résulte que

$$|p-q|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\delta(t_i-t_{i-1})=\delta\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})=\delta(\beta-\alpha),$$

d'où, évidemment, $p-q\to 0$. De cette façon la somme (13), exprimant le périmètre de la ligne brisée inscrite, tend vers l'intégrale (14), c'est-à-dire:

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt. \tag{15}$$

Cette formule pour la longueur l s'établit de façon identique pour le cas d'une courbe avec boucle. Pour le montrer, il suffit, par exemple, de décomposer la boucle de la courbe en deux parties sans boucle, pour chacune d'elles d'appliquer la formule (16) et d'ajouter les valeurs l obtenues. De même si une courbe quelconque L est composée d'un nombre fini de courbes L_k, chacune d'entre elles possédant une représentation paramétrique satisfaisant aux conditions mentionnées plus haut, en calculant par la formule (15) la longueur de chacune des courbes L_k et composant ces longueurs nous obtenons la longueur de la courbe L.

Considérons la valeur variable t de l'intervalle (α, β), à laquelle correspond le point variable M de l'arc AB. La longueur de l'arc AM sera une fonction de t et sera représentée par la formule:

$$s(t)=\int_{\alpha}^{t} \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt. \tag{16}$$

Utilisant la règle de différentiation de l'intégrale par rapport à la borne supérieure, nous obtenons

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}, \tag{17}$$

c'est-à-dire

$$ds=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt,$$

d'où, en se rappelant que

$$\varphi'(t)=\frac{dx}{dt}, \quad \psi'(t)=\frac{dy}{dt},$$

nous obtenons la formule pour la différentielle de l'arc [II-5-1]:

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2},$$

et la formule (15) peut être, sans que la variable d'intégration soit précisée, écrite sous l'aspect:

$$l=\int_{(A)}^{(B)} ds=\int_{(A)}^{(B)} \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}.$$

Les bornes (A) et (B) désignent les points initial et final de la ligne.

Si $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)>0$ pour tout t pris dans l'intervalle (α, β), alors, conformément à (17), nous obtenons la dérivée du paramètre t par rapport à s:

$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}.$$

La présence des dérivées continues $\varphi'(t)$ et $\psi'(t)$ avec la condition $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)>0$ nous garantit une tangente se modifiant de façon continue le long de AB.

Si la courbe est donnée en coordonnées polaires par l'équation

$$r=f(\theta),$$

alors, en introduisant les coordonnées rectangulaires x et y, liées aux coordonnées polaires r et θ par les relations:

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta \tag{18}$$

[II-5-13], nous pouvons considérer ces équations comme la donnée paramétrique de la courbe avec le paramètre θ.

Nous avons donc:

$$dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta,$$
$$dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta,$$
$$dx^2 + dy^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2,$$

d'où

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dr)^2 + r^2 (d\theta)^2}, \qquad (19)$$

et si aux points A et B correspondent les valeurs α et β de l'angle polaire θ (fig. 135), alors la formule (15) nous donne:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta. \qquad (20)$$

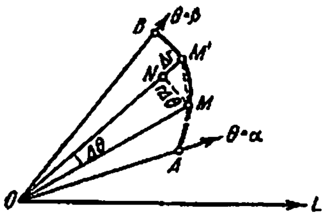

Fig. 135

L'expression pour ds (19), qui s'appelle *différentielle de l'arc en coordonnées polaires*, peut s'obtenir directement à partir de la figure, en remplaçant l'arc infiniment petit MM' par sa corde et en calculant cette dernière comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle MNM', dont les côtés $\overline{MN}$ et $\overline{NM'}$ sont approximativement égaux respectivement à $r\, d\theta$ et dr.

E x e m p l e s. 1. La longueur de l'arc s de la parabole $y = x^2$, mesurée à partir du sommet (0, 0) au point variable d'abscisse x, s'exprime d'après la formule (12) par l'intégrale:

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_0^x \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2x} \sqrt{1 + t^2}\, dt \qquad (21)$$

(nous avons posé $t = 2x$).

En vertu de l'exemple 11 [III-1-7], nous avons:

$$\int \sqrt{1+t^2}\, dt = \frac{1}{2}\left[t\sqrt{1+t^2} + \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)\right] + C.$$

Reportant ce résultat dans (21), nous obtenons sans difficulté:

$$s = \frac{1}{4}\left[2x\sqrt{1+4x^2} + \ln\left(2x + \sqrt{1+4x^2}\right)\right].$$

2. La longueur de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

en raison de sa symétrie par rapport aux axes de coordonnées, est égale à quatre fois la longueur de la partie qui se trouve dans le premier quadrant. En représentant l'ellipse au moyen des équations paramétriques

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t$$

et en remarquant qu'aux points A et B correspondent les valeurs du paramètre 0 et $\frac{\pi}{2}$, nous obtenons pour la longueur l cherchée l'expression suivante résultant de la formule (15):

$$l = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt. \tag{22}$$

La fonction primaire ne pouvant pas être exprimée à l'aide de fonctions élémentaires, pour l'intégrale définie inscrite on ne peut donner qu'un moyen du calcul approximatif, qui sera produit plus bas.

3. La longueur de l'arc de la spirale logarithmique

$$r = Ce^{a\theta}$$

[II-5-14], comprise entre les rayons vecteurs $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, en vertu de (20) s'exprime par l'intégrale:

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = C\sqrt{1+a^2}\int_\alpha^\beta e^{a\theta}\, d\theta = \frac{C\sqrt{1+a^2}}{a}\,(e^{a\beta} - e^{a\alpha}).$$

4. Dans [II-5-9] nous avons considéré la chaînette; soit $M(x, y)$ un point quelconque de cette courbe. Calculons la longueur de l'arc AM (fig. 93). Se rappelant l'expression de $(1 + y'^2)$, nous obtenons, à partir de [II-5-8]:

$$AM = \int_0^x \sqrt{1+y'^2}\, dx = \int_0^x \frac{y}{a}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^x \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = ay',$$

d'où

$$a^2 + (\text{arc } AM)^2 = a^2 + a^2y'^2 = a^2(1 + y'^2) = y^2,$$

c'est-à-dire que la longueur de l'arc AM est égale au côté du triangle rectangle, dont l'hypoténuse est égale à l'ordonnée du point M, et dont l'autre côté est égal à a. Nous obtenons, de cette façon, la règle suivante pour établir la longueur de l'arc AM:

Du sommet A d'une chaînette, comme centre, il faut décrire une circonférence avec un rayon, égal à l'ordonnée du point M; le segment $\overline{OQ}$ sur l'axe OX de l'origine des coordonnées O au point d'intersection Q de l'axe OX avec la circonférence mentionnée sera la rectification de l'arc AM (fig. 93).

Dans les formules précédentes, pour le choix des signes, nous nous sommes laissé guider par le fait que pour les points, se trouvant dans la partie droite de la chaînette, y' possédait le signe $(+)$.

5. Pour la cycloïde, considérée en [II-5-10], nous définissons la longueur de l'arc l de la branche OO' (fig. 94) et l'aire S, limitée par cette branche et l'axe OX:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\, dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\, dt =$$

$$= 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a,$$

c'est-à-dire que *la longueur de l'arc d'une branche de cycloïde est égale à quatre fois le diamètre de la roulante*;

$$S=\int_0^{2\pi a} y\,dx=\int_0^{2\pi}\psi(t)\,\varphi'(t)\,dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt=2\pi a^2-2a^2\,[\sin t]_0^{2\pi}+$$

$$+a^2\left[\frac{1}{2}\,t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi}=2\pi a^2+\pi a^2=3\pi a^2,$$

c'est-à-dire que *l'aire, limitée à un arc de cycloïde et sa base rectiligne, sur laquelle se déplace la roulante, est égale à trois fois l'aire de la roulante.*

Lors du calcul de l, pour l'extraction de la racine $\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}$, nous devons prendre la valeur arithmétique de la racine, ce que nous avons fait parce que dans la variation de t de 0 à 2π la fonction $\sin\frac{t}{2}$ est positive.

6. La cardioïde, considérée dans [II-5-15], est symétrique par rapport à l'axe polaire (fig. 111), c'est pourquoi pour le calcul de sa longueur l il suffit de calculer la longueur de l'arc pour les variations de θ dans l'intervalle $(0, \pi)$, et de doubler le résultat obtenu:

$$l=2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta=2\int_0^{\pi}\sqrt{4a^2(1+\cos\theta)^2+4a^2\sin^2\theta}\,d\theta=$$

$$=8a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=8a\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}=16a,$$

c'est-à-dire que *la longueur de l'arc de cardioïde est huit fois plus grande que le diamètre de la roulante (ou de la base).*

III-3-4. Calcul des volumes des corps à partir de leur section transversale. Le calcul du volume d'un corps donné se ramène aussi au calcul d'une intégrale définie, si nous avons la possibilité de

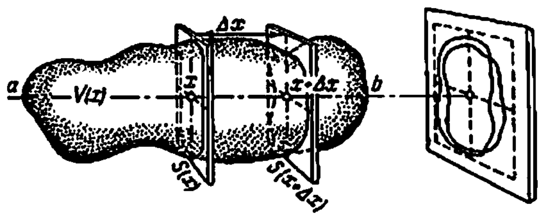

Fig. 136

définir l'aire des sections transversales du corps, perpendiculaires à une direction donnée.

Nous désignerons par V le volume d'un corps donné (fig. 136) et supposerons que les aires de toutes les sections transversales du corps par les plans perpendiculaires à une direction donnée, que nous prendrons pour l'axe OX, nous sont connues. Chaque section transversale se définit par l'abscisse x de son point d'intersection avec l'axe OX, c'est pourquoi l'aire de cette section transversale sera une fonction de x, que nous désignerons par $S(x)$ et que nous considérerons comme connue.

Soit encore a et b les abscisses des sections extrêmes du corps. Pour calculer le volume V nous le décomposerons en éléments rangés par sections transversales, commençant en $x = a$ et se terminant en $x = b$; considérons un de ces éléments ΔV, fourni par les sections d'abscisses x et $x + \Delta x$. Remplaçons le volume ΔV par le volume

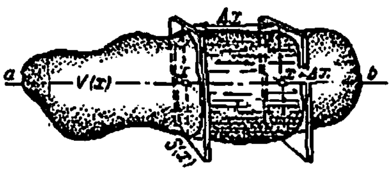

Fig. 137

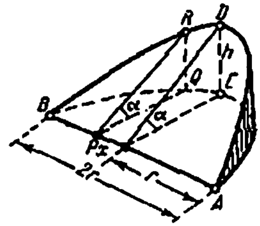

Fig. 138

d'un cylindre droit, dont la hauteur est égale à Δx, et dont la base coïncide avec la section transversale de notre corps, correspondant à l'abscisse x (fig. 137). Le volume d'un tel cylindre s'exprimera par le produit $S(x)\,\Delta x$, et de cette façon, nous obtiendrons l'expression approchée suivante pour notre volume V:

$$\sum S(x)\,\Delta x,$$

où la sommation est étendue à tous les éléments dont est formé notre corps à partir des sections transversales. A la limite, quand le nombre d'éléments croît indéfiniment et que le plus grand d'entre les Δx tend vers zéro, la somme ci-dessus se transforme en une intégrale définie, laquelle donne la valeur exacte du volume V, ce qui conduit à la proposition suivante:

Si pour un corps donné on connaît toutes ses sections transversales par des plans, perpendiculaires à une direction quelconque donnée, choisie comme axe OX, le volume du corps V s'exprime par la formule :

$$V = \int_a^b S(x)\,dx, \tag{23}$$

où $S(x)$ coïncide avec l'aire de la section transversale d'abscisse x, a et b étant les abscisses des sections extrêmes du corps.

E x e m p l e. *Volume d'un « secteur de cylindre »*, isolé d'un demi-cylindre circulaire droit par un plan, passant par un diamètre de sa base (fig. 138). Prenant le diamètre $\overline{AB}$ comme axe OX, et le point A comme origine des coordonnées, nous désignerons le rayon de la base du cylindre par r, l'angle, formé par la section supérieure de ce secteur avec sa base, par α.

La section transversale, perpendiculaire au diamètre $\overline{AB}$, présente l'aspect d'un triangle rectangle PQR, et son aire s'exprime par la formule:

$$S(x)=\frac{1}{2}\,\overline{PQ}\cdot\overline{QR}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\,\overline{PQ}^2.$$

Puis, d'après la propriété connue de la circonférence, le segment $\overline{PQ}$ est la moyenne géométrique des segments $\overline{AP}$, $\overline{PB}$ de diamètre $\overline{AB}$, c'est pourquoi:

$$\overline{PQ}^2=\overline{AP}\cdot\overline{PB}=x\,(2r-x),$$

et finalement,

$$S(x)=\frac{1}{2}\,x\,(2r-x)\operatorname{tg}\alpha.$$

Appliquant la formule (23) pour le volume V cherché, nous obtenons:

$$V=\int_0^{2r}S(x)\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\int_0^{2r}x\,(2r-x)\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\left(rx^3-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{2r}=$$
$$=\frac{2}{3}\,r^3\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}\,r^2h,$$

si l'on introduit la «hauteur» du secteur $h=r\operatorname{tg}\alpha$.

III-3-5. Volume d'un corps de révolution. Dans le cas où le corps considéré s'obtient par révolution d'une courbe donnée $y=f(x)$

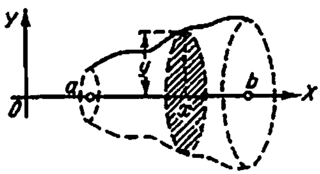

Fig. 139

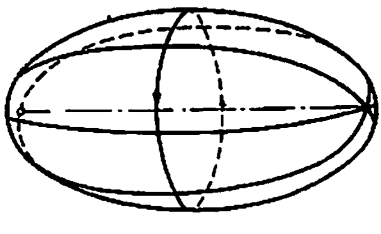

Fig. 140

autour d'un axe OX, ses sections transversales seront des cercles de rayon y (fig. 139), c'est pourquoi:

$$S(x)=\pi y^2,$$
$$V(x)=\int_a^b\pi y^2\,dx,$$

c'est-à-dire que *le volume d'un corps, engendré par la révolution autour d'un axe OX d'une partie de la courbe*

$$y = f(x),$$

comprise entre les ordonnées $x = a$, $x = b$, *s'exprime par la formule:*

$$V = \int_a^b \pi y^2\, dx. \tag{24}$$

Exemple. Volume d'un ellipsoïde de révolution. Par la révolution de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

autour du grand axe on engendre un corps, appelé *ellipsoïde allongé de révolution* (fig. 140). Les bornes de la valeur de l'abscisse x dans le cas considéré seront $(-a)$ et $(+a)$ et la formule (24) donne donc:

$$V_{\text{allongé}} = \pi \int_{-a}^{+a} y^2\, dx = \pi \int_{-a}^{+a} b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Bigg|_{-a}^{+a} = \frac{4}{3} \pi a b^2. \tag{25}$$

Exactement de la même manière, nous pourrons calculer le volume de *l'ellipsoïde aplati de révolution*, qui s'obtient par révolution de notre ellipse autour du petit axe. Il faut seulement échanger une à une les lettres x, y, a et b, ce qui donne:

$$V_{\text{aplati}} = \pi \int_{-b}^{+b} x^2\, dy = \pi \int_{-b}^{+b} a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \frac{4}{3} \pi b a^2. \tag{26}$$

Dans le cas où $a = b$, les deux ellipsoïdes se transforment en une sphère de rayon a, dont le volume est égal à $\frac{4}{3} \pi a^3$.

III-3-6. Aire d'un corps de révolution. *L'aire d'un corps engendré par la révolution d'une courbe donnée d'un plan XOY autour d'un axe OX est la limite vers laquelle tend la surface d'un corps, obtenu par la révolution autour du même axe d'une ligne brisée inscrite dans la courbe donnée, quand le nombre de côtés de cette ligne croît indéfiniment et que la plus grande des longueurs des côtés tend vers zéro* (fig. 141). *Si cette révolution concerne la partie de la courbe, comprise entre les points A et B, alors l'aire F du corps de révolution s'exprime par la formule:*

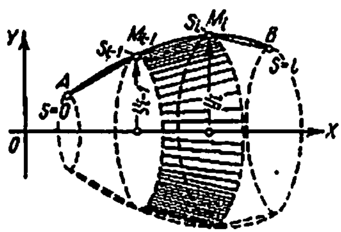

Fig. 141

$$F = \int_{(A)}^{(B)} 2\pi y\, ds, \tag{27}$$

où ds est la différentielle de l'arc de la courbe donnée, c'est-à-dire

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Dans cette formule la courbe peut être donnée comme on veut, soit sous forme explicite, soit sous forme paramétrique ; les symboles (A) et (B) montrent qu'il faut intégrer entre ces bornes pour la variable indépendante, qui correspondent aux points donnés de la courbe A et B.

Nous supposerons que l'équation de la courbe est donnée sous forme paramétrique, et que le rôle du paramètre est joué par la longueur s de la courbe, comptée à partir du point A, et nous désignerons par l la longueur de toute la courbe AB. Cette courbe, évidemment, est supposée rectifiable. Nous avons $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$. Décomposons, comme toujours, l'intervalle $(0, l)$ en faisant varier s sur les tronçons d'intervalle

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_{n-1} < s_n = l.$$

Supposons qu'à la valeur $s = s_i$ correspond le point M_i de la courbe, et bien sûr que M_0 coïncide avec A et M_n avec B. Nous désignerons par q_i la longueur du segment $\overline{M_{i-1}M_i}$, par Δs_i la longueur du chemin $M_{i-1}M_i$ et nous poserons $y_i = \psi(s_i)$. Utilisant la formule pour l'aire d'un cône tronqué, nous trouvons la formule suivante pour la surface, engendrée par la révolution de la ligne brisée $AM_1M_2 \ldots M_{n-1}B$:

$$Q = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1}+y_i}{2} q_i$$

ou

$$Q = 2\pi \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}q_i + \pi \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i-1}) q_i.$$

Soit δ la plus grande des valeurs absolues $(y_i - y_{i-1})$. En vertu de la continuité uniforme de la fonction $\psi(s)$ dans l'intervalle $0 \leqslant s \leqslant l$ la grandeur δ tend vers zéro, si la plus grande des différences $(s_i - s_{i-1})$ tend vers zéro. Mais nous avons :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i-1}) q_i \right| \leqslant \delta \sum_{i=1}^{n} q_i \leqslant \delta l,$$

d'où il résulte que le deuxième terme dans l'expression Q tend vers zéro. Nous examinerons le premier terme, que nous pouvons écrire sous la forme :

$$2\pi \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}q_i = 2\pi \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\Delta s_i - 2\pi \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}(\Delta s_i - q_i).$$

Nous allons montrer que le terme à soustraire dans cette expression tend vers zéro. Pour cela, remarquons que la fonction $y = \psi(s)$, continue dans l'intervalle $(0, l)$, est bornée et, par conséquent, qu'il existe un nombre positif m, tel que $|y_{i-1}| \leqslant m$ pour tout i. Donc :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}(\Delta s_i - q_i)\right| < \sum_{i=1}^{n} m(\Delta s_i - q_i) = m\left(l - \sum_{i=1}^{n} q_i\right).$$

Si la plus grande des différences $(s_i - s_{i-1})$ tend vers zéro, alors la plus grande des longueurs des cordes q_i tend vers zéro, et le périmètre de la ligne brisée inscrite tend vers la longueur de l'arc :

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \to l,$$

d'où

$$2\pi \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}(\Delta s_i - q_i) \to 0.$$

De cette façon, dans l'expression Q il ne reste à examiner que le terme

$$2\pi \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\Delta s_i = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \psi(s_{i-1})(s_i - s_{i-1}).$$

La limite de cette somme nous conduit à l'intégrale (27). C'est ainsi que nous obtenons cette formule. Si la courbe est donnée sous forme paramétrique en fonction d'un paramètre quelconque t, nous avons alors [III-3-3] :

$$F = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt, \tag{28_1}$$

et dans le cas de l'équation explicite $y = f(x)$ de la ligne AB :

$$F = \int_{a}^{b} 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \tag{28_2}$$

Exemple. Surface d'un ellipsoïde de révolution, allongé et aplati. Considérons d'abord la surface d'un ellipsoïde allongé. Appliquant la terminologie de l'exemple [III-3-5], d'après la formule (28), nous avons :

$$F_{\text{allongé}} = 2\pi \int_{-a}^{a} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx = 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{y^2 + (yy')^2}\, dx.$$

De l'équation de l'ellipse nous tirons :

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \quad yy' = -\frac{b^2 x}{a^2},$$

d'où

$$(yy')^2 = \frac{b^4 x^2}{a^4},$$

$$F_{\text{allongé}} = 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} + \frac{b^4 x^2}{a^4}}\, dx = 2\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}\, dx.$$

Introduisant ici l'expression de l'excentricité de l'ellipse

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2},$$

nous avons (voir exemple [III-2-6]) :

$$F_{\text{allongé}} = 2\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{1-\frac{\varepsilon^2 x^2}{a^2}}\,dx = 4\pi b \int_0^a \sqrt{1-\frac{\varepsilon^2 x^2}{a^2}}\,dx =$$
$$= \frac{4\pi b a}{\varepsilon} \int_0^a \sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon x}{a}\right)^2}\,d\left(\frac{\varepsilon x}{a}\right) = \frac{4\pi ab}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} \sqrt{1-t^2}\,dt.$$

En intégrant par parties, nous avons (voir exemple 11 [III-1-7]) :

$$\int \sqrt{1-t^2}\,dt = t\sqrt{1-t^2} + \int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt =$$
$$= t\sqrt{1-t^2} - \int \sqrt{1-t^2}\,dt + \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

d'où

$$\int \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left[t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t\right],$$

et finalement

$$F_{\text{allongé}} = 2\pi ab\left[\sqrt{1-\varepsilon^2} + \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon}\right]. \tag{29}$$

Cette formule convient à la limite également pour $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire quand $b = a$, et que l'ellipsoïde se transforme en une sphère de rayon a. Dans ce cas l'expression qui se trouve entre parenthèses est indéterminée; en calculant celle-ci [II-3-9], nous avons

$$\left.\frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \left.\frac{\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}}{1}\right|_{\varepsilon=0} = 1.$$

Poursuivons maintenant pour l'ellipsoïde aplati de révolution. Transposant les lettres x et y, a et b, nous trouvons:

$$F_{\text{aplati}} = 2\pi \int_{-b}^{b} \sqrt{x^2+(xx')^2}\,dy,$$

où x est considéré comme une fonction de y. De l'équation de l'ellipse nous tirons :

$$x^2 = a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right), \quad xx' = -\frac{a^2 y}{b^2}, \quad (xx')^2 = \frac{a^4 y^2}{b^4},$$

d'où

$$F_{\text{aplati}} = 2\pi a \int_{-b}^{b} \sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)}\,dy =$$
$$= 4\pi a \int_0^b \sqrt{1+\frac{y^2 a^2 \varepsilon^2}{b^4}}\,dy =$$

$$= \frac{4\pi b^2}{\varepsilon} \int_0^{\frac{a\varepsilon}{b}} \sqrt{1+t^2}\, dt = \frac{2\pi b^2}{\varepsilon} \left[t \sqrt{1+t^2} + \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right) \right] \Big|_0^{\frac{a\varepsilon}{b}} =$$

$$= \frac{2\pi b^2}{\varepsilon} \left[\frac{a\varepsilon}{b} \sqrt{1+\frac{a^2\varepsilon^2}{b^2}} + \ln\left(\frac{a\varepsilon}{b}+\sqrt{1+\frac{a^2\varepsilon^2}{b^2}}\right) \right] =$$

$$= \frac{2\pi b^2}{\varepsilon} \left[\frac{a\varepsilon}{b} \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} + \ln\left(\frac{a\varepsilon}{b}+\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}\right) \right] =$$

$$= 2\pi a^2 + \frac{2\pi b^2}{\varepsilon} \ln \frac{a(1+\varepsilon)}{b},$$

et finalement

$$F_{\text{aplati}} = 2\pi a^2 + \frac{2\pi b^2}{\varepsilon} \ln \frac{a(1+\varepsilon)}{b}. \tag{30}$$

III-3-7. Détermination des centres de gravité. Théorèmes de Guldin. Soit un système donné de n points matériels:

$$M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2),\ \ldots,\ M_n(x_n, y_n),$$

dont les masses sont égales respectivement à:

$$m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n,$$

alors le point, dont les coordonnées x_G, y_G satisfont aux conditions:

$$Mx_G = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad My_G = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \tag{31}$$

et où M représente la masse totale du système

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i,$$

s'appelle *centre de gravité* du système G.

Pour déterminer le centre de gravité on peut, de la façon que l'on veut, grouper les points du système, en les divisant en systèmes particuliers, de sorte que, pour calculer les coordonnées du centre de gravité Q de tout le système, on remplace tout le groupe de points, composant un tel système particulier, par un seul point, plus précisément son centre de gravité, affecté d'une masse, égale à la somme des masses des points le composant.

Nous ne nous arrêterons pas à la démonstration de ce principe général, laquelle ne présente pas de difficulté et peut facilement être effectuée sur des exemples de systèmes particuliers les plus simples, avec trois, quatre, etc., points.

Plus loin, nous aurons affaire non à des systèmes de points, mais au cas où la masse occupe entièrement une figure plane quelconque (domaine) ou une longueur.

Pour simplifier nous nous limiterons à la seule considération de corps homogènes, dont nous prendrons la densité égale à l'unité, de sorte que la masse d'une telle figure soit égale à sa longueur, s'il s'agit d'une ligne, et à sa surface, s'il s'agit d'un domaine plan.

Soit d'abord à définir *le centre de gravité d'un arc* de courbe AB (fig. 142), dont la longueur est s. Selon le principe général précédent, divisons l'arc AB en n petits éléments Δs. Le centre de gravité de tout ce système peut se calculer, en remplaçant chacun de ces

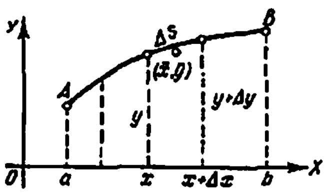

Fig. 142

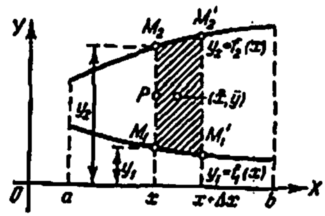

Fig. 143

éléments par un seul point, le centre de gravité de l'élément considéré, ayant concentré en lui toute la masse de l'élément $\Delta m = \Delta s$ *.

Considérons un de tels éléments Δs et désignons les coordonnées de ses extrémités par (x, y), $(x + \Delta x, y + \Delta y)$; désignons ensuite les coordonnées de son centre de gravité par $(\bar{x}, \bar{y})$. Avec une réduction suffisante de l'élément Δs, nous pouvons considérer que le point $(\bar{x}, \bar{y})$ est aussi peu éloigné que l'on veut du point (x, y).

D'après les formules (31), nous avons, comme dans [III-3-4]:

$$Mx_G = sx_G = \sum \bar{x}\, \Delta m = \sum \bar{x}\, \Delta s = \lim \sum x\, \Delta s = \int_{(A)}^{(B)} x\, ds, \quad (32)$$

$$My_G = sy_G = \sum \bar{y}\, \Delta m = \sum \bar{y}\, \Delta s = \lim \sum y\, \Delta s = \int_{(A)}^{(B)} y\, ds, \quad (33)$$

d'où, ayant calculé s par la formule:

$$s = \int_{(A)}^{(B)} ds = \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2},$$

nous définissons les coordonnées du centre de gravité G.

Des formules (32) et (33) découle le théorème important:

Théorème I de Guldin. *L'aire d'une surface, engendrée par la révolution d'un arc d'une courbe plane donnée autour d'un axe quelconque, se trouvant dans son plan et ne la traversant pas, est*

* Le centre de gravité de chaque élément, généralement parlant, ne se situe pas sur la courbe, quoiqu'il soit d'autant plus près d'elle que l'élément est petit, ce qui est montré schématiquement sur la fig. 142.

égale au produit de la longueur de l'arc générateur par la longueur du chemin, décrit dans cette révolution par le centre de gravité de l'arc.

En effet, ayant pris l'axe de révolution comme axe OX, pour la surface F du corps, décrit par la révolution de l'arc AB, nous avons (27) [III-3-6]:

$$F = 2\pi \int_{(A)}^{(B)} y\, ds = 2\pi y_G \cdot s$$

[en vertu de (33)], ce qu'il fallait démontrer.

Considérons maintenant un domaine plan quelconque S (dont nous désignerons aussi l'aire par S). Admettons pour simplifier que ce domaine (fig. 143) est limité par deux courbes, dont nous désignerons les ordonnées par

$$y_1 = f_1(x), \quad y_2 = f_2(x).$$

Suivant le principe général, rappelé au début de ce paragraphe, décomposons la figure en n tranches verticales ΔS par des droites parallèles à l'axe OY. Pour calculer les coordonnées du centre de gravité G de la figure, nous pouvons remplacer chacune de ces tranches par son centre de gravité, ayant concentré en lui la masse des tranches $\Delta m = \Delta S$. Considérons une de ces tranches; désignons par x et $x + \Delta x$ les abscisses des droites M_1M_2 et $M_1'M_2'$ la limitant, par $\bar{x}$, $\bar{y}$ les coordonnées du centre de gravité.

En diminuant suffisamment la tranche, c'est-à-dire en diminuant sa largeur Δx, le point $(\bar{x}, \bar{y})$ se tiendra aussi peu éloigné que l'on voudra du milieu P du segment de droite M_1M_2, en conséquence de quoi nous pouvons écrire les égalités approchées:

$$\bar{x} \sim x, \quad \bar{y} \sim \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Ensuite, la masse Δm de la tranche, égale à son aire ΔS, peut être assimilée à l'aire d'un rectangle de base Δx et de hauteur, différant aussi peu que l'on voudra de la longueur du segment $\overline{M_1M_2} = y_2 - y_1$, c'est-à-dire

$$\Delta m \sim (y_2 - y_1)\Delta x.$$

Appliquant la formule (31), nous pouvons écrire:

$$Mx_G = Sx_G = \sum \bar{x}\,\Delta m = \lim \sum [x(y_2 - y_1)]\,\Delta x = \int_a^b x(y_2 - y_1)\,dx, \tag{34}$$

$$My_G = Sy_G = \sum \bar{y}\,\Delta m = \lim \sum \left(\frac{y_2 + y_1}{2}\right)(y_2 - y_1)\,\Delta x =$$

$$= \lim \sum \left[\frac{1}{2}(y_2^2 - y_1^2)\right]\Delta x = \int_a^b \frac{1}{2}(y_2^2 - y_1^2)\,dx. \tag{35}$$

De la formule (35) découle:

T h é o r è m e II d e G u l d i n. *Le volume d'un corps, engendré par la révolution d'une figure plane autour d'un axe quelconque, situé dans son plan et ne la traversant pas, est égal au produit de l'aire de la figure génératrice par la longueur du chemin, décrit par son centre de gravité dans la révolution.*

En effet, prenant l'axe de révolution pour axe OX, il n'est pas difficile de remarquer que le volume d'un corps quelconque de révolution V est égal à la différence des volumes des corps, engendrés par la révolution de la courbe y_2 et de la courbe y_1, et c'est pourquoi, en rapprochant (24) [III-3-5]:

$$V=\pi\int_a^b y_2^2\,dx-\pi\int_a^b y_1^2\,dx=\pi\int_a^b (y_2^2-y_1^2)\,dx=2\pi y_G\cdot S,$$

en vertu de (35), ce qu'il fallait démontrer.

Les deux théorèmes de Guldin obtenus sont fort utiles pour déterminer l'aire et le volume des figures de révolution, lorsqu'on connaît la disposition du centre de gravité de la figure en rotation, et *vice versa*, lors de la détermination du centre de gravité d'une figure lorsqu'on connaît le volume ou l'aire de la figure de révolution engendrée par elle.

E x e m p l e s. 1. Trouver le volume V d'un anneau (*tore*), engendré par la révolution d'un cercle de rayon r (fig. 144) autour d'un axe, se trouvant dans

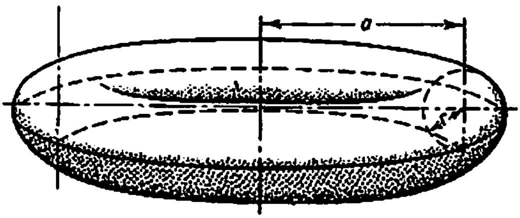

Fig. 144

son plan à une distance a de son centre (avec $r<a$, c'est-à-dire que l'axe de révolution ne coupe pas la circonférence).

Le centre de gravité du cercle en rotation se trouve, bien sûr, en son centre, et par conséquent la longueur du chemin, décrit par le centre de gravité dans la rotation, est égale à $2\pi a$. L'aire de la figure en rotation est égale à πr^2, et par conséquent d'après le théorème II de Guldin nous avons:

$$V=\pi r^2\cdot 2\pi a=2\pi^2 ar^2. \tag{36}$$

2. Trouver la superficie F du tore, examiné dans l'exemple 1.

La longueur de la circonférence en rotation est égale à $2\pi r$; le centre de gravité comme précédemment coïncide avec le centre de la circonférence, c'est pourquoi en vertu du théorème I de Guldin nous avons:

$$F=2\pi r\cdot 2\pi a=4\pi^2 ar. \tag{37}$$

3. Trouver le centre de gravité G d'*un demi-cercle* de rayon a. Prenons la base du demi-cercle comme axe OX et dirigeons l'axe OY perpendiculairement à OX, à partir du centre (fig. 145) ; en vertu de la symétrie de la figure par rapport à l'axe OY, il est clair que le centre de gravité G se trouve sur l'axe OY. Il reste seulement à trouver y_G. Dans ce but, appliquons le théorème II de Guldin. Le corps, engendré par la révolution du demi-cercle autour de l'axe OX, est une sphère de rayon a, et son volume est égal à $\frac{4}{3}\pi a^3$. L'aire S de la figure en rotation est égale à $\frac{\pi}{2}a^2$, c'est pourquoi :

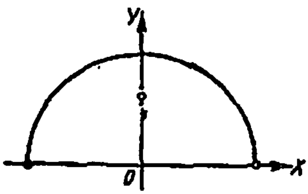

Fig. 145

$$\frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{\pi}{2}a^2 \cdot 2\pi y_G, \quad y_G = \frac{4}{3}\frac{a}{\pi}.$$

4. Trouver le centre de gravité G' d'*une demi-circonférence* de rayon a.

Choisissant les axes de coordonnées, comme dans l'exemple précédent, nous voyons de nouveau que le centre cherché G' se trouve sur l'axe OY, de sorte qu'il reste à trouver $y_{G'}$.

Appliquant le théorème I de Guldin et ayant remarqué que l'aire F du corps de révolution dans ce cas est égale à $4\pi a^2$, que la longueur $s = \pi a$, nous obtenons :

$$4\pi a^2 = \pi a \cdot 2\pi y_{G'}, \quad y_{G'} = 2\frac{a}{\pi}.$$

Comme il fallait s'y attendre, le centre de gravité de la demi-circonférence se trouve plus près d'elle que le centre de gravité du demi-cercle qu'elle délimite.

III-3-8. Calcul approché des intégrales définies; formules des rectangles et des trapèzes. Le calcul des intégrales définies par la formule fondamentale (15) [III-2-3] à l'aide de la fonction primitive n'est pas toujours possible, de sorte que, même si la fonction primitive existe, quand la fonction à intégrer est continue, elle ne peut cependant être en fait, et de loin, toujours trouvée, et même alors, quand on peut la trouver, elle possède presque toujours un aspect complexe et peu pratique pour le calcul. C'est pourquoi les méthodes de calcul approché des intégrales définies ont une grande importance.

La plus grande partie d'entre elles repose sur l'interprétation de l'intégrale définie comme aire et comme limite d'une somme :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{38}$$

Dans toute la suite nous conviendrons une fois pour toutes de diviser l'intervalle (a, b) en n parties *égales*; nous désignerons la longueur de chaque partie par h, de sorte que :

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih \qquad (x_0 = a\,; \quad x_n = a + nh = b).$$

Nous désignerons plus loin par y_i la valeur de la fonction à intégrer $y = f(x)$ pour $x = x_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$:

$$y_i = f(x_i) = f(a + ih). \tag{39}$$

Nous considérerons ces grandeurs comme connues; elles peuvent être obtenues par un calcul direct si la fonction $f(x)$ est donnée sous forme analytique, ou s'estimer directement à partir de la figure, si elle est représentée graphiquement.

Posant dans la somme du second membre (38) $\xi_i = x_{i-1}$ ou x_i, nous obtiendrons les deux *formules* approchées *des rectangles*:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}[y_0+y_1+\dots+y_{n-1}], \tag{40}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}[y_1+y_2+\dots+y_n], \tag{41}$$

où le signe ($\approx$) signifie égalité approchée.

Plus grand sera le nombre n, c'est-à-dire plus petit le nombre h, plus ces formules seront exactes et à la limite, pour $n \to \infty$ et $h \to 0$, elles donneront la grandeur exacte de l'intégrale définie.

De cette façon, *les erreurs des formules* (40) *et* (41) *tendent vers zéro lorsque le nombre des ordonnées croît.* Pour une valeur donnée, donc, du nombre des ordonnées, la limite supérieure de l'erreur se détermine le plus simplement dans

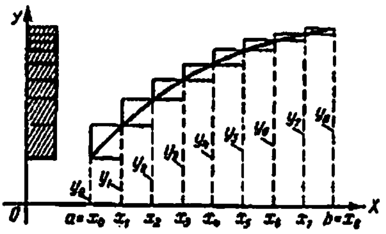

Fig. 146

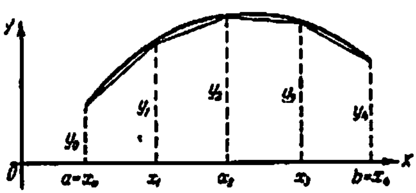

Fig. 147

le cas où la fonction donnée $f(x)$ est *monotone* dans l'intervalle (a, b) (fig. 146). Dans ce cas il apparaît immédiatement à partir de la figure, que l'*erreur* de chacune des formules (40) et (41) *ne dépasse pas* la somme des aires des rectangles hachurés, c'est-à-dire *ne dépasse pas* l'aire du rectangle de base $\frac{b-a}{n} = h$ et de hauteur, égale à la somme des hauteurs $y_n - y_0$ des rectangles hachurés, c'est-à-dire *la grandeur*

$$\frac{b-a}{n}(y_n - y_0). \tag{42}$$

Les formules des rectangles introduisent au lieu de l'expression exacte de l'aire de la courbe $y = f(x)$ son expression approchée, l'aire de la ligne brisée en paliers, construite à partir des segments horizontaux et verticaux, délimitant les rectangles.

Nous obtiendrons les autres expressions approchées, si au lieu d'une ligne brisée en paliers nous prenons d'autres lignes, qui diffèrent suffisamment peu de la courbe donnée; plus la ligne auxiliaire sera proche de la courbe $y = f(x)$, plus petite sera l'erreur que nous commettons, en prenant comme grandeur de l'aire celle limitée à cette ligne auxiliaire.

Ainsi, par exemple, si nous remplaçons une courbe donnée par une ligne brisée inscrite dans elle, dont les ordonnées pour $x = x_i$ coïncident avec les ordonnées de la courbe donnée (fig. 147), en d'autres termes, si nous remplaçons l'aire considérée par la somme des aires des trapèzes inscrits en elle, alors nous obtiendrons *la formule* approchée *des trapèzes*:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left[\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+\ldots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right]=$$

$$=\frac{b-a}{2n}\,[y_0+2y_1+2y_2+\ldots+2y_{n-1}+y_n]. \qquad (43)$$

III-3-9. Formule des tangentes et formule de Poncelet. Doublons maintenant le nombre de divisions, en partageant chacune des divisions par moitié. Nous obtenons ainsi $2n$ divisions (fig. 148).

$$x_0,\ x_{1/2}=a+\frac{h}{2},$$

$$x_1=a+h,\ \ldots,\ x_i=a+ih,$$

$$x_{i+1/2}=a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h,\ \ldots,$$

$$x_n=b,$$

auxquelles correspondront les ordonnées:

$$y_0,\ y_{1/2},\ y_1,\ \ldots,\ y_i,\ y_{i+1/2},\ \ldots,\ y_n$$

(nous appellerons les ordonnées $y_0, y_1, \ldots, y_n$ ordonnées *entières*, et les ordonnées $y_{1/2}, y_{3/2}, \ldots, y_{n-1/2}$ *fractionnaires*).

A l'extrémité de chaque ordonnée fractionnaire menons la tangente jusqu'à son intersection avec les deux ordonnées entières voisines et remplaçons l'aire donnée par la somme des aires des trapèzes construits de cette façon. La formule approchée, obtenue par cette voie, s'appelle *formule des tangentes*:

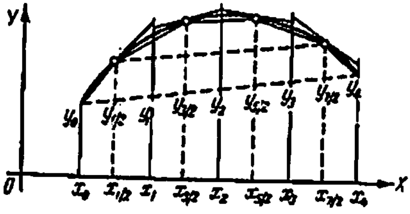

Fig. 148

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\,[y_{1/2}+$$

$$+y_{3/2}+\ldots+y_{n-1/2}]=\sigma_1. \qquad (44)$$

Considérons simultanément avec les trapèzes, *circonscrits* précédemment, *les trapèzes inscrits*, que nous obtenons, en reliant avec les cordes les extrémités des ordonnées impaires voisines; ajoutons-leur encore les deux trapèzes limitrophes, formés avec les cordes, reliant les extrémités des ordonnées y_0 et $y_{1/2}$, $y_{n-1/2}$ et y_n. Nous désignons la somme des aires des trapèzes obtenus par

$$\sigma_2=\frac{b-a}{2n}\left[\frac{y_0+y_n}{2}-\frac{y_{1/2}+y_{n-1/2}}{2}+2y_{1/2}+2y_{3/2}+\ldots+2y_{n-1/2}\right].$$

Si la courbe $y=f(x)$ dans l'intervalle (a, b) ne possède pas de points d'inflexion, c'est-à-dire si elle est seulement convexe ou seulement concave, alors l'aire S de la courbe est comprise entre les aires σ_1 et σ_2, et il est naturel de prendre comme expression approchée pour S la moyenne arithmétique $\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$, ce qui donne *la formule de Poncelet*:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[\frac{y_0+y_n}{4}-\frac{y_{1/2}+y_{n-1/2}}{4}+2y_{1/2}+\right.$$
$$\left.+2y_{3/2}+\ldots+2y_{n-1/2}\right]. \quad (45)$$

Il n'est pas difficile de voir que l'erreur de cette formule avec l'hypothèse faite sur l'allure de la courbe ne dépasse pas la valeur absolue

$$\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}=\left(\frac{y_{1/2}+y_{n-1/2}}{2}-\frac{y_0+y_n}{2}\right)\frac{b-a}{4n}, \quad (46)$$

et l'expression, se trouvant entre parenthèses, est égale, comme il n'est pas difficile de le montrer à partir de la propriété de la base moyenne des trapèzes, au segment de l'ordonnée moyenne, isolé par les cordes reliant entre elles les extrémités des ordonnées limites entières et des ordonnées limites fractionnaires.

III-3-10. Formule de Simpson. Conservant la subdivision précédente en nombre pair de parties, remplaçons la courbe donnée par une succession d'arcs de paraboles du deuxième degré, passant par les extrémités de chacune des trois ordonnées:

$$y_0,\ y_{1/2},\ y_1;\ y_1,\ y_{3/2},\ y_2;\ \ldots;\ y_{n-1},\ y_{n-1/2},\ y_n.$$

Calculant l'aire de chacune des figures curvilignes obtenues de cette manière par la formule (4) [III-3-1], nous obtenons *la formule approchée de Simpson*:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\,[y_0+4y_{1/2}+2y_1+4y_{3/2}+2y_2+\ldots+$$
$$+2y_{n-1}+4y_{n-1/2}+y_n]. \quad (47)$$

Nous ne nous arrêterons pas ici sur l'erreur de cette formule, et également sur l'erreur de la formule des trapèzes. Remarquons, en général, que l'expression de l'erreur sous la forme d'une formule définie a plutôt une valeur théorique que pratique parce que habituellement elle donne une limite par trop grossière.

A propos de la construction précédente, remarquons qu'avec le choix correspondant à a, b et c dans la parabole $y = ax^2 + bx + c$, on peut toujours l'obliger à passer par trois points donnés d'abscisses différentes d'un plan.

En pratique pour la précision du résultat, la connaissance de l'allure de la courbe est essentielle, et au voisinage des points, où la courbe change d'aspect plus ou moins rapidement il faut faire le calcul avec une plus grande précision, et pour cela il est nécessaire d'introduire de plus petites subdivisions de l'intervalle. De toute façon il est utile avant le calcul de se faire une idée même approximative de l'allure de la courbe.

Dans le cas du calcul approché *le schéma de la succession des opérations* est toujours essentiel. Afin d'en donner une présentation et aussi de comparer la précision obtenue avec les diverses formules approchées mises en évidence plus haut nous traiterons les exemples suivants:

1. $S=\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx=1,$

$n=10,\quad \frac{b-a}{n}=0{,}157\,079\,63,\quad \frac{b-a}{2n}=0{,}078\,539\,81,\quad \frac{b-a}{6n}=0{,}026\,179\,94$

y_1	sin 9°	0,156 4345
y_2	sin 18°	0,309 0170
y_3	sin 27°	0,453 9905
y_4	sin 36°	0,587 7853
y_5	sin 45°	0,707 1068
y_6	sin 54°	0,809 0170
y_7	sin 63°	0,891 0065
y_8	sin 72°	0,951 0565
y_9	sin 81°	0,987 6883
Σ_1		5,853 1024

$y_{1/2}$	sin 4°,5	0,078 4591
$y_{3/2}$	sin 13°,5	0,233 4454
$y_{5/2}$	sin 22°,5	0,382 6834
$y_{7/2}$	sin 31°,5	0,522 4986
$y_{9/2}$	sin 40°,5	0,649 4480
$y_{11/2}$	sin 49°,5	0,760 4060
$y_{13/2}$	sin 58°,5	0,852 6402
$y_{15/2}$	sin 67°,5	0,923 8795
$y_{17/2}$	sin 76°,5	0,972 3699
$y_{19/2}$	sin 85°,5	0,996 9173
Σ_2		6,372 7474

y_0	sin 0°	0,000 0000
y_{10}	sin 90°	1,000 0000

Formule des rectangles par défaut

Σ_1	5,853 1024
y_0	0,000 0000
Σ	5,853 1024

$\ln \Sigma$	0,767 3861
$\ln \dfrac{b-a}{n}$	$\bar{1}$,196 1198
$\ln S$	$\bar{1}$,963 5059

$S = 0{,}919\,4080$

Formule des rectangles par excès

Σ_1	5,853 1024
y_{10}	1,000 0000
Σ	6,853 1024

$\ln \Sigma$	0,835 8873
$\ln \dfrac{b-a}{n}$	$\bar{1}$,196 1198
$\ln S$	0,032 0071

$S \approx 1{,}076\,5828$

Formule des tangentes

$\ln \sum_2$	$0,804\,3267$
$\ln \frac{b-a}{n}$	$\bar{1},196\,1198$

$\ln S$	$0,000\,4465$

$S \approx 1,001\,0290$

Formule des trapèzes

$2\sum_1$	$11,706\,2048$
$y_0 + y_{10}$	$1,000\,0000$

$\sum$	$12,706\,2048$

$\ln \sum$	$1,104\,0158$
$\ln \frac{b-a}{2n}$	$\bar{2},895\,0899$

$\ln S$	$\bar{1},999\,1057$

$S \approx 0,997\,9430$

Formule de Poncelet

$2\sum_2$	$12,745\,4948$
$\frac{1}{4}(y_0 + y_{10})$	$0,250\,0000$
$-\frac{1}{4}(y_{1/2} + y_{10/2})$	$-0,268\,8441$

$\sum$	$12,726\,6507$

$\ln \sum$	$1,104\,7141$
$\ln \frac{b-a}{2n}$	$\bar{2},895\,0898$

$\ln S$	$\bar{1},999\,8039$

$S \approx 0,999\,5487$

Formule de Simpson

$2\sum_1$	$11,706\,2048$
$4\sum_2$	$25,490\,9896$
$y_0 + y_{10}$	$1,000\,0000$

$\sum$	$38,197\,1944$

$\ln \sum$	$1,582\,0314$
$\ln \frac{b-a}{6a}$	$\bar{2},417\,9685$

$\ln S$	$\bar{1},999\,9999$

$S \approx 1,000\,0000$

2. $S = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2 = 0,272\,198\,2613\ldots$ *,

$$n = 10, \quad \frac{b-a}{2n} = \frac{1}{20}, \quad \frac{b-a}{6n} = \frac{1}{60}.$$

* Cette formule sera établie dans le douxième tome.

y_1	0,094 3665
y_2	0,175 3092
y_3	0,240 7012
y_4	0,290 0623
y_5	0,324 3721
y_6	0,345 5909
y_7	0,356 1263
y_8	0,358 4065
y_9	0,354 6154
$\sum_1$	2,539 5503

$y_{1/2}$	0,048 6685
$y_{3/2}$	0,136 6865
$y_{5/2}$	0,210 0175
$y_{7/2}$	0,267 3538
$y_{9/2}$	0,308 9926
$y_{11/2}$	0,336 4722
$y_{13/2}$	0,352 0389
$y_{15/2}$	0,358 1540
$y_{17/2}$	0,357 1470
$y_{19/2}$	0,351 0273
$\sum_2$	2,726 5583

y_0	0,000 0000
y_{10}	0,346 5736

Formule de Poncelet

$2\sum_2$	5,453 1166
$\frac{1}{4}(y_0+y_{10})$.	0,086 6434
$-\frac{1}{4}(y_{1/2}+y_{19/2})$	−0,099 9239

$\sum$ 5,439 8361

$$S=\frac{1}{20}\sum \approx 0,271\,9918$$

Formule de Simpson

$2\sum_1$	5,079 1006
$4\sum_2$	10,906 2332
y_0+y_n	0,346 5736

$\sum$ 16,331 9074

$$S=\frac{1}{60}\sum \approx 0,272\,198\,46$$

3. $S=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}=\ln 2=0,693\,147\,18\ldots$

$$n=20,\quad \frac{b-a}{2n}=\frac{1}{40},\quad \frac{b-a}{6n}=\frac{1}{120}.$$

y_1	0,952 3810
y_2	0,909 0909
y_3	0,869 5653
y_4	0,833 3333
y_5	0,800 0000
y_6	0,769 2307
y_7	0,740 7407
y_8	0,714 2857
y_9	0,689 6552
y_{10}	0,666 6667
y_{11}	0,645 1613
y_{12}	0,625 0000
y_{13}	0,606 0606
y_{14}	0,588 2353
y_{15}	0,571 4287
y_{16}	0,555 5556
y_{17}	0,540 5405
y_{18}	0,526 3146
y_{19}	0,512 8205
$\sum_1$	13,116 6666

$y_{1/2}$	0,975 6097
$y_{3/2}$	0,930 2326
$y_{5/2}$	0,888 8889
$y_{7/2}$	0,851 0638
$y_{9/2}$	0,816 3266
$y_{11/2}$	0,784 3135
$y_{13/2}$	0,754 7169
$y_{15/2}$	0,727 2727
$y_{17/2}$	0,701 7543
$y_{19/2}$	0,677 9661
$y_{21/2}$	0,655 7377
$y_{23/2}$	0,634 9207
$y_{25/2}$	0,615 3846
$y_{27/2}$	0,597 0149
$y_{29/2}$	0,597 7101
$y_{31/2}$	0,563 3804
$y_{33/2}$	0,547 9451
$y_{35/2}$	0,533 3333
$y_{37/2}$	0,519 4806
$y_{39/2}$	0,506 3201
$\sum_2$	13,861 3816

Formule des trapèzes

y_0	1,000 0000
y_{20}	0,500 0000

$2\sum_1$	26,232 1332
$y_0 + y_{20}$	1,500 0000

$$\sum \qquad 27,732\ 1332$$

$$S = \frac{1}{40} \sum \approx 0,693\ 303\ 33$$

Formule de Poncelet

$2\sum_2$	27,722 7632
$\frac{1}{4}(y_0+y_{20})$	0,375 0000
$-\frac{1}{4}(y_{1/2}+y_{39/2})$	−0,370 4847

$\sum$ 27,727 2785

$S=\frac{1}{40}\sum\approx 0,693\ 181\ 96$

Formule de Simpson

$2\sum_1$	26,232 1332
$4\sum_2$	55,445 5264
y_0+y_{20}	0,500 0000

$\sum$ 83,177 6596

$S=\frac{1}{120}\sum\approx 0,693\ 147\ 16$

III-3-11. Calcul d'une intégrale définie avec une borne supérieure variable. Dans beaucoup de problèmes on est amené à calculer les valeurs des intégrales définies:

$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$$

ayant une borne supérieure variable.

Ayant établi la formule des trapèzes (43), on peut montrer le moyen suivant pour obtenir des valeurs approchées de cette intégrale, en fait, non pour toutes les valeurs de x, mais seulement pour celles, qui ont servi à subdiviser l'intervalle (a, b) en parties, c'est-à-dire:

$$F(a),\ F(x_1),\ F(x_2),\ \ldots,\ F(x_k),\ \ldots,\ F(x_{n-1}),\ F(b).$$

D'après la formule (43) nous avons:

$$F(x_k)=\int_a^{a+kh} f(x)\,dx\approx h\left[\frac{y_0+y_1}{2}+\ldots+\frac{y_{k-1}+y_k}{2}\right], \tag{48}$$

$$F(x_{k+1})=\int_a^{a+(k+1)h} f(x)\,dx\approx h\left[\frac{y_0+y_1}{2}+\ldots+\frac{y_{k-1}+y_k}{2}+\frac{y_k+y_{k+1}}{2}\right]\approx$$

$$\approx F(x_k)+\frac{1}{2}h(y_k+y_{k+1}). \tag{49}$$

Cette formule donne la possibilité, ayant calculé la valeur de $F(x_k)$, de poursuivre jusqu'à la valeur suivante $F(x_{k+1})=F(x_k+h)$.

Il est possible de disposer ce calcul selon le schéma, présenté p. 289.

III-3-12. Méthodes graphiques. Ces calculs peuvent être faits graphiquement, si la représentation de la courbe $y=f(x)$ est donnée; nous obtiendrons ainsi la construction du graphique de la courbe intégrale:

$$y=\int_a^x f(x)\,dx=F(x)$$

à partir de la représentation de la courbe

$$y=f(x). \tag{50}$$

I	II	III	IV	V	VI
k	x_k	y_k	$s_k=y_k+y_{k+1}$	$\sum_{n=1}^{k} s_n$	$F(x_k)=\frac{1}{2}h\sum_{n=1}^{k} s_n$
0	a	y_0	$s_1=y_0+y_1$	0	0
1	$a+h$	y_1	$s_2=y_1+y_2$	s_1	$\frac{1}{2}hs_1$
2	$a+2h$	y_2	$s_3=y_2+y_3$	s_1+s_2	$\frac{1}{2}h(s_1+s_2)$
3	$a+3h$	y_3	$s_4=y_3+y_4$	$s_1+s_2+s_3$	$\frac{1}{2}h(s_1+s_2+s_3)$
4	$a+4h$	y_4	$s_5=y_4+y_5$	$s_1+s_2+s_3+s_4$	$\frac{1}{2}h(s_1+s_2+s_3+s_4)$
5	$a+5h$	y_5	$s_6=y_5+y_6$	$s_1+s_2+s_3+s_4+s_5$	$\frac{1}{2}h(s_1+s_2+s_3+s_4+s_5)$
6	$a+6h$	y_6		$s_1+s_2+s_3+s_4+s_5+s_6$	$\frac{1}{2}h(s_1+s_2+s_3+s_4+s_5+s_6)$

Avant tout, si nous avons un nombre suffisant de divisions, nous pouvons prendre approximativement

$$\frac{s_k}{2}=\frac{y_{k-1}+y_k}{2}=y_{k-1/2}, \tag{51}$$

c'est-à-dire si la représentation de la courbe (50) est tracée, alors les grandeurs

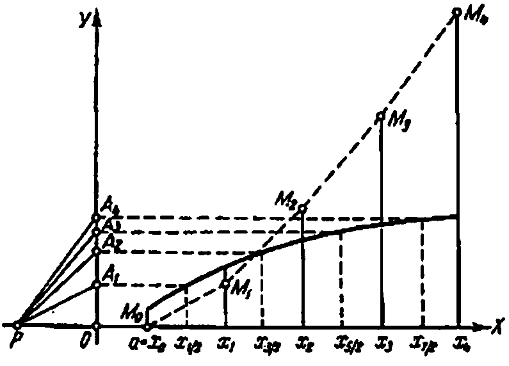

Fig. 149

$\frac{s_k}{2}$ sont obtenues immédiatement à partir de la fig. 149, en tant qu'ordonnées de la courbe pour

$$x_{k-1/2}=a+\frac{2k-1}{2}h.$$

Notons sur l'axe OY les points:

$$A_1(y_{1/2}),\ A_2(y_{3/2}),\ A_3(y_{5/2}),\ \ldots,\ A_k(y_{k-1/2}).$$

Sur l'axe OX à gauche du point O construisons le segment OP égal à l'unité. Portons les rayons:

$$PA_1,\ PA_2,\ PA_3,\ \ldots,\ PA_k,$$

et par les points $M_0, M_1, M_2, \ldots$ leurs parallèles, de sorte que

$$M_0M_1 \parallel PA_1,\quad M_1M_2 \parallel PA_2,\quad M_2M_3 \parallel PA_3,\ \ldots$$

Les points $M_0, M_1, M_2, \ldots$ seront des points de la courbe intégrale approchée de la cherchée, ainsi qu'il n'est pas difficile de s'en assurer à partir de la figure

$$\overline{x_1M_1}=hy_{1/2},\quad \overline{x_2M_2}=h(y_{1/2}+y_{3/2}),\quad \overline{x_3M_3}=h(y_{1/2}+y_{3/2}+y_{5/2}),\ \ldots,$$

et cela, en vertu de l'égalité approchée (51) et de la formule (48), s'écrit:

$$\overline{x_kM_k}=h(y_{1/2}+y_{3/2}+\ldots+y_{k-1/2})=h\left(\frac{y_0+y_1}{2}+\ldots+\frac{y_{k-1}+y_k}{2}\right)=F(x_k).$$

La construction qui vient d'être montrée est pratiquée dans les cas, où l'échelle pour la fonction $F(x)$ coïncide avec l'échelle pour $f(x)$.

Si l'échelle sort de l'épure, la construction subsiste quand même avec la seule différence, que le segment $\overline{OP}$ possède non une longueur unité mais l, qui est égale au rapport de l'échelle pour $F(x)$ et de l'échelle pour $f(x)$.

La construction graphique approchée de l'intégrale répétée

$$\Phi(x) = \int_a^x dx \left(\int_a^x f(x)\,dx\right)$$

est établie par la formule des rectangles (40) [III-3-8].

Posons, comme précédemment, que

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx.$$

Considérant seulement les valeurs $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de la variable indépendante x, nous avons d'après la formule (40) l'égalité approchée:

$$F(x_1) \approx hy_0, \quad F(x_2) \approx h(y_0 + y_1), \quad \ldots, \quad F(x_k) \approx h(y_0 + y_1 + \ldots + y_{k-1}).$$

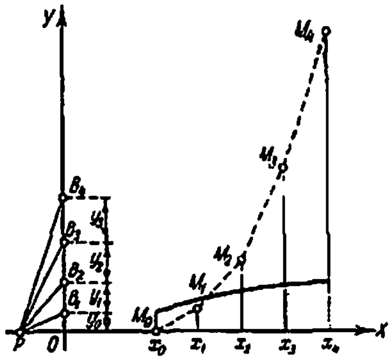

Fig. 150

Appliquant la même formule pour la fonction $\Phi(x)$, nous avons:

$$\Phi(x_k) = h[F(x_0) + F(x_1) + \ldots + F(x_{k-1})] \approx$$
$$\approx h^2 [y_0 + (y_0 + y_1) + \ldots + (y_0 + y_1 + \ldots + y_{k-1})]. \quad (52)$$

D'où découle la construction suivante de l'ordonnée $\Phi(x_k)$ (fig. 150): ayant construit le point P, comme précédemment, nous reportons sur l'axe OY les segments:

$$\overline{OB_1} = y_0, \quad \overline{B_1B_2} = y_1,$$
$$\overline{B_2B_3} = y_2, \quad \ldots, \quad \overline{B_{k-1}B_k} = y_{k-1}, \ldots$$

Traçant les rayons:

$$PB_1, \; PB_2, \; PB_3, \; \ldots, \; PB_k, \; \ldots,$$

construisons les points:

$$M_0, \; M_1, \; M_2, \; \ldots, \; M_k, \; \ldots,$$

en menant

$$M_0M_1 \parallel PB_1, \quad M_1M_2 \parallel PB_2,$$
$$M_2M_3 \parallel PB_3, \ldots$$

Ces points seront les points de la courbe approchée cherchée, tracée, toutefois, à l'échelle constante $(1:h)$, car de cette construction il est clair que:

$$\overline{x_1M_1} = hy_0, \quad \overline{x_2M_2} = hy_0 + h(y_0 + y_1), \ldots,$$

$$\overline{x_kM_k} = hy_0 + h(y_0 + y_1) + \ldots + h(y_0 + y_1 + \ldots + y_{k-1}) \approx \frac{\Phi(x_k)}{h}$$

en vertu de (52). Si la longueur OP n'est pas égale à l'unité, mais à l, la courbe construite donne l'ordonnée de la courbe $\Phi(x)$, modifiée dans le rapport $(1:lh)$.

Il convient de noter que malgré la commodité des constructions étudiées, leur précision n'est pas grande, et on ne peut les employer que pour la comparaison de calculs assez grossiers.

III-3-13. Aires des courbes à oscillations rapides. Plus haut [III-3-10] il a été montré que pour le choix heureux des diverses formules approchées, pour le calcul de l'intégrale définie, il convient de partager la courbe, dont l'aire est à définir, en parties, dans chacune desquelles elle est monotone. Cette exigence est toujours difficile pour les courbes, se conduisant irrégulièrement, possédant beaucoup d'oscillations vers le haut et le bas. Pour

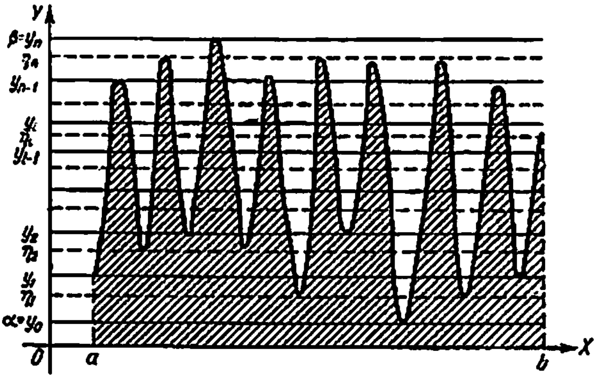

Fig. 151

la définition des aires de ces courbes d'après les règles précédentes il convient d'introduire beaucoup de subdivisions, ce qui compliquerait considérablement les calculs.

Dans de tels cas il est utile d'appliquer une autre méthode, notamment en partageant l'aire en bandelettes, parallèles non pas à l'axe OY mais à l'axe OX; pour la détermination approchée de l'aire de la courbe, représentée sur la fig. 151, portons sur l'axe OY la plus petite et la plus grande des ordonnées α et β de la courbe et partageons l'intervalle (α, β) en n parties selon les points:

$$y_0=\alpha,\ y_1,\ \ldots,\ y_{i-1},\ y_i,\ \ldots,\ y_{n-1},\ y_n=\beta.$$

Portant par les points de division les droites parallèles à l'axe OX, nous partageons toute l'aire en bandelettes, composées de parties séparées; pour l'expression approximative de l'aire de la i^e bandelette, nous pouvons prendre le produit de sa base (y_i-y_{i-1}) par la somme des longueurs l_i des segments d'une droite quelconque

$$y=\eta_i \qquad (y_{i-1}\leqslant\eta_i\leqslant y_i),$$

compris à l'intérieur de l'aire examinée; cette somme peut être rapidement déterminée d'après la figure. Ayant désigné cette somme par l_i nous obtenons pour l'aire cherchée S l'expression approchée de la forme:

$$y_0(b-a)+(y_1-y_0)\,l_1+(y_2-y_1)\,l_2+\cdots+(y_n-y_{n-1})\,l_n,$$

laquelle sera d'autant plus précise que le nombre de divisions sera plus grand et que les fluctuations de la courbe seront plus brusques.

Le développement dans les règles de l'idée fondamentale de cette méthode conduit au concept d'intégrale de Lebesgue, qui est considérablement plus général que le concept d'intégrale de Riemann exposé [III-2-1, III-4-3].

III-4. Données complémentaires sur les intégrales définies

III-4-1. Notions préliminaires. Les derniers paragraphes du présent chapitre seront consacrés à une sérieuse étude analytique du concept d'intégrale, et dans le paragraphe suivant nous montrerons l'existence de la limite définie pour la somme de la forme:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

et non seulement dans le cas d'une fonction continue. Pour cela il nous faut introduire quelques nouveaux concepts, liés à l'étude des fonctions discontinues.

Soit la fonction $f(x)$ définie dans un certain intervalle fini (a, b). Nous examinerons seulement les fonctions bornées, c'est-à-dire les fonctions, dont les valeurs dans l'intervalle mentionné restent en valeur absolue plus petites qu'un nombre défini positif, c'est-à-dire que *la fonction $f(x)$ est bornée dans l'intervalle (a, b), s'il existe un nombre positif B, tel que pour tout x de l'intervalle mentionné nous ayons:*

$$|f(x)| < B.$$

Si la fonction $f(x)$ est continue, alors, comme nous l'avons déjà mentionné [I-2-11], elle atteint dans cet intervalle la plus grande et la plus petite valeur et, par suite, bien sûr, est bornée. Au contraire, les fonctions discontinues peuvent être aussi bien bornées que non bornées. Plus loin, nous examinerons seulement les fonctions discontinues bornées. Supposons, par exemple, que la fonction $f(x)$ ait une représentation graphique, reproduite sur la fig. 152. Au point $x = c$ nous avons une rupture dans la continuité de la fonction, et la valeur de la fonction en ce même point $x = c$, c'est-à-dire $f(c)$, doit être déterminée au moyen d'une hypothèse supplémentaire. Aux autres points de l'intervalle, y compris les extrémités a et b, la fonction est continue. En outre, en ce qui concerne la manière dont la variable x tend vers la valeur $x = c$ à partir des valeurs inférieures, c'est-à-dire à gauche, l'ordonnée $f(x)$ tend vers une limite définie, représentée géométriquement par le segment $\overline{NM_1}$.

De même, en ce qui concerne la manière dont x tend vers c à partir des valeurs supérieures, c'est-à-dire à droite, $f(x)$ tend aussi vers une limite définie, représentée par le segment $\overline{NM_2}$, mais cette dernière limite diffère de la limite à gauche mentionnée plus haut. On désigne habituellement la limite mentionnée à gauche par le symbole $f(c-0)$, et la limite à droite par le symbole $f(c+0)$ [I-2-8]. *Cette rupture la plus simple de la continuité de la fonction pour laquelle existent des limites extrêmes définies soit à gauche, soit à droite, s'appelle discontinuité du premier ordre.* La valeur de la fonction en ce même point $x = c$, c'est-à-dire $f(c)$, différera, généralement, aussi bien de $f(c-0)$ que de $f(c+0)$ et devra être

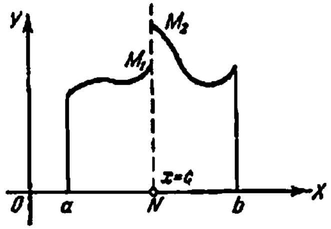

Fig. 152

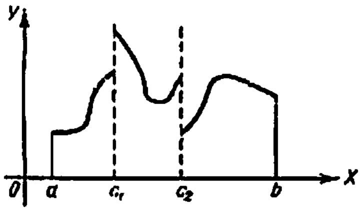

Fig. 153

déterminée par une information complémentaire. Si la fonction est continue dans l'intervalle (a, b) y compris les extrémités, à l'exception d'un nombre fini de points, pour lesquels elle possède des discontinuités du premier ordre, le graphique d'une fonction se compose d'un nombre fini de courbes, continues jusqu'à leurs extrémités, et de points isolés aux endroits de rupture de continuité (fig. 153). Une telle fonction, malgré sa discontinuité, sera, évidemment, bornée dans tout l'intervalle. Bien entendu, des fonctions avec des discontinuités plus complexes pourront être bornées.

Plus loin, nous examinerons fréquemment les ensembles de toutes les valeurs, que n'importe quelle fonction $f(x)$ prend dans un intervalle donné de variation de la variable indépendante. Si la fonction prise est bornée dans l'intervalle examiné, alors l'ensemble de ses valeurs dans cet intervalle est limité vers le haut et vers le bas, c'est pourquoi cet ensemble possède toujours des bornes, supérieure et inférieure [I-2-15]. Si, par exemple, $f(x)$ est continue dans l'intervalle considéré (fermé), alors, comme on le sait [I-2-11], elle atteint dans cet intervalle la plus grande et la plus petite valeur. Dans le cas présent, ces valeurs de la fonction seront les bornes supérieure et inférieure des valeurs de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle examiné.

Considérons un autre exemple: si la fonction $f(x)$ est une fonction croissante, alors elle possède la plus grande valeur à l'extrémité droite de l'intervalle et la plus petite valeur à l'extrémité gauche. Ces valeurs, de même que dans le cas précédent, seront les bornes supérieure et inférieure des valeurs de $f(x)$. Dans les deux exemples examinés les bornes de la fonction apparaissaient elles-mêmes comme des valeurs particulières de la fonction, c'est-à-dire qu'elles appartenaient elles-mêmes à l'ensemble examiné des valeurs de la fonction. Dans les cas plus complexes d'une fonction discontinue les bornes de la fonction peuvent ne pas apparaître elles-mêmes comme des valeurs de la fonction, c'est-à-dire peuvent ne pas appartenir à l'ensemble des valeurs de la fonction.

Soit m la borne inférieure de l'ensemble des valeurs de la fonction bornée $f(x)$ dans un intervalle fini quelconque (a, b) et M leur borne supérieure. Prenons un nouvel intervalle (a', b'), qui apparaisse comme une partie du précédent intervalle (a, b).

Soient m' et M' les bornes inférieure et supérieure de l'ensemble des valeurs de $f(x)$ dans le nouvel intervalle (a', b'). Comme l'ensemble des valeurs de $f(x)$ dans l'intervalle (a', b') se trouve parmi les valeurs de $f(x)$ de l'intervalle plus large (a, b), on peut affirmer que $m' \geqslant m$ et $M' \leqslant M$, c'est-à-dire que:

L e m m e 1. *Si on substitue à un intervalle quelconque une partie de cet intervalle, alors la borne supérieure des valeurs de la fonction $f(x)$ ne peut augmenter, ni la borne inférieure diminuer.*

III-4-2. Découpage d'un intervalle et formation de diverses sommes. Soit un intervalle fini (a, b) découpé en un nombre fini de parties par les valeurs intermédiaires de x:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b. \quad (1)$$

Nous désignerons ce découpage par une seule lettre δ; les valeurs x_k sont appelées les points de division de δ. Pour divers découpages le nombre d'intervalles partiels et les points de division x_k sont, en général, différents. Désignons la longueur des intervalles partiels pour le découpage (1) par: $\delta_k = x_k - x_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Soit $f(x)$ une fonction bornée donnée sur l'intervalle (a, b). Ecrivons la somme correspondant au découpage δ (1) dont la limite, si elle existe, donne l'intégrale définie de $f(x)$ sur l'intervalle (a, b):

$$\sigma(\delta, \xi_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \delta_k. \quad (2)$$

Elle dépend de δ et du choix des points ξ_k. Considérons l'ensemble des valeurs de $f(x)$ dans l'intervalle (x_{k-1}, x_k). Comme $f(x)$ est bornée, cet ensemble est aussi borné. Désignons par m_k la borne inférieure et par M_k la borne supérieure des valeurs de $f(x)$ dans l'intervalle (x_{k-1}, x_k) $(k = 1, 2, \ldots, n)$ et remplaçons dans les termes de la somme (2) $f(\xi_k)$ par m_k et par M_k. Nous obtenons deux sommes ne dépendant que du découpage δ de l'intervalle (a, b) :

$$s(\delta) = \sum_{k=1}^{n} m_k \delta_k; \quad S(\delta) = \sum_{k=1}^{n} M_k \delta_k. \tag{3}$$

Il découle immédiatement de la définition de m_k et M_k que

$$m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k,$$

d'où, comme δ_k est positif, nous tirons

$$s(\delta) \leqslant \sigma(\delta, \xi_k) \leqslant S(\delta). \tag{4}$$

Soit encore, comme plus haut, m et M les bornes inférieure et supérieure de $f(x)$ sur tout l'intervalle (a, b). Utilisant le lemme 1, on voit aisément que les inégalités

$$m \leqslant m_k \leqslant M_k \leqslant M, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

sont vérifiées et qu'en outre, évidemment,

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = b - a.$$

Multipliant les inégalités (5) par les nombres positifs δ_k et sommant sur k de $k = 1$ jusqu'à $k = n$, nous obtenons

$$m(b-a) \leqslant s(\delta) \leqslant M(b-a),$$

$$m(b-a) \leqslant S(\delta) \leqslant M(b-a),$$

autrement dit, l'ensemble des valeurs $s(\delta)$ et $S(\delta)$ pour tous les découpages possibles δ est borné inférieurement et supérieurement. Désignons par la lettre i la borne supérieure de l'ensemble des valeurs de $s(\delta)$ et par la lettre I la borne inférieure des valeurs $S(\delta)$ pour tous les découpages possibles δ :

$$s_\delta \leqslant i, \quad S_\delta \geqslant I. \tag{6}$$

Notons que la différence non négative $M - m$ est d'habitude appelée *l'oscillation de la fonction* $f(x)$ sur l'intervalle (a, b). La différence $M_k - m_k$ est l'oscillation de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle (x_{k-1}, x_k).

Introduisons maintenant certaines notions nouvelles. Nous appellerons le découpage δ' de l'intervalle (a, b) prolongement du découpage δ, si chaque point de division de δ est un point de division de δ', autrement dit, δ' est obtenu à partir de δ en ajoutant de nouveaux points de division (si δ' n'est pas identique à δ). Si δ_1 et δ_2 sont deux découpages, nous désignerons comme leur produit le découpage de (a, b) dont les points de division s'obtiennent en réunissant les points de division de δ_1 et de δ_2. Nous désignerons le produit des découpages par $\delta_1\delta_2$. Cette notion peut être appliquée également au cas de plusieurs facteurs. Le découpage $\delta_1\delta_2$ est évidemment un prolongement du découpage δ_1 comme du découpage δ_2.

L e m m e 2. *Si le découpage δ' est le prolongement du découpage δ, alors $s(\delta) \leqslant s(\delta')$ et $S(\delta) \geqslant S(\delta')$.*

Quand nous passons de δ à δ', chacun des intervalles (x_{k-1}, x_k) de la subdivision δ peut être scindé en plusieurs parties. Posons par exemple que cet intervalle se scinde en trois parties (x_{k-1}, α_k), (α_k, β_k) et (β_k, x_k) de longueurs respectives $\delta_k^{(1)} = \alpha_k - x_{k-1}$, $\delta_k^{(2)} = \beta_k - \alpha_k$, $\delta_k^{(3)} = x_k - \beta_k$, et soit $M_k^{(1)}$, $M_k^{(2)}$, $M_k^{(3)}$ les bornes supérieures de l'ensemble des valeurs de $f(x)$ dans les intervalles précités. En vertu du lemme 1: $M_k^{(1)}$, $M_k^{(2)}$ et $M_k^{(3)} \leqslant M_k$, et la somme $\delta_k^{(1)} + \delta_k^{(2)} + \delta_k^{(3)} = \delta_k = x_k - x_{k-1}$. Le terme $M_k\delta_k$ de la somme $S(\delta)$ lors du passage à δ' est remplacé par la somme de trois termes:

$$M_k^{(1)}\delta_k^{(1)} + M_k^{(2)}\delta_k^{(2)} + M_k^{(3)}\delta_k^{(3)}$$

et, en vertu de ce qui a été dit plus haut,

$$M_k^{(1)}\delta_k^{(1)} + M_k^{(2)}\delta_k^{(2)} + M_k^{(3)}\delta_k^{(3)} \leqslant M_k(\delta_k^{(1)} + \delta_k^{(2)} + \delta_k^{(3)}) = M_k\delta_k,$$

autrement dit, quand on passe de δ à δ', chaque terme $M_k\delta_k$ de la somme est soit remplacé par une somme finie, qui est inférieure ou égale à $M_k\delta_k$, soit reste inchangé. Il en découle précisément que $S(\delta) \geqslant S(\delta')$. Exactement de la même façon on démontre que $s(\delta) \leqslant s(\delta')$ et le lemme est démontré.

Prenant en considération que $m_k \leqslant M_k$ et δ_k sont positifs on voit aisément que pour un même δ nous avons $s(\delta) \leqslant S(\delta)$. Montrons que cette même inégalité a lieu également pour n'importe quels découpages.

L e m m e 3. *Si δ_1 et δ_2 sont deux découpages, alors $s(\delta_1) \leqslant S(\delta_2)$.*

Considérons le produit $\delta_1\delta_2$ des découpages δ_1 et δ_2. Comme $\delta_1\delta_2$ est le prolongement de δ_1 et δ_2, il découle du lemme 2 que $s(\delta_1\delta_2) \geqslant s(\delta_1)$ et $S(\delta_1\delta_2) \leqslant S(\delta_2)$ et, utilisant l'inégalité $s(\delta_1\delta_2) \leqslant S(\delta_1\delta_2)$, nous obtenons $s(\delta_1) \leqslant S(\delta_2)$. Le lemme est démontré.

Il découle immédiatement de ce lemme que la borne supérieure i de l'ensemble des valeurs $s(\delta)$ pour tous les découpages possibles δ et la borne inférieure I de $S(\delta)$ vérifient les inégalités

$$s(\delta) \leqslant i \leqslant I \leqslant S(\delta). \tag{7}$$

Occupons-nous maintenant des sommes $\sigma(\delta, \xi_k)$ qui vérifient les inégalités (4). Pour un découpage fixé δ en vertu de la définition de m_k et M_k on peut pour tout k choisir ξ_k de sorte que $f(\xi_k)$

soit aussi près que l'on veut de M_k ou même (en certains cas) coïncide avec M_k, autrement dit, on peut choisir ξ_k de sorte que la somme $\sigma(\delta, \xi_k)$ soit arbitrairement proche de $S(\delta)$ et même en certains cas que $\sigma(\delta, \xi_k)$ coïncide avec $S(\delta)$. D'autre part, en vertu de (4), $\sigma(\delta, \xi_k) \leqslant S(\delta)$. Il en découle que $S(\delta)$ est la borne supérieure des valeurs de $\sigma(\delta, \xi_k)$ pour tous les choix possibles de ξ_k. On démontre d'une manière analogue que $s(\delta)$ est la borne inférieure des valeurs de $\sigma(\delta, \xi_k)$, autrement dit, a lieu:

L e m m e 4. *Pour un découpage fixé δ la grandeur $s(\delta)$ est la borne inférieure des valeurs de $\sigma(\delta, \xi_k)$ pour tous les choix possibles de ξ_k, et $S(\delta)$ est la borne supérieure de l'ensemble des valeurs de $\sigma(\delta, \xi_k)$ pour les mêmes conditions.*

III-4-3. **Fonctions intégrables.** Indiquons maintenant la condition nécessaire et suffisante de l'existence de l'intégrale d'une fonction bornée $f(x)$ ou, comme il est admis de dire, la condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité de $f(x)$. Nous désignerons par la suite par $\mu(\delta)$ la plus grande des longueurs des intervalles partiels entrant dans la subdivision δ.

T h é o r è m e. *Une condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité de la fonction bornée $f(x)$ sur un intervalle fini (a, b) est que la différence*

$$S(\delta)-s(\delta)=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\,\delta_k \tag{8}$$

tende vers zéro quand $\mu(\delta)$ tend vers zéro.

En d'autres termes, cette condition, que nous appellerons la condition A, consiste en ce qui suit: pour tout nombre positif donné ε, il existe un nombre positif η tel que la différence:

$$S(\delta)-s(\delta)<\varepsilon, \quad \text{si} \quad \mu(\delta)<\eta,$$

soit non négative.

L a c o n d i t i o n e s t s u f f i s a n t e. Supposons que la condition A du théorème soit vérifiée, autrement dit, $S(\delta)-$ $-s(\delta)\to 0$ quand $\mu(\delta)\to 0$. Alors il découle de (7) que $i=I$ et que $s(\delta)$ et $S(\delta)$ tendent vers I quand $\mu(\delta)\to 0$.

Il en découle, compte tenu de (4), que la somme $\sigma(\delta, \xi_k)$ tend vers I pour $\mu(\delta)\to 0$ et pour tout choix de ξ_k. Plus exactement, $|I-\sigma(\delta, \xi_k)|<\varepsilon$ quand $\mu(\delta)<\eta$, et $\eta>0$ est déterminé par la valeur donnée de $\varepsilon>0$. Ainsi nous avons démontré que $f(x)$ est intégrable et que le nombre I est la valeur de l'intégrale. La condition A est donc suffisante.

L a c o n d i t i o n e s t n é c e s s a i r e. Supposons que $f(x)$ soit intégrable. Démontrons que la condition A est remplie. Désignons par I_0 la valeur de l'intégrale de $f(x)$. Par définition nous aurons alors: pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\eta > 0$ tel que

$$|\sigma(\delta, \xi_k) - I_0| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \text{si} \quad \mu(\delta) < \eta \tag{9}$$

pour n'importe quel choix de ξ_k. En vertu du lemme 4, pour tout δ fixé il est possible d'effectuer le choix de $\xi_k = \xi'_k$ et $\xi_k = \xi''_k$, de sorte que

$$|\sigma(\delta, \xi'_k) - s(\delta)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

et

$$|\sigma(\delta, \xi''_k) - S(\delta)| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{10}$$

Nous pouvons écrire

$$S(\delta) - s(\delta) = [S(\delta) - \sigma(\delta, \xi''_k)] + [\sigma(\delta, \xi''_k) - I_0] + \\ + [I_0 - \sigma(\delta, \xi'_k)] + [\sigma(\delta, \xi'_k) - s(\delta)],$$

d'où, en vertu de (9) et (10), nous obtenons pour $\mu(\delta) < \eta$

$$|S(\delta) - s(\delta)| \leqslant |S(\delta) - \sigma(\delta, \xi''_k)| + |\sigma(\delta, \xi''_k) - I_0| + \\ + |I_0 - \sigma(\delta, \xi'_k)| + |\sigma(\delta, \xi'_k) - s(\delta)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

autrement dit, $|S(\delta) - s(\delta)| < \varepsilon$ quand $\mu(\delta) < \eta$, ce en quoi consiste la condition A. La condition est donc nécessaire.

R e m a r q u e 1. Il découle de la démonstration du fait que la condition A est suffisante que $i = I$ quand la condition A est remplie, et que dans ce cas la valeur de l'intégrale est égale à I. C'est pourquoi il découle du fait que la condition A est nécessaire que l'égalité $i = I$ est une condition nécessaire de l'intégrabilité.

R e m a r q u e 2. On peut montrer que pour toute fonction bornée $f(x)$ nous aurons: $s(\delta) \to i$ et $S(\delta) \to I$ quand $\mu(\delta) \to 0$. Il en découle que si $i = I$, alors $(S(\delta) - s(\delta)) \to 0$ quand $\mu(\delta) \to 0$, et par conséquent l'égalité $i = I$ est non seulement nécessaire, mais aussi suffisante de l'intégrabilité de $f(x)$.

I. Si $f(x)$ est continue sur l'intervalle fermé (a, b), elle est uniformément continue sur cet intervalle. En outre, sur chacun des intervalles (x_{k-1}, x_k) elle atteint sa plus petite valeur m_k et sa plus grande valeur M_k. En vertu de la continuité uniforme de $f(x)$ pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un $\eta > 0$, tel que $0 \leqslant M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$, si $\mu(\delta) < \eta$. Alors

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\delta_k < \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}\delta_k = \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\delta_k = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,$$

autrement dit, $S(\delta) - s(\delta) < \varepsilon$, si $\mu(\delta) < \eta$. Ainsi, la condition A est remplie et, par conséquent, *toute fonction continue est intégrable.*

II. Supposons maintenant que la fonction bornée $f(x)$ possède un nombre fini de points de discontinuité. Pour fixer les idées nous supposerons que $f(x)$ possède un point de discontinuité $x = c$ situé à l'intérieur de (a, b). Notons avant tout que les différences $M_k - m_k$ sur chaque intervalle partiel ne dépassent pas l'oscillation $M - m$ de la fonction sur l'intervalle (a, b) tout entier:

$$M_k - m_k \leqslant M - m, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Soit un nombre positif donné ε. Isolons le point c du segment (a, b) à l'aide d'un petit intervalle fixé (a_1, b_1) (fig. 154) tel que $a < a_1 < c < b_1 < b$ et $b_1 - a_1 < \varepsilon$. Sur les intervalles fermés (a, a_1)

Fig. 154

et (b, b_1) la fonction $f(x)$ est continue et par conséquent uniformément continue. C'est pourquoi pour chacun de ces deux intervalles il existe un nombre η tel que $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$, si x' et x'' appartiennent à (a, a_1) ou (b_1, b) et $|x'' - x'| < \eta$. Les nombres η peuvent s'avérer différents pour (a, a_1) et (b_1, b), mais si nous choisissons le plus petit de ces deux nombres η, il sera valable pour les deux intervalles. Soit δ un découpage arbitraire de (a, b) tel que le $\mu(\delta)$ qui lui correspond est plus petit que les nombres η et ε:

$$\mu(\delta) < \eta \quad \text{et} \quad \mu(\delta) < \varepsilon, \tag{12}$$

autrement dit, est plus petit que le plus petit de ces deux nombres η et .

Evaluons la somme (8), correspondant à un tel δ et constituée de termes non négatifs. Divisons les intervalles (x_{k-1}, x_k) appartenant à δ en deux classes. Nous rapporterons à la première classe ceux qui font intégralement partie de (a, a_1) ou (b_1, b) et à la deuxième classe les autres intervalles partiels de δ. Ce seront les intervalles (x_{k-1}, x_k) qui soit appartiennent à (a_1, b_1), soit ont avec cet intervalle une partie commune. La somme des longueurs δ_k des intervalles de la première classe est évidemment inférieure à $(b - a)$, et cette somme pour les intervalles de la seconde classe est inférieure à 3ε. Cela découle de l'inégalité $b_1 - a_1 < \varepsilon$, de la deuxième inégalité (12) et du fait que le nombre des intervalles de δ recouvrant partiellement (a_1, b_1) est au plus égal à deux.

Ensuite pour les intervalles de la première classe en vertu de la continuité de $f(x)$ sur (a, a_1) et (b_1, b) de la première inégalité (12) et de la définition du nombre η nous avons $M_k - m_k < \varepsilon$. Pour les intervalles de la seconde classe nous utiliserons l'inégalité (11). Ainsi, nous avons pour la somme sur les intervalles de la première classe :

$$\sum_{\mathrm{I}} (M_k - m_k)\,\delta_k < \varepsilon \sum_{\mathrm{I}} \delta_k < \varepsilon(b-a)$$

et pour les intervalles de la seconde classe :

$$\sum_{\mathrm{II}} (M_k - m_k)\,\delta_k \leqslant (M-m) \sum_{\mathrm{II}} \delta_k < (M-m)\,3\varepsilon.$$

En définitive,

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\,\delta_k < \varepsilon\,[(b-a) + 3(M-m)], \tag{13}$$

si $\mu(\delta)$ vérifie les inégalités (12). Les crochets du second membre de (13) est un nombre déterminé et en prenant en considération la possibilité de choisir arbitrairement le nombre positif ε nous pouvons affirmer que la condition A est remplie, autrement dit que *toute fonction bornée $f(x)$ possédant un nombre fini de points de discontinuité est intégrable.*

III. Considérons le cas où $f(x)$ est une fonction monotone bornée sur le segment fini (a, b). Pour fixer les idées nous supposerons que $f(x)$ n'est pas décroissante, c'est-à-dire que $f(c_1) \leqslant f(c_2)$, si $c_1 < c_2$. Alors sur chaque intervalle (x_{k-1}, x_k) nous avons $m_k = f(x_{k-1})$ et $M_k = f(x_k)$. Il en découle que

$$S(\delta) - s(\delta) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\,\delta_k = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})]\,\delta_k.$$

Mais $\delta_k \leqslant \mu(\delta)$ et les différences $f(x_k) - f(x_{k-1})$ ne sont pas négatives ; par conséquent,

$$S(\delta) - s(\delta) \leqslant \mu(\delta) \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})].$$

Considérant que

$$\sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})] = [f(x_1) - f(a)] +$$

$$+ [f(x_2) - f(x_1)] + \ldots + [f(b) - f(x_{n-1})] = f(b) - f(a),$$

nous obtenons

$$S(\delta) - s(\delta) \leqslant [f(b) - f(a)]\,\mu(\delta),$$

d'où il découle que

$$S(\delta)-s(\delta)<\varepsilon, \quad \text{si} \quad \mu(\delta)<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \quad \text{pour} \quad f(b)>f(a).$$

Si $f(b)=f(a)$, alors $f(x)$ est constante.

Donc, *toute fonction bornée et monotone est une fonction intégrable.*

Remarquons que la fonction monotone peut avoir une quantité innombrable de points de discontinuité, de sorte que le cas (III) n'était pas entièrement compris dans le cas (II). Comme exemple, nous pouvons prendre la fonction, égale à zéro pour $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$, égale à $\frac{1}{2}$ pour $\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{2}{3}$, égale à $\frac{2}{3}$ pour $\frac{2}{3} \leqslant x < \frac{3}{4}$, etc., et enfin égale à 1 pour $x = 1$. Avec cette fonction non décroissante, nous aurons pour les points de discontinuité dans l'intervalle $(0,1)$ les valeurs

$$x=\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \ldots$$

Nous nous rappelons à ce sujet qu'une fonction monotone et bornée doit posséder en chaque point de discontinuité $x = c$ les limites $f(c-0)$ et $f(c+0)$. Cela découle immédiatement de l'existence de la limite d'une suite monotone et bornée de nombres [I-2-6].

Pour obtenir les conditions d'intégrabilité nous avons toujours supposé $f(x)$ bornée. On peut démontrer que cette condition apparaît ne pas être une condition nécessaire d'intégrabilité, autrement dit d'existence d'une limite définie de la somme (2). Si cette condition de limitation n'est pas remplie, on peut dans certains cas, définir l'intégrale de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b), mais non comme une limite de somme (2). Dans ce cas l'intégrale est dite *impropre*. Les bases de l'étude de l'intégrale impropre ont été exposées [III-2-4]. Cela sera étudié en détail dans le deuxième tome.

Si l'intervalle d'intégration (a, b) n'est pas fermé à l'une ou aux deux extrémités, alors le concept d'intégrale définie dans un tel intervalle ne conduit pas immédiatement à la limite d'une somme de type (2). Dans ce cas, nous avons aussi une intégrale impropre (cf. [III-2-5] et le deuxième tome).

III-4-4. Propriétés des fonctions intégrables. Utilisant la condition nécessaire et suffisante énoncée plus haut, il n'est pas difficile de faire apparaître les propriétés fondamentales des fonctions intégrables.

I. *Si $f(x)$ est intégrable dans l'intervalle (a, b) et si nous remplaçons arbitrairement les valeurs $f(x)$ d'un nombre fini de points de (a, b),* *alors la nouvelle fonction sera aussi intégrable dans* (a, b) *et la grandeur de l'intégrale qui en résulte ne sera pas modifiée.*

Limitons-nous à la considération de l'exemple particulier, où nous avons changé la valeur de $f(x)$ en un seul point, par exemple au point $x = a$. La nouvelle fonction $\varphi(x)$ coïncidera partout avec $f(x)$, sauf pour $x = a$, avec $\varphi(a)$ de valeur arbitraire. Soit m et M les bornes inférieure et supérieure de $f(x)$ dans (a, b). La borne inférieure de $\varphi(x)$ sera, évidemment, plus grande ou égale à m, si $\varphi(a) \geqslant m$, et sera $\varphi(a)$ si $\varphi(a) < m$. De même, la borne supérieure de $\varphi(x)$ sera plus petite ou égale à M, si $\varphi(a) \leqslant M$ et sera $\varphi(a)$ si $\varphi(a) > M$. Comparant la somme (12) pour $f(x)$ et $\varphi(x)$, nous remarquons que la différence peut être seulement dans le premier terme (pour $k = 1$). Mais ce premier terme, évidemment, pour $f(x)$ et $\varphi(x)$ tend vers zéro, puisque $\delta_1 \to 0$ et que $(M_1 - m_1)$ est borné. La somme des termes restants, sauf le premier, naturellement, tend aussi vers zéro, parce que $f(x)$ est intégrable et que toute la somme (8) pour $f(x)$ doit tendre vers zéro. L'intégrabilité de $\varphi(x)$ est démontrée. La coïncidence des valeurs de l'intégrale pour $f(x)$ et $\varphi(x)$ est évidente, car pour l'établissement des sommes (2) nous pouvons toujours considérer ξ_1 différent de a, et les valeurs $f(x)$ et $\varphi(x)$ en tous ces points, excepté pour $x = a$, coïncident.

II. *Si* $f(x)$ *est intégrable dans l'intervalle* (a, b), *alors elle est intégrable dans n'importe quel intervalle* (c, d), *constituant une partie de* (a, b).

Cela découle aisément du fait que la somme (8) composée de termes non négatifs n'est pas supérieure pour l'intervalle (c, d) à cette somme pour (a, b) à condition que dans cette dernière somme $x = c$ et $x = d$ sont des points de division.

Comme $f(x)$ est intégrable sur (a, b), la somme (8) pour (a, b) tend vers zéro lorsque $\mu(\delta) \to 0$ pour tous les points de division. C'est pourquoi, à plus forte raison, la somme pour (c, d) tend vers zéro, si $\mu(\delta) \to 0$ pour les intervalles partiels de (c, d), autrement dit, $f(x)$ est intégrable sur (c, d). Remarquons que c peut coïncider avec a et d peut coïncider avec b. On démontre exactement comme dans [III-2-1] l'égalité :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad (a < c < b).$$

III. *Si* $f(x)$ *est intégrable dans* (a, b) *alors* $cf(x)$, *pour n'importe quelle constante* c, *est aussi intégrable dans* (a, b).

Considérant, par exemple, $c > 0$, on peut affirmer que pour la fonction $cf(x)$ il faut remplacer les anciens m_k et M_k par cm_k et cM_k. La somme (8) acquiert seulement le facteur c et tendra comme précédemment vers zéro. La propriété V de [III-2-1], naturellement, se conserve et se démontre comme d'habitude.

IV. *Si $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont des fonctions intégrables dans (a, b), leur somme*

$$\varphi(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

est aussi intégrable sur (a, b).

Soient m'_k, M'_k, m''_k, M''_k les bornes inférieures et supérieures de $f_1(x)$ et $f_2(x)$ dans l'intervalle (x_{k-1}, x_k). De cette façon, toutes les valeurs de $f_1(x)$ dans l'intervalle (x_{k-1}, x_k) sont supérieures ou égales à m'_k et toutes les valeurs de $f_2(x)$ sont de même supérieures ou égales à m''_k. D'où $\varphi(x) \geqslant m'_k + m''_k$ dans l'intervalle (x_{k-1}, x_k).

De la même façon, on démontre que $\varphi(x) \leqslant M'_k + M''_k$ dans l'intervalle (x_{k-1}, x_k). Désignant par m_k et M_k les bornes inférieure et supérieure de $\varphi(x)$ dans l'intervalle (x_{k-1}, x_k), nous avons donc:

$$m_k \geqslant m'_k + m''_k \quad \text{et} \quad M_k \leqslant M'_k + M''_k,$$

d'où il résulte l'inégalité:

$$M_k - m_k \leqslant (M'_k + M''_k) - (m'_k + m''_k),$$

c'est-à-dire

$$M_k - m_k \leqslant (M'_k - m'_k) + (M''_k - m''_k).$$

Etablissant la somme (8) pour $\varphi(x)$, nous obtenons:

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\, \delta_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} (M'_k - m'_k)\, \delta_k + \sum_{k=1}^{n} (M''_k - m''_k)\, \delta_k.$$

Les deux sommes du second membre tendent vers zéro pour $\mu(\delta) \to 0$ car les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont supposées intégrables. Par conséquent, la somme (8) pour $\varphi(x)$, c'est-à-dire la somme

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\, \delta_k,$$

tend à plus forte raison vers zéro, c'est-à-dire que $\varphi(x)$ est aussi intégrable. La démonstration s'étend facilement au cas de la somme algébrique d'un nombre fini de termes. La propriété VI de [III-2-1] se démontre comme précédemment.

Par analogie avec ce qui précède, on démontre les propriétés suivantes:

V. *Le produit $f_1(x) f_2(x)$ de deux fonctions intégrables dans (a, b) sera aussi une fonction intégrable sur (a, b).*

VI. *Si $f(x)$ est intégrable dans (a, b) et si les bornes inférieure et supérieure m et M de la fonction $f(x)$ sur (a, b) sont d'un seul et même signe, alors $\frac{1}{f(x)}$ est une fonction intégrable sur (a, b).*

VII. *Si* $f(x)$ *est intégrable sur* (a, b), *alors sa valeur absolue* $|f(x)|$ *est aussi une fonction intégrable dans* (a, b).

L'inégalité (10) de [III-2-2] peut être démontrée, comme plus haut. La propriété VII de [III-2-2] apparaît également juste, si $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont des fonctions intégrables. Le théorème de la moyenne s'énonce ainsi:

Si $f(x)$ *et* $\varphi(x)$ *sont intégrables dans l'intervalle* (a, b) *et si* $\varphi(x)$ *conserve le même signe dans cet intervalle, alors*

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \mu\int_a^b \varphi(x),$$

où μ *est un certain nombre, satisfaisant à l'inégalité* $m \leqslant \mu \leqslant M$, m *et* M *étant les bornes inférieure et supérieure de* $f(x)$ *dans* (a, b). *En particulier,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a).$$

La démonstration sera semblable à celle faite plus haut [III-2-2]. Utilisant cette formule, il n'est pas difficile d'établir que

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est une fonction continue de x, et $F'(x) = f(x)$ pour toutes les valeurs de x, où $f(x)$ est continue. Etablissons enfin *la formule fondamentale du calcul intégral* pour les fonctions intégrables. Soit $F_1(x)$ une fonction continue dans l'intervalle (a, b) telle que pour une valeur quelconque de x à l'intérieur de l'intervalle (a, b) il existe une dérivée $F_1'(x) = f(x)$ où $f(x)$ est une fonction intégrable dans (a, b).

Dans ces conditions, on a la formule essentielle

$$\int_a^b f(x)\,dx = F_1(b) - F_1(a).$$

Découpant l'intervalle en parties et prenant dans chaque partie (x_{k-1}, x_k) la formule des accroissements finis [II-3-7], nous pouvons écrire:

$$F_1(x_k) - F_1(x_{k-1}) = F_1'(\xi_k)\,\delta_k = f(\xi_k)\delta_k \qquad (x_{k-1} < \xi_k < x_k). \quad (14)$$

Ensuite, sommant sur k et gardant à l'esprit que (III de [III-4-3]):

$$\sum_{k=1}^{n} [F_1(x_k) - F_1(x_{k-1})] = F_1(b) - F_1(a),$$

nous obtenons:

$$F_1(b) - F_1(a) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\delta_k.$$

Cette égalité est vraie pour n'importe quel découpage de l'intervalle (a, b) en parties vu le choix particulier des points ξ_k, défini par la formule des accroissements finis (14). Passant à la limite, nous obtenons à la place de la somme l'intégrale :

$$F_1(b) - F_1(a) = \int_a^b f(x)\, dx,$$

ce qu'il fallait démontrer. Remarquons que pour la détermination de l'intégrale les valeurs de $f(x)$ aux extrémités de l'intervalle (a, b) ne jouent aucun rôle, en vertu de la propriété I du présent paragraphe.

Chapitre IV

LES SÉRIES, APPLICATIONS AUX CALCULS APPROCHÉS

IV-1. Notions sur la théorie des séries infinies

IV-1-1. Notion de série infinie. Soit une suite infinie de nombres:

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots \tag{1}$$

En écrivant la somme des n premiers termes de la suite

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \tag{2}$$

nous obtenons une nouvelle suite infinie de nombres:

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$$

Si cette suite tend vers une limite (finie)

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

on dit que la série infinie

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{3}$$

converge et a une somme s telle que:

$$s = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{4}$$

Si s_n ne tend pas vers une limite, on dit que la série infinie (3) *diverge*.

Autrement dit, *la série infinie* (3) *est convergente si la somme de ses n premiers termes tend vers une limite lorsque n croît indéfiniment par tous ses nombres entiers et positifs, et cette limite s'appelle la somme de la série considérée.*

On peut parler de somme d'une série que dans le cas où la série converge, et alors la somme des n premiers termes de la série s_n est une expression approchée de la somme s. L'erreur r_n commise en faisant cette approximation est donnée par la différence

$$r_n = s - s_n,$$

qui s'appelle *reste* de la série.

Il est évident que le reste r_n est à son tour la somme d'une série infinie qui est obtenue à partir de la série (1) en supprimant les n

premiers termes

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} + \ldots$$

La valeur exacte de cette erreur reste inconnue dans la plupart des cas et c'est pourquoi son *estimation approchée* est très importante.

Le cas le plus simple de série infinie est donné par la progression géométrique:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \quad (a \neq 0). \tag{5}$$

Examinons plus particulièrement les cas où:

$$|q| < 1, \quad |q| > 1, \quad q = 1, \quad q = -1.$$

Nous savons [I-2-3] que pour $|q| < 1$ la progression géométrique a une somme finale $s = \frac{a}{1-q}$ et c'est pourquoi on a une série convergente, en effet:

$$s_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q},$$

$$s - s_n = \frac{a}{1-q} - \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{aq^n}{1-q},$$

et $s - s_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$, car $q^n \to 0$ lorsque $|q| < 1$ [I-2-2]. Pour $|q| > 1$ il résulte de l'expression de s_n que $s_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$, car $q^n \to \infty$ pour $|q| > 1$ [I-2-5]. Pour $q = 1$ nous avons $s_n = an$ et il est évident que $s_n \to \infty$ également. Ainsi pour $|q| > 1$ et $q = 1$ la progression géométrique diverge. Pour $q = -1$ nous avons la série:

$$a - a + a - a + \ldots$$

La somme s_n des n premiers termes est nulle si n est pair, mais elle est égale à a si n est impair, autrement dit la série ne tend pas vers une limite, elle diverge; toutefois, contrairement aux cas précédents, pour toute valeur de n cette somme reste finie, car elle ne prend que les valeurs 0 et a.

Si la valeur absolue de la grandeur s_n, somme des n premiers termes de la série (3) *tend vers l'infini lorsque n croît indéfiniment, on dit que la série* (1) *est strictement divergente.* Par la suite, en parlant de la série strictement divergente, nous mettrons pour simplifier, *série divergente.*

IV-1-2. Propriétés des séries infinies. Les séries infinies convergentes jouissent de certaines propriétés qui permettent de les traiter comme s'il s'agissait de sommes finies.

I. *Si la série*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

a une somme s, la série

$$au_1 + au_2 + \ldots + au_n + \ldots, \tag{6}$$

obtenue à partir de la série précédente en multipliant tous les termes par un même nombre a, a une somme as, car la somme σ_n des n premiers termes de la série (6) est

$$\sigma_n = au_1 + au_2 + \ldots + au_n = as_n,$$

et c'est pourquoi

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} as_n = a \lim_{n\to\infty} s_n = as.$$

II. *Les séries convergentes peuvent être additionnées ou soustraites terme à terme, c'est-à-dire que si l'on a*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = s,$$
$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = \sigma,$$

alors la série

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n) + \ldots \qquad (7)$$

converge également et sa somme est égale à $s \pm \sigma$, car la somme des n premiers termes est:

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n) = s_n \pm \sigma_n.$$

Les autres propriétés de la somme telles que la commutativité, les règles de multiplication de deux sommes l'une par l'autre, etc., appliquées aux séries infinies, seront étudiées un peu plus tard, au paragraphe [IV-3]. Notons pour l'instant qu'elles ne sont pas valables pour toutes les séries. Il est évident que la commutativité est valable pour toute série convergente, c'est-à-dire que l'on peut regrouper n'importe quels termes voisins. Ceci revient à ne prendre que des ensembles s_{n_k} au lieu de tous les s_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$), ce qui ne change pas la limite s [I-2-3].

III. *La propriété de converger ou de diverger d'une série ne sera pas perturbée si l'on retranche ou si l'on ajoute quelques termes au début de la série.*

En effet, examinons deux séries:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots,$$
$$u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + \ldots$$

La deuxième série est obtenue en retranchant deux termes à la première. Si l'on désigne par s_n la somme des n premiers termes de la première série et si l'on désigne par σ_n la somme des n premiers termes de la seconde série, il est évident que nous avons:

$$\sigma_{n-2} = s_n - (u_1 + u_2), \qquad s_n = \sigma_{n-2} + (u_1 + u_2),$$

et si $n \to \infty$, on a également $(n-2) \to \infty$. D'où il résulte que si s_n a une limite, σ_{n-2} a également une limite et réciproquement.

Ces limites s et σ, c'est-à-dire les sommes des deux séries considérées, seront de toute évidence différentes, en effet on aura :

$$\sigma = s - (u_1 + u_2).$$

IV. *Le terme général u_n d'une série convergente tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment*:

$$\lim u_n = 0, \tag{8}$$

car il est évident que

$$u_n = s_n - s_{n-1},$$

et si la série converge et a pour somme s, on a

$$\lim s_{n-1} = \lim s_n = s,$$

d'où

$$\lim u_n = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0.$$

De sorte que la condition (8) est une condition *nécessaire* de convergence d'une série mais ce n'est pas une condition suffisante : en effet, le terme général d'une série peut tendre vers zéro et celle-ci peut diverger malgré tout.

Exemple. Soit la série harmonique

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \tag{9}$$

Nous avons :

$$u_n = \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

Il est toutefois facile de montrer que la somme des n premiers termes de la série (9) croît indéfiniment. Pour cela regroupons les différents termes en ensembles de 1, 2, 4, 8, . . . termes en partant du second

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots,$$

de sorte que dans le $k^{\text{ième}}$ groupe on aura 2^{k-1} termes. Si dans chaque groupe on remplace tous les termes par le dernier qui est le plus petit du groupe, on obtiendra la série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 4 + \frac{1}{16}\cdot 8 + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots, \tag{10}$$

dont la somme des n premiers termes est égale à $[1 + \frac{1}{2}(n-1)]$ et tend évidemment vers $(+\infty)$. En prenant un nombre suffisamment élevé de termes dans la série (9) nous pouvons obtenir un nombre quelconque de groupes n et la somme de ces termes sera encore plus grande que $[1 + \frac{1}{2}(n-1)]$, ce qui montre bien que pour la série (9) on a bien $s_n \to +\infty$.

IV-1-3. Séries à termes positifs. Critères de convergence. Les séries dont les termes sont des nombres positifs (non négatifs)

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots \geqslant 0$$

présentent un intérêt particulier. Nous allons établir pour ces séries des critères de convergence et de divergence.

1. *Une série dont les termes sont positifs ne peut être que convergente ou strictement divergente; pour une série de ce type nous devons avoir:*

$$\textit{soit } s_n \to s \quad \textit{soit } s_n \to +\infty$$

Pour qu'une série à termes positifs soit convergente il faut et il suffit que la somme s_n de ses premiers termes reste inférieure à une certaine valeur constante A ne dépendant pas de n et ceci quel que soit n.

En effet, pour une telle série la somme s_n ne décroît pas lorsque n croît, car alors de nouveaux termes positifs (non négatifs) s'ajoutent à la somme et tout ce que nous avons montré repose sur les propriétés que nous avons déjà examinées des variables croissantes [I-2-6].

Pour déterminer si une série à termes positifs est convergente ou divergente il est souvent utile de les comparer avec d'autres séries, plus simples, et tout particulièrement avec la progession géométrique.

Pour cela nous allons établir le critère:

2. *Si chacun des termes d'une série à termes positifs,*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{11}$$

est à partir d'un certain terme plus petit que le terme correspondant d'une série convergente

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots, \tag{12}$$

alors la série (11) *converge également.*

Si par contre chacun des termes de la série (11), *à partir d'une certaine valeur de n, est plus grand que le terme correspondant d'une série divergente* (12) *dont les termes sont positifs, alors la série* (11) *diverge elle aussi.*

Supposons tout d'abord que nous avons:

$$u_n \leqslant v_n, \tag{13}$$

et que la série (12) converge. Sans limiter la généralité nous pouvons considérer que cette inégalité est vérifiée pour toutes les valeurs de n en excluant, si besoin est, ceux des premiers termes pour lesquels cette inégalité n'est pas vérifiée (propriété III [IV-1-2]). Désignons par s_n la somme des n premiers termes de la série (11), et par σ_n la somme analogue pour la série (12), nous avons en tenant compte de (13):

$$s_n \leqslant \sigma_n.$$

Mais la série (12) est convergente par hypothèse et en désignant par σ la somme de la série (12), nous avons:

$$\sigma_n \leqslant \sigma,$$

et c'est pourquoi nous avons:

$$s_n \leqslant \sigma,$$

d'où, en tenant compte de 1, on déduit la convergence de la série (11).

Supposons vérifiée l'inégalité

$$u_n \geqslant v_n. \tag{14}$$

Il est évident que nous avons

$$s_n \geqslant \sigma_n; \tag{15}$$

mais la série (12) diverge maintenant et la somme de ses n premiers termes σ_n peut être rendue plus grande que tout nombre arbitrairement grand donné d'avance; étant donné l'inégalité (15), la grandeur s_n a la même propriété, c'est-à-dire que la série (11) va également diverger.

R e m a r q u e. Il résulte de la convergence (ou de la divergence) de la série (12) que la série:

$$kv_1 + kv_2 + kv_3 + \ldots + kv_n + \ldots,$$

(où k est un nombre positif constant quelconque) est également convergente (divergente).

En effet, il résulte de la convergence de la série Σv_n que la série Σkv_n est aussi convergente (cf. I [IV-1-2]). Inversement, si Σv_n diverge, la série Σkv_n doit également être divergente, car si elle était convergente, en multipliant ses termes par $\frac{1}{k}$, on trouverait que la série Σv_n converge à cause de I [IV-1-2]. De ce qui a été dit il résulte que:

La série (11) *converge si*

$$u_n \leqslant kv_n, \tag{16}$$

si la série Σv_n est convergente et si k est un nombre positif quelconque; la série (11) *diverge si*

$$u_n \geqslant kv_n, \tag{17}$$

et si la série Σv_n est divergente.

En comparant la série donnée avec la progression géométrique nous obtiendrons deux des principaux critères de convergence des séries à termes positifs.

IV-1-4. Critères de Cauchy et de d'Alembert. 3. C r i t è r e d e C a u c h y. *Si le terme général d'une série positive* (11):

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots,$$

vérifie à partir d'un certain n l'inégalité

$$\sqrt[n]{u_n}\leqslant q<1, \tag{18}$$

où q ne dépend pas de n, alors la série converge.

Si, par contre, à partir d'une certaine valeur nous avons

$$\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1, \tag{19}$$

la série (11) *diverge.*

Sans nuire à la généralité de notre démonstration, nous pouvons admettre que les inégalités (18) et (19) sont vérifiées pour toutes les valeurs de n (cf. propriété III [IV-1-2]). Si l'inégalité (18) est vérifiée, alors

$$u_n\leqslant q^n,$$

c'est-à-dire que le terme général de la série donnée n'est pas plus grand que le terme correspondant d'une progression géométrique infinie décroissante, c'est pourquoi en tenant compte de 2 on voit que la série sera convergente. Dans le cas (19) nous aurons:

$$u_n\geqslant 1,$$

et la série (11) dont le terme général ne tend pas vers zéro (il est plus grand que l'unité) ne saurait être convergente (propriété IV [IV-1-2]).

4. C r i t è r e d e d' A l e m b e r t. *Si le rapport du terme d'une série avec le terme qui le précède* $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ *vérifie à partir d'une certaine valeur de n l'inégalité*

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}\leqslant q<1, \tag{20}$$

où q ne dépend pas de n, la série (11) *converge.*

Si, par contre, à partir d'une certaine valeur de n nous avons

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}\geqslant 1, \tag{21}$$

alors la série considérée diverge.

Supposons comme ci-dessus que les inégalités (20) ou (21) soient vérifiées pour toutes les valeurs de n, dans le cas de (20) nous avons

$$u_n\leqslant u_{n-1}q,\quad u_{n-1}\leqslant u_{n-2}q,\quad u_{n-2}\leqslant u_{n-3}q,\quad \ldots,\quad u_2\leqslant u_1q,$$

d'où, en multipliant ces inégalités terme à terme et en simplifiant

$$u_n\leqslant u_1q^{n-1},$$

c'est-à-dire que les termes de la série sont plus petits que ceux de la progression géométrique décroissante

$$u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + \ldots + u_1 q^{n-1} + \ldots \quad (0 < q < 1),$$

et en vertu de 2 la série (11) converge. Dans le cas (21):

$$u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3 \leqslant \ldots \leqslant u_{n-1} \leqslant u_n \leqslant \ldots,$$

c'est-à-dire que les termes de la série ne décroissent pas au fur et à mesure que l'on s'éloigne du début, par suite u_n ne tend pas vers zéro lorsque $n \to \infty$ et la série ne peut en aucun cas converger (cf. propriété IV [IV-1-2]).

Corollaire. *Si, lorsque n croît indéfiniment:*

$$\textit{soit } \sqrt[n]{u_n} \quad \textit{soit } \frac{u_n}{u_{n-1}} \tag{22}$$

tend vers une limite finie r, la série

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

converge si $r < 1$ et diverge dans le cas où on a $r > 1$.

Examinons d'abord le cas où $r < 1$. Prenons un nombre ε suffisamment petit pour que l'on ait encore

$$r + \varepsilon < 1.$$

Pour les grandes valeurs de n la grandeur $\sqrt[n]{u_n}$ ou $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ ne différera de sa limite r que d'une quantité qui ne sera pas plus grande que ε, c'est-à-dire qu'à partir d'une certaine valeur assez grande de n nous aurons

$$r - \varepsilon \leqslant \sqrt[n]{u_n} \leqslant r + \varepsilon < 1 \tag{23_1}$$

soit

$$r - \varepsilon \leqslant \frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant r + \varepsilon < 1. \tag{23_2}$$

Utilisant les critères de Cauchy et de d'Alembert dans le cas où $q = r + \varepsilon < 1$ d'après (23_1) ou (23_2), nous pouvons conclure immédiatement que la série considérée converge.

De façon analogue on peut démontrer la divergence de la série lorsque $r > 1$ ou si l'une au moins des expressions (22) tend vers $(+\infty)$.

Exemples. 1. Considérons la série:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{24}$$

En utilisant le critère de d'Alembert on trouve :

$$u_{n+1}=\frac{x^n}{n!}, \quad u_n=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x}{n}\longrightarrow 0 \text{ lorsque } n\longrightarrow\infty,$$

c'est pourquoi la série converge pour toutes les valeurs finies de x (à condition qu'elles soient positives).

2. Considérons la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}. \tag{25}$$

Dans ce cas nous avons :

$$u_n=\frac{x^n}{n}, \; u_{n-1}=\frac{x^{n-1}}{n-1}, \; \frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{n-1}{n}x\longrightarrow x,$$

et c'est pourquoi d'après le critère de d'Alembert, la série converge lorsque $0\leqslant x<1$ et diverge si $x>1$.

3. Considérons la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin^2 n\alpha \quad (r>0). \tag{26}$$

En utilisant le critère de Cauchy, il vient :

$$u_n=r^n \sin^2 n\alpha, \quad \sqrt[n]{u_n}=r\sqrt[n]{\sin^2 n\alpha}\leqslant r,$$

et c'est pourquoi la série considérée converge certainement si $r<1$.

Le critère de d'Alembert ne donne rien dans ce cas, car la relation :

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}=r\left[\frac{\sin n\alpha}{\sin(n-1)\alpha}\right]^2$$

ne tend vers aucune limite et ne reste même pas toujours soit plus petite que l'unité, soit plus grande ou égale à l'unité.

En fait on peut montrer que le critère de Cauchy est plus puissant que celui de d'Alembert, c'est-à-dire qu'il peut être employé dans tous les cas où le critère de d'Alembert est applicable, mais aussi dans certains autres cas où celui-ci n'est pas utilisable. Par contre, l'utilisation du critère de Cauchy est plus difficile, ce que l'on voit aisément sur les exemples d'utilisation qui ont été exposés ci-dessus.

Notons de plus qu'il y a des cas où le critère de Cauchy de même que celui de d'Alembert ne peuvent être employés. C'est en particulier le cas lorsque nous avons

$$\sqrt[n]{u_n} \text{ et } \frac{u_n}{u_{n-1}}\longrightarrow 1,$$

c'est-à-dire lorsque $r=1$. Nous avons alors affaire au cas *douteux* et il faut résoudre d'une autre façon le problème de la convergence ou de la divergence de la série.

Ainsi, par exemple dans le cas de la série harmonique

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

qui comme nous l'avons vu dans [IV-1-2] est *divergente*, nous avons

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{n-1}{n}\to 1,\quad \sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}}\to 1\ *,$$

et de cette façon on voit que le problème de la convergence ou de la divergence de la série harmonique ne peut pas être tranché à l'aide des critères de Cauchy ou de d'Alembert.

Par ailleurs, nous montrerons dans la suite que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\dots$$

est une série convergente.

Mais dans ce cas nous avons aussi :

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\to 1,\quad \sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^2\to 1,$$

c'est-à-dire qu'en essayant d'utiliser les critères de Cauchy ou de d'Alembert, nous avons également un cas douteux.

IV-1-5. Critère intégral de convergence de Cauchy. Supposons que les termes de la série donnée :

$$u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots \tag{27}$$

soient positifs et non croissants, c'est-à-dire que nous ayons

$$u_1\geqslant u_2\geqslant\dots\geqslant u_n\geqslant u_{n+1}\geqslant\dots>0. \tag{28}$$

Représentons graphiquement les termes de la série en reportant sur l'axe des abscisses la variable indépendante n qui pour l'instant ne prend que des valeurs entières et sur l'axe des ordonnées les valeurs correspondantes de u_n (cf. fig. 155). Il est toujours possible de trouver une fonction continue $y=f(x)$ qui pour les valeurs entières de $x=n$ prenne justement les valeurs u_n ; pour cela il suffit de faire passer une courbe continue par tous les points obtenus ; ce faisant nous considérerons que la fonction $y=f(x)$ n'est pas croissante.

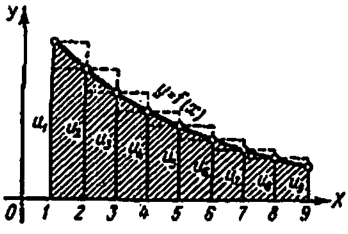

Fig. 155

Avec une telle représentation graphique la somme des n premiers termes de la série considérée

$$s_n=u_1+u_2+u_3+\dots+u_n$$

* Il est essentiel de noter dans les calculs précédents que si l'on pose $x=\frac{1}{n}$, on a $x\to 0$ et $\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}=x\ln x\to 0$ [II-3-10]. D'où en prenant le logarithme de l'expression $\sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ on voit qu'elle tend vers l'unité

est la somme des surfaces des rectangles « extérieurs » qui comprend la surface limitée par la courbe $y = f(x)$, l'axe OX et les ordonnées $x = 1$ et $x = n + 1$, c'est pourquoi nous pouvons écrire

$$s_n \geqslant \int_1^{n+1} f(x)\,dx. \tag{29}$$

Par ailleurs, cette surface contient tous les rectangles « intérieurs » dont la somme des surfaces est égale à

$$u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_{n+1} = s_{n+1} - u_1, \tag{30}$$

et c'est pourquoi nous avons

$$s_{n+1} - u_1 \leqslant \int_1^{n+1} f(x)\,dx. \tag{31}$$

Ces inégalités conduisent au critère suivant.

5. Critère intégral de Cauchy. *La série* (27)

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \quad u_n = f(n),$$

dont les termes sont positifs et ne croissent pas avec n, converge ou diverge, suivant que l'intégrale

$$I = \int_1^{\infty} f(x)\,dx \tag{32}$$

possède une valeur finie ou égale à l'infini.

Rappelons ici que $f(x)$ doit décroître lorsque x croît.

Supposons d'abord que l'intégrale I possède une valeur finie, c'est-à-dire que la courbe $y = f(x)$ ait une surface finie [III-2-5]. Comme $f(x)$ est positif,

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx < \int_1^{\infty} f(x)\,dx,$$

et c'est pourquoi, d'après la formule (31):

$$s_n < s_{n+1} \leqslant u_1 + I,$$

c'est-à-dire que la somme s_n reste bornée pour toutes les valeurs de n, et la série (27), d'après le critère I [IV-1-3], convergera.

Soit maintenant $I = \infty$, c'est-à-dire que l'intégrale

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx,$$

lorsque n croît, peut être rendue plus grande que tout nombre N donné d'avance. Alors, d'après la formule (29), la somme s_n peut aussi être rendue supérieure à N, c'est-à-dire que la série (27) divergera.

On peut démontrer de façon analogue que le *reste de la série* (27) *n'est pas plus grand que l'intégrale*

$$\int_n^{\infty} f(x)\,dx.$$

Remarque. *En appliquant le critère de Cauchy à l'intégrale* (32), *on peut remplacer la borne inférieure, égale à l'unité, par un nombre quelconque a, plus grand que l'unité, étant donné que les intégrales à la borne inférieure égale à l'unité et à a convergent ou divergent simultanément* [III-2-5].

Exemples. 1. Soit la série harmonique

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Nous avons:

$$f(n)=\frac{1}{n},$$

et c'est pourquoi on peut poser que:

$$f(x)=\frac{1}{x};$$

alors

$$I=\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}=\ln x\Big|_1^{\infty}$$

et l'intégrale diverge, étant donné que $\ln x \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$; cette série, comme nous le savons déjà, est divergente.

2. Soit la série plus générale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \tag{33}$$

où p est un nombre quelconque, supérieur à zéro (pour $p \leqslant 0$, la série est évidemment, divergente). Nous avons ici:

$$f(n)=\frac{1}{n^p}, \quad f(x)=\frac{1}{x^p}, \quad I=\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}=\begin{cases} \frac{1}{1-p} x^{1-p}\Big|_1^{\infty}, & \text{si } p \neq 1, \\ \ln x\Big|_1^{\infty}, & \text{si } p=1. \end{cases}$$

D'où il est clair que l'intégrale diverge si $p \leqslant 1$, et qu'elle converge et est égale à $\frac{1}{p-1}$, si $p > 1$. En effet, dans le dernier cas, l'exposant $1-p<0$, $x^{1-p}=$ $=\frac{1}{x^{p-1}} \to 0$ pour $x \to +\infty$, et, par conséquent:

$$\frac{1}{1-p} x^{1-p}\Big|_1^{\infty}=0-\frac{1}{1-p}=\frac{1}{p-1}.$$

Par conséquent, d'après le critère de Cauchy, la *série* (33) *convergera, si* $p>1$, *et divergera si* $p \leqslant 1$.

IV-1-6. Séries alternées. En passant aux séries ayant des termes quelconques, nous étudierons d'abord les séries *alternées*, dont les termes sont alternativement positifs et négatifs. Il est préférable d'écrire ces séries non pas comme précédemment, mais sous la forme :

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \ldots \pm u_n \mp u_{n+1} \ldots, \qquad (34)$$

où les nombres

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots,$$

sont considérés comme positifs *.

On peut démontrer, pour les séries alternées, la proposition suivante :

Pour qu'une série alternée converge, il suffit que les valeurs absolues de ses termes décroissent et tendent vers zéro lorsque n croît. Le reste d'une telle série ne dépasse pas, en valeur absolue, la valeur absolue du premier des termes rejetés.

Etudions d'abord les sommes d'un nombre pair de termes d'une série :

$$s_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2n-1} - u_{2n}.$$

Etant donné que par hypothèse les valeurs absolues des termes de la série décroissent (il vaut mieux dire qu'elles ne croissent pas) lorsque n croît, de façon générale :

$$u_k \geqslant u_{k+1} \quad \text{et} \quad u_{2n+1} - u_{2n+2} \geqslant 0,$$

c'est pourquoi

$$s_{2n+2} = s_{2n} + (u_{2n+1} - u_{2n+2}) \geqslant s_{2n},$$

c'est-à-dire que la variable s_{2n} *n'est pas décroissante.* D'autre part, nous avons :

$$s_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} \leqslant u_1,$$

car toutes les différences entre parenthèses ne sont pas négatives, c'est-à-dire que la variable s_{2n} reste *bornée* pour toutes les valeurs de n. D'où il résulte que lorsque n croît indéfiniment, s_{2n} tend vers une limite finie [I-2-6] que nous noterons par s :

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s.$$

Ensuite, nous avons :

$$s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1} \to s, \text{ lorsque } n \to \infty,$$

étant donné que par hypothèse $u_{2n+1} \to 0$.

Nous voyons de cette façon que, comme la somme d'un nombre pair, la somme d'un nombre impair de termes de la série (34) tend vers une seule et même limite s, c'est-à-dire que la série (34) est convergente et a pour somme s.

---

* Nous considérons que le premier terme de la série est positif ; s'il est négatif, la série s'écrit sous la forme : $-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots$

Il reste encore à évaluer le reste r_n de la série. Nous avons:

$$r_n = \pm u_{n+1} \mp u_{n+2} \pm u_{n+3} \mp u_{n+4} \pm \ldots$$

Il faut prendre simultanément les signes supérieurs ou inférieurs. Autrement dit:

$$r_n = \pm (u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \ldots),$$

d'où, en raisonnant comme précédemment, nous avons:

$$|r_n| = (u_{n+1} - u_{n+2}) + (u_{n+3} - u_{n+4}) + \ldots =$$
$$= u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - (u_{n+4} - u_{n+5}) - \ldots \leqslant u_{n+1},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Il résulte de la formule:

$$r_n = \pm [(u_{n+1} - u_{n+2}) + (u_{n+3} - u_{n+4}) + \ldots],$$

dans les crochets de laquelle se trouvent des grandeurs qui ne sont pas négatives, que le signe r_n est le même que celui qu'il faut prendre devant les crochets, c'est-à-dire qu'il coïncide avec le signe $\pm u_{n+1}$. Ainsi, *dans les conditions énoncées dans le théorème, le reste d'une série alternée a le même signe que celui du premier terme rejeté.*

Exemple. La série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

est une série alternée, dont la valeur absolue des termes décroît indéfiniment lorsque $n \to \infty$, et c'est pourquoi elle converge. Nous verrons plus loin que sa somme est égale à $\ln 2$. Cependant, pour calculer effectivement $\ln 2$, cette série ne convient pas, étant donné que pour que le reste soit inférieur à 0,0001, il faut prendre 10 000 de ses termes:

$$|r_n| < \frac{1}{n+1} \leqslant 0{,}0001; \quad n \geqslant 10\,000$$

Ainsi cette série, bien que convergente, *converge très lentement*; pour utiliser de telles séries dans la pratique il faut d'abord les transformer de façon à les faire converger plus vite.

IV-1-7. Séries absolument convergentes. Du nombre d'autres séries à termes quelconques nous ne considérerons ici que les séries absolument convergentes.

La série

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{35}$$

converge, si la série, formée des valeurs absolues des termes de la série considérée, converge, c'est-à-dire si la série

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{36}$$

converge.

On appelle de telles séries séries absolument convergentes.

Supposons donc que la série (36) converge, et que:

$$v_n = \frac{1}{2}(|u_n| + u_n), \quad w_n = \frac{1}{2}(|u_n| - u_n).$$

Les deux nombres v_n et w_n sont certainement non négatifs, étant donné que, de toute évidence:

$$v_n = \begin{cases} u_n, & \text{si } u_n \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } u_n \leqslant 0, \end{cases} \quad w_n = \begin{cases} 0, & \text{si } u_n \geqslant 0, \\ |u_n|, & \text{si } u_n \leqslant 0. \end{cases}$$

D'autre part, aussi bien v_n que w_n ne sont pas plus grands que $|u_n|$, c'est-à-dire que le terme général de la série convergente (36), et c'est pourquoi, d'après le critère 2 de convergence des séries à termes positifs [IV-1-3], les deux séries:

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} w_n$$

convergeront.

Etant donné que nous avons:

$$u_n = v_n - w_n,$$

la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n - w_n) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n - \sum_{n=1}^{\infty} w_n,$$

obtenue en soustrayant terme à terme la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ de la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ [IV-1-2], convergera également.

Les séries convergentes, ayant des termes positifs, représentent un cas particulier de séries absolument convergentes, dont les critères de convergence sont obtenus directement à partir des critères de convergence des séries à termes positifs.

Les critères de convergence 1 *à* 5, *déduits aux paragraphes* [IV-1-3], [IV-1-4], [IV-1-5] *pour les séries à termes positifs, s'appliquent aussi aux séries ayant des termes quelconques, à condition toutefois de remplacer partout u_n par $|u_n|$. A cette condition, les critères de divergence* 3 *et* 4 *et leur corollaire restent valables* [IV-1-4].

En particulier, il faut, dans les énoncés des critères de Cauchy et de d'Alembert, remplacer:

$$\sqrt[n]{u_n} \text{ et } \frac{u_n}{u_{n-1}} \text{ par } \sqrt[n]{|u_n|} \text{ et } \left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right|.$$

Ainsi, par exemple, si $\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| < q < 1$, c'est-à-dire si $\frac{|u_n|}{|u_{n-1}|} < q < 1$, d'après le critère de d'Alembert [IV-1-4], la série ayant des termes positifs (36) converge et, par conséquent, la série (35) est absolument convergente. Si $\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| \geqslant 1$, c'est-à-dire $|u_n| \geqslant |u_{n-1}|$, alors, lorsque n croît, les termes u_n ne décroissent pas en valeur absolue, c'est pourquoi ils ne peuvent pas tendre vers zéro, et la série (35) diverge. D'où il résulte, comme dans le corollaire de [IV-1-4], que si $\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| \to r < 1$, la série (35) est absolument convergente; si $\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| \to r > 1$, la série (35) diverge.

R e m a r q u e. *Notons que si les termes d'une série* (35) *ne sont pas, en valeur absolue, plus grands que certains nombres positifs* $|u_n| \leqslant a_n$, *et que la série* $a_1 + a_2 + \ldots a_n + \ldots$ *formée de ces nombres converge, alors la série* (36) *converge a fortiori* [IV-1-3], *c'est-à-dire que la série* (35) *est absolument convergente.*

E x e m p l e s. 1. La série (exemple [IV-1-4])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

est absolument convergente pour toutes les valeurs finies de x, aussi bien positives que négatives, étant donné que:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x|}{n} \to 0$$

pour toutes les valeurs finies de x.

2. La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

est absolument convergente pour $|x| < 1$ et diverge pour $|x| > 1$, car:

$$\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| = \frac{n-1}{n} |x| \to |x|.$$

3. La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\alpha$$

est absolument convergente pour $|r| < 1$, étant donné que pour elle:

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{|r^n| \, |\sin n\alpha|} \leqslant \sqrt[n]{|r|^n} = |r| < 1.$$

Il faut remarquer que toute série convergente n'est pas, et de loin, absolument convergente, c'est-à-dire qu'elle reste convergente, si on remplace chaque terme de la série par sa valeur absolue. Ainsi, par exemple, la série alternée

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots,$$

comme nous l'avons vu, est convergente; si on remplace chacun de ses termes par sa valeur absolue, on obtiendra la série divergente harmonique:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$$

Les séries absolument convergentes ont de remarquables propriétés, qui sont exposées au paragraphe IV-3. Ainsi, elles seules possèdent la propriété des sommes finies: l'indépendance de la valeur de la somme de l'ordre des termes la composant.

IV-1-8. Critère général de convergence. Pour conclure le présent paragraphe rappelons la condition nécessaire et suffisante pour que la série

$$u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$$

converge. Cette convergence est, par hypothèse, équivalente à l'existence d'une limite de la série

$$s_1, s_2, s_3, \dots, s_n \dots,$$

où s_n est la somme de n premiers termes de la série. Mais pour que cette limite existe, il faut que soit satisfaite la condition nécessaire et suffisante de Cauchy [I-2-7]:

pour un ε positif quelconque donné, il existe un N tel que:

$$|s_m-s_n|<\varepsilon$$

pour tous m et n plus grands que N. Supposons, pour préciser, que $m>n$, et soit $m=n+p$, où p est un entier positif quelconque. En remarquant alors que:

$$s_m-s_n=s_{n+p}-s_n=(u_1+u_2+\dots+u_n+u_{n+1}+\dots+u_{n+p})-$$
$$-(u_1+u_2+\dots+u_n)=u_{n+1}+u_{n+2}+\dots+u_{n+p},$$

on peut énoncer le critère général de convergence d'une série.

Pour qu'une série infinie

$$u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$$

converge, il faut et il suffit que pour un ε positif quelconque donné d'avance, il existe un nombre N tel que pour tout $n>N$ et pour tout p positif, on ait l'inégalité:

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\dots+u_{n+p}|<\varepsilon,$$

c'est-à-dire que la somme d'un nombre quelconque de termes successifs d'une série, commençant par u_{n+1}, reste en valeur absolue inférieure à ε, si $n>N$.

Il faut remarquer que, malgré l'importance théorique incontestable de ce critère général de convergence d'une série, son utilisation pratique est souvent difficile.

IV-2. Formule de Taylor et applications

IV-2-1. Formule de Taylor. Etudions le polynôme de degré n:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n;$$

donnons à x un accroissement h et calculons la valeur correspondante de la fonction $f(x+h)$. On peut évidemment développer cette valeur suivant les puissances de h, en développant les différentes puissances de $(x+h)$ d'après la formule du binôme de Newton. Les coefficients des différentes puissances de h seront des polynômes dépendant de x:

$$f(x+h) = A_0(x) + hA_1(x) + h^2 A_2(x) + \ldots + h^k A_k(x) + \ldots + h^n A_n(x), \quad (1)$$

et il reste seulement à déterminer les polynômes:

$$A_0(x),\ A_1(x),\ \ldots,\ A_n(x).$$

Pour cela, nous allons changer les notations et écrire dans l'identité (1) a, au lieu de x, et au lieu de $x+h$, simplement x. On a alors

$$h = x - a,$$

et à la place de (1), nous aurons:

$$f(x) = A_0(a) + (x-a)A_1(a) + (x-a)^2 A_2(a) + \ldots + (x-a)^k A_k(a) + \ldots + (x-a)^n A_n(a). \quad (2)$$

Pour déterminer $A_0(a)$, supposons que dans la présente identité on a $x = a$, d'où:

$$f(a) = A_0(a).$$

Pour déterminer $A_1(a)$, nous allons dériver l'identité (2) par rapport à x et nous supposerons ensuite que $x = a$:

$$f'(x) = 1 \cdot A_1(a) + 2(x-a)A_2(a) + \ldots + k(x-a)^{k-1}A_k(a) + \ldots + n(x-a)^{n-1}A_n(a),$$

$$f'(a) = 1 \cdot A_1(a).$$

En dérivant encore une fois par rapport à x et en supposant ensuite que $x = a$, nous obtiendrons $A_2(a)$:

$$f''(x) = 2 \cdot 1 A_2(a) + \ldots + k(k-1)(x-a)^{k-2}A_k(a) + \ldots + n(n-1)(x-a)^{n-2}A_n(a),$$

$$f''(a) = 2 \cdot 1 A_2(a).$$

En dérivant k fois et en supposant ensuite que $x=a$, nous obtiendrons :

$$f^{(k)}(x)=k(k-1)\ldots 2\cdot 1A_k(a)+\ldots+n(n-1)\ldots$$
$$\ldots(n-k+1)(x-a)^{n-k}A_n(a),$$
$$f^{(k)}(a)=k!\,A_k(a).$$

Ainsi, nous avons :

$$A_0(a)=f(a),\ A_1(a)=\frac{f'(a)}{1!},\ A_2(a)=\frac{f''(a)}{2!},\ \ldots,$$
$$A_k(a)=\frac{f^{(k)}(a)}{k!},\ \ldots,\ A_n(a)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

après quoi, la formule (2) sera de la forme :

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+$$
$$+\ldots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (3)$$

Cette formule n'est vraie que dans le cas où $f(x)$ est un polynôme dont le degré n'est pas supérieur à n, et elle donne le développement d'un tel polynôme suivant les puissances de la différence $(x-a)$.

Soit $f(x)$ n'est pas un polynôme, mais une fonction quelconque déterminée à l'intérieur d'un certain intervalle I et possédant des dérivées continues jusqu'à l'ordre $(n+1)$ inclus. Supposons que la valeur de $x=a$ se trouve à l'intérieur de I. Par la suite, nous considérerons x comme appartenant à I.

Nous noterons par $R_n(x)$ la différence entre $f(x)$ et le second membre de la formule (3), autrement dit, nous supposerons que :

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x). \quad (4)$$

En dérivant successivement cette identité, nous obtiendrons :

$$\left.\begin{aligned}
f'(x)&=f'(a)+\frac{f''(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\\
&\quad+\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+R_n'(x),\\
f''(x)&=f''(a)+\frac{f'''(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\\
&\quad+\frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)}(x-a)^{n-2}+R_n''(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f^{(n)}(x)&=f^{(n)}(a)+R^{(n)}(x).
\end{aligned}\right\} \quad (4_1)$$

En faisant $x = a$ dans (4) et dans les dernières équations, nous trouvons:

$$R_n(a) = 0,\ R'_n(a) = 0,\ \ldots,\ R_n^{(n)}(a) = 0. \qquad (5)$$

En dérivant la dernière des égalités (4_1) encore une fois, nous trouverons:

$$R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x). \qquad (6)$$

A partir des relations (5) et (6), nous obtiendrons sans peine l'expression de $R_n(x)$, étant donné que d'après la formule fondamentale du calcul intégral:

$$R_n(x) - R_n(a) = \int_a^x R'_n(t)\,dt,$$

d'où, en considérant (5) et en intégrant par parties, nous tirons:

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \int_a^x R'_n(t)\,dt = -\int_a^x R'_n(t)\,d(x-t) = \\
&= -R'_n(t)(x-t)\Big|_a^x + \int_a^x R''_n(t)(x-t)\,dt = \\
&= -\int_a^x R''_n(t)\,d\frac{(x-t)^2}{2!} = \\
&= -R''_n(t)\frac{(x-t)^2}{2!}\Big|_a^x + \int_a^x R'''_n(t)\frac{(x-t)^2}{2!}\,dt = \\
&= -\int_a^x R'''_n(t)\,d\frac{(x-t)^3}{3!} = \\
&= -R'''_n(t)\frac{(x-t)^3}{3!}\Big|_a^x + \int_a^x R_n^{(4)}(t)\frac{(x-t)^3}{3!}\,dt = \ldots = \\
&= \int_a^x R_n^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.
\end{aligned}$$

Pour préciser les transformations que nous avons effectuées, notons ce qui suit. La variable d'intégration étant désignée par la lettre t, x sous le signe intégral doit être considérée comme une constante, et la différentielle de x comme nulle, c'est pourquoi on a, par exemple:

$$d\,\frac{(x-t)^3}{3!} = \frac{3(x-t)^2}{3!}\,d(x-t) = -\frac{(x-t)^2}{2!}\,dt$$

et de façon générale:

$$d\,\frac{(x-t)^k}{k!} = \frac{k(x-t)^{k-1}}{k!}\,d(x-t) = -\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}\,dt.$$

De même, l'expression

$$R_n^{(k)}(t)\,\frac{(x-t)^k}{k!}\Big|_a^x \qquad (k \leqslant n)$$

s'annule, car lorsque $t = x$, le facteur $(x - t)^k$ est égal à zéro, et d'après (5) avec la substitution $t = a$, $R_n^{(k)}(a)$ est nul.

Ainsi, nous obtenons une formule très importante:

Formule de Taylor. *Toute fonction $f(x)$ ayant à l'intérieur d'un intervalle, contenant le point $x = a$, des dérivées continues jusqu'à l'ordre $(n+1)$ inclus, peut être, pour toutes les valeurs de x* comprises *à l'intérieur de cet intervalle, développée en série des puissances de $(x - a)$*:

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f'(a)}{1!} + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2!} + \ldots + \\ + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + R_n(x), \tag{7}$$

où le reste $R_n(x)$ est de la forme:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt. \tag{8}$$

Très souvent dans les applications, on rencontre une autre forme du reste, que l'on obtient directement à partir de l'équation (8), à l'aide du théorème de la moyenne [III-2-2]. Sous le signe somme, dans le second membre de la formule (8), la fonction $(x - t)^n$ conserve son signe, et c'est pourquoi, d'après le théorème de la moyenne, nous avons:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_a^x (x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Big|_a^x\right].$$

En substituant les bornes supérieure et inférieure, nous obtiendrons:

$$-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Big|_a^x = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1},$$

car pour $t = x$, l'expression que nous avons écrite s'annule. En mettant cela dans la formule précédente, nous aurons:

$$R_n(x) = (x-a)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \tag{9}$$

où ξ est une valeur moyenne située entre a et x. Cette forme du reste s'appelle *forme de Lagrange*. Et la formule de Taylor avec le terme sous la forme de Lagrange devient:

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f'(a)}{1!} + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2!} + \ldots + \\ + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + (x-a)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tag{7_1}$$

(ξ est entre a et x).

IV-2-2. Différentes formes de la formule de Taylor. Pour $n = 0$, nous obtenons, à partir de (7_1), la formule des accroissements finis de Lagrange déjà démontrée [II-3-7] :

$$f(x) - f(a) = (x-a) f'(\xi);$$

la formule de Taylor est ainsi une généralisation directe de la formule des accroissements finis.

Passons aux notations précédentes et écrivons x à la place de a, et $x + h$ à la place de x ; la formule de Taylor est alors sous la forme :

$$f(x+h) - f(x) = \frac{hf'(x)}{1!} + \frac{h^2 f''(x)}{2!} + \ldots + \frac{h^n f^{(n)}(x)}{n!} + R_n(x), \tag{10}$$

étant donné qu'avec les nouvelles notations, il faut remplacer $(x - a)$ par h. La valeur (ξ), située avec les notations précédentes entre a et x, sera située entre x et $(x + h)$, et on peut la désigner par $(x + \theta h)$, où $0 < \theta < 1$. D'après (9), le reste dans la formule (10) peut ainsi être écrit sous la forme :

$$R_n(x) = h^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(x+\theta h)}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1). \tag{11}$$

Le premier membre de la formule (10) est l'accroissement Δy de la fonction $y = f(x)$, correspondant à l'accroissement ou, ce qui revient au même, à la différentielle h de la variable indépendante. Nous rappelant les expressions pour les différentielles des ordres supérieurs [II-2-3], nous avons :

$$dy = y'\,dx = f'(x)\,h, \quad d^2y = y''(dx)^2 = f''(x)\,h^2, \ \ldots,$$
$$d^n y = y^{(n)}(dx)^n = f^{(n)}(x)\,h^n,$$

d'où

$$\Delta y = \frac{dy}{1!} + \frac{d^2y}{2!} + \ldots + \frac{d^n y}{n!} + \left.\frac{d^{n+1}y}{(n+1)!}\right|_{x+\theta h}, \tag{12}$$

et, dans ce cas, le symbole

$$\left.\frac{d^{n+1}y}{(n+1)!}\right|_{x+\theta h}$$

exprime le résultat de la substitution dans l'expression $\frac{d^{n+1}y}{(n+1)!}$ de la somme $x + \theta h$ à la place de x.

Sous cette forme, la formule de Taylor est particulièrement intéressante lorsque l'accroissement h de la variable indépendante est une grandeur infiniment petite. La formule (12) donne alors la possibilité d'extraire de l'accroissement de la fonction Δy les termes infiniment petits des différents ordres en h.

Dans le cas particulier où la valeur initiale a de la variable indépendante est zéro, la formule de Taylor (7) prend la forme:

$$f(x)=f(0)+x\frac{f'(0)}{1!}+x^2\frac{f''(0)}{2!}+\ldots+x^n\frac{f^{(n)}(0)}{n!}+R_n(x), \quad (13)$$

où

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt=\frac{x^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (14)$$

et ξ, situé entre zéro et x, peut être exprimé par θx, où θ est un nombre vérifiant l'inégalité $0<\theta<1$. La formule (13) s'appelle *formule de Maclaurin.*

IV-2-3. Séries de Taylor et de Maclaurin. Si $f(x)$ a des dérivées de tout ordre pour $x=a$ et des x proches à a, on peut écrire la formule de Taylor pour n'importe quelle valeur de n. Mettons la formule de Taylor sous la forme:

$$f(x)-S_{n+1}(x)=R_n(x),$$

où

$$S_{n+1}(x)=f(a)+(x-a)\frac{f'(a)}{1!}+\ldots+(x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

c'est-à-dire que $S_{n+1}(x)$ est la somme des $(n+1)$ premiers termes de la série infinie:

$$f(a)+(x-a)\frac{f'(a)}{1!}+\ldots+(x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+\ldots$$

Si, pour une certaine valeur de x et lors de l'accroissement illimité de n:

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0, \quad (15)$$

d'après ce qui a été dit au paragraphe [IV-1-1], la série infinie converge pour la valeur mentionnée de x, et sa somme est égale à $f(x)$. On obtient ainsi *le développement de la fonction $f(x)$ en série de puissances infinie de Taylor*:

$$f(x)=f(a)+(x-a)\frac{f'(a)}{1!}+\ldots+(x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+\ldots \quad (16)$$

en série de puissances de $(x-a)$.

Par la suite nous rencontrerons toujours le cas où la condition (15) est remplie non pas pour certaines valeurs de x, mais pour tous les x d'un certain intervalle.

De même la formule de Maclaurin nous donne, si la condition (15) est remplie, *la décomposition de $f(x)$ en série de Maclaurin*

$$f(x)=f(0)+x\frac{f'(0)}{1!}+\ldots+x^n\frac{f^{(n)}(0)}{n!}+\ldots \quad (17)$$

L'évaluation de $R_n(x)$ a une grande importance pour le calcul approché des valeurs de la fonction $f(x)$ à l'aide de sa décomposition en série de puissances.

Appliquons les considérations précédentes au développement et au calcul approché de fonctions très simples.

IV-2-4. Développement de e^x. Nous avons avant tout

$$f(x)=e^x,\ f'(x)=e^x,\ \ldots,\ f^{(k)}(x)=e^x,\ \ldots,$$

c'est pourquoi

$$f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(k)}(0)=1,$$

et la formule de Maclaurin avec le reste (14) donne:

$$f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\quad(0<\theta<1).$$

Nous avons vu (exemple du paragraphe [IV-1-4]) que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

est absolument convergente pour toutes les valeurs finies de x, et c'est pourquoi, pour tout x, nous avons:

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\to 0 \text{ pour } n\to\infty,$$

étant donné que cette expression est le terme général d'une suite convergente *. D'autre part, le facteur $e^{\theta x}$ dans l'expression du terme restant ne dépasse pas e^x pour $x>0$ ni l'unité pour $x<0$, et c'est pourquoi le reste tend vers zéro pour toutes les valeurs de x, et nous obtiendrons:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\tag{18}$$

qui est vrai pour toutes les valeurs de x.

En particulier, pour $x=1$, nous obtenons pour e une expression commode pour calculer e à n'importe quel degré de précision:

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$$

En utilisant cette formule, nous calculerons le nombre e avec six décimales. Si nous prenons approximativement:

$$e\approx 2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!},$$

* Cf. également l'exemple [I-2-10].

l'erreur sera alors :

$$\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots=\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots\right]<$$
$$<\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots\right]=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n!n},$$

où l'on a mis le signe ($<$) parce que dans le dénominateur les facteurs $(n+2)$, $(n+3)$, $(n+4)$, . . . sont remplacés par un nombre plus petit $(n+1)$ et toutes les fractions ont ainsi augmenté.

On peut ainsi trouver les limites suivantes, entre lesquelles est compris le nombre e :

$$2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}<e<2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!n}.$$

Si nous désirons obtenir une valeur approchée pour e, qui ne s'éloigne pas de plus de 0,000 001 de la véritable valeur, supposons que $n=10$; nous aurons alors :

$$e\approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{10!},$$

et l'erreur n'excédera pas $\frac{1}{10!10}<3\cdot10^{-8}$. Dans cette formule, on calcule les deux premiers termes de façon précise ; les huit autres doivent être calculés avec sept décimales, car ainsi l'erreur sur chaque terme n'est pas supérieure à 0,5 unité de la septième décimale, c'est-à-dire $0{,}5\cdot10^{-7}$, et l'erreur tout entière n'excède pas :

$$10^{-7}\cdot0{,}5\cdot8=4\cdot10^{-7},$$

c'est-à-dire quatre unités de la septième décimale, et c'est pourquoi l'erreur totale ne dépassera pas en valeur absolue $4{,}3\cdot10^{-7}$. Nous avons :

$2=2{,}000\,000$	0 (exact)
$\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}=0{,}500\,000$	0 (exact)
$\frac{1}{3!}=\frac{1}{2!\,3}=0{,}166\,666$	7 (par excès)
$\frac{1}{4!}=\frac{1}{3!\,4}=0{,}041\,666$	7 (par excès)
$\frac{1}{5!}=\frac{1}{4!\,5}=0{,}008\,333$	3 (par défaut)
$\frac{1}{6!}=\frac{1}{5!\,6}=0{,}001\,388$	9 (par excès)
$\frac{1}{7!}=\frac{1}{6!\,7}=0{,}000\,198$	4 (par défaut)
$\frac{1}{8!}=\frac{1}{7!\,8}=0{,}000\,024$	8 (par défaut)
$\frac{1}{9!}=\frac{1}{8!\,9}=0{,}000\,002$	8 (par excès)
$\frac{1}{10!}=\frac{1}{9!\,10}=0{,}000\,000$	3 (par excès)

$e\approx2{,}7182818$

La valeur de e avec 12 décimales est 2,718 281 828 459.

IV-2-5. Développement de sin x et de cos x. Nous avons [II-2-1] :

$$f(x)=\sin x,\ f'(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\ \ldots,\ f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right),$$

d'où :

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,\ \ldots,$$
$$f^{(2m)}(0)=0,\ f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m,$$

après quoi la formule (13) donne:

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+$$
$$+\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\sin\left[\theta x+\frac{(2n+3)\pi}{2}\right].$$

Dans le reste, le facteur $\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}$, comme nous l'avons vu ci-dessus, tend vers zéro pour $n\to\infty$, mais la valeur absolue du sinus n'est pas plus grande que l'unité et, par conséquent, le reste tend vers zéro pour toutes valeurs finies de x, c'est-à-dire que le développement

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots \tag{19}$$

est valable *pour toutes les valeurs de x*.

On peut prouver de façon analogue que le développement

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots \tag{20}$$

est valable *pour toutes les valeurs de x*.

Les séries (19) et (20) sont commodes pour le calcul des valeurs des fonctions de sin x et cos x pour des valeurs petites de l'angle x. Pour toutes les valeurs de x, aussi bien positives que négatives, ce sont des séries à termes alternés, de sorte que, si nous avions pris un nombre de termes tel que les suivants décroissent, l'erreur ne dépasserait pas en valeur absolue le premier des termes rejetés [IV-1-6].

Pour les grandes valeurs de x, les séries (19) et (20) convergent également, mais lentement, et ne sont pas commodes pour le calcul. Sur la fig. 156 on a représenté la disposition de la *courbe réelle* de sin x et des *approximations* des trois premiers ordres:

$$x,\ x-\frac{x^3}{6},\ x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}.$$

Plus on aura de termes dans la formule approchée, et plus grand sera l'intervalle où la courbe approchée sera proche de la

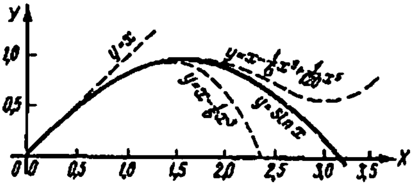

Fig. 156

courbe exacte. Remarquons que dans toutes les formules écrites, l'angle x est exprimé en unité d'arc, c'est-à-dire en radians [I-2-9].

Exemple. Calculer $\sin 10°$ à 10^{-5} près. En premier lieu, convertissons en radians la mesure en degrés

$$\operatorname{arc} 10° = \frac{2\pi}{360} \cdot 10 = \frac{\pi}{18} = 0,17\ldots$$

En nous arrêtant à la formule approchée:

$$\sin\frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3,$$

nous faisons une erreur n'excédant pas

$$\frac{1}{120}\cdot(0,2)^5 < 4\cdot 10^{-6}\left(\frac{\pi}{18} < 0,2\right).$$

Dans le second membre de la formule précédente $\sin\frac{\pi}{18}$ il faut calculer chaque terme avec six décimales, parce qu'alors l'erreur globale ne sera pas supérieure à

$$2\cdot 0,5\cdot 10^{-6} + 4\cdot 10^{-6} = 5\cdot 10^{-6}.$$

Avec cette précision nous avons:

$$\frac{\pi}{18} = 0,174\,533, \quad \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 = 0,000\,886, \quad \sin\frac{\pi}{18} = 0,173\,647,$$

dont les quatre premières décimales sont exactes.

IV-2-6. Binôme de Newton. Nous avons ici en considérant $x > -1$, c'est-à-dire $1 + x > 0$:

$$f(x) = (1+x)^m, \; f'(x) = m(1+x)^{m-1}, \ldots,$$
$$f^{(k)}(x) = m(m-1)\ldots(m-k+1)(1+x)^{m-k},$$
$$f(0) = 1, \; f'(0) = m, \ldots, f^{(k)}(0) = m(m-1)\ldots(m-k+1),$$

où m est un nombre réel quelconque, de sorte que la formule (13) nous donne:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + R_n(x), \quad (21)$$

où le membre restant peut être défini d'après la formule (8), pour $a = 0$:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt.$$

En considérant que dans le cas présent:

$$f^{(n+1)}(t) = m(m-1)\ldots(m-n)(1+t)^{m-n-1},$$

nous pouvons écrire:

$$R_n(x) = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{n!} \int_0^x (x-t)^n (1+t)^{m-n-1} \, dt. \quad (22)$$

En appliquant à cette intégrale le théorème de la moyenne (13) du paragraphe [III-2-2], et en désignant par θx, où $0 < \theta < 1$, la valeur de t située entre 0 et x et faisant parti du théorème de la moyenne que nous venons de mentionner, nous obtiendrons:

$$R_n(x) = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{n!} (x-\theta x)^n (1+\theta x)^{m-n-1} \int_0^x dt =$$
$$= \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{n!} x^n \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n (1+\theta x)^{m-1} mx. \quad (23)$$

Si $R_n \to 0$, la série

$$1 + \frac{m}{1!} x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + \ldots \quad (24)$$

doit être convergente [IV-1-1]. Nous avons:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{m-n+1}{n} x\right| \to |x| \quad \text{pour} \quad n \to \infty,$$

c'est pourquoi la série est absolument convergente pour $|x| < 1$ et diverge pour $|x| > 1$ [IV-1-7]. Bien que la série (24) converge pour $|x| < 1$, il n'est pas certain que dans ce cas sa somme soit égale à $(1+x)^m$, et il faut encore démontrer que $R_n(x) \to 0$ pour $|x| < 1$. Le facteur

$$\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{n!} x^n$$

dans l'expression (23) pour $R_n(x)$ sera le terme général de la série *convergente* (24), dans laquelle m est remplacé par $(m-1)$, et c'est pourquoi [IV-1-1], il tendra vers zéro pour $n \to \infty$.

Le facteur $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$ n'est pas supérieur à l'unité pour toutes les valeurs de n. En effet, dans le cas étudié, $-1 < x < +1$, c'est pourquoi on aura aussi bien pour les valeurs positives que pour les valeurs négatives de x: $0 < 1-\theta < 1+\theta x$, d'où

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1 \quad \text{et} \quad 0 < \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n < 1.$$

Le dernier facteur $mx\,(1+\theta x)^{m-1}$ est également borné, étant donné que le nombre $(1+\theta x)$ est situé entre 1 et $1+x$ et que $mx\,(1+\theta x)^{m-1}$ est situé entre les limites mx et $mx\,(1+x)^{m-1}$ qui ne dépendent pas de n.

D'après ce qui a été dit, il est clair que $R_n(x)$, grâce à la formule (23), est un produit de trois facteurs dont l'un tend vers zéro, et les deux autres restent bornés lorsque n croît indéfiniment, c'est pourquoi

$$R_n(x) \to 0 \text{ pour } n \to \infty.$$

Ainsi, le développement

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \\ + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \qquad (25)$$

est valable *pour toutes les valeurs de x vérifiant la condition*

$$|x| < 1.$$

Lorsque l'indice m est un nombre entier et positif, la série (25) se termine par le terme $n = m$ et devient la formule élémentaire du binôme de Newton. De façon générale, *le développement* (25) *donne une généralisation du binôme de Newton pour un indice quelconque m.*

On a quelques cas particuliers du binôme:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots, \qquad (26)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \ldots, \qquad (27)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \ldots \qquad (28)$$

Notons que la fonction $(1+x)^m$ a des valeurs positives pour tout $x > -1$ [II-1-19], [I-2-20], c'est-à-dire que la somme de la série (24) est positive pour $-1 < x < +1$. En particulier, la série (27) donne, par exemple, dans cet intervalle la valeur positive de $\sqrt{1+x}$.

Exemples. 1. Extraction de racines. La formule (25) est particulièrement pratique pour extraire des racines avec n'importe quel degré de précision. Soit à extraire la racine de degré m d'un nombre entier A. On peut toujours trouver un nombre entier a tel que la puissance m de a soit aussi proche que l'on veut de A, de sorte qu'en mettant $A = a^m + b$, où $|b| < a^m$, nous ayons :

$$\sqrt[m]{A} = \sqrt[m]{a^m + b} = a\sqrt[m]{1 + \frac{b}{a^m}}.$$

Etant donné que $\left|\frac{b}{a^m}\right| < 1$, en remplaçant $\frac{b}{a^m}$ par x, nous pouvons calculer $\sqrt[m]{1 + \frac{b}{a^m}}$ suivant la formule du binôme de Newton, et la série sera d'autant plus convergente que la valeur absolue du rapport considéré sera plus petite.

Calculons par exemple $\sqrt[5]{1000}$ à 10^{-5} près. Nous avons :

$$\sqrt[5]{1000} = \sqrt[5]{1024 - 24} = 4\left(1 - \frac{3}{128}\right)^{1/5} =$$

$$= 4\left[1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{128} - \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{10}\left(\frac{3}{128}\right)^2 - \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{9}{15}\left(\frac{3}{128}\right)^3 - \cdots\right].$$

Arrêtons-nous sur ces termes et évaluons l'erreur, en mettant dans la formule (23) :

$$m = \frac{1}{5}, \quad n = 3, \quad x = -\frac{3}{128}.$$

Le facteur $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$, comme nous l'avons déjà vu, est compris entre zéro et un. Le facteur $(1+\theta x)^{m-1}$ sera :

$$\left(1 - \theta\frac{3}{128}\right)^{-4/5} < \left(1 - \frac{3}{128}\right)^{-4/5} = \left(\frac{125}{128}\right)^{4/5} < \left(\frac{6}{5}\right)^{4/5} = \left(\sqrt[5]{\frac{6}{5}}\right)^4 < \left(\frac{4}{3}\right)^4,$$

étant donné que

$$\sqrt[5]{\frac{6}{5}} < \frac{6}{5} < \frac{4}{3}.$$

Finalement à partir de la formule (23), nous obtiendrons :

$$4\,|R_n| < \frac{4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{14}{5}\left(\frac{4}{128}\right)^4 < 2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}6\cdot 2{,}8\cdot(0{,}03)^4 < 5\cdot 10^{-7}.$$

Il faut faire le calcul des termes restants avec six décimales, étant donné que l'erreur globale ne dépassera pas alors :

$$4\cdot 3\cdot 0{,}5\cdot 10^{-6} + 5\cdot 10^{-7} = 6{,}5\cdot 10^{-6} < 10^{-5}.$$

On peut ordonner le calcul de la façon suivante :

$\frac{1}{5} = 0{,}2$	$\times\frac{3}{128} = 0{,}023\,4375 \times 0{,}2 = 0{,}004\,687$
$\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{10} = 0{,}08$	$\times\left(\frac{3}{128}\right)^2 = 0{,}000\,549 \times 0{,}08 = 0{,}000\,044$
$\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{9}{15} = 0{,}048$	$\times\left(\frac{3}{128}\right)^3 = 0{,}000\,013 \times 0{,}048 = 0{,}000\,001$

$$0{,}004\,732$$

$$1 - 0{,}004\,732 = 0{,}995\,268$$
$$\times 4$$
$$3{,}981\,072$$

2. Calcul approché de la longueur d'une ellipse. Au paragraphe [III-3-3], on a obtenu l'expression suivante pour la longueur l d'une ellipse dont les deux demi-axes sont a et b:

$$l=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin^2 t+\frac{b^2}{a^2}\cos^2 t}\,dt$$

[formule (22)]. En introduisant dans l'étude l'excentricité ε de l'ellipse:

$$\varepsilon^2=\frac{a^2-b^2}{a^2},\quad \frac{b^2}{a^2}=1-\varepsilon^2,$$

nous obtenons:

$$l=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt. \tag{29}$$

Il est impossible de calculer exactement cette intégrale mais on peut la calculer avec le degré de précision que l'on voudra, en mettant la fonction à intégrer sous forme de série de puissances de ε *

$$\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}=1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\cos^2 t+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}\varepsilon^4\cos^4 t-$$

$$-\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\varepsilon^6\cos^6 t+\ldots=$$

$$=1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\cos^2 t-\frac{1}{8}\varepsilon^4\cos^4 t-\frac{1}{16}\varepsilon^6\cos^6 t+R_3,$$

où l'erreur R_3, si on l'évalue d'après la formule (23) pour $n=3$, vérifie l'inégalité:

$$|R_3|=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1\cdot 2\cdot 3}\varepsilon^8\cos^8 t\left(\frac{1-\theta}{1-\theta\varepsilon^2\cos^2 t}\right)^3\times$$

$$\times(1-\theta\varepsilon^2\cos^2 t)^{\frac{1}{2}-1}<\frac{5}{32}\frac{\varepsilon^8\cos^8 t}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \tag{30}$$

étant donné que:

$$0<\left(\frac{1-\theta}{1-\theta\varepsilon^2\cos^2 t}\right)^3<1$$

et

$$(1-\theta\varepsilon^2\cos^2 t)^{\frac{1}{2}-1}<(1-\varepsilon^2\cos^2 t)^{-\frac{1}{2}}.$$

---

* Ce développement est évidemment possible, puisque pour l'ellipse $\varepsilon<1$, c'est pourquoi le terme $-\varepsilon^2\cos^2 t$ qui joue ici le rôle de x dans la formule du binôme de Newton, est inférieur à l'unité en valeur absolue.

En portant cette expression dans (29) pour l, en intégrant et en se rappelant la formule (27) de [III-2-7], nous trouvons:

$$l=4a\left[\int_0^{\pi/2}dt-\frac{1}{2}\varepsilon^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt-\frac{1}{8}\varepsilon^4\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\,dt-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{16}\varepsilon^6\int_0^{\pi/2}\cos^6 t\,dt+\int_0^{\pi/2}R_3\,dt\right]=2\pi a\left[1-\frac{1}{4}\varepsilon^2-\frac{3}{64}\varepsilon^4-\frac{5}{256}\varepsilon^6+\rho\right], \quad (31)$$

où, d'après la formule (10_1) [III-2-2] et d'après l'inégalité (30),

$$|\rho|=\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}R_3\,dt\right|<\frac{5}{32}\frac{\varepsilon^8}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^8 t\,dt=$$

$$=\frac{175}{2^{13}}\frac{\varepsilon^8}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}<\frac{0{,}05\varepsilon^8}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

La formule (31) est commode pour calculer la longueur de l'ellipse surtout pour les petites valeurs de l'excentricité. En se basant sur cette formule, on peut trouver une construction géométrique simple de la longueur approchée de l'ellipse où on a seulement des circonférences.

Nous désignerons par l_1 et l_2 respectivement les moyennes arithmétique et géométrique des demi-axes de l'ellipse:

$$l_1=\frac{a+b}{2}, \quad l_2=\sqrt{ab}$$

et nous comparerons la longueur l de l'ellipse avec les longueurs $2\pi l_1$, $2\pi l_2$ des deux cercles de rayons l_1 et l_2.

En remarquant que:

$$b=a\sqrt{1-\varepsilon^2}, \quad \frac{a+b}{2}=\frac{a}{2}\left[1+\sqrt{1-\varepsilon^2}\right], \quad \sqrt{ab}=a\sqrt[4]{1-\varepsilon^2},$$

et en développant en séries au moyen de la formule du binôme de Newton, nous obtiendrons sans peine les expressions suivantes:

$$2\pi l_1=2\pi a\left[1-\frac{1}{4}\varepsilon^2-\frac{1}{16}\varepsilon^4-\frac{1}{32}\varepsilon^6+\rho_1\right], \quad (32)$$

$$2\pi l_2=2\pi a\left[1-\frac{1}{4}\varepsilon^2-\frac{3}{32}\varepsilon^4-\frac{7}{128}\varepsilon^6+\rho_2\right], \quad (33)$$

où les erreurs ρ_1 et ρ_2 évaluées d'après la formule (23) vérifient les inégalités:

$$|\rho_1|<\frac{5}{32}\frac{\varepsilon^8}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \quad |\rho_2|<\frac{77}{512}\frac{\varepsilon^8}{(1-\varepsilon^2)^{7/4}}.$$

D'où il est clair que pour une excentricité petite, *lorsqu'on peut négliger les degrés élevés de* ε *devant* ε^2, *on peut prendre pour la longueur de l'ellipse, la longueur de n'importe laquelle des deux circonférences dont les rayons sont égaux aux moyennes arithmétique ou géométrique des deux demi-axes.* Si on désire une plus grande précision, on établira l'expression:

$$\alpha\cdot 2\pi l_1+\beta\cdot 2\pi l_2, \quad (34)$$

en choisissant les facteurs α et β de façon qu'un plus grand nombre de termes coïncident dans les expressions (31) et (34). Etant donné que les deux premiers termes de chacune des expressions (31), (32), (33) coïncident, on doit avoir avant tout:

$$\alpha+\beta=1.$$

En égalant les coefficients de ε^4 dans les expressions (31) et (34), nous obtenons:

$$\frac{\alpha}{16}+\frac{3\beta}{32}=\frac{3}{64} \quad \text{ou} \quad 4\alpha+6\beta=3.$$

En résolvant les deux équations obtenues par rapport à α et β, nous aurons:

$$\alpha=\frac{3}{2}, \quad \beta=-\frac{1}{2}.$$

En portant ces valeurs dans (34), nous avons:

$$\alpha\cdot 2\pi l_1+\beta\cdot 2\pi l_2=2\pi\left(\frac{3}{2}l_1-\frac{1}{2}l_2\right)=$$

$$=2\pi a\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon^2-\frac{3}{64}\varepsilon^4-\frac{5}{256}\varepsilon^6+\frac{3}{2}\rho_1-\frac{1}{2}\rho_2\right), \quad (35)$$

c'est-à-dire que les termes coïncident non seulement avec ε^4, mais aussi avec ε^6, et la différence entre (31) et (35) n'apparaît qu'avec les termes en ε^8. En considérant les évaluations trouvées ci-dessus pour ρ, ρ_1, ρ_2, et en tenant compte de ce que:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{3/4}}<\frac{1}{1-\varepsilon^2}, \quad \frac{175}{2^{12}}+\frac{5}{32}\cdot\frac{3}{2}+\frac{77}{512}\cdot\frac{1}{2}<0{,}4,$$

nous pouvons finalement dire: *avec une erreur ne dépassant pas* $\frac{0{,}4\varepsilon^8}{1-\varepsilon^2}$, *on peut prendre pour longueur de l'ellipse de demi-axes a et b et d'excentricité* ε *la circonférence de rayon r tel que:*

$$r=\frac{3}{2}\frac{a+b}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{ab}.$$

IV-2-7. Développement de ln $(1+x)$ *. On peut obtenir ce développement à partir de la théorie générale, mais nous utiliserons un autre moyen qui est très commode dans de nombreux cas.

Nous exprimerons ln $(1+x)$ sous forme d'une intégrale définie. Nous avons, de toute évidence, pour $x>-1$:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t}=\ln(1+t)\Big|_0^x=\ln(1+x)-\ln 1=\ln(1+x),$$

c'est-à-dire que:

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t}.$$

Mais on a l'identité:

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\ldots+(-1)^{n-1}t^{n-1}+\frac{(-1)^n t^n}{1+t},$$

* La fonction ln x ne peut être développée en série de puissances de x, car pour $x=0$, elle et ses dérivées présentent une discontinuité et tendent vers l'infini.

que l'on obtient directement en divisant l'unité par $1+t$ et en s'arrêtant lorsque le reste est $(-1)^n t^n$. De sorte que :

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t}=\int_0^x \left[1-t+t^2-t^3+\ldots+(-1)^{n-1}t^{n-1}+\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^n t^n}{1+t}\right]dt=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+R_n(x),$$

où

$$R_n(x)=(-1)^n\int_0^x \frac{t^n\,dt}{1+t}. \tag{36}$$

La série

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\ldots,$$

pour laquelle

$$\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right|=\frac{n-1}{n}|x|\to|x| \quad \text{pour} \quad n\to\infty,$$

est certainement divergente pour $|x|>1$ (corollaire de [IV-1-4]) et c'est pourquoi il faut étudier seulement le cas : $|x|<1$, $x=\pm 1$. Le cas de $x=-1$ doit être également rejeté, car, pour $x=-1$, la fonction $\ln(1+x)$ tend vers l'infini.

Ainsi, il ne reste que les cas où : 1) $|x|<1$, et 2) $x=1$. Dans le cas 1), en appliquant à l'expression (36) pour $R_n(x)$ le théorème de la moyenne [III-2-2], et en considérant que t^n ne change pas de signe lorsque t varie de 0 à x, nous avons :

$$R_n(x)=\frac{(-1)^n}{1+\theta x}\int_0^x t^n\,dt=\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)} \quad (0<\theta<1), \tag{37}$$

d'où, étant donné la condition $|x|<1$, on obtient :

$$|R_n(x)|<\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{1+\theta x}.$$

Le facteur $\frac{1}{1+\theta x}$ dans le second membre de l'inégalité précédente reste borné pour toutes les valeurs de n, car il est compris entre les limites 1 et $\frac{1}{1+x}$, qui ne dépendent pas de n, et c'est pourquoi pour les valeurs étudiées de x

$$R_n(x)\to 0 \quad \text{pour} \quad n\to\infty.$$

Nous obtiendrons le même résultat dans le cas 2), lorsque $x=1$. La même formule (37) pour $x=1$ donne :

$$|R_n(1)|=\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{1+\theta}<\frac{1}{n+1}$$

c'est-à-dire que de nouveau:

$$R_n(1) \longrightarrow 0 \quad \text{pour} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Ainsi, le développement:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \ldots \tag{38}$$

a lieu *pour toutes les valeurs de x qui satisfont aux inégalités*:

$$-1 < x \leqslant +1. \tag{39}$$

En particulier pour $x = 1$, nous avons l'égalité:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots,$$

que nous avons déjà citée [IV-1-6]. La formule (38) ne convient pas directement pour calculer les logarithmes, car on suppose que x vérifie les inégalités (39) et, de plus, la série dans le second membre ne converge pas assez vite. On peut la mettre sous une forme plus commode pour le calcul. Pour cela, mettons dans l'égalité:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

$(-x)$ à la place de x, ce qui donne:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots \;(|x| < 1),$$

et nous soustrayons membre à membre. Nous obtiendrons:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right) \;(|x| < 1).$$

En supposant que:

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{z}{a} = \frac{a+z}{a}, \qquad x = \frac{z}{2a+z}, \tag{40}$$

nous avons

$$\ln\frac{a+z}{a} = 2\left[\frac{z}{2a+z} + \frac{1}{3}\cdot\frac{z^3}{(2a+z)^3} + \frac{1}{5}\frac{z^5}{(2a+z)^5} + \ldots\right],$$

ou

$$\ln(a+z) = \ln a + 2\left[\frac{z}{2a+z} + \frac{1}{3}\frac{z^3}{(2a+z)^3} + \ldots\right]. \tag{41}$$

Cette formule convient pour toutes les valeurs positives de a et de z, car $x = \frac{z}{2a+z}$ est alors compris entre zéro et un. Elle convient d'autant plus au calcul que la fraction $\frac{z}{2a+z}$ est plus petite, ou que (ce qui revient au même) z est plus petit par rapport à a.

La formule (41) est très utile pour calculer les logarithmes. Bien qu'en réalité la table des logarithmes n'ait pas été calculée à l'aide de séries qui, à l'époque de Neper et de Briggs, n'étaient pas encore connues, la formule (41), cependant, peut être utilisée pour la vérification et le calcul rapide de la table de logarithmes. Supposons que dans (41), $z = 1$, et prenons successivement : $a = 15, 24, 80$; nous obtiendrons:

$$\ln 16 - \ln 15 = 2\left[\frac{1}{31} + \frac{1}{3\cdot 31^3} + \ldots\right] = 2P,$$

$$\ln 25 - \ln 24 = 2\left[\frac{1}{49} + \frac{1}{3\cdot 49^3} + \ldots\right] = 2Q,$$

$$\ln 81 - \ln 80 = 2\left[\frac{1}{161} + \frac{1}{3\cdot 161^3} + \ldots\right] = 2R,$$

où les séries P, Q, R convergent très vite. Ces égalités nous donnent les équations :

$$\begin{gathered} 4\ln 2 - \ln 3 - \ln 5 = 2P, \\ -3\ln 2 - \ln 3 + 2\ln 5 = 2Q, \\ -4\ln 2 + 4\ln 3 - \ln 5 = 2R \end{gathered}$$

pour définir les valeurs de $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$. En résolvant ces équations, nous trouverons sans peine :

$$\begin{aligned} \ln 2 &= 14P + 10Q + 6R, \\ \ln 3 &= 22P + 16Q + 10R, \\ \ln 5 &= 32P + 24Q + 14R. \end{aligned}$$

Les logarithmes ainsi obtenus seront les logarithmes naturels; grâce à eux, nous trouverons le module M des logarithmes de base 10 :

$$M = \frac{1}{\ln 10} = 0{,}434\,294\,4819\ \ldots,$$

ce que sachant nous pouvons passer des *logarithmes* naturels aux logarithmes décimaux suivant la formule :

$$\lg_{10} x = M \ln x.$$

De façon analogue, utilisant les développements en facteurs :

$$\begin{aligned}
a &= 2\,400 = 100\cdot 2^3\cdot 3, & a+z &= 2\,401 = 7^4, \\
a &= 9\,800 = 100\cdot 2\cdot 7^2, & a+z &= 9\,801 = 3^4\cdot 11^2, \\
a &= 123\,200 = 100\cdot 2^4\cdot 7\cdot 11, & a+z &= 123\,201 = 3^6\cdot 13^2, \\
a &= 2\,600 = 100\cdot 2\cdot 13, & a+z &= 2\,601 = 3^2\cdot 17^2, \\
a &= 28\,899 = 3^2\cdot 13^2\cdot 19, & a+z &= 28\,900 = 100\cdot 17^2,
\end{aligned}$$

nous calculerons :

$$\ln 7,\ \ln 11,\ \ln 13,\ \ldots$$

Lorsque nous aurons déterminé les logarithmes de nombres simples, nous déterminerons sans l'aide des séries, mais seulement à l'aide d'additions et de multiplications de facteurs entiers, les logarithmes des nombres composés que l'on peut toujours développer en facteurs simples.

IV-2-8. Développement de arc tg x. Nous procéderons ici comme pour le développement de $\ln(1+x)$. Nous avons:

$$d \operatorname{arc} \operatorname{tg} t = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Nous obtenons en intégrant:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} t \Big|_0^x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} 0 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x,$$

où arc tg x, comme dans l'exemple du paragraphe [III-2-5], a une très grande importance. Nous avons donc:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \Big[1 - t^2 + t^4 -$$

$$- \ldots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} + \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}\Big] dt =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} + R_n(x),$$

où

$$R_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}\, dt}{1+t^2}. \tag{42}$$

La série

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots,$$

pour laquelle la relation

$$\left| \frac{u_n}{u_{n-1}} \right| = \frac{2n-3}{2n-1} x^2 \longrightarrow x^2 \text{ pour } n \longrightarrow \infty$$

diverge certainement pour $x^2 > 1$; c'est pourquoi il suffit que nous nous limitions au cas $x^2 \leqslant 1$, c'est-à-dire:

$$-1 \leqslant x \leqslant +1. \tag{43}$$

En considérant d'abord $0 < x \leqslant 1$, nous obtiendrons à partir de la formule (42), d'après VII [III-2-2]:

$$|R_n(x)| = \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt < \int_0^x t^{2n}\, dt = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \leqslant \frac{1}{2n+1} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty),$$

car il est évident que

$$\frac{t^{2n}}{1+t^2} < t^{2n}.$$

Si $x < 0$, en introduisant à la place de t une nouvelle variable, $t = -\tau$, nous obtiendrons

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \int_0^{-x} \frac{\tau^{2n}}{1+\tau^2}\, d\tau.$$

Ici, la borne supérieure $(-x)$ est positive, c'est pourquoi l'évaluation donnée plus haut pour $|R_n(x)|$ est encore valable, c'est-à-dire que le développement:

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \tag{44}$$

est justifié *pour toutes les valeurs de x qui ne dépassent pas l'unité en valeur absolue.*

En particulier, pour $x = 1$, nous obtenons:

$$\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots$$

Cette suite, en raison de sa lente convergence, ne convient pas pour calculer π. La suite (44) converge d'autant plus vite que x est petit. Supposons, par exemple, que

$$x = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad \varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5}.$$

Nous avons:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12},$$

$$\operatorname{tg} 4\varphi = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}.$$

Etant donné que $\operatorname{tg} 4\varphi$ diffère peu de l'unité, l'angle 4φ diffère peu de $\frac{\pi}{4}$. Introduisons cette petite différence

$$\psi = 4\varphi - \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{4} = 4\varphi - \psi.$$

De là, nous concluons que

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg}\left(4\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} 4\varphi - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg} 4\varphi \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239},$$

ce qui donne:

$$\frac{\pi}{4} = 4\varphi - \psi = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239} =$$

$$= 4\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5^7} + \ldots\right] - \left[\frac{1}{239} - \ldots\right].$$

Les deux suites entre crochets sont à termes alternés [IV-1-6], c'est pourquoi, en nous limitant dans chacune d'elles aux termes écrits, nous ferons une erreur qui ne dépassera pas:

$$\frac{4}{9\cdot 5^9}+\frac{1}{3\cdot 239^3}<0,5\cdot 10^{-8}.$$

Si nous voulons obtenir π avec une précision de l'ordre de 10^{-5}, nous calculerons les termes avec sept décimales, car alors l'erreur dans la définition de $\frac{\pi}{4}$ ne dépassera pas:

$$4\cdot 4\cdot 0,5\cdot 10^{-7}+0,5\cdot 10^{-7}+0,5\cdot 10^{-6}<2\cdot 10^{-6},$$

mais l'erreur sur π ne dépassera pas $8\cdot 10^{-6}$.

Nous ferons le calcul suivant le schéma suivant:

$\frac{1}{5}=0,200\,000\,0$	$\frac{1}{3\cdot 5^3}=0,002\,666\,7$
$\frac{1}{5\cdot 5^5}=0,000\,064\,0$	$\frac{1}{7\cdot 5^7}=0,000\,001\,8$
$+0,200\,064\,0$	$-0,002\,666\,5$

$$\begin{array}{r} 0,197\,395\,5 \\ \times\quad 4 \\ \hline 0,789\,582\,0 \\ -\frac{1}{239}= \quad -0,004\,184\,1 \\ \hline 0,785\,397\,9 \\ \times\quad 4 \\ \hline \pi\approx 3,141\,591\,6 \end{array}$$

La valeur du nombre π avec huit décimales est 3,141 591 05. On peut obtenir pour $|x|\leqslant 1$ le développement:

$$\operatorname{arc\,sin} x=\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots \quad (45)$$

IV-2-9. Formules approchées. La série de Maclaurin, lorsqu'elle converge, permet de calculer de façon approchée la fonction $f(x)$, en la remplaçant par un nombre fini de termes du développement:

$$f(0)+\frac{xf'(0)}{1!}+\frac{x^2f''(0)}{2!}+\ldots$$

Plus x est petit, moins il faut prendre de termes dans ce développement pour le calcul de $f(x)$ avec une précision voulue. Si x est très petit, on peut se limiter aux deux premiers termes en rejetant tous les autres. Ainsi on obtient *une formule approchée très simple pour* $f(x)$, qui, pour les valeurs petites de x, peut souvent remplacer une expression exacte très complexe de $f(x)$.

Donnons les formules approchées pour les fonctions les plus importantes:

$$\sqrt[n]{1+x} \approx 1+\frac{x}{n}, \quad \sin x \approx x,$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{1+x}} \approx 1-\frac{x}{n}, \quad \cos x \approx 1-\frac{x^2}{2},$$

$$(1+x)^n \approx 1+nx, \quad \operatorname{tg} x \approx x,$$

$$a^x \approx 1+x\ln a, \quad \ln(1+x) \approx x.$$

En utilisant ces formules pour les valeurs de x voisines de zéro (positives et négatives) on peut simplifier considérablement des expressions complexes.

Exemples.

1. $$\left(\frac{1+\frac{m}{n^2}x}{1-\frac{n-m}{n^2}x}\right)^n=\frac{\left(1+\frac{m}{n^2}x\right)^n}{\left(1-\frac{n-m}{n^2}x\right)^n}\approx\left(1+\frac{m}{n}x\right)\left(1+\frac{n-m}{n}x\right)\approx$$

$$\approx 1+\frac{m}{n}x+\frac{n-m}{n}x=1+x.$$

2. $$\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{1}{2}\ln(1-x)-\frac{1}{2}\ln(1+x)\approx-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x=-x.$$

3. Déterminer l'accroissement du volume d'un corps que l'on chauffe (dilatation en volume), lorsqu'on connaît le coefficient de dilatation linéaire α. Si une des mesures linéaires du corps est l_0 pour 0°, lorsqu'on chauffe jusqu'à $t°$, elle sera

$$l=l_0(1+\alpha t).$$

α, coefficient de dilatation, est pour la plupart des corps une grandeur très petite ($< 10^{-5}$). Etant donné que les volumes se comportent comme des cubes des dimensions linéaires, nous pouvons écrire:

$$\frac{v}{v_0}=\frac{(1+\alpha t)^3}{1}; \quad v=v_0(1+\alpha t)^3\approx v_0(1+3\alpha t),$$

c'est-à-dire que le nombre 3α nous donne le coefficient de dilatation en volume. Pour la densité ρ, qui est inversement proportionnelle au volume, nous trouverons une relation analogue:

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{1}{(1+\alpha t)^3}, \quad \rho=\rho_0(1+\alpha t)^{-3}\approx\rho_0(1-3\alpha t).$$

Toutes ces formules approchées conviennent, naturellement, pour des valeurs de x suffisamment petites, et comme dans le cas contraire elles deviennent imprécises, il faut prendre les termes suivants du développement.

IV-2-10. Maxima, minima et points d'inflexion. La formule de Taylor permet de compléter la règle au moyen de laquelle on trouve le maximum et le minimum d'une fonction, règle donnée au paragraphe [II-3-2]. Dans la suite, nous considérerons que $f(x)$ a des dérivées continues jusqu'à l'ordre n au point $x = x_0$ et au voisinage de ce point.

Si pour $x = x_0$ les $(n-1)$ premières dérivées de la fonction $f(x)$ s'annulent :

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

où la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f^{(n)}(x_0)$ est différente de zéro, la valeur x_0 correspond au sommet de la courbe, si n, c'est-à-dire si l'ordre de la première dérivée ne s'annulant pas, est un nombre pair :

$$\textit{si } f^{(n)}(x_0) < 0, \textit{ on a un maximum},$$

$$\textit{si } f^{(n)}(x_0) > 0, \textit{ on a un minimum};$$

et si n est un nombre impair, la valeur x_0 correspond non pas à un sommet, mais à un point d'inflexion.

Pour cette démonstration, il faut étudier les différences :

$$f(x_0+h) - f(x_0) \quad \text{et} \quad f(x_0-h) - f(x_0),$$

où h est un nombre positif suffisamment petit. D'après la définition du maximum et du minimum [II-3-2], il y aura un maximum au point x_0 si ces deux différences sont inférieures à zéro, et il y aura un minimum si elles sont toutes deux supérieures à zéro. Si ces deux différences sont de signe différent pour des h positifs aussi petits que l'on veut, il n'y aura pas pour x_0 ni de maximum ni de minimum. On peut calculer ces différences par la formule de Taylor, si on met x_0 au lieu de a et $\pm h$ au lieu de h * :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \\ + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0+\theta h),$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - \frac{h}{1!} f'(x_0) + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \\ + \frac{(-1)^n h^n}{n!} f^{(n)}(x_0-\theta_1 h) \quad (0<\theta<1 \text{ et } 0<\theta_1<1).$$

Par hypothèse :

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0;$$

* Nous prenons le reste du type de Lagrange ; le nombre θ se trouvant entre zéro et unité n'est pas le même pour $(+h)$ et $(-h)$, c'est pourquoi nous avons écrit θ_1 dans la seconde formule.

c'est-à-dire :

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta h),$$

$$f(x_0-h)-f(x_0)=\frac{(-1)^n h^n}{n!}f^{(n)}(x_0-\theta_1 h).$$

Comme nous avons supposé que $f^{(n)}(x)$ est continue, pour h positif suffisamment petit les facteurs

$$f^{(n)}(x_0+\theta h) \quad \text{et} \quad f^{(n)}(x_0-\theta_1 h)$$

sont de même signe ; leur signe est notamment celui du nombre $f^{(n)}(x_0)$ qui est différent de zéro.

Nous avons vu que le point x_0 ne peut être sommet que lorsque les deux différences $f(x_0 \pm h) - f(x_0)$ sont de même signe, et d'après ce que nous venons de dire, cela ne peut se produire que si n est pair, car alors les deux expressions $f(x_0 \pm h) - f(x_0)$ seront de même signe ; dans le cas contraire, où n est impair, les facteurs h^n et $(-1)^n h^n$ seront de signes différents, et les différences que nous étudions seront également de signes différents.

Supposons maintenant que n est pair ; le signe commun des différences $f(x_0 \pm h) - f(x_0)$ est le même que le signe de $f^{(n)}(x_0)$. Si $f^{(n)}(x_0) < 0$, alors $f(x_0 \pm h) - f(x_0) < 0$, et nous avons un maximum ; et si $f^{(n)}(x_0) > 0$, $f(x_0 \pm h) - f(x_0) > 0$, et nous avons un minimum.

Si n est un nombre impair, dans tous les cas $n \geqslant 3$; pour la dérivée seconde $f''(x)$ nous obtenons à partir de la formule de Taylor l'expression :

$$f''(x_0+h)=\frac{h^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n)}(x_0+\theta_2 h),$$

$$f''(x_0-h)=\frac{(-1)^{n-2}h^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n)}(x_0-\theta_3 h),$$

d'où, en raisonnant comme précédemment, on voit qu'étant donné que $(n-2)$ est impair, la fonction $f''(x)$, en s'annulant pour $x=x_0$, change de signe, c'est-à-dire que la valeur x_0 correspond à un point d'inflexion [II-5-2], ce qu'il fallait démontrer.

IV-2-11. Calcul des expressions indéterminées. Soit le rapport de fonctions :

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

qui s'annulent toutes les deux pour $x=a$. Pour lever l'indétermination de l'expression

$$\left.\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right|_{x=a}$$

pour $\varphi(a) = \psi(a) = 0$, nous développons le numérateur et le dénominateur en série de Taylor:

$$\varphi(x) = (x-a)\varphi'(a) + \frac{(x-a)^2 \varphi''(a)}{2!} + \ldots + \frac{(x-a)^n \varphi^{(n)}(a)}{n!} + \frac{(x-a)^{n+1} \varphi^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!},$$

$$\psi(x) = (x-a)\psi'(a) + \frac{(x-a)^2 \psi''(a)}{2!} + \ldots + \frac{(x-a)^n \psi^{(n)}(a)}{n!} + \frac{(x-a)^{n+1} \psi^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!},$$

et, après avoir divisé le numérateur et le dénominateur par une certaine puissance de $(x-a)$, on fait $x = a$.

Exemples.

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{e^{3x}-1-3x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\left(1-\frac{4x^2}{2}+\frac{16x^4}{24}+\ldots\right)}{\left(1+3x+\frac{9x^2}{2}+\frac{27}{6}x^3+\ldots\right)-1-3x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2-\frac{16}{24}x^2+\ldots}{\frac{9}{2}+\frac{27}{6}x+\ldots} = \frac{4}{9}.$$

La même méthode peut être utile pour lever des indéterminations d'autres types. Examinons un exemple.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt[3]{x^3-5x^2+1}-x\right)$.

Nous avons ici une indétermination de type $(\infty - \infty)$. Nous avons:

$$\sqrt[3]{x^3-5x^2+1} - x = x\left[\sqrt[3]{1-\frac{5x^2-1}{x^3}}-1\right] =$$

$$= x\left\{\left[1-\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\right]^{1/3}-1\right\}.$$

Pour des x suffisamment grands en valeur absolue, la différence $\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)$ tend vers zéro, et nous pouvons appliquer la formule du binôme de Newton (25), pour $m = \frac{1}{3}$, en remplaçant x par $-\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)$:

$$\left[1-\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\right]^{1/3} = 1-\frac{1}{3}\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)^2+\ldots$$

En reportant cette valeur dans l'expression entre accolades et en retranchant un, nous obtiendrons:

$$\sqrt[3]{x^3-5x^2+1}-x=x\left[-\frac{1}{3}\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)^2+\ldots\right]=$$

$$=\left(-\frac{5}{3}+\frac{1}{3x^2}\right)+\ldots,$$

où tous les termes qui n'ont pas été écrits contiennent uniquement des puissances négatives de x, c'est-à-dire qu'à la limite pour $x\to\infty$, elles sont nulles, et par suite:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-5x^2+1}-x\right)=-\frac{5}{3}.$$

La possibilité de passer à la limite dans les séries infinies, que nous avons utilisées dans ce paragraphe, peut facilement être justifiée, et nous n'insisterons pas là-dessus.

IV-3. Compléments à la théorie des séries

IV-3-1. Propriétés des séries absolument convergentes. La notion de série absolument convergente a été exposée au paragraphe [IV-1-7]. Maintenant nous allons nous arrêter à des propriétés plus importantes.

La somme d'une série absolument convergente ne dépend pas de l'ordre de ses termes.

Démontrons cette affirmation d'abord pour les séries à termes non négatifs qui, comme nous le savons [IV-1-3], peuvent ou être convergentes (donc, en particulier, absolument convergentes) ou bien divergentes.

Ainsi, soit une série convergente à termes positifs (non négatifs):

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \tag{1}$$

Soit s_n la somme de ses n premiers termes, et s sa somme. Nous avons évidemment:

$$s_n\leqslant s.$$

En plaçant les termes de la série (1) de la manière qu'on voudra, on obtiendra une autre distribution des termes à laquelle correspondra la série

$$v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+\ldots, \tag{2}$$

composée des mêmes termes que (1), mais dans un autre ordre, de sorte que chaque terme de la série (1) possède un numéro déterminé dans la série (2) et réciproquement. Soit σ_n la somme de n premiers termes de la série (2). Pour toute valeur de n, on peut trouver un nombre m aussi grand que possible tel que tous les termes entrant dans la somme σ_n entrent dans s_m, c'est pourquoi

$$\sigma_n\leqslant s_m\leqslant s.$$

On a ainsi démontré l'existence du nombre constant s, ne dépendant pas de n, tel que pour toutes les valeurs de n, nous avons:

$$\sigma_n\leqslant s,$$

d'où [IV-1-3] la convergence de la série (2). Soit σ sa somme. Il est évident que:

$$\sigma=\lim_{n\to\infty}\sigma_n\leqslant s.$$

En transposant dans les raisonnements précédents les séries (1) et (2) nous démontrerons de la même façon que:

$$s \leqslant \sigma,$$

et des inégalités $\sigma \leqslant s$, $s \leqslant \sigma$, il résulte que:

$$s = \sigma.$$

Voyons maintenant des séries ayant des termes quelconques. Étant donné que par hypothèse la série (1) est absolument convergente, la série à termes positifs

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| \tag{3}$$

converge et, d'après ce qui a été démontré, sa somme s' ne dépend pas de l'ordre des termes. D'autre part, les deux séries

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(|u_n|+u_n), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(|u_n|-u_n)$$

(cf. [IV-1-7]) ont également des termes positifs et convergent également, car le terme général de chacune d'elles ne dépasse pas $|u_n|$, c'est-à-dire le terme général de la série convergente (3).

D'après ce qui a été démontré, chacune d'elles ne dépend pas de l'ordre des termes; leur différence qui coïncide avec la somme de la série (1), ne dépendra pas non plus de l'ordre des termes, et c'est ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. *Dans une série absolument convergente, on peut grouper les membres de n'importe quelle manière, et les ranger ensuite par groupes*, car si un tel groupement change l'ordre des membres, la somme de la série n'est pas modifiée.

Remarque. Si l'on extrait d'une série absolument convergente une suite quelconque de termes, la série obtenue par ce moyen sera aussi absolument convergente, étant donné qu'on extrait une suite de termes de la série (3) qui a des termes positifs, ce qui ne change pas, de toute évidence, la convergence de cette série. En particulier, les séries composées séparément de termes positifs et négatifs d'une série convergente seront convergentes. Nous noterons par s' la somme de la série composée des termes positifs, et par $(-s'')$ la somme de la série composée des termes négatifs. Lorsque n croît indéfiniment, la somme s_n des n premiers termes de toute la série contiendra autant de termes que possible des deux séries, et nous obtiendrons évidemment à la limite:

$$s = \lim s_n = s' - s''.$$

Il n'est pas difficile de démontrer que lorsqu'une série n'est pas absolument convergente, les séries composées de ses termes positifs et négatifs sont divergentes. Ainsi, par exemple, pour la série qui n'est pas absolument convergente [IV-1-7]

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

les séries

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$$

et

$$-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}-\ldots$$

divergent. La somme des n premiers membres de la première série tend vers $(+\infty)$ et celle de la seconde série vers $(-\infty)$ pour n croissant indéfiniment. En utilisant la propriété déjà indiquée, Riemann a démontré qu'en changeant d'une façon requise l'ordre des termes d'une série non absolument convergente, on peut rendre sa somme égale à n'importe quel nombre. Ainsi, la notion de série absolument convergente est équivalente à la notion de série dont la somme ne dépend pas de l'ordre des termes.

Remarquons encore que si, dans une série convergente quelconque (qui n'est pas obligatoirement absolument convergente), nous changeons de place un nombre fini de termes, les sommes des n premiers termes s_n resteront les mêmes pour toutes les valeurs de n suffisamment grandes, c'est-à-dire que la convergence de la série est conservée, et la somme de la série restera ce qu'elle était avant. Le raisonnement et les résultats précédents demeurent aussi dans le cas où on déplace un nombre infini de termes.

IV-3-2. Produits de séries absolument convergentes. *Pour multiplier deux séries infinies absolument convergentes, on peut appliquer la règle de multiplication des sommes finies: le produit est égal à la somme de la série que nous obtenons, si chaque terme d'une série est multiplié par chaque terme de la seconde, et que l'on additionne les produits obtenus. L'ordre des membres est indifférent, car la série ainsi obtenue sera également absolument convergente.*

Soient les séries absolument convergentes:

$$\left.\begin{aligned} s &= u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots, \\ \sigma &= v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Etudions d'abord le cas particulier où elles ont toutes deux des termes positifs, et lorsque la multiplication s'effectue dans l'ordre suivant:

$$u_1v_1+u_1v_2+u_2v_1+u_1v_3+u_2v_2+u_3v_1+\ldots+ \\ +u_1v_n+u_2v_{n-1}+\ldots+u_nv_1+\ldots \tag{5}$$

Démontrons avant tout que la série (5), dont tous les termes sont également positifs, converge, et ensuite que sa somme S est égale à $s\sigma$.

Nous désignerons par S_n la somme de n premiers termes de la série (5). On peut toujours choisir un nombre m aussi grand que l'on veut pour que tous les termes, entrant dans S , entrent aussi dans le produit des sommes:

$$s_m=u_1+u_2+\ldots+u_m, \quad \sigma_m=v_1+v_2+\ldots+v_m,$$

c'est-à-dire pour que l'on ait $S_n \leqslant s_m\sigma_m$, c'est-à-dire:

$$S_n \leqslant s\sigma, \tag{6}$$

car $s_m \leqslant s$, $\sigma_m \leqslant \sigma$, d'où la convergence de la série (5) [IV-1-3].

Soit S la somme de la série (5), nous avons, à partir de l'inégalité (6):

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n \leqslant s\sigma.$$

Etudions à présent le produit $s_n\sigma_n$. Pour n donné, on peut évidemment trouver un nombre m aussi grand que l'on veut pour que tous les termes entrant dans les sommes s_n et σ_n figurent dans la somme S_m ; nous obtiendrons alors:

$$s_n\sigma_n \leqslant S_m \leqslant S,$$

c'est pourquoi, à la limite, pour $n \to \infty$

$$s_n\sigma_n \to s\sigma \leqslant S. \tag{7}$$

Cette inégalité, en tenant compte de (6), donne $S=s\sigma$, ce qu'il fallait démontrer.

Soient maintenant des séries (4) absolument convergentes, mais ayant des termes quelconques. Les series à termes positifs convergent donc:

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots$$

et

$$|v_1|+|v_2|+\ldots+|v_n|+\ldots,$$

c'est pourquoi, d'après ce qui vient d'être démontré, la série

$$|u_1||v_1|+|u_2||v_1|+|u_1||v_2|+|u_2||v_2|+\ldots+ \\ +|u_1||v_n|+\ldots+|u_n||v_1|+\ldots$$

converge également.

On voit que la série (5), composée d'après la règle précédente, sera absolument convergente dans ce cas. Soit maintenant:

$$a_1',\ a_2',\ \ldots,\ a_n',\ \ldots;\quad a_1'',\ a_2'',\ \ldots,\ a_n'',\ldots,$$

$$b_1',\ b_2',\ \ldots,\ b_n',\ \ldots;\quad b_1'',\ b_2'',\ \ldots,\ b_n'',\ldots$$

respectivement les termes positifs des séries (4) et les valeurs absolues des termes négatifs. Nous savons (remarque de [IV-3-1]), que les séries composées par ces termes convergent; supposons que:

$$s'=\sum_{n=1}^{\infty} a_n',\ \sigma'=\sum_{n=1}^{\infty} b_n',\ s''=\sum_{n=1}^{\infty} a_n'',\ \sigma''=\sum_{n=1}^{\infty} b_n''. \tag{8}$$

Comme on le sait ([IV-3-1]), nous avons:

$$s=s'-s'',\quad \sigma=\sigma'-\sigma''.$$

On a démontré qu'on peut multiplier entre elles, terme à terme, les séries (8) ayant des termes positifs; la somme des produits des séries

$$s'\sigma',\ s''\sigma'',\ -s'\sigma'',\ -s''\sigma'$$

contient justement les termes qui figurèrent dans la série (5), et seulement eux, c'est pourquoi nous avons:

$$S=s'\sigma'+s''\sigma''-s'\sigma''-s''\sigma'=(s'-s'')(\sigma'-\sigma'')=s\sigma,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exemple. La série

$$1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}+\ldots=\frac{1}{1-q}$$

est absolument convergente pour $|q|<1$, c'est pourquoi:

$$\frac{1}{(1-q)^2}=(1+q+\ldots+q^{n-1}+\ldots)(1+q+\ldots+q^{n-1}+\ldots)= \\ =1+2q+3q^2+\ldots+nq^{n-1}+\ldots$$

IV-3-3. Critère de Kummer. Les critères de Cauchy et de d'Alembert de convergence et de divergence des séries [IV-1-4] sont, malgré leur importance pratique, des critères très particuliers, et on ne peut pas les appliquer dans de nombreux cas relativement simples. Le critère énoncé ci-dessous a un intérêt beaucoup plus général.

Critère de Kummer. *Une série à termes positifs*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{9}$$

converge s'il existe une suite de nombres positifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, *tels que, à partir d'une certaine valeur de n, on ait toujours*

$$\alpha_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-\alpha_{n+1}\geqslant\alpha>0, \tag{10}$$

où α est un certain nombre positif ne dépendant pas de n; la série (9) *diverge, si pour les mêmes valeurs de n on a:*

$$\alpha_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1} \leqslant 0, \tag{11}$$

et, en outre, la suite $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}$ diverge.

Sans limiter la généralité de l'exposé, nous pouvons considérer que les conditions du théorème sont satisfaites, déjà à partir de $n = 1$. Supposons d'abord que soit vérifiée la condition (10). Nous en conclurons, en supposant que $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$\alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2 \geqslant \alpha u_2, \quad \alpha_2 u_2 - \alpha_3 u_3 \geqslant \alpha u_3, \ \ldots, \ \alpha_{n-1} u_{n-1} - \alpha_n u_n \geqslant \alpha u_n,$$

d'où, en additionnant terme à terme et en réduisant les termes semblables, nous trouverons:

$$\alpha (u_2 + \ldots + u_n) \leqslant \alpha_1 u_1 - \alpha_n u_n < \alpha_1 u_1.$$

Nous voyons par là que la série (9) qui a des termes positifs dont la somme des n premiers termes, à l'exception de u_1, reste inférieure au nombre constant $\frac{\alpha_1 u_1}{\alpha}$, qui ne dépend pas de n, converge [IV-1-3].

Supposons maintenant que la condition (11) est vérifiée. Elle nous donne:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{\frac{1}{\alpha_{n+1}}}{\frac{1}{\alpha_n}},$$

c'est-à-dire que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ n'est pas inférieur au rapport correspondant des termes de la série divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}.$$

La divergence de la série (9) résultera du lemme des séries à termes positifs:

C o m p l é m e n t a u c r i t è r e d e d'A l e m b e r t. *Si à partir d'une certaine valeur de n, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne dépasse pas le rapport correspondant de $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ des termes d'une série convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n, \tag{12}$$

la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{13}$$

convergera aussi. Si le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ reste non inférieur au rapport correspondant des termes de la série divergente (12), *la série* (13) *divergera aussi.*

En effet, soit d'abord:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

où la série (12) converge. Nous avons successivement:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant \frac{v_n}{v_{n-1}}, \quad \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \leqslant \frac{v_{n-1}}{v_{n-2}}, \ldots, \frac{u_2}{u_1} \leqslant \frac{v_2}{v_1},$$

d'où, en multipliant, nous trouvons:

$$\frac{u_n}{u_1} \leqslant \frac{v_n}{v_1}, \quad \text{ou} \quad u_n \leqslant \frac{u_1}{v_1} v_n.$$

De l'inégalité précédente et de la remarque du paragraphe [IV-1-3] $\left(\text{pour } k = \frac{u_1}{v_1}\right)$ il résulte la convergence de la série (13). On peut démontrer de façon analogue la divergence de cette série dans le cas où $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$ et où la série (12) diverge.

IV-3-4. **Critère de Gauss.** Le critère de Gauss a des applications très importantes *. *Si dans une série à termes positifs* (9):

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

le rapport $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ *peut être mis sous la forme:*

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\omega_n}{n^p},$$

$$\text{où} \quad p > 1 \text{ et } |\omega_n| < A, \tag{14}$$

et si A ne dépend pas de n, c'est-à-dire que la grandeur ω_n reste bornée, alors la série (9) *converge, si $\mu > 1$, et diverge, si $\mu \leqslant 1$.*

Remarquons que dans tous les cas où ce critère est applicable, on ne peut pas utiliser le critère de d'Alembert [IV-1-4]. On obtient la formule (14) en développant le rapport $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ suivant les puissances de $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire en dégageant les termes de différents ordres de petitesse par rapport à $\frac{1}{n}$, certainement si c'est possible.

Passons à la démonstration et étudions séparément les cas suivants: 1) $\mu \neq 1$ et 2) $\mu = 1$. Dans le cas 1) nous supposons dans le critère de Kummer $\alpha_n = n$, et nous remarquerons que $\alpha_n > 0$, et que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge ([IV-1-2]). Nous avons, évidemment, dans ce cas:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\alpha_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[n\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\omega_n}{n^p}\right) - n - 1\right] = \mu - 1.$$

Si $\mu > 1$, nous aurons à partir d'une certaine valeur de n:

$$\alpha_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1} > \alpha > 0,$$

* Il s'agit en fait d'une généralisation du critère qui a été effectivement établi par Gauss.

où α est un nombre positif quelconque, inférieur à $\mu - 1$, et la série (9) sera convergente. Si $\mu < 1$, nous aurons à partir d'une certaine valeur de n:

$$\alpha_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1} < 0,$$

c'est-à-dire que la série (9) sera divergente [IV-3-3]. Dans le cas 2), nous avons:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\omega_n}{n^p}.$$

Supposons que dans le critère de Kummer $\alpha_n = n \ln n$ et formons la série:

$$\sum \frac{1}{\alpha_n} = \sum \frac{1}{n \ln n}, \tag{15}$$

où l'on peut commencer la sommation à partir d'un nombre entier positif quelconque n, puisque les premiers termes n'influent pas sur la convergence [IV-1-1]. Démontrons la divergence de cette série, en utilisant le critère intégral de Cauchy [IV-1-5]. Nous devons démontrer que l'intégrale diverge:

$$\int_\alpha^\infty \frac{dx}{x \ln x} \quad (\alpha > 1).$$

Mais nous avons:

$$\int_\alpha^\infty \frac{dx}{x \ln x} = \int_\alpha^\infty \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \int_{\ln \alpha}^\infty \frac{dt}{t} = \ln(\ln x) \Big|_\alpha^\infty,$$

et la fonction $\ln(\ln x)$ croît indéfiniment en même temps que x, c'est-à-dire que l'intégrale écrite ci-dessus diverge réellement, et c'est pourquoi la série (15) diverge aussi. Formons maintenant la différence $\alpha_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1}$, en utilisant (14):

$$\alpha_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1} = n\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\omega_n}{n^p}\right) \ln n - (n+1) \ln(n+1) =$$

$$= (n+1) \ln n + \frac{\omega_n \ln n}{n^{p-1}} - (n+1) \ln(n+1) =$$

$$= \frac{\omega_n \ln n}{n^{p-1}} + (n+1) \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right). \tag{16}$$

Le facteur ω_n reste borné par hypothèse, et le rapport $\frac{\ln n}{n^{p-1}}$ tend vers zéro lorsque $n \to \infty$, puisque, par hypothèse, $p - 1 > 0$, et $\ln n$ croît plus lentement que n'importe quelle puissance positive de n (exemple 2 du paragraphe [II-3-10]). Si l'on pose $\frac{1}{n+1} = -x$, alors $x \to 0$ et le deuxième terme du second membre sera:

$$(n+1) \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = -\frac{\ln(1+x)}{x},$$

c'est-à-dire qu'il tendra vers (-1) [I-2-14]. Nous voyons ainsi que dans le cas considéré, la série $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ diverge et que $\left(\alpha_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1}\right) \to -1$ pour

$n \to \infty$, et c'est pourquoi pour des valeurs suffisamment grandes de n, on aura:

$$\alpha_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1} < 0,$$

c'est-à-dire que la série (9) sera divergente [IV-3-3], ce qu'il fallait démontrer.

Les critères de convergence énoncés plus haut peuvent être appliqués à des séries ayant des termes quelconques, si l'on remplace u_n par $|u_n|$. Mais dans ce cas, ils permettent seulement de dire si la série donnée est *absolument convergente* ou pas. On pourra généralement obtenir à partir d'eux la condition de *convergence absolue*, mais pas de *divergence*, puisque nous savons qu'une série peut ne pas être absolument convergente et cependant ne pas être divergente [IV-1-7]. Nous obtenons ainsi:

C o m p l é m e n t a u c r i t è r e d e G a u s s. *La série*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{17}$$

ayant des termes quelconques, pour laquelle

$$\left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| = 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\omega_n}{n^p}, \tag{18}$$

où $p > 1$ *et* $|\omega_n| < A$, *sera absolument convergente pour* $\mu > 1$.

Il n'est pas difficile de montrer qu'elle divergera pour $\mu < 0$. Nous avons, en effet, dans ce cas, en considérant que ω_n est borné:

$$\frac{\omega_n}{\mu n^{p-1}} \to 0, \quad 1 + \frac{\omega_n}{\mu n^{p-1}} \to 1 \text{ pour } n \to \infty,$$

c'est pourquoi, à partir d'une certaine valeur de n, d'après la condition $\mu < 0$:

$$\frac{\mu}{n} + \frac{\omega_n}{n^p} = \frac{\mu}{n}\left(1 + \frac{\omega_n}{\mu n^{p-1}}\right) < 0$$

et

$$\left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| < 1,$$

c'est-à-dire qu'à partir de cette valeur de n, les termes de la série croissent en valeur absolue, et le terme général de la série u_n ne peut tendre vers zéro pour $n \to \infty$, c'est-à-dire que la série (17) sera divergente.

IV-3-5. La série hypergéométrique. Appliquons les considérations générales précédentes à ce qu'on appelle *la série hypergéométrique* ou *série de Gauss*:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\,\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)} x^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} x^n + \ldots \tag{19}$$

Certaines fonctions, que l'on rencontre dans les applications, conduisent à ces séries. Il est facile, en substituant directement les nombres α, β, et γ, de vérifier, par exemple, les égalités suivantes:

$$F(1, \beta, \beta; x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x},$$
$$F(-m, \beta, \beta; x) = (1+x)^m,$$
$$\left.\frac{F(\alpha, \beta, \beta; -x) - 1}{\alpha}\right|_{\alpha=0} = \ln(1+x). \tag{20}$$

Pour étudier la convergence de la série (19), formons le rapport du terme précédent avec le suivant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}x\longrightarrow x \quad \text{pour} \quad n\longrightarrow\infty, \tag{21}$$

c'est-à-dire que suivant [IV-1-4], la série (19) converge pour $|x|<1$ et diverge pour $|x|>1$. Seuls restent les cas où: 1) $x=1$ et 2) $x=-1$. Remarquons encore que pour les valeurs suffisamment grandes de n, les facteurs $(\alpha+n)$, $(\beta+n)$ et $(\gamma+n)$ seront positifs, de sorte que pour $x=1$ tous les termes de la série ont un même signe pour les valeurs de n suffisamment grandes, et pour $x=-1$ on obtient une série à termes alternés pour les grandes valeurs de n.

Dans le premier cas, nous avons, en développant suivant une formule de progression (en considérant n suffisamment grand) et en multipliant terme à terme les séries absolument convergentes obtenues [IV-3-2]:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha^2}{n^2}-\frac{\alpha^3}{n^3}+\dots\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{\beta}{n}+\frac{\beta^2}{n^2}-\frac{\beta^3}{n^3}+\dots\right)=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\omega_n}{n^2},$$

où la grandeur ω_n reste bornée. Ensuite, dans le cas considéré, après avoir rejeté un nombre suffisamment grand des premiers termes dans la série:

$$F(\alpha,\beta,\gamma;\ 1)=1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}+\dots+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}+\dots$$

nous obtiendrons une série ayant des termes de même signe; en appliquant le critère de Gauss, nous trouvons que pour:

$$\gamma-\alpha-\beta+1>1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \gamma-\alpha-\beta>0,$$

la série est *absolument convergente* et que pour

$$\gamma-\alpha-\beta+1\leqslant 1, \text{ c'est-à-dire } \gamma-\alpha-\beta\leqslant 0,$$

elle est *divergente*.

Dans le second cas, pour $x=-1$, nous obtenons une série à termes alternés à partir d'un certain terme:

$$1-\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}-\dots+$$

$$+(-1)^n\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}+\dots$$

Nous avons ici, comme avant:

$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\omega_n}{n^2},$$

c'est pourquoi, en appliquant le complément du critère de Gauss, nous obtenons que pour:

$$\gamma-\alpha-\beta+1>1, \quad \text{c'est-à-dire } \gamma-\alpha-\beta>0,$$

il y a *convergence* et que pour

$$\gamma-\alpha-\beta+1<0, \quad \text{c'est-à-dire } \gamma-\alpha-\beta<-1,$$

la série *diverge*.

Au cas où:

$$\gamma-\alpha-\beta=-1,$$

on peut démontrer que le terme général de la série tend vers une limite différente de zéro, c'est-à-dire que la série sera *divergente* [IV-1-2]. Enfin dans le cas où:

$$-1<\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0,$$

on peut démontrer que les valeurs absolues des termes de la série tendent vers zéro pour $n\to\infty$, en décroissant, c'est-à-dire [IV-1-6] que la série sera *convergente*, mais pas absolument convergente. Nous n'insisterons pas sur la démonstration de ces deux dernières affirmations.

En appliquant cela au développement du binôme:

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots,$$

que l'on obtient à partir de (19) ($\beta=\gamma$ arbitraire) en remplaçant α par $(-m)$ et x par $(-x)$, et qui, comme nous le savons, converge pour $|x|<1$ et diverge pour $|x|>1$, nous obtiendrons comme série:

une série absolument convergente	pour $m>0$, si $x=-1$,
une série divergente	pour $m<0$, si $x=-1$,
une série absolument convergente	pour $m>0$, si $x=1$,
une série pas absolument convergente	pour $-1<m<0$, si $x=1$,
une série divergente	pour $m\leqslant -1$, si $x=1$,
une série devenant polynôme	pour $m=$ un nombre entier $\geqslant 0$.

Nous démontrerons plus loin [IV-3-13] que si la série d'un binôme converge pour $x=\pm 1$, sa somme sera égale à $(1\pm 1)^m$, c'est-à-dire respectivement à 2^m ou 0.

Notons que dans ce qui précède, nous avons considéré α, β et γ différents de zéro et d'un nombre positif entier. C'est important pour γ puisque dans le cas contraire, les termes de la série perdent leur sens (le dénominateur s'annule), et si α ou β sont nuls ou sont un nombre entier négatif, la série est interrompue et devient une somme finie.

IV-3-6. Séries doubles. Etudions un tableau rectangulaire des nombres, limité en haut et à gauche, mais allant vers l'infini à droite et en bas:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\
\hline
1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} & \ldots & u_{1n} & \ldots \\
2 & u_{21} & u_{22} & u_{23} & \ldots & u_{2n} & \\
3 & u_{31} & u_{32} & u_{33} & \ldots & u_{3n} & \ldots \\
. & . & . & . & . & . & . \\
m & u_{m1} & u_{m2} & u_{m3} & \ldots & u_{mn} & \\
. & . & . & . & . & . & .
\end{array} \qquad (22)$$

Il contient une infinité de *lignes*, dont les numéros sont indiqués par le premier indice, et de *colonnes* dont les nombres sont donnés par le second indice de la lettre u. Ainsi, u_{ik} signifie un nombre situé à l'intersection de la ligne i avec la colonne k du tableau.

Supposons d'abord que tous les nombres u_{ik} sont *positifs*.

Pour définir la notion de somme de tous les nombres du tableau (22), indiquons dans le plan de la figure des points de coordonnées entières positives $M(i, k)$ et menons une série de courbes:

$$C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots,$$

qui coupent les axes de coordonnées dans le premier quadrant des coordonnées, et qui ne sont astreintes qu'à la condition suivante: *chaque* point M doit tomber, pour n suffisamment grand, à l'intérieur de la surface (C_n) limitée par la courbe C_n et les axes de coordonnées (fig. 157), et la surface (C_n) doit se

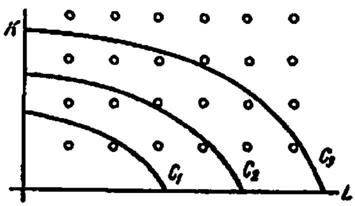

Fig. 157

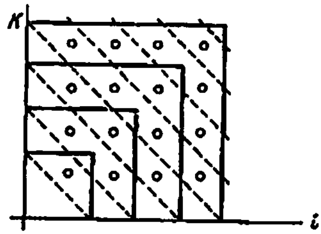

Fig. 158

trouver à l'intérieur de (C_{n+1}). Formons la somme S_n de tous les nombres u_{ik}, correspondant aux points qui se trouvent à l'intérieur de la surface (C_n). Lorsque n croît, cette somme croîtra de toute évidence, c'est pourquoi deux cas seulement peuvent se présenter: ou bien 1) la somme S_n reste bornée pour toutes les valeurs de n, et il existe alors une limite finie:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

ou bien 2) la somme S_n croîtra indéfiniment lorsque n croît.

Dans le cas 1), *on dit que la série double*

$$\sum_{i,\,k=1}^{\infty} u_{ik} \tag{23}$$

converge et possède une somme S. *Dans le cas* 2), *la série double* (23) *est dite divergente.*

La somme de la série convergente (23), *qui a des termes positifs, ne dépend pas du procédé de sommation, c'est-à-dire du choix des courbes* C_n, *et peut être obtenue également par la sommation de la série en lignes ou en colonnes:*

$$S = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} u_{ik}\Big) = \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}\Big), \tag{24}$$

c'est-à-dire par le calcul de la somme de tous les termes de chaque ligne (ou de chaque colonne) du tableau, et ensuite par l'addition des sommes obtenues.

En effet, construisons un autre système quelconque de courbes C_1', C_2', ...,

..., C'_n, ..., ayant la même propriété que $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ Nous noterons par S'_n la somme de tous les nombres du tableau correspondant aux points tombant à l'intérieur de la surface (C'_n). Pour n donné, on peut toujours choisir m aussi grand que l'on veut pour que la surface (C'_n) soit à l'intérieur de (C_m), et alors:

$$S'_n \leqslant S_m \leqslant S,$$

c'est-à-dire que, d'après ce qui précède, il existe une limite finie:

$$\lim_{n\to\infty} S'_n = S' \leqslant S.$$

En intervertissant les rôles des courbes C_n et C'_n, nous démontrerons de même que:

$$S \leqslant S',$$

ce qui n'est possible qu'à la condition que

$$S = S'.$$

On peut obtenir la somme de la série double (23), même en prenant pour C_n des lignes brisées constituées par des segments de courbes (fig. 158):

$$i = \text{const}, \quad k = \text{const}.$$

Nous obtiendrons ainsi une sommation en « carrés »:

$$S = u_{11} + (u_{12} + u_{22} + u_{21}) + \ldots + (u_{1n} + u_{2n} + \ldots + u_{nn} + u_{n,\,n-1} + \ldots + u_{n1}) + \ldots$$

En effectuant la sommation en « diagonales », nous obtiendrons:

$$S = u_{11} + (u_{12} + u_{21}) + (u_{13} + u_{22} + u_{31}) + \ldots + (u_{1n} + u_{2,\,n-1} + \ldots + u_{n1}) + \ldots \tag{25}$$

Pour démontrer les formules (24), notons avant tout que la somme d'un nombre quelconque de termes du tableau (22) est inférieure à S, c'est pourquoi la somme des termes se trouvant dans n'importe quelle ligne ou n'importe quelle colonne est toujours inférieure à S également, d'où la convergence de chacune des séries:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik} = s'_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} u_{ik} = s''_k.$$

De plus nous avons pour toutes valeurs finies des nombres m et n:

$$\left.\begin{aligned} s'_1 + s'_2 + \ldots + s'_m &= \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}\Big) \leqslant S, \\ s''_1 + s''_2 + \ldots + s''_n &= \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} u_{ik}\Big) \leqslant S. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

En effet, nous étudierons seulement les m premières lignes du tableau (22). En prenant les éléments de p premières colonnes, nous avons, de toute évidence,

$$\sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{i=1}^{m} u_{ik}\Big) \leqslant S.$$

D'après la règle d'addition des séries [IV-1-2], nous avons:

$$s'_1 + s'_2 + \ldots + s'_m = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{m} u_{ik}\Big) = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{i=1}^{m} u_{ik}\Big) \leqslant S,$$

puisque l'expression dont on prend la limite, n'est pas supérieure à S.

On démontre de la même façon la deuxième inégalité (26). Les inégalités (26) montrent que les deux séries:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}\right)=\sum_{i=1}^{\infty} s'_i=\sigma', \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_{ik}\right)=\sum_{k=1}^{\infty} s''_k=\sigma''$$

convergent et ont des sommes ne dépassant pas S, c'est-à-dire:

$$\sigma'\leqslant S \quad \text{et} \quad \sigma''\leqslant S.$$

D'autre part, il est clair que si l'on choisit arbitrairement le système de courbes C_r, tous les termes entrant dans la composition de la somme S_r entreront dans la composition des deux sommes:

$$s'_1+s'_2+\ldots+s'_m, \; s''_1+s''_2+\ldots+s''_m,$$

pour m suffisamment grand, c'est-à-dire que

$$S_r\leqslant s'_1+\ldots+s'_m\leqslant\sigma', \quad S_r\leqslant s''_1+\ldots+s''_m\leqslant\sigma'',$$

c'est pourquoi aussi dans la limite

$$S=\lim_{r\to\infty} S_r\leqslant\sigma' \quad \text{et} \quad S\leqslant\sigma''.$$

Etant donné que $\sigma'\leqslant S$ et $\sigma''\leqslant S$, cela n'est possible qu'à condition que l'on ait:

$$\sigma'=\sigma''=S,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Dans les séries doubles ayant des termes quelconques, nous ne nous arrêterons que sur *les séries absolument convergentes*, c'est-à-dire sur *les séries pour lesquelles la série double, composée de valeurs absolues*

$$\sum_{i,\,k=1}^{\infty} |u_{ik}|,$$

converge.

En appliquant des raisonnements semblables à ceux de [IV-1-7], on peut démontrer *qu'il existe pour ces séries aussi une somme*:

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_{ik}\right), \tag{27}$$

qui ne dépend pas non plus du moyen de sommation, et qui peut, en particulier, être obtenue en sommant par lignes et par colonnes.

R e m a r q u e. Beaucoup de propriétés des séries simples absolument convergentes s'étendent aux séries doubles absolument convergentes; en particulier la remarque de [IV-1-7]: *si chaque terme d'une série double ne dépasse pas en valeur absolue le terme d'une série double convergente ayant des termes positifs, la série donnée est absolument convergente.*

De même on peut étendre la propriété 2) du paragraphe [IV-1-3].

E x e m p l e.

1. La série

$$\sum_{i,\,k=1}^{\infty} \frac{1}{i^{\alpha} k^{\beta}} \tag{28}$$

converge pour $\alpha > 1$, $\beta > 1$, car en sommant en carrés, nous avons :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{i^\alpha k^\beta} \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^\alpha} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\beta} \right) < AB,$$

où A et B désignent la somme des séries :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\beta},$$

convergentes pour $\alpha > 1$, $\beta > 1$ [IV-1-5].

2. La série

$$\sum_{i,\,k=1}^{\infty} \frac{1}{(i+k)^\alpha} \tag{29}$$

converge pour $\alpha > 2$ et diverge pour $\alpha \leqslant 2$, puisque, en effectuant la sommation en diagonales, nous avons :

$$S_n = \frac{1}{2^\alpha} + 2 \cdot \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + (n-1) \cdot \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{2^{\alpha-1}} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha-1}} \left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

d'où, en mettant à la place de $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ d'abord $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire le plus petit nombre, puis 1, c'est-à-dire le plus grand nombre, nous trouvons :

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right] < S_n < \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

La convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ pour $\alpha > 2$ et sa divergence pour $\alpha \leqslant 2$ démontrent ce que nous avons dit.

3. *Si a et c sont positifs et $b^2 - ac < 0$, la série*

$$\sum_{i,\,k=1}^{\infty} \frac{1}{(ai^2 + 2bik + ck^2)^p} \tag{30}$$

converge pour $p > 1$ et diverge pour $p \leqslant 1$.

Soit d'abord $b \geqslant 0$. Etant donné que, de toute évidence :

$$i^2 + k^2 \geqslant 2ik,$$

en désignant par A_1 le plus petit des nombres a et c, par A_2 le plus grand des nombres a, b et c, nous avons :

$$2A_1 ik \leqslant ai^2 + 2bik + ck^2 \leqslant A_2 (i+k)^2,$$

d'où, en nous limitant au cas qui nous intéresse $p > 0$, nous obtenons :

$$\frac{1}{A_2^p} \frac{1}{(i+k)^{2p}} \leqslant \frac{1}{(ai^2 + 2bik + ck^2)^p} \leqslant \frac{1}{(2A_1)^p} \frac{1}{i^p k^p},$$

ce qui, d'après les exemples 1 et 2 et la remarque faite ci-dessus, montre qu'il y a convergence pour $p > 1$ et divergence pour $p \leqslant 1$, et dans ce cas, il faut remarquer que les facteurs $\frac{1}{A_2^p}$ et $\frac{1}{(2A_1)^p}$ ne dépendent pas de i et de k.

Soit maintenant $b<0$. En désignant par A_0 le plus grand des nombres a, c, $|b|$, d'après l'inégalité évidente: $(\sqrt{ai})^2+(\sqrt{ck})^2>2\sqrt{acik}$:

$$2(b+\sqrt{ac})\,ik\leqslant ai^2+2bik+ck^2<A_0(i+k)^2,$$

où $b+\sqrt{ac}>0$, puisque par hypothèse $|b|<\sqrt{ac}$. La démonstration se continue comme dans le cas où $b>0$.

IV-3-7. Séries à termes variables. Séries uniformément convergentes. Les formules de Taylor et de Maclaurin donnent des exemples de séries dont les termes dépendent d'une variable x. Dans la suite de ce cours, nous rencontrerons les séries *trigonométriques* de la forme suivante:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

dont les termes dépendent non seulement de n, mais de la variable x, et qui sont très importantes.

Nous nous intéresserons pour l'instant, de façon générale, aux séries dont les termes sont variables et qui dépendent d'une variable indépendante x.

Supposons que nous ayons une suite infinie de fonctions:

$$u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x),\ \ldots,\ u_n(x),\ \ldots,\tag{31}$$

définies dans l'intervalle (a, b). Composons-en une série:

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots\tag{32}$$

Elle peut converger pour certaines valeurs de x sur (a, b) et diverger pour d'autres. La somme de n premiers termes sur la série (32) $s_n(x)$ est, évidemment, fonction de x. En ce qui concerne les valeurs de x pour lesquelles la série (32) converge, nous pouvons parler de sa somme $s(x)$ et de son reste $r_n(x)=s(x)-s_n(x)$. Alors

$$s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x).\tag{33}$$

Si la série (32) converge pour tout x de (a, b), c'est-à-dire pour $a\leqslant x\leqslant b$, on dit qu'elle converge sur l'intervalle (a, b).

Si la série (32) converge sur l'intervalle (a, b) et a pour somme $s(x)$, cela veut dire que pour chaque valeur donnée de x sur (a, b), en se donnant arbitrairement le nombre positif ε, on peut trouver un nombre N tel que pour toutes les valeurs $n>N$, nous ayons $|r_n(x)|<\varepsilon$ pour $n>N$, où N dépendra du choix de ε. Il faut cependant remarquer que N dépendra, en général, aussi de la valeur choisie pour x, c'est-à-dire qu'il peut avoir différentes valeurs pour un ε donné mais pour des valeurs différentes de x sur l'intervalle (a, b), et nous le noterons par $N(x)$. *Si pour un ε positif quelconque donné, on peut trouver un nombre N ne dépendant pas de x, tel que pour toute valeur de x sur l'intervalle (a, b), soit vérifiée l'inégalité*

$$|r_n(x)|<\varepsilon\tag{34}$$

pour tout $n>N$, on dit que la série (32) est uniformément convergente sur l'intervalle (a, b).

Etudions, par exemple, la série:

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)(x+2)}-\frac{1}{(x+2)(x+3)}-\ldots-\frac{1}{(x+n-1)(x+n)}-\ldots,\tag{35}$$

dans laquelle x varie dans l'intervalle $(0, a)$, où a est un nombre quelconque positif donné.

Il est facile de voir que l'on peut écrire la série sous la forme:

$$\frac{1}{x+1}-\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)-\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)-\ldots-\left(\frac{1}{x+n-1}-\frac{1}{x+n}\right)-\ldots,$$

de sorte que dans le cas donné

$$s_n(x)=\frac{1}{x+n}, \quad s(x)\lim_{n\to\infty} s_n(x)=0,$$

$$r_n(x)=-\frac{1}{x+n},$$

et si nous voulons que

$$|r_n(x)|=\frac{1}{x+n}<\varepsilon, \tag{36}$$

il suffit de prendre

$$n>\frac{1}{\varepsilon}-x=N(x). \tag{37}$$

Si maintenant nous voulons que l'inégalité (36) soit vérifiée pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle $(0, a)$, à condition que $n > N$ ne dépende pas de la valeur prise pour x, il suffit de poser $N=\frac{1}{\varepsilon} \geqslant N(x)$, car alors l'inégalité (37), et avec elle l'inégalité (36), seront certainement vérifiées pour toutes les valeurs de x de l'intervalle $(0, a)$ à condition que $n > N$. La série (35) sera ainsi uniformément convergente dans l'intervalle $(0, a)$.

Toute série n'est pas uniformément convergente, puisqu'on ne peut pas trouver pour toute série un nombre N indépendant de x, qui ne soit pas inférieur à tous les $N(x)$ sur l'intervalle (a, b).

Etudions, par exemple, dans l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$, la série:

$$x+x(x-1)+x^2(x-1)+\ldots+x^{n-1}(x-1)+\ldots \tag{38}$$

La somme des n premiers termes sera:

$$s_n(x)=x+(x^2-x)+(x^3-x^2)+\ldots+(x^n-x^{n-1}),$$

c'est-à-dire:

$$s_n(x)=x^n,$$

et, suivant [I-2-2]

$$s(x)=\lim_{n\to\infty} s_n(x)=0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x<1$$

et

$$r_n(x)=s(x)-s_n(x)=-x^n \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x<1.$$

Pour $x=1$, nous avons, en faisant $x=1$ dans (38), la série

$$1+0+0+\ldots,$$

c'est-à-dire que:

$$s_n(x)=1, \quad s(x)=\lim_{n\to\infty} s_n(x)=1, \quad r_n(x)=s(x)-s_n(x)=0$$

pour $x=1$ et pour n quelconque. La série (38) converge dans tout l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$, mais dans cet intervalle la convergence n'est pas uniforme. En effet, puisque $r_n(x)=-x^n$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, si nous voulons que l'inégalité

(34) $|r_n(x)| < \varepsilon$ soit vérifiée, nous devons avoir $x^n < \varepsilon$, c'est-à-dire $n \ln x <$ $< \ln \varepsilon$ ou bien, en divisant par un nombre négatif $\ln x$, nous obtenons:

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x}.$$

Ainsi, dans cet exemple $N(x) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln x}$ et ne peut pas être remplacé par un nombre plus petit.

Lorsque x tend vers 1, $\ln x$ tend vers zéro, la fonction $N(x)$ croît indéfiniment, et il n'est pas possible de trouver une valeur de N telle que l'inégalité (34) soit vérifiée pour $n > N$ dans tout l'intervalle (0, 1). Ainsi, bien que la série (38) converge dans tout l'intervalle (0, 1), et en particulier pour $x = 1$, elle converge de plus en plus lentement quand x tend vers 1; pour calculer avec une précision suffisante la somme de la série, il faudra prendre d'autant plus de termes que x est plus proche de l'unité. Remarquons cependant que pour $x = 1$, la série ne comporte qu'un terme.

Donnons maintenant une définition équivalente de la convergence uniforme. Nous avons donné [IV-1-8] la condition nécessaire et suffisante pour qu'une série converge. Dans le cas considéré, elle est formulée comme suit: pour que la série (32) soit convergente dans l'intervalle (a, b), pour ε positif quelconque donné et x quelconque de (a, b), il faut et il suffit qu'il existe un nombre N tel que:

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon \tag{39}$$

pour $n > N$ et p entier positif quelconque. Ce N pour ε donné peut dépendre encore du choix de x. *Si pour ε positif quelconque donné, il existe un seul et même nombre N pour tous les x de (a, b) tel que pour $n > N$ et pour p quelconque entier positif, la condition* (39) *soit vérifiée, on dit que la série* (32) *converge uniformément dans l'intervalle (a, b).*

Il faut montrer que cette nouvelle définition de la convergence uniforme est équivalente à la définition précédente, c'est-à-dire que si une série converge uniformément avec la définition précédente, elle converge uniformément avec cette nouvelle définition, et réciproquement. Supposons d'abord qu'une série converge uniformément avec la définition précédente, c'est-à-dire que $|r_n(x)| < \varepsilon$ pour $n > N$, où x est une valeur quelconque de l'intervalle (a, b), et où N ne dépend pas de x. Nous avons évidemment:

$$u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x) = r_n(x) - r_{n+p}(x) \tag{40}$$

et, par conséquent,

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \leqslant |r_n(x)| + |r_{n+p}(x)|,$$

ce qui, pour $n > N$ et, par suite, pour $n + p > N$, donne:

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < 2\varepsilon. \tag{41}$$

Etant donné l'arbitraire sur le choix de ε, nous voyons que la série converge uniformément au sens de la nouvelle définition. Supposons à présent que la série converge uniformément au sens de la nouvelle définition, c'est-à-dire que l'inégalité (39) est vérifiée pour $n > N$ ne dépendant pas de x, pour p entier positif quelconque et pour x quelconque sur l'intervalle (a, b). La série converge donc, et nous pouvons écrire:

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots = \lim_{p\to\infty} [u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)],$$

en tenant compte de l'inégalité (39), pour $p \to \infty$, nous obtenons à la limite $|r_n(x)| \leqslant \varepsilon$ pour $n > N$, c'est-à-dire que de la nouvelle définition de la convergence uniforme, étant donné l'arbitraire du choix de ε, résulte la précédente, et l'équivalence des deux définitions est démontrée.

Remarquons que dans la première définition de la convergence uniforme (34), nous utilisons $r_n(x)$, et nous supposons par là que la série converge. La seconde définition de la convergence uniforme (39) inclut la même propriété de la convergence d'une série.

IV-3-8. Suites uniformément convergentes des fonctions. La suite de fonctions:

$$s_1(x),\ s_2(x),\ \ldots,\ s_n(x),\ \ldots, \tag{42}$$

que nous avons étudiée ci-dessus, était définie à l'aide de la série (32); $s_n(x)$ désignait la somme des n premiers termes de la série. Mais on peut étudier la suite (42) en elle-même, en considérant qu'elle est donnée, et on peut construire à partir d'elle une série dont la somme des n premiers termes est le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite $s_n(x)$. Les termes de cette série sont définis d'après les formules:

$$u_1(x)=s_1(x),\ u_2(x)=s_2(x)-s_1(x),\ \ldots,\ u_n(x)=s_n(x)-s_{n-1}(x),\ \ldots \tag{43}$$

La suite (42) est très souvent beaucoup plus simple que la suite (43), comme c'était le cas dans les exemples étudiés.

Nous en arrivons ainsi aux notions de suite convergente et uniformément convergente des fonctions.

Si l'on donne la suite de fonctions (42):

$$s_1(x),\ s_2(x),\ \ldots,\ s_n(x),\ \ldots,$$

définies dans l'intervalle (a, b), *et si, pour chaque valeur de* x *dans cet intervalle, il existe une limite:*

$$s(x)=\lim_{n\to\infty} s_n(x), \tag{44}$$

on dit que la suite (42) *est convergente dans l'intervalle* (a, b), *et la fonction* $s(x)$ *s'appelle fonction limite de la suite* (42).

Si, de plus, pour un ε *positif quelconque donné à l'avance, il existe un nombre* N *ne dépendant pas de* x, *tel que l'inégalité*

$$|s(x)-s_n(x)|<\varepsilon \tag{45}$$

soit vérifiée pour toutes les valeurs $n>N$ *dans tout l'intervalle* (a, b), *on dit alors que la suite* (42) *est uniformément convergente dans l'intervalle* (a,b). *On peut remplacer la condition* (45) *par une condition équivalente:*

$$|s_m(x)-s_n(x)|<\varepsilon \tag{46}$$

pour m *et* $n>N$.

La condition de convergence uniforme de la suite (42) *est équivalente à la condition de convergence uniforme de la série:*

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots, \tag{47}$$

où (43):

$$u_1(x)=s_1(x),\ u_2(x)=s_2(x)-s_1(x),\ \ldots,\ u_n(x)=s_n(x)-s_{n-1}(x),\ \ldots$$

On peut démontrer l'équivalence des conditions (45) et (46) en étudiant la convergence uniforme des suites, exactement de la même façon que plus haut, lorsqu'on a établi l'équivalence des conditions (35) et (36) pour les séries infinies. Remarquons encore que, de la convergence uniforme de $s_n(x)$ dans l'intervalle (a, b), résulte directement la convergence uniforme dans n'importe quelle partie de (a, b).

La notion de convergence uniforme des suites peut aussi être interprétée géométriquement. Si nous représentons graphiquement les fonctions $s(x)$ et

$s_n(x)$ pour différentes valeurs de n, pour une suite uniformément convergente, le plus grand intervalle de l'ordonnée contenue entre les courbes $s_n(x)$ et $s(x)$

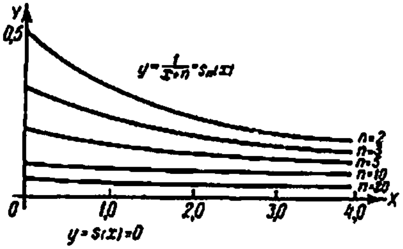

Fig. 159

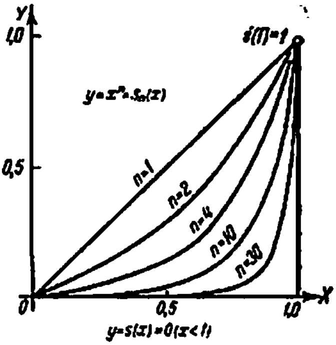

Fig. 160

doit tendre vers zéro, lorsque $n \to \infty$ pour tous les x de (a, b); pour une suite convergeant non uniformément, cette condition ne sera pas vérifiée.

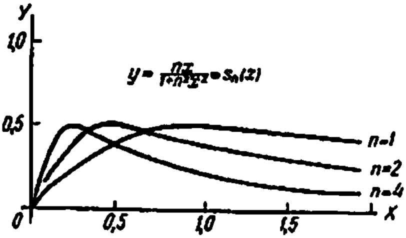

Fig. 161

Ce cas est représenté sur les fig. 159 et 160, tracées pour les exemples étudiés plus haut *:

$$s_n(x) = \frac{1}{x+n}, \quad s_n(x) = x^n$$

Dans le cas de la fig. 160, la fonction limite $s(x)$ est représentée graphiquement par le segment $(0, 1)$ de l'axe OX, à l'exception du point 1, et par le point isolé de coordonnées $(1, 1)$.

Il est vrai que dans le dernier exemple, la fonction limite $s(x)$ n'est pas discontinue. Mais il est facile de donner un exemple de suite convergente, dont la fonction limite est continue mais qui cependant converge non uniformément. La suite (fig. 161), par exemple, a cette propriété:

$$s_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \qquad (0 \leqslant x \leqslant a). \tag{48}$$

* Pour plus de netteté, les fig. 159 et 160 sont construites avec des échelles différentes pour x et y.

Nous avons, de toute évidence, pour $x \neq 0$:

$$\frac{nx}{1+n^2x^2}=\frac{1}{n}\,\frac{x}{\frac{1}{n^2}+x^2}$$

et pour $n \to \infty$, le premier facteur de droite $\frac{1}{n} \to 0$, et le second tend vers $\frac{1}{x}$, c'est-à-dire que $s_n(x) \to 0$ pour $x \neq 0$. Pour $x=0$ il est évident que $s_n(0) = 0$ pour tout n, et, par suite, pour tous les x de $(0, a)$, où a est un nombre positif:

$$s(x)=\lim_{n\to\infty} s_n(x)=0.$$

Cependant la différence maximale entre les ordonnées des courbes $s_n(x)$ et $s(x)$ qui, dans le cas étudié, se réduit à l'ordonnée de la courbe $s_n(x)$, puisque $s(x)=0$, sera $\frac{1}{2}$ $\left(\text{et correspondra à la valeur } x=\frac{1}{n}\right)$. Puisqu'elle ne tend pas vers zéro pour $n \to \infty$, la suite (48) ne sera pas uniformément convergente dans l'intervalle $(0, a)$; en effet, si nous voulons avoir:

$$|s(x)-s_n(x)|=\frac{nx}{1+n^2x^2}<\varepsilon,$$

en résolvant par rapport à n l'inégalité du second degré:

$$0<1-\frac{x}{\varepsilon}n+x^2n^2$$

et en considérant que ε est suffisamment petit, nous obtiendrons:

$$n>\frac{1}{2x\varepsilon}[1+\sqrt{1-4\varepsilon^2}]=N(x).$$

Cette fonction croît indéfiniment pour $x \to 0$, ce qui conditionne le fait que la suite ne converge pas uniformément.

Remarquons enfin que les fig. 160 et 161 montrent que la suite x^n converge uniformément dans l'intervalle $(0, q)$ où q est un nombre positif quelconque, inférieur à l'unité, et que la suite $\frac{nx}{1+n^2x^2}$ converge uniformément dans l'intervalle (q, a) où $0<q<a$, ce qu'il est facile de montrer par un calcul direct.

IV-3-9. Propriétés des suites uniformément convergentes. 1. *La fonction limite d'une suite de fonctions continues convergeant uniformément dans l'intervalle (a, b) est également continue.*

Soit:

$$s_1(x),\ s_2(x),\ \ldots,\ s_n(x),\ \ldots$$

une suite de fonctions continues dans l'intervalle (a, b), et soit:

$$s(x)=\lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

sa fonction limite. Il nous faut démontrer que, quel que soit ε positif, aussi petit que l'on veut, donné à l'avance, on peut trouver un nombre δ tel que l'on ait [I-2-11]:

$$|s(x+h)-s(x)|<\varepsilon, \quad \text{si} \quad |h|<\delta, \tag{49}$$

à condition que les nombres x et $x+h$ soient situés dans l'intervalle (a, b). Nous pouvons écrire pour n quelconque :

$$|s(x+h)-s(x)|=$$
$$=|[s(x+h)-s_n(x+h)]+[s_n(x+h)-s_n(x)]+[s_n(x)-s(x)]|\leqslant$$
$$\leqslant|s(x+h)-s_n(x+h)|+|s(x)-s_n(x)|+|s_n(x+h)-s_n(x)|.$$

D'après la définition de la convergence uniforme, nous pouvons choisir n assez grand pour que l'on ait, dans tout l'intervalle (a, b), et en particulier pour les valeurs x et $x+h$:

$$|s(x+h)-s_n(x+h)|<\frac{\varepsilon}{3}, \quad |s(x)-s_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Ayant ainsi choisi n, étant donné la continuité de la fonction $s_n(x)$ [I-2-11], nous pouvons trouver un nombre δ tel que l'on ait :

$$|s_n(x+h)-s_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{si} \quad |h|<\delta.$$

En comparant toutes ces inégalités, on obtient l'inégalité (49).

Si une suite de fonctions converge non uniformément, la fonction limite peut ne pas être continue ; la suite x^n dans l'intervalle (0, 1) peut servir d'exemple.

On ne peut cependant affirmer le contraire, et, pour une suite convergeant non uniformément, la fonction limite peut être continue, par exemple, pour la suite :

$$\frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

2. *Si*

$$s_1(x),\ s_2(x),\ \ldots\ s_n(x),\ \ldots$$

est une suite de fonctions continues dans l'intervalle (a, b), *convergeant uniformément, et* (α, β) *un intervalle quelconque inclus dans* (a, b) :

$$\int_\alpha^\beta s_n(x)\,dx \longrightarrow \int_\alpha^\beta s(x)\,dx \tag{50}$$

ou bien :

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta s_n(x)\,dx=\int_\alpha^\beta \lim_{n\to\infty} s_n(x)\,dx. \tag{51}$$

Si les limites d'intégration sont variables, par exemple $\beta=x$, *la suite de fonctions :*

$$\int_\alpha^x s_n(t)\,dt \qquad (n=1, 2, 3, \ldots) \tag{52}$$

converge également uniformément dans l'intervalle (a, b). Ce procédé s'appelle *passage à la limite sous le signe somme.*

Remarquons, avant tout, que d'après la propriété 1) la fonction limite $s(x)$ est également continue. Etudions maintenant la différence :

$$\int_\alpha^\beta s(x)\,dx-\int_\alpha^\beta s_n(x)\,dx=\int_\alpha^\beta [s(x)-s_n(x)]\,dx.$$

En se donnant ε, nous pouvons, vu les propriétés de la convergence uniforme, trouver un nombre N tel que pour toutes les valeurs de $n > N$, dans tout l'intervalle (a, b), nous ayons:

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon,$$

c'est pourquoi [III-2-2], (10_1):

$$\left|\int_\alpha^\beta [s(x)-s_n(x)]\,dx\right| \leqslant \int_\alpha^\beta |s(x)-s_n(x)|\,dx < \int_\alpha^\beta \varepsilon\,dx = \varepsilon(\beta-\alpha) \leqslant \varepsilon(b-a).$$

Ainsi, nous avons, pour tout intervalle (α, β) compris dans (a, b):

$$\left|\int_\alpha^\beta s(x)\,dx - \int_\alpha^\beta s_n(x)\,dx\right| < \varepsilon(b-a)$$

pour $n > N$. Le deuxième membre de l'inégalité ne dépend pas de α et β et tend vers zéro, si $\varepsilon \to 0$. Etant donné le choix arbitraire de ε, nous pouvons énoncer

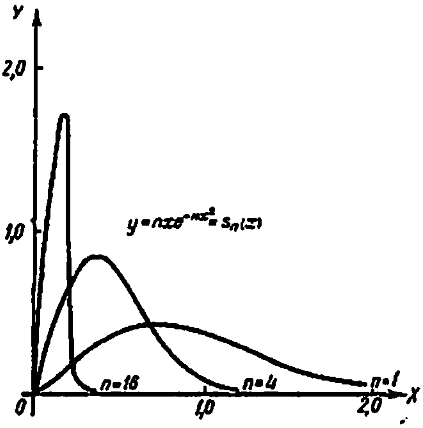

Fig. 162

le résultat de la façon suivante: pour ε_1 quelconque positif donné, il existe un N ne dépendant pas de α et β, tel que:

$$\left|\int_\alpha^\beta s(x)\,dx - \int_\alpha^\beta s_n(x)\,dx\right| < \varepsilon_1$$

pour $n > N$. De là résulte directement la formule (50). En supposant que $\beta = x$ et en considérant que N ne dépend pas de β, nous verrons que la suite (52) converge uniformément pour tout x de (a, b).

Pour des suites convergeant non uniformément, ce théorème peut ne pas être vrai. Soit par exemple:

$$s_n(x) = nxe^{-nx^2} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

(fig. 162). Il est facile de démontrer, en traitant séparément les cas où $x > 0$ et $x = 0$, que pour tout x de l'intervalle $(0, 1)$:

$$s_n(x) \to 0 \quad \text{pour} \quad n \to \infty,$$

de sorte qu'ici $s(x) = 0$. Cette suite ne peut cependant pas être uniformément convergente, puisque l'ordonnée la plus grande de la courbe $y = s_n(x)$ ou, ce qui revient au même, la valeur la plus grande de la différence $s_n(x) - s(x)$, que l'on obtient pour $x = \frac{1}{\sqrt{2n}}$, croît indéfiniment pour $n \to \infty$.

D'autre part, nous avons:

$$\int_0^1 s_n(x)\,dx = n\int_0^1 xe^{-nx^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-nx^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1-e^{-n}) \longrightarrow \frac{1}{2},$$

alors que:

$$\int_0^1 s(x)\,dx = 0.$$

3. *Si les fonctions de la suite:*

$$s_1(x),\ s_2(x),\ \ldots,\ s_n(x),\ \ldots$$

ont des dérivées continues:

$$s_1'(x),\ s_2'(x),\ \ldots,\ s_n'(x),\ \ldots$$

dans l'intervalle (a, b), et que la suite $s_n'(x)$ converge uniformément vers une fonction limite $\sigma(x)$, tandis que la suite $s_n(x)$ converge vers une fonction limite $s(x)$, alors $s_n(x)$ aussi converge uniformément et

$$\sigma(x) = \frac{ds(x)}{dx}, \tag{53}$$

ou bien

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ds_n(x)}{dx} = \frac{d\lim\limits_{n\to\infty}s_n(x)}{dx}. \tag{54}$$

Ce procédé s'appelle *passage à la limite sous le signe de dérivation.*

Soit α une constante quelconque, x une valeur variable dans l'intervalle (a, b). D'après la propriété 2), nous avons:

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^x s_n'(x)\,dx = \int_\alpha^x \sigma(x)\,dx.$$

Mais:

$$\int_\alpha^x s_n'(x)\,dx = s_n(x) - s_n(\alpha) \longrightarrow s(x) - s(\alpha),$$

et c'est pourquoi, la formule précédente donne:

$$s(x) - s(\alpha) = \int_\alpha^x \sigma(x)\,dx.$$

En différentiant cette égalité et en utilisant les propriétés connues de l'intégrale (propriété VII) [III-2-2], nous avons:

$$\frac{ds(x)}{dx} = \sigma(x),$$

ce qu'il fallait démontrer. Il reste à démontrer la convergence uniforme de la suite $s_n(x)$. Nous avons:

$$s_n(x) = s_n(\alpha) + \int_\alpha^x s_n'(x)\,dx.$$

La suite $s_n(\alpha)$ converge et ne contient pas x. La suite $\int_\alpha^x s'_n(x)\,dx$ converge uniformément d'après la propriété 2). De là résulte la convergence uniforme de $s_n(x)$, puisqu'il résulte directement de la définition de la convergence uniforme que la somme de deux suites uniformément convergentes est aussi une suite uniformément convergente. De plus, toute suite convergente dont les termes ne contiennent pas x, comme par exemple $s_n(\alpha)$, répond à la définition d'une suite uniformément convergente.

Remarquons encore que nous avons démontré que $s_n(x)$ dans tout l'intervalle (a, b) converge uniformément en utilisant seulement la convergence uniforme de $s'_n(x)$ et la convergence de $s_n(\alpha)$, et par suite, lorsqu'on énonce la dernière propriété, il suffit d'exiger la convergence de $s_n(x)$ au point $x = \alpha$. Il en résulte, comme nous l'avons déjà dit, la convergence uniforme de $s_n(x)$ dans tout l'intervalle (a, b).

IV-3-10. Propriétés des séries uniformément convergentes. Si, dans les raisonnements précédents, nous considérons $s_n(x)$ comme la somme de n premiers termes d'une série donnée:

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$

et $s(x)$ la somme de la série tout entière, nous obtiendrons des propriétés analogues pour les séries à termes variables.

1. *Si les termes de la série*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{55}$$

sont des fonctions continues dans l'intervalle (a, b) et la série converge uniformément, alors sa somme $s(x)$ est une fonction continue dans l'intervalle (a, b).

2. *Si les termes de la série (55) sont des fonctions continues dans l'intervalle (a, b) et la série converge uniformément, on peut l'intégrer terme à terme entre les bornes que l'on veut α, β situées dans l'intervalle (a, b), c'est-à-dire*

$$\int_\alpha^\beta \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\alpha^\beta u_n(x)\,dx. \tag{56}$$

Si les bornes d'intégration sont variables, par exemple $\beta = x$, la série obtenue en intégrant chaque terme

$$\int_\alpha^x u_1(x)\,dx + \int_\alpha^x u_2(x)\,dx + \ldots + \int_\alpha^x u_n(x)\,dx + \ldots, \tag{57}$$

converge uniformément elle aussi dans l'intervalle (a, b).

3. *Si la série (55) converge dans l'intervalle (a, b) et ses termes ont des dérivées continues $u'_1(x), \ldots, u'_n(x), \ldots$, dans l'intervalle (a, b), alors que la série formée des dérivées*

$$u'_1(x) + u'_2(x) + \ldots + u'_n(x) + \ldots,$$

converge uniformément dans l'intervalle (a, b), alors la série donnée converge uniformément elle aussi et on peut la dériver terme à terme, c'est-à-dire

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{du_n(x)}{dx}. \tag{58}$$

Lorsqu'on a obtenu ces propositions à partir des théorèmes [IV-3-9], il faut considérer que *les propriétés indiquées dans les propositions sont valables*, comme nous le savons déjà, *dans le cas d'un nombre fini de termes*. Ainsi, par exemple, *si les termes de la série $u_n(x)$ sont des fonctions continues, les fonctions :*

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$$

sont aussi continues quel que soit n [I-2-10].

IV-3-11. Critères de convergence uniforme. Enonçons quelques conditions suffisantes de convergence uniforme.

La série de fonctions définies dans l'intervalle (a, b) :

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$

converge uniformément dans l'intervalle (a, b), si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

(A) *On peut trouver une suite de constantes positives*

$$M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$$

telles que

$$|u_n(x)| \leqslant M_n \text{ dans l'intervalle } (a, b) \tag{59}$$

et que la série

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_n + \ldots \tag{60}$$

converge (critère de Weierstrass).

(B) *Les fonctions $u_n(x)$ peuvent être mises sous la forme :*

$$u_n(x) = a_n v_n(x), \tag{61}$$

où $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ sont des constantes telles que la série

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{62}$$

converge ; et les fonctions $v_1(x), \ldots, v_n(x), \ldots$ étant toutes non négatives, restent inférieures à un nombre M constant positif et pour toute valeur de x dans l'intervalle (a, b) :

$$v_1(x) \geqslant v_2(x) \geqslant \ldots \geqslant v_n(x) \geqslant \ldots, \quad 0 \leqslant v_n(x) \leqslant M \tag{63}$$

(critère d'Abel).

Démonstration (A). Puisque la série (60) converge, on peut, pour un ε donné, trouver un nombre N tel que pour tout $n > N$ et pour tous les p, nous ayons [IV-1-8] :

$$M_{n+1} + M_{n+2} + \ldots + M_{n+p} < \varepsilon ;$$

d'après les inégalités (59) et

$$|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \leqslant M_{n+1} + \ldots + M_{n+p} < \varepsilon,$$

d'où [IV-3-7] il découle que la série (55) converge uniformément.

Démonstration (B). Supposons que :

$$\sigma'_p = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} \quad (p = 1, 2, \ldots),$$

d'où

$$a_{n+1} = \sigma'_1 \text{ et } a_{n+k} = \sigma'_k - \sigma'_{k-1} \quad (k > 1).$$

Evaluons l'expression:

$$u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots+u_{n+p}(x)=$$
$$=a_{n+1}v_{n+1}(x)+a_{n+2}v_{n+2}(x)+\ldots+a_{n+p}v_{n+p}(x).$$

En remplaçant ici les a_{n+k} par leurs expressions σ'_k et en réunissant les termes ayant des σ'_k identiques, nous obtiendrons:

$$a_{n+1}v_{n+1}(x)+a_{n+2}v_{n+2}(x)+\ldots+a_{n+p}v_{n+p}(x)=$$
$$=\sigma'_1v_{n+1}(x)+(\sigma'_2-\sigma'_1)\,v_{n+2}(x)+\ldots+(\sigma'_p-\sigma'_{p-1})\,v_{n+p}(x)=$$
$$=\sigma'_1\,[v_{n+1}(x)-v_{n+2}(x)]+\ldots+\sigma'_{p-1}\,[v_{n+p-1}(x)-v_{n+p}(x)]+\sigma'_pv_{n+p}(x).$$

En considérant que $v_{n+p}(x)$ et toutes les différences $v_{n+k-1}(x)-v_{n+k}(x)$ sont non négatives par hypothèse, nous pouvons écrire:

$$|u_{n+1}(x)+\ldots+u_{n+p}(x)|\leqslant$$
$$\leqslant|\sigma'_1|\,[v_{n+1}(x)-v_{n+2}(x)]+\ldots+|\sigma'_{p-1}|\,[v_{n+p-1}(x)-v_{n+p}(x)]+|\sigma'_p|\,v_{n+p}(x),$$

ou, en désignant par σ' la plus grande des valeurs absolues $|\sigma'_1|$, $|\sigma'_2|$, ..., $|\sigma'_p|$

$$|u_{n+1}(x)+\ldots+u_{n+p}(x)|\leqslant$$
$$\leqslant\sigma'\,\{[v_{n+1}(x)-v_{n+2}(x)]+\ldots+[v_{n+p-1}(x)-v_{n+p}(x)]+v_{n+p}(x)\}$$

nous obtenons en simplifiant :

$$|u_{n+1}(x)+\ldots+u_{n+p}(x)|\leqslant\sigma'v_{n+1}(x). \tag{64}$$

De la définition de σ'_k compte tenu de la convergence de la série (62) il résulte que pour tout ε positif donné, il existe un N tel que pour $n>N$ et pour tout k, nous avons:

$$|\sigma'_k|<\frac{\varepsilon}{M}\,,\ \text{et donc}\ \sigma'<\frac{\varepsilon}{M}\,.$$

En considérant encore que, par hypothèse, $0\leqslant v_{n+p}(x)\leqslant M$, nous obtenons d'après (64):

$$|u_{n+1}(x)+\ldots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon$$

pour $n>N$ et p quelconque. Puisque N ne dépend pas de x, il en résulte que la série (55) converge uniformément dans l'intervalle (a, b).

Exemples. 1. Les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}\,,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}\quad(p>1) \tag{65}$$

convergent uniformément dans tout l'intervalle puisque pour tout x, nous avons.

$$\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right|\leqslant\frac{1}{n^p}\,,\quad\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|\leqslant\frac{1}{n^p}\,,$$

et que la série $\sum\frac{1}{n^p}$ est convergente pour $p>1$ [IV-1-5] (critère de Weierstrass).

2. Si la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ converge, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x} \tag{66}$$

converge uniformément dans l'intervalle $(0 \leqslant x \leqslant l)$ pour tout l puisque, en supposant ici que:

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x},$$

nous satisfaisons à toutes les conditions du critère d'Abel.

IV-3-12. Séries entières. Rayon de convergence. *Les séries entières* sont un exemple très important d'application de la théorie des séries à termes variables, exposée ci-dessus; il s'agit des séries de la forme:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots, \tag{67}$$

que nous avons déjà rencontrées dans l'étude de la formule de Maclaurin. L'étude détaillée des propriétés de ces séries concerne la théorie des fonctions d'une variable complexe, c'est pourquoi nous ne démontrerons ici que les propriétés fondamentales.

P r e m i e r t h é o r è m e d'A b e l. *Si la série entière* (67) *converge pour la valeur $x = \xi$, elle est absolument convergente pour toutes les valeurs de x pour lesquelles*

$$|x| < |\xi|. \tag{68}$$

Réciproquement, *si elle diverge pour $x = \xi$, elle diverge pour toutes les valeurs de x pour lesquelles*

$$|x| > |\xi| = r. \tag{69}$$

Soit la série:

$$a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_n\xi^n + \ldots,$$

qui converge; sachant que le terme général d'une série convergente tend vers zéro, c'est-à-dire que

$$a_n\xi^n \to 0 \text{ pour } n \to \infty,$$

on peut trouver une constante M telle que pour toutes les valeurs de n, nous ayons:

$$|a_n\xi^n| \leqslant M.$$

Donnons maintenant à x une valeur quelconque vérifiant la condition (68) et supposons que:

$$q = \left|\frac{x}{\xi}\right| < 1.$$

Nous avons de toute évidence:

$$|a_nx^n| = \left|a_n\xi^n \frac{x^n}{\xi^n}\right| = |a_n\xi^n| \left|\frac{x}{\xi}\right|^n \leqslant Mq^n,$$

c'est-à-dire que le terme général de la série (67), pour la valeur de x considérée, ne dépasse pas en valeur absolue le terme général d'une progression géométrique décroissant indéfiniment, c'est pourquoi la série (67) est absolument convergente [IV-1-7].

La seconde partie du théorème est évidente, car, si la série (67) convergeait pour une valeur de x vérifiant la condition (69), elle devrait, d'après ce qui vient d'être démontré, converger pour tout ξ pour lequel $|\xi| < |x|$, ce qui est contraire aux hypothèses.

C o n s é q u e n c e. *Il existe un nombre R entièrement défini, que l'on appelle rayon de convergence de la série* (67) *et qui possède les propriétés suivantes*:

la série (67) *est absolument convergente pour* $|x| < R$,

la série (67) *diverge pour* $|x| > R$.

En particulier, on peut avoir $R = 0$, alors la série (67) diverge pour toutes les valeurs de x différentes de zéro, ou bien $R = \infty$, et alors la série (67) converge pour toutes les valeurs de x.

Laissant de côté le premier cas, nous étudierons une valeur positive de $x = \xi$ telle que la série (67) converge. Cette valeur existe certainement s'il existe des valeurs $x \neq 0$ pour lesquelles la série (67) converge. Si l'on donne un accroissement au nombre ξ, deux cas seulement peuvent se présenter: ou bien la série (67) restera toujours convergente pour $x = \xi$, même lorsque ξ croît indéfiniment; nous avons alors, de toute évidence, $R = \infty$; ou bien il y aura un nombre constant A tel que pour toutes les valeurs de $\xi < A$, la série (67) converge, mais pour $\xi > A$, la série devient divergente.

L'existence de ce nombre A est tout à fait évidente, puisque d'après le premier théorème d'Abel, si la série devient divergente pour une valeur quelconque de ξ, elle divergera pour toutes les valeurs supérieures. On peut démontrer de façon rigoureuse l'existence du nombre A en utilisant la théorie des nombres irrationnels. Il est évident que ce nombre A sera le rayon de convergence R de la série (67).

Démontrons l'existence de R. Divisons les nombres réels en deux classes de la façon suivante: mettons dans la première classe tous les nombres négatifs, zéro et les nombres positifs ξ tels que la série (67) converge pour $|x| = \xi$, et dans la deuxième classe tous les autres nombres réels. D'après le théorème qui a été démontré, tout nombre de la première classe est inférieur à tout nombre de la seconde classe, c'est-à-dire que nous avons effectué une coupure dans le domaine des nombres réels, c'est pourquoi il y a ou bien dans la première classe un nombre le plus grand, ou bien dans la seconde un nombre le plus petit [I-2-16]. Il n'est pas difficile de voir que c'est ce nombre qui sera le rayon de convergence R de la série. Si tous les nombres entrent dans la première classe, il faut considérer que $R = \infty$.

IV-3-13. Deuxième théorème d'Abel. *Si R est le rayon de convergence de la série* (67), *la série converge non seulement absolument, mais aussi uniformément dans n'importe quel intervalle* (a, b) *situé entièrement à l'intérieur d'un intervalle* $(-R, +R)$, *c'est-à-dire pour lequel*

$$-R < a < b < R.$$

Si la série converge également pour $x = R$ ou $x = -R$, elle sera également uniformément convergente dans un intervalle (a, R) *ou* $(-R, b)$.

Remarquons avant tout que nous pouvons, sans restreindre la généralité, considérer que $R = 1$, en introduisant à la place de x une nouvelle variable indépendante t définie par la formule

$$x = Rt,$$

après quoi la série (67) devient une série entière par rapport à t, et l'intervalle $(-R, +R)$ devient $(-1, 1)$.

Si $R = 1$, la série (67), d'après la définition du rayon de convergence, sera absolument convergente pour toute valeur $x = \xi$, pour laquelle $|\xi| < 1$. Étudions maintenant un intervalle quelconque (a, b) situé à l'intérieur de $(-R, +R)$, de sorte que

$$-1 < a < b < 1.$$

Prenons pour ξ un nombre quelconque situé à l'intérieur de $(-1, 1)$, mais supérieur en valeur absolue à $|a|$ et $|b|$. Pour tout x de l'intervalle (a, b), nous avons:

$$|a_n x^n| < |a_n \xi^n|,$$

et puisque la série

$$a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_n\xi^n + \ldots$$

converge absolument et que ses termes ne dépendent pas de x, la série (67), d'après le critère de Weierstrass, converge uniformément dans l'intervalle (a, b).

Admettons maintenant que la série (67) converge aussi pour $x = 1$, c'est-à-dire que la série

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

converge. En supposant que

$$v_n(x) = x^n,$$

nous pouvons appliquer à la série (67) le critère d'Abel, qui démontrera que cette série converge uniformément dans tout l'intervalle $(a, 1)$, où a est un nombre quelconque supérieur à -1.

Le cas, où la série (67) converge pour $x = -1$, revient au cas précédent, si l'on remplace x par $(-x)$.

Nous noterons la somme de la série (67) par $f(x)$. Elle n'existe, bien entendu, que pour les valeurs de x pour lesquelles la série converge. Soit R le rayon de convergence de la série. En tenant compte de la convergence uniforme de la série dans tout l'intervalle (a, b) pour lequel

$$-R < a < b < R, \tag{70}$$

et de la propriété 1) de [IV-3-10], on peut affirmer que *la somme de la série $f(x)$ est une fonction continue dans chacun des intervalles (a, b) indiqués*. On dit encore que *$f(x)$ est continue dans l'intervalle $(-R, +R)$*. Nous verrons plus loin que cette fonction possède autant de dérivées que l'on veut à l'intérieur de l'intervalle $(-R, +R)$. Si la série (67) converge aussi pour $x = R$, puisqu'elle converge uniformément dans tout l'intervalle (a, R), où $a > -R$, $f(x)$ sera une fonction continue dans cet intervalle, et, en particulier, $f(R)$ sera la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers R à gauche [I-2-11]:

$$f(R) = \lim_{x \to R-0} f(x). \tag{71}$$

De même pour la convergence de la série pour $x = -R$.

Nous avons vu ci-dessus que le développement du binôme de Newton [IV-2-6].

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots$$

possède un rayon de convergence $R = 1$, et dans certains cas il converge pour $x = \pm 1$. D'après ce qui vient d'être démontré, on peut affirmer que si, par exemple, la série converge pour $x = 1$, sa somme est alors égale à:

$$\lim_{x \to 1-0} (1+x)^m = 2^m.$$

IV-3-14. Différentiation et intégration d'une série entière. Soit R le rayon de convergence de la série

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \tag{72}$$

En l'intégrant terme à terme de 0 à x et en la différentiant, nous obtiendrons deux autres séries entières :

$$a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\ldots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\ldots \tag{73}$$

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots \tag{74}$$

Démontrons qu'elles ont le même rayon de convergence R. Pour cela, il faut démontrer qu'elles convergent si $|x|<R$, et divergent si $|x|>R$.

D'après ce qui a été démontré, la série (72) converge uniformément dans tout l'intervalle $(-R_1, +R_1)$, où $0<R_1<R$, et d'après la propriété 2) de [IV-3-10], on peut l'intégrer terme à terme dans cet intervalle de 0 à x, c'est-à-dire qu'on peut affirmer que la série (73) converge pour tout x pour lequel $|x|<$ $<R$ et qu'alors la somme de la série (73) est égale à :

$$\int_0^x f(x)\,dx,$$

où $f(x)$ est la somme de la série (72). Montrons maintenant que la série (74) converge également si $|x|<R$. Prenons le même x, choisissons un nombre ξ situé entre $|x|$ et R, c'est-à-dire que

$$|x|<\xi<R, \tag{75}$$

et supposons que

$$q=\frac{|x|}{\xi}<1.$$

Nous obtenons pour les termes de la série (74) l'évaluation

$$|na_nx^{n-1}|=\left|na_n\xi^n\frac{x^{n-1}}{\xi^{n-1}}\cdot\frac{1}{\xi}\right|,$$

et d'après ce qui précède :

$$|na_nx^{n-1}|\leqslant nq^{n-1}\frac{1}{\xi}|a_n\xi^n|.$$

En appliquant à la série $\sum nq^{n-1}$ le critère de d'Alembert, il est facile de démontrer qu'elle converge pour $0<q<1$, et par conséquent [IV-1-2] :

$$nq^{n-1}\to 0 \quad\text{pour}\quad n\to\infty, \tag{76}$$

c'est pourquoi, pour toutes les valeurs suffisamment grandes de n :

$$|na_nx^{n-1}|<|a_n\xi^n|.$$

Mais d'après (75), la série $\sum a_n\xi^n$ converge absolument, c'est pourquoi la série (74) converge absolument elle aussi pour la valeur de x que l'on a choisie. Ainsi les deux séries (73) et (74) convergent si $|x|<R$, c'est-à-dire que lorsqu'on intègre terme à terme ou que l'on différentie une série entière, son rayon de convergence ne peut diminuer. Mais il en résulte directement qu'il ne peut pas non plus augmenter. En effet, si par exemple le rayon de convergence de la série (73) était R', et $R'>R$, en différentiant la série (73), nous obtiendrions la série (72), et son rayon de convergence ne serait pas inférieur à R', mais, par hypothèse, il est égal à R, et alors $R<R'$. Ainsi les séries (73) et (74) ont le même rayon de convergence que la série (72). En différentiant la série (74) encore une fois, nous obtiendrons, d'après ce qui a été démontré, la série entière :

$$2a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\ldots$$

avec le même rayon de convergence R, etc. Nous aurons le même résultat en intégrant encore une fois terme à terme la série (73) de 0 à x. Toutes les séries obtenues par différentiation et intégration terme à terme de 0 à x convergent uniformément dans tout l'intervalle (a, b), pour lequel l'inégalité (70) est vérifiée. Ayant en mémoire les propriétés 2) et 3) de [IV-3-10], nous pouvons finalement énoncer le résultat suivant:

La somme de la série entière

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots, \tag{77}$$

dont le rayon de convergence est égal à R, est une fonction continue à l'intérieur de l'intervalle $(-R, +R)$, c'est-à-dire pour $-R<x<+R$, possédant à l'intérieur de cet intervalle des dérivées de tous ordres. Ces dérivées peuvent être obtenues par différentiation terme à terme de la série (77). On peut également procéder à l'intégration successive terme à terme de 0 à x pour $-R<x<+R$ par intégration terme à terme de la série (77). La différentiation et l'intégration terme à terme d'une série entière ne changent pas son rayon de convergence.

Notons que l'intervalle $(-R, +R)$ peut aussi être un intervalle ouvert $(-\infty, +\infty)$, autrement dit, tout ce que nous venons d'énoncer est valable pour le cas où le rayon de convergence de la série (77) est égal à ∞.

En supposant que:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots, \tag{78}$$

nous obtenons:

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots,$$
$$f''(x)=2a_2+6a_3x+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\ldots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(x)=n!\,a_n+(n+1)n\ldots3\cdot2a_{n+1}x+\ldots,$$

d'où il résulte que pour $x=0$:

$$a_0=f(0),\quad a_1=\frac{f'(0)}{1!},\quad a_2=\frac{f''(0)}{2!},\quad\ldots,\quad a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\quad\ldots$$

En mettant ces expressions pour $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ dans (78), nous obtiendrons:

$$f(x)=f(0)+\frac{xf'(0)}{1!}+\frac{x^2f''(0)}{2!}+\ldots+\frac{x^nf^{(n)}(0)}{n!}+\ldots\ (-R<x<+R),$$

c'est-à-dire que *la série entière coïncide avec le développement de sa propre somme suivant la formule de Maclaurin.*

La théorie exposée des séries entières s'étend sans peine aux séries entières de la forme:

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots \tag{79}$$

Partout la différence $(x-a)$ jouera le rôle de x. Le rayon de convergence R de la série (79) s'obtient en imposant que la série converge pour $|x-a|<R$ et diverge pour $|x-a|>R$. Si l'on note par $f(x)$ la somme de la série (79) dans l'intervalle

$$-R<x-a<R, \tag{80}$$

on obtient pour les coefficients a_n l'expression:

$$a_0=f(a),\quad a_1=\frac{f'(a)}{1!},\quad\ldots,\quad a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\quad\ldots,$$

c'est-à-dire que *la série* (79) *coïncide dans l'intervalle* (80) *avec le développement de sa somme en série de Taylor.*

Nous reviendrons à la théorie des séries entières dans le troisième tome lors de l'exposé de la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Comme exemple, il est proposé de déduire de la théorie des séries entières les développements des fonctions $\ln(1+x)$, $\operatorname{arc\,tg} x$, $\arcsin x$, en notant que:

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{dx}{1+x},$$

$$\operatorname{arc\,tg} x=\int_0^x \frac{dx}{1+x^2},$$

$$\arcsin x=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

et d'étudier le champ d'application des développements obtenus.

Chapitre V

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

V-1. Dérivées et différentielles de fonctions

V-1-1. Notions fondamentales. Dans le paragraphe [II-4] consacré aux fonctions de deux variables, nous avons commencé l'exposé des notions fondamentales concernant ces fonctions. Maintenant nous allons nous occuper des fonctions de plusieurs variables et plus particulièrement de la notion de limite.

Nous considérons qu'une fonction $f(x, y)$ est définie dans tout le plan ou dans un certain domaine. De telle sorte qu'à chaque point (x, y) de ce domaine correspond une valeur définie $f(x, y)$. Si on n'examine que les points situés à l'intérieur du domaine, on dira qu'il est *ouvert*. Si l'on tient compte également des frontières, on dira que le domaine est *fermé*.

De façon analogue, si on introduit dans l'espace un système de coordonnées rectiligne et orthogonal OX, OY, OZ, on pourra parler du point M de l'espace de coordonnées (x, y, z) au lieu des trois nombres (x, y, z). Admettons que la fonction $f(x, y, z)$ est définie dans tout l'espace ou dans un domaine de l'espace qui peut être ouvert ou fermé. Dans les cas les plus simples les limites du domaine (il peut y en avoir plusieurs) seront des surfaces. Ainsi par exemple les inégalités

$$a_1 \leqslant x \leqslant a_2, \quad b_1 \leqslant y \leqslant b_2, \quad c_1 \leqslant z \leqslant c_2$$

définissent un parallélépipède rectangle fermé dont les arêtes sont parallèles aux axes de coordonnées. Les inégalités:

$$a_1 < x < a_2, \quad b_1 < y < b_2, \quad c_1 < z < c_2$$

définissent un parallélépipède ouvert. L'inégalité:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leqslant r^2$$

définit une sphère fermée de centre (a, b, c) et de rayon r. Si on supprime le signe égal et qu'on ne laisse que le signe $<$, on obtient une sphère ouverte. La notion de limite et de continuité, pour une fonction de trois variables, est définie exactement de la même façon que celle utilisée [II-4-1] pour une fonction de deux variables.

Pour les fonctions $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de plusieurs variables, si $n > 3$, on perd l'aspect géométrique de l'espace, cependant même dans ce cas, on conserve souvent la terminologie géométrique. La suite des n nombres entiers $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s'appelle un point. L'ensemble de tous ces points forme un espace à n dimensions. Les domaines d'un tel espace sont définis par des inégalités. Ainsi, par exemple, les inégalités

$$c_1 \leqslant x_1 \leqslant d_1, \quad c_2 \leqslant x_2 \leqslant d_2, \quad \ldots, \quad c_n \leqslant x_n \leqslant d_n,$$

définissent un parallélépipède à n dimensions. L'inégalité

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - a_k)^2 \leqslant r^2$$

définit une sphère à n dimensions. On appelle *voisinage du point* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ l'ensemble des points définis par l'inégalité ci-dessus pour une valeur donnée de r ou par les inégalités $|x_k - a_k| \leqslant$ $\leqslant \rho$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, où ρ est un certain nombre positif.

Si la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est définie au voisinage du point $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, on dit que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tend vers une limite A lorsque le point $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tend vers le point $M_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et on note

$$\lim_{x_k \to a_k} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A, \quad \text{ou encore} \quad \lim_{M \to M_0} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A,$$

si pour tout nombre positif donné ε il existe un nombre positif η tel que $|A - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)| < \varepsilon$, si $|a_k - x_k| < \eta$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$, et on considère que le point $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ne coïncide pas avec le point $M_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Si $f(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)$ est définie au point $M_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, la continuité en ce point est définie par l'égalité [cf. II-4-1]:

$$\lim_{x_k \to a_k} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Les propriétés des fonctions continues dans un domaine fermé qui ont été indiquées [II-4-1] restent valables.

Comme dans le cas des fonctions d'une variable [I-2-10], les affirmations sur la continuité de la somme du produit et du quotient des fonctions continues restent valables. En ce qui concerne le quotient, elles restent valables lorsque le dénominateur n'est pas nul au point $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

V-1-2. **Le passage à la limite.** Arrêtons-nous plus longuement à la notion de limite en se bornant au cas d'une fonction de deux variables. S'il existe une limite:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A, \tag{1}$$

nous dirons qu'il *existe une limite par rapport aux deux variables*. Nous savons que cela signifie [II-4-1] que $f(x, y)$ tend vers la limite A, quelle que soit la façon dont le point $M(x, y)$ tend vers $M_0(a, b)$. En particulier:

$$\lim_{x\to a} f(x, b) = A \quad \text{et} \quad \lim_{y\to b} f(a, y) = A. \tag{2}$$

Dans le premier cas $M(x, y)$ tend vers $M_0(a, b)$ suivant une droite parallèle à l'axe OX, et dans le second cas suivant une droite parallèle à l'axe OY. Notons que l'existence des limites (2) et de leur égalité n'entraînent pas obligatoirement l'existence de la limite (1). A titre d'exemple examinons la fonction

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

et posons $a=0$ et $b=0$. Nous avons:

$$\lim_{x\to 0} f(x, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 0}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{y\to 0} f(0, y) = 0,$$

tandis que la limite (1) n'existe pas dans ce cas. En effet, posant $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha$, nous pouvons écrire notre fonction sous la forme:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha. \tag{3}$$

Si le point $M(x, y)$ tend vers le point $M(0, 0)$ suivant une droite passant par l'origine et faisant un angle α_0 avec l'axe OX, la fonction $f(x, y)$ exprimée par la formule (3) reste constante et sa valeur dépend du choix de α_0, d'où il résulte que la limite (1) n'existe pas dans le cas considéré. Notons que la formule (3) ne définit pas la fonction au point même $M(0, 0)$.

En plus du passage à la limite (1) on peut encore examiner *des limites multiples* correspondant au passage à la limite d'abord par rapport à x, y restant constant et différent de b, puis en faisant varier y, soit inversement:

$$\lim_{x\to a} [\lim_{y\to b} f(x, y)] \quad \text{ou} \quad \lim_{y\to b} [\lim_{x\to a} f(x, y)]. \tag{4}$$

Il peut arriver que les deux limites multiples existent mais sont différentes. Ainsi, par exemple, pour la fonction

$$f(x, y) = \frac{x^2-y^2+x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

on vérifiera facilement que:

$$\lim_{x\to 0} [\lim_{y\to 0} f(x, y)] = 1, \qquad \lim_{y\to 0} [\lim_{x\to 0} f(x, y)] = -1.$$

Mais on a le théorème:

Théorème. *Si on a une limite par rapport aux deux variables* (1) *et si pour tout x, suffisamment proche, mais différent de a, on a la limite:*

$$\lim_{y\to b} f(x, y) = \varphi(x), \tag{5}$$

on a une limite multiple (4) *égale à A*, c'est-à-dire:

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = A. \tag{6}$$

Il résulte de l'existence de la limite (1) [II-4-1] que pour tout ε positif donné il existe η positif tel que

$$|A-f(x, y)|<\varepsilon \quad \text{lorsque} \quad |x-a|<\eta \quad \text{et} \quad |y-b|<\eta, \tag{7}$$

de plus, (x, y) est différent de (a, b). Donnons-nous x différent de a tel que l'on ait $|x-a|<\eta$. En tenant compte de (5) et en passant dans l'inégalité (7) à la limite par rapport à y, nous obtenons:

$$|A-\varphi(x)|\leqslant\varepsilon \quad \text{lorsque} \quad |x-a|<\eta \quad \text{et} \quad x\neq a,$$

d'où, étant donné l'arbitraire sur ε, on obtient l'égalité (6).

Remarque. De la même façon, si nous supposons qu'il existe la limite (1) et que pour tout y suffisamment proche de b et différent de b, il existe une limite:

$$\lim_{x\to a} f(x, y)=\psi(y),$$

alors il existe une deuxième limite multiple (4) égale à A, c'est-à-dire:

$$\lim_{y\to b} \psi(y)=A.$$

Si la limite (1) existe et si elle est égale à $f(a, b)$, c'est-à-dire si $A=f(a, b)$, la fonction $f(x, y)$ est continue au point (a, b), ou, comme on dit, elle est continue par rapport aux deux variables au point (a, b). Et d'après (2):

$$\lim_{x\to a} f(x, b)=f(a, b), \qquad \lim_{y\to b} f(a, y)=f(a, b),$$

c'est-à-dire que la fonction est continue par rapport à chaque variable prise isolément au point (a, b) comme nous l'avons déjà montré [II-4-1]. Par contre, la continuité par rapport à chacune des variables n'entraîne pas la continuité par rapport aux deux variables. En effet, définissons la fonction par la formule (3) en dehors de l'origine des coordonnées et posons que $f(0,0)=0$. Comme nous l'avons déjà dit, nous avons

$$\lim_{x\to 0} f(x, 0)=0 \quad \text{et} \quad \lim_{y\to 0} f(0, y)=0,$$

c'est-à-dire que la fonction est continue par rapport à chacune des variables au point (0, 0). Mais elle n'est pas continue par rapport aux deux variables, car, comme nous l'avons déjà vu, il n'existe pas de limite définie de $f(x, y)$ lorsque $M(x, y)$ tend vers $M_0(0, 0)$.

Si $f(x, y)$ a dans un certain domaine contenant le point (x, y) des dérivées partielles, on a comme on l'a déjà montré [II-4-2]

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)=f'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y)\Delta x+f'_y(x, y+\theta_1\Delta y)\Delta y$$
$$(0<\theta \text{ et } \theta_1<1).$$

Supposons que les dérivées partielles soient bornées dans le domaine considéré, c'est-à-dire que leur valeur absolue ne soit pas plus grande qu'un certain nombre M. La formule devient alors:

$$|f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)|\leqslant M(|\Delta x|+|\Delta y|),$$

et le second membre de cette inégalité tend vers zéro lorsque $\Delta x\to 0$ et $\Delta y\to 0$, d'où:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x+\Delta x, y+\Delta y)=f(x, y),$$

c'est-à-dire *si $f(x, y)$ a des dérivées partielles bornées dans un certain domaine, elle est continue à l'intérieur de ce domaine.*

La fonction (3) avec la condition supplémentaire $f(0, 0) = 0$ est nulle sur tout l'axe OX et sur tout l'axe OY, ainsi qu'au point M_0 (0, 0) elle a, évidemment, des dérivées partielles nulles. Aux autres points elle possède aussi des dérivées partielles:

$$f'_x(x, y) = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}, \quad f'_y(x, y) = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2},$$

c'est-à-dire qu'elle a des dérivées partielles dans tout le plan. Cependant nous avons déjà vu qu'elle n'est pas continue au point (0, 0). Ceci s'explique par le fait que les dérivées partielles peuvent prendre des valeurs aussi grandes qu'on veut en valeur absolue lorsque le point (x, y) tend vers l'origine des coordonnées.

V-1-3. Dérivées partielles et différentielle totale du premier ordre. En [II-4-2] nous avons introduit la notion de dérivées partielles et de différentielle totale d'une fonction de deux variables. Ces notions peuvent être généralisées au cas de fonctions d'un nombre quelconque de variables. Par exemple, examinons la fonction de quatre variables

$$w = f(x, y, z, t).$$

La dérivée partielle de cette fonction par rapport à x sera la limite

$$\lim_{h \to \pm 0} \frac{f(x+h, y, z, t) - f(x, y, z, t)}{h},$$

si elle existe et pour désigner cette dérivée partielle on utilise les symboles:

$$f'_x(x, y, z, t) \quad \text{soit} \quad \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x}, \quad \text{soit} \quad \frac{\partial w}{\partial x}.$$

De façon analogue on définit les dérivées partielles par rapport aux autres variables.

On appelle *différentielle totale* de la fonction la somme de ses différentielles partielles:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz + \frac{\partial w}{\partial t} dt,$$

où dx, dy, dz, dt sont les différentielles des variables indépendantes (grandeurs arbitraires ne dépendant pas de x, y, z, t).

La différentielle est la partie principale de l'accroissement de la fonction:

$$\Delta w = f(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt) - f(x, y, z, t),$$

à savoir [cf. II-4-2]:

$$\Delta w = dw + \varepsilon_1 dx + \varepsilon_2 dy + \varepsilon_3 dz + \varepsilon_4 dt,$$

où ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 tendent vers zéro en même temps que dx, dy, dz, dt, et en supposant que la fonction w a des dérivées partielles continues dans un certain domaine contenant le point (x, y, z, t).

De la même façon on peut généraliser la règle de différentiation des fonctions de fonction. Supposons par exemple que x, y et z ne soient pas des variables indépendantes, mais des fonctions de la variable indépendante t. La fonction w dépendra dans ce cas de t aussi bien directement que par l'intermédiaire de x, y, z et la *dérivée totale* de w par rapport à t s'écrira:

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \tag{8}$$

Nous ne nous arrêterons pas à la démonstration de cette règle, car c'est la répétition pure et simple de ce qui a déjà été exposé [II-4-3]. Si les variables x, y, z dépendent en plus de t d'autres variables indépendantes, il faut remplacer $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ dans le second membre de l'équation (8) par les dérivées partielles $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$. Dans ce cas la fonction w, elle aussi, dépendra en plus de t des autres variables indépendantes et dans le premier membre de (8) il faudra également remplacer $\frac{dw}{dt}$ par $\frac{\partial w}{\partial t}$. Mais cette dérivée partielle est différente de la dérivée partielle $\frac{\partial w}{\partial t}$ qui est dans le second membre de (8) et est calculée seulement dans le cas où w dépend directement de t. Pour la distinguer des autres, on représente parfois cette dérivée partielle entre parenthèses. De sorte que dans le cas considéré l'équation (8) devient:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}. \tag{9}$$

Dans le cas d'une fonction d'une seule variable nous avons vu que *l'expression de sa différentielle du premier ordre ne dépend pas du choix de la variable indépendante* [II-1-6]. Montrons que cette *propriété reste vraie dans le cas d'une fonction de plusieurs variables.*

Examinons, pour fixer les idées, le cas d'une fonction de deux variables

$$z=\varphi(x, y).$$

Supposons que x et y sont des fonctions des variables indépendantes u et v. D'après la règle de différentiation des fonctions de fonction, nous avons

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

La différentielle totale de la fonction est par définition:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

En reportant les expressions des dérivées partielles, il vient:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right).$$

Mais les expressions placées entre parenthèses sont les différentielles totales de x et y, et nous pouvons écrire:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

c'est-à-dire que *la différentielle d'une fonction de fonction s'écrit de la même façon que dans le cas où les variables sont indépendantes.*

Cette propriété permet de généraliser la règle d'obtention de la différentielle d'une somme ou d'un produit au cas de fonctions de plusieurs variables:

$$d(u+v)=du+dv,\quad d(uv)=v\,du+u\,dv,\quad d\frac{u}{v}=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2},$$

où u et v sont des fonctions de plusieurs variables indépendantes. En effet, en utilisant la propriété que nous venons de démontrer nous pouvons écrire par exemple:

$$d(uv)=\frac{\partial(uv)}{\partial u}du+\frac{\partial(uv)}{\partial v}dv=v\,du+u\,dv.$$

V-1-4. Fonctions homogènes. Donnons la définition d'une fonction homogène de plusieurs variables: *une fonction de plusieurs variables est appelée fonction homogène de ces variables de degré m, si en multipliant ces variables par une grandeur arbitraire t la fonction se trouve multipliée par t^m, autrement dit, si l'identité*

$$f(tx,ty)=t^mf(x,y)\quad \text{ou}\quad f(tx,ty,tz)=t^mf(x,y,z)\qquad(10)$$

est vérifiée pour toutes les valeurs admissibles des variables x, y, z, t. Le nombre m peut être tout nombre réel fixé. Si, par exemple, $m=\frac{1}{2}$, alors $t^m=\sqrt{t}$ et t doit être positif. Supposons que la fonction $f(x, y)$ exprime un volume quelconque, que x et y soient les longueurs de lignes quelconques et que dans l'expression de la fonction en plus de ces longueurs, figurent des nombres abstraits. La multiplication de x et y par t (nombre positif) revient à réduire l'échelle de t fois (pour $t>1$ ou bien à l'augmenter pour $t<1$) et il est évident que dans ces conditions la fonction $f(x, y)$ exprimant le volume doit être multipliée par t^3, c'est-à-dire que, dans le cas considéré, la fonction $f(x, y)$ est une fonction homogène du troisième degré. Ainsi, par exemple, le volume d'un cône s'exprime au moyen du rayon de sa base x et de sa hauteur y par la formule $v=\frac{1}{3}\pi x^2y$. Cette fonction sera homogène du troisième degré pour tous les x, y et t réels, de même que tout polynôme homogène du troisième degré en x et y, c'est-à-dire un polynôme dont chaque terme est tel que la somme des exposants de x et y soit égale à trois:

$$f(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3.$$

Les fractions

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \quad \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

sont des fonctions homogènes de degré respectivement égal à 1, 0 et (—1). Notons que $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$, où le radical est supposé arithmétique, sera une fonction homogène du premier degré pour tous x et y réels et pour tout $t > 0$. En effet

$$\sqrt{(tx)^2+(ty)^2} = t\sqrt{x^2+y^2},$$

et les deux radicaux sont supposés positifs.

En différentiant l'identité (10) par rapport à t et en appliquant la règle de différentiation des fonctions composées, on obtient

$$xf'_u(u, v) + yf'_v(u, v) = mt^{m-1}f(x, y),$$

où $u = tx$ et $v = ty$. En posant $t = 1$, on obtient:

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = mf(x, y), \tag{11}$$

ce qui exprime le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes:

La somme des produits des dérivées partielles d'une fonction homogène par les variables correspondantes est égale au produit de la fonction elle-même par son degré d'homogénéité.

Au cours de la démonstration, nous supposons, évidemment, que la fonction $f(x, y)$ possède des dérivées continues partielles pour les valeurs correspondantes des variables que nous avons utilisées dans cette opération.

Si $m = 0$, en posant dans l'identité (10) $t = \frac{1}{x}$, nous obtenons:

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \quad \text{ou} \quad f(x, y, z) = f\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right),$$

c'est-à-dire *qu'une fonction homogène de degré zéro est une fonction des rapports de toutes les variables, sauf l'une d'entre elles, envers cette dernière variable*. Souvent, on nomme la fonction homogène de degré zéro tout simplement fonction *homogène*.

V-1-5. Les dérivées partielles d'ordre supérieur. Les dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables sont à leur tour des fonctions des mêmes variables dont nous pouvons calculer les dérivées partielles. De la sorte nous obtenons *des dérivées partielles du* *second ordre* de la fonction initiale qui seront elles-mêmes des fonctions des mêmes variables et dont la dérivation nous permettra d'obtenir les dérivées partielles du troisième ordre de la fonction initiale, etc. Ainsi, par exemple, dans le cas d'une fonction de deux variables $u = f(x, y)$, en dérivant chacune des dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ encore une fois par rapport à x et à y, nous obtenons quatre dérivées secondes que l'on note :

$$f''_{x^2}(x, y), \quad f''_{xy}(x, y), \quad f''_{yx}(x, y), \quad f''_{y^2}(x, y),$$

soit :

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y\,\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2},$$

soit enfin :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Les dérivées $f''_{xy}(x, y)$ et $f''_{yx}(x, y)$ ne diffèrent que par l'ordre des dérivations. Dans le premier cas la dérivation s'effectuera d'abord par rapport à x puis par rapport à y, tandis que cet ordre est inversé dans le second cas. Montrons que ces deux dérivées sont identiques, c'est-à-dire que *le résultat d'une dérivation ne dépend pas de l'ordre de dérivation.*

Composons l'expression :

$$\omega = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y).$$

En posant :

$$\varphi(x, y) = f(x+h, y) - f(x, y),$$

on peut mettre ω sous la forme :

$$\omega = [f(x+h, y+k) - f(x, y+k)] - [f(x+h, y) - f(x, y)] = \\ = \varphi(x, y+k) - \varphi(x, y).$$

En appliquant deux fois la formule de Lagrange [II-3-7], nous obtenons :

$$\omega = k\varphi'_y(x, y+\theta_1 k) = k[f'_y(x+h, y+\theta_1 k) - f'_y(x, y+\theta_1 k)] = \\ = khf''_{yx}(x+\theta_2 h, y+\theta_1 k).$$

Les symboles θ, quel que soit leur indice, désignent des nombres compris entre 0 et 1. On désigne par $f'_y(x+h, y+\theta_1 k)$ la dérivée partielle de $f(x, y)$ par rapport à y, lorsque x devient $x+h$ et y devient $y+\theta_1 k$. Des notations identiques sont utilisées pour les autres dérivées partielles.

De la même façon, en posant :

$$\psi(x, y) = f(x, y+k) - f(x, y),$$

on peut écrire :

$$\omega = [f(x+h,\ y+k) - f(x+h,\ y)] - [f(x,\ y+k) - f(x,\ y)] =$$
$$= \psi(x+h,\ y) - \psi(x,\ y) = h\psi'_x(x+\theta_3 h,\ y) =$$
$$= h\,[f'_x(x+\theta_3 h,\ y+k) - f'_x(x+\theta_3 h,\ y)] = hkf''_{xy}(x+\theta_3 h,\ y+\theta_4 k).$$

En comparant les deux expressions obtenues pour ω, nous avons :

$$hkf''_{yx}(x+\theta_2 h,\ y+\theta_1 k) = hkf''_{xy}(x+\theta_3 h,\ y+\theta_4 k),$$

soit :

$$f''_{yx}(x+\theta_2 h,\ y+\theta_1 k) = f''_{xy}(x+\theta_3 h,\ y+\theta_4 k).$$

En supposant la continuité des dérivées secondes et en faisant tendre h et k vers zéro, on obtient :

$$f''_{yx}(x,\ y) = f''_{xy}(x,\ y).$$

Ce raisonnement nous conduit au théorème suivant :

Théorème. *Si $f(x,\ y)$ a dans un domaine quelconque des dérivées continues $f''_{yx}(x,\ y)$ et $f''_{xy}(x,\ y)$, en tous les points de ce domaine ces dérivées sont égales.*

Examinons maintenant deux dérivées du troisième ordre :

$$f'''_{x^2y}(x,\ y) \quad \text{et} \quad f'''_{yx^2}(x,\ y),$$

qui ne diffèrent que par l'ordre de dérivation. En tenant compte de ce que, comme nous venons de le démontrer, le résultat de *deux dérivations successives* ne dépend pas de l'ordre des dérivations, on peut écrire :

$$f'''_{x^2y}(x,\ y) = \frac{\partial^2 f'_x(x,\ y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f'_x(x,\ y)}{\partial y\,\partial x} = f'''_{xyx}(x,\ y) =$$
$$= f'''_{yxx}(x,\ y) = f'''_{yx^2}(x,\ y),$$

c'est-à-dire que dans ce cas aussi le résultat d'une dérivation ne dépend pas de l'ordre des dérivations. On peut étendre sans aucune difficulté cette propriété aux dérivées de n'importe quel ordre et à des fonctions quel que soit le nombre de variables et nous pouvons énoncer le théorème général : *le résultat de la dérivation ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue les opérations.*

Notons que pour démontrer ce théorème nous avons utilisé *en plus de l'existence des dérivées leur continuité dans un certain domaine.*

Dans la suite nous supposerons toujours la continuité des dérivées dont nous aurons à parler, et en vertu du théorème démontré pour les dérivées d'ordre supérieur, il suffit seulement d'indiquer l'ordre n de la dérivée, les variables par rapport auxquelles on dérive et le nombre de dérivations par rapport à chacune des variables. Ainsi, par exemple, dans le cas d'une fonction $w = f(x,\ y,\ z,\ t)$

on utilise les notations:

$$\frac{\partial^n f(x, y, z, t)}{\partial x^\alpha \, \partial y^\beta \, \partial z^\gamma \, \partial t^\delta}, \quad \text{soit} \quad \frac{\partial^n w}{\partial x^\alpha \, \partial y^\beta \, \partial z^\gamma \, \partial t^\delta} (\alpha+\beta+\gamma+\delta=n),$$

qui montrent que la dérivée considérée est du $n^{\text{ième}}$ ordre et que l'on dérive α fois par rapport à x, β fois par rapport à y, γ fois par rapport à z, et δ fois par rapport à t.

V-1-6. Les différentielles d'ordre supérieur. La différentielle totale du d'une fonction de plusieurs variables est à son tour une fonction des mêmes variables et nous pouvons définir la différentielle totale de cette dernière fonction. De la sorte nous obtiendrons *la différentielle du deuxième ordre* d^2u de la fonction initiale u qui sera elle-même fonction des mêmes variables, et sa différentielle totale sera la différentielle du troisième ordre d^3u de la fonction initiale u, etc.

Examinons plus en détail le cas de la fonction $u = f(x, y)$ de deux variables x et y et supposons que les variables x et y sont des variables indépendantes. Par définition:

$$du = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy. \tag{12}$$

En calculant d^2u nous tiendrons compte de ce que les différentielles dx et dy des variables indépendantes doivent être considérées comme des constantes, et par conséquent on peut les sortir de sous le signe de différentiation:

$$\begin{aligned} d^2u &= d\left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx\right] + d\left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy\right] = \\ &= dx \cdot d\,\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + dy \cdot d\,\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \\ &= dx \cdot \left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y} dy\right] + \\ &+ dy \left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y\, \partial x} dx + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} dy\right] = \\ &= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} dy^2. \end{aligned}$$

En calculant exactement de la même façon d^3u, il vient:

$$d^3u = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^3} dx^3 + 3\,\frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^2\, \partial y} dx^2\, dy + \\ + 3\,\frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x\, \partial y^2} dx\, dy^2 + \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y^3} dy^3.$$

Ces expressions de d^2u et d^3u nous conduisent à *la formule symbolique suivante pour une différentielle de n'importe quel ordre*:

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^{(n)} f. \tag{13}$$

Cette formule s'explique de la façon suivante: il faut élever à la puissance n l'expression entre parenthèses en utilisant la formule du binôme de Newton, après quoi il faut considérer les exposants de $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ comme indicateurs de l'ordre de dérivations par rapport à x et à y de la fonction f.

Nous avons vérifié la formule (13) pour n égal à 1, 2 et 3. Pour la démontrer complètement, il faut utiliser la méthode habituelle de passage de n à $(n+1)$. Supposons que la formule (13) soit valable pour une certaine valeur de n. Calculons la différentielle d'ordre $(n+1)$:

$$d^{n+1}u = d(d^n u) = \frac{\partial (d^n u)}{\partial x} dx + \frac{\partial (d^n u)}{\partial y} dy = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right) d^n u,$$

où par le symbole

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right) \varphi$$

nous désignons généralement:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy.$$

En tenant compte de ce que pour $d^n u$ nous avons supposé que la formule (13) est vérifiée, nous pouvons écrire:

$$d^{n+1}u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right) \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^{(n)} f\right] =$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^{(n+1)} f,$$

c'est-à-dire que la formule est démontrée aussi pour $d^{n+1}u$.

La formule (13) peut être facilement généralisée au cas d'une fonction d'un nombre quelconque de variables indépendantes. Nous savons [V-1-3] que la formule (13) n'est pas valable uniquement dans le cas où x et y sont des variables indépendantes. Mais pour obtenir l'expression de d^2u il est indispensable de considérer que dx et dy sont des constantes et la formule (13) n'est valable que dans les cas où l'on peut considérer dx et dy comme des constantes.

Cela sera vrai si x et y sont des variables indépendantes. Supposons maintenant que x et y soient des fonctions linéaires de variables indépendantes z et t:

$$x = az + bt + c, \qquad y = a_1 z + b_1 t + c_1,$$

où les coefficients et les termes indépendants sont des constantes. Nous avons alors pour dx et dy les expressions:

$$dx = a\,dz + b\,dt, \qquad dy = a_1\,dz + b_1\,dt.$$

Mais dz et dt qui sont des différentielles de variables indépendantes sont constantes, par suite on peut considérer que dx et dy sont constants, c'est pourquoi on peut affirmer que *la formule symbolique (13) est vraie aussi bien lorsque x et y sont des variables indépendantes que lorsqu'ils sont des fonctions linéaires (polynômes entiers de 1^er^ degré) de variables indépendantes.*

Si dx et dy ne peuvent pas être considérés comme constants, la formule (13) ne sera plus vraie. Examinons l'expression de d^2u dans ce cas général aussi. En calculant :

$$d\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}dx\right) \quad \text{et} \quad d\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dy\right)$$

nous ne pouvons plus extraire dx et dy de la différentielle comme nous l'avons fait ci-dessus, mais nous devons appliquer la formule de différentiation d'un produit [V-1-3].

Nous obtenons de cette façon :

$$d^2u = dx\,d\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + dy\,d\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}d^2x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}d^2y.$$

La somme des deux premiers termes du second membre de cette égalité nous donne l'expression que nous avons obtenue ci-dessus pour d^2u et finalement nous obtenons :

$$d^2u = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}dy^2 + \\ + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}d^2x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}d^2y, \qquad (14)$$

c'est-à-dire que dans le cas général considéré l'expression de d^2u contient des termes complémentaires dépendant de d^2x et de d^2y.

V-1-7. Fonctions implicites. Donnons maintenant les règles de dérivation des fonctions implicites. Nous supposerons que les équations écrites définissent effectivement une certaine fonction ayant des dérivées correspondantes. Nous le démontrerons sous certaines conditions [V-1-9]. Si y est une fonction implicite de x :

$$F(x, y) = 0, \qquad (15)$$

la dérivée première y' de cette équation, comme on sait, est définie par l'équation [II-4-3] :

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y)\,y' = 0. \qquad (16)$$

L'équation (16) a été obtenue en supposant dans l'égalité (15) que y est une fonction de x et en dérivant les deux parties de cette équation par rapport à x. En faisant de même avec (16) nous obtiendrons une équation définissant la dérivée seconde y'' :

$$F''_{x^2}(x, y) + 2F''_{xy}(x, y)\,y' + F''_{y^2}(x, y)\,y'^2 + F'_y(x, y)\,y'' = 0. \qquad (17)$$

En dérivant encore une fois par rapport à x on obtient une équation définissant la dérivée troisième y''', etc.

Notons que dans les équations ainsi obtenues le coefficient des dérivées cherchées de la fonction implicite sera toujours le même, à savoir $F'_y(x, y)$, c'est pourquoi si pour certaines valeurs de x et de y vérifiant l'équation (15) ce coefficient n'est pas nul, le procédé indiqué ci-dessus donnera des valeurs définies des dérivées de n'importe quel ordre de la fonction implicite. Ce faisant on suppose évidemment l'existence de dérivées partielles du premier membre de l'équation (15).

Examinons maintenant une équation de trois variables:

$$\Phi(x, y, z) = 0.$$

Une telle équation définit z comme fonction implicite des variables indépendantes x et y et si on remplace z justement par cette fonction de x et y dans le premier membre de cette équation, celui-ci deviendra identiquement nul. De sorte qu'en dérivant le premier membre de cette équation par rapport aux variables indépendantes x et y, en supposant que z est fonction de x et y, nous devons obtenir 0:

$$\Phi'_x(x, y, z) + \Phi'_z(x, y, z)\, z'_x = 0,$$

$$\Phi'_y(x, y, z) + \Phi'_z(x, y, z)\, z'_y = 0.$$

On peut obtenir à partir de ces équations les dérivées partielles du premier ordre z'_x et z'_y. En dérivant la première des relations écrites encore une fois par rapport à x, nous obtiendrons une équation définissant la dérivée partielle z''_{x^2}, etc. Dans toutes les équations obtenues le coefficient de la dérivée cherchée sera $\Phi'_z(x, y, z)$.

Examinons maintenant le système d'équations:

$$\varphi(x, y, z) = 0, \qquad \psi(x, y, z) = 0. \tag{17$_1$}$$

Nous considérerons que ce système définit y et z comme des fonctions implicites de x. En dérivant les deux équations du système par rapport à x, en supposant que y et z sont des fonctions de x, nous obtenons un système d'équations du premier degré pour définir les dérivées y' et z' de y et z par rapport à x:

$$\varphi'_x(x, y, z) + \varphi'_y(x, y, z)\cdot y' + \varphi'_z(x, y, z)\cdot z' = 0,$$

$$\psi'_x(x, y, z) + \psi'_y(x, y, z)\cdot y' + \psi'_z(x, y, z)\cdot z' = 0.$$

En dérivant encore une fois ces relations par rapport à x, nous obtenons un système d'équations qui définit les dérivées secondes y'' et z''. En dérivant encore une fois par rapport à x, nous obtenons un système d'équations définissant y''' et z''', etc.

Les dérivées du $n^{\text{ième}}$ ordre $y^{(n)}$ et $z^{(n)}$ seront obtenues à partir d'un système du type:

$$\varphi'_y(x, y, z)\cdot y^{(n)}+\varphi'_z(x, y, z)\cdot z^{(n)}+A=0,$$
$$\psi'_y(x, y, z)\cdot y^{(n)}+\psi'_z(x, y, z)\cdot z^{(n)}+B=0,$$

où A et B sont des expressions qui ne contiennent que des dérivées d'ordre inférieur à n. Un tel système ne donnera une solution définie unique, comme il est bien connu en algèbre élémentaire, que si la condition

$$\varphi'_y(x, y, z)\cdot\psi'_z(x, y, z)-\varphi'_z(x, y, z)\cdot\psi'_y(x, y, z)\neq 0$$

est vérifiée.

Pour toutes les valeurs de x, y et z vérifiant le système (17_1) et qui vérifient aussi cette condition, le procédé exposé ci-dessus donnera des valeurs bien définies des dérivées.

Si on a un système de m équations avec $(m+n)$ variables, il définit en général m variables comme fonctions implicites des n variables restantes, et les dérivées de ces fonctions implicites peuvent être obtenues grâce au procédé exposé ci-dessus: dérivation successive des équations par rapport aux variables indépendantes.

V-1-8. Exemple. Examinons à titre d'exemple l'équation:

$$ax^2+by^2+cz^2=1, \tag{18}$$

qui définit z en tant que fonction de x et de y. En dérivant par rapport à x et y, nous obtenons:

$$ax+cz\cdot z'_x=0 \tag{19}$$

et

$$by+cz\cdot z'_y=0, \tag{19$_1$}$$

d'où

$$z'_x=-\frac{ax}{cz}, \quad z'_y=-\frac{by}{cz}.$$

En dérivant la relation (19) par rapport à x et y et celle (19_1) par rapport à y, on obtient:

$$a+cz'^2_x+cz\,z''_{x^2}=0, \quad cz'_xz'_y+cz\,z''_{xy}=0,$$
$$b+cz'^2_y+cz\,z''_{y^2}=0,$$

d'où:

$$z''_{x^2}=-\frac{a+cz'^2_x}{cz}=-\frac{a+c\,\frac{a^2x^2}{c^2z^2}}{cz}=-\frac{acz^2+a^2x^2}{c^2z^3},$$

$$z''_{xy}=-\frac{z'_xz'_y}{z}=-\frac{ab\,xy}{c^2z^3},$$

$$z''_{y^2}=-\frac{b+cz'^2_y}{cz}=-\frac{bcz^2+b^2y^2}{c^2z^3}.$$

Montrons maintenant un autre moyen de calculer les dérivées partielles en utilisant la différentielle totale d'une fonction. Démontrons avant tout un théorème auxiliaire. Supposons que nous ayons pu obtenir, d'une façon ou d'une autre, l'expression de la différentielle totale dz d'une fonction de deux variables indépendantes x et y sous la forme:

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

D'autre part nous savons que:

$$dz = z'_x\,dx + z'_y\,dy.$$

En comparant ces deux formules, il vient:

$$p\,dx + q\,dy = z'_x\,dx + z'_y\,dy.$$

Mais dx et dy, qui sont des différentielles de variables indépendantes, sont des grandeurs arbitraires. En supposant que $dx = 1$ et $dy = 0$, ou bien que $dx = 0$ et $dy = 1$, on obtient:

$$p = z'_x \quad \text{et} \quad q = z'_y.$$

D'où *si la différentielle totale d'une fonction z des deux variables indépendantes x et y peut être mise sous la forme*:

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

on a $p = \dot{z}_x$ et $q = \dot{z}_y$.

Ce théorème est valable pour une fonction d'un nombre quelconque de variables indépendantes. On peut montrer exactement de la même façon que *si la différentielle du deuxième ordre peut être mise sous la forme*:

$$d^2z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2,$$

alors $r = \ddot{z}_{x^2}$, $s = \ddot{z}_{xy}$, $t = \ddot{z}_{y^2}$.

Revenons maintenant à l'exemple considéré. Au lieu de définir les dérivées du premier membre de la relation (18) par rapport à x et y, calculons sa différentielle en tenant compte de ce que l'expression de la première différentielle ne dépend pas du choix des variables indépendantes [V-1-3]:

$$ax\,dx + by\,dy + cz\,dz = 0, \qquad (20)$$

d'où:

$$dz = -\frac{ax}{cz}\,dx - \frac{by}{cz}\,dy,$$

et donc en vertu du théorème que nous avons démontré:

$$z'_x = -\frac{ax}{cz} \quad \text{et} \quad z'_y = -\frac{by}{cz}.$$

Calculons maintenant la différentielle du premier membre de la relation (20) en tenant compte de ce que dx et dy doivent être considérés comme des constantes:

$$a\,dx^2 + b\,dy^2 + c\,dz^2 + cz\,d^2z = 0,$$

soit:

$$d^2z = -\frac{a}{cz}\,dx^2 - \frac{b}{cz}\,dy^2 - \frac{1}{z}\,dz^2 = -\frac{a}{cz}\,dx^2 - \frac{b}{cz}\,dy^2 -$$

$$-\frac{1}{z}\left(\frac{ax}{cz}\,dx + \frac{by}{cz}\,dy\right)^2 =$$

$$= -\frac{acz^2 + a^2x^2}{c^2z^3}\,dx^2 - 2\,\frac{abxy}{c^2z^3}\,dx\,dy - \frac{bcz^2 + b^2y^2}{c^2z^3}\,dy^2,$$

et par suite:

$$z''_{x^2} = -\frac{acz^2 + a^2x^2}{c^2z^3}, \quad z''_{xy} = -\frac{abxy}{c^2z^3}, \quad z''_{y^2} = -\frac{bcz^2 + b^2y^2}{c^2z^3}.$$

De la sorte, en calculant la différentielle d'un ordre quelconque, nous obtenons toutes les dérivées partielles de l'ordre correspondant.

V-1-9. Existence des fonctions implicites. Nos raisonnements avaient un caractère formel. Nous avons supposé dans tous les cas qu'une équation ou un système d'équations définissent de façon implicite une certaine fonction ayant une dérivée. Maintenant démontrons le théorème fondamental d'existence des fonctions implicites.

Examinons l'équation

$$F(x, y) = 0 \tag{21}$$

et indiquons les conditions pour lesquelles elle définit de façon unique y en tant que fonction continue de x ayant une dérivée.

Théorème. *Soit $x = x_0$ et $y = y_0$ une solution de* (21), c'est-à-dire que:

$$F(x_0, y_0) = 0; \tag{22}$$

supposons que $F(x, y)$ et ses dérivées partielles du premier ordre par rapport à x et y sont des fonctions continues pour toutes les valeurs de x et de y suffisamment proches de x_0 et y_0 et supposons enfin que la dérivée partielle $F'_y(x, y)$ ne soit pas nulle pour $x = x_0$ et $y = y_0$. Dans ces conditions il existe une fonction définie $y(x)$, pour tout x suffisamment proche de x_0, qui vérifie l'équation (21), *qui soit continue, possède une dérivée et vérifie la condition $y(x_0) = y_0$.*

Supposons pour fixer les idées que $F'_y(x, y) > 0$ pour $x = x_0$, $y = y_0$. Comme nous avons supposé que cette dérivée est continue, elle sera positive pour toutes valeurs x et y suffisamment voisines de x_0 et de y_0, c'est-à-dire qu'il existe un nombre positif l tel que $F(x, y)$ et ses dérivées partielles sont continues et que

$$F'_y(x, y) > 0 \tag{23}$$

pour tout x et y satisfaisant aux conditions:

$$|x - x_0| \leqslant l, \quad |y - y_0| \leqslant l. \tag{24}$$

De plus, la fonction $F(x_0, y)$ d'une variable y devient nulle pour $y = y_0$ (22), et c'est une fonction croissante de y dans l'intervalle $(y_0 - l, y_0 + l)$ en vertu de (23) et de (24). De sorte que les nombres $F(x_0, y_0 - l)$ et $F(x_0, y_0 + l)$ seront de signe différent, le premier sera négatif tandis que le second sera positif. En tenant compte de la continuité de $F(x, y)$ nous pouvons affirmer [II-4-1] que $F(x, y_0 - l)$ sera négatif et $F(x, y_0 + l)$ sera positif pour tout x suffisamment proche de x_0, c'est-à-dire qu'il existe un nombre positif l_1 tel que:

$$F(x, y_0 - l) < 0 \quad \text{et} \quad F(x, y_0 + l) > 0 \tag{25}$$

pour $|x - x_0| \leqslant l_1$. Désignons par m le plus petit des deux nombres: l et l_1. En tenant compte de (24) et de (25), nous pouvons affirmer que les inégalités (23) et (25) sont vérifiées si x et y vérifient les inégalités:

$$|x - x_0| \leqslant m, \quad |y - y_0| \leqslant l. \tag{26}$$

Si nous prenons un x quelconque situé dans l'intervalle $(x_0 - m, x_0 + m)$, c'est-à-dire vérifiant la première des inéquations (26), $F(x, y)$ en tant que fonction de y sera, en vertu de (23), une fonction croissante dans l'intervalle $(y_0 - l, y_0 + l)$ et, en vertu de (25), sera de signe contraire aux extrémités de cet intervalle. Par suite, elle deviendra nulle pour une valeur déterminée unique de y

dans cet intervalle. En particulier, si $x = x_0$, d'après (22) cette valeur y sera $y = y_0$. Nous avons démontré de la sorte l'existence sur l'intervalle $(x_0 - m, x_0 + m)$ d'une fonction définie $y(x)$ qui est solution de l'équation (21) et satisfait la condition $y(x_0) = y_0$. Autrement dit, il résulte des considérations ci-dessus que pour tout x donné dans l'intervalle $(x_0 - m, x_0 + m)$, l'équation (21) a une seule racine dans l'intervalle $(y_0 - l, y_0 + l)$.

Montrons maintenant que la fonction obtenue $y(x)$ sera continue pour $x = x_0$. En effet, pour tout ε donné petit et positif $F(x_0, y_0 - \varepsilon)$ et $F(x_0, y_0 + \varepsilon)$ seront de signe contraire [cf. (25)] et par conséquent il existera un η positif tel que $F(x, y_0 - \varepsilon)$ et $F(x, y_0 + \varepsilon)$ seront de signe contraire si $|x - x_0| < \eta$, autrement dit, pour $|x - x_0| < \eta$ la racine de (21), c'est-à-dire la valeur de la fonction trouvée $y(x)$, vérifie la condition $|y - y_0| < \varepsilon$, ce qui prouve la continuité de $y(x)$ pour $x = x_0$.

Prouvons maintenant l'existence de la dérivée $y'(x)$ pour $x = x_0$. Soit $\Delta x = x - x_0$ et soit $\Delta y = y - y_0$ l'accroissement correspondant de y. Il en résulte que $x = x_0 + \Delta x$ et $y = y_0 + \Delta y$ vérifient l'équation (21), c'est-à-dire que $F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0$, et d'après (22) on peut écrire:

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = 0.$$

En tenant compte de la continuité des dérivées partielles, on peut écrire cette égalité ainsi [II-4-2]:

$$[F'_{x_0}(x_0, y_0) + \varepsilon_1]\,\Delta x + [F'_{y_0}(x_0, y_0) + \varepsilon_2]\,\Delta y = 0, \tag{27}$$

où ε_1 et $\varepsilon_2 \to 0$ si Δx et $\Delta y \to 0$ et où nous avons désigné par $F'_{x_0}(x_0, y_0)$ et $F'_{y_0}(x_0, y_0)$ les valeurs des dérivées partielles pour $x = x_0$ et $y = y_0$. De la continuité que nous avons démontrée ci-dessus il résulte que $\Delta y \to 0$, si $\Delta x \to 0$.

L'équation (27) nous donne:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_{x_0}(x_0, y_0) + \varepsilon_1}{F'_{y_0}(x_0, y_0) + \varepsilon_2};$$

en passant à la limite lorsque $\Delta x \to 0$ nous obtenons:

$$y'(x_0) = -\frac{F'_{x_0}(x_0, y_0)}{F'_{y_0}(x_0, y_0)}.$$

Nous avons démontré la continuité et l'existence de la dérivée de la fonction $y(x)$ seulement pour $x = x_0$. Si nous prenons une autre valeur quelconque de x prise dans l'intervalle $(x_0 - m, x_0 + m)$ et la valeur correspondante de y dans l'intervalle $(y_0 - l, y_0 + l)$, valeur qui est racine de l'équation (21), toutes les conditions de notre théorème sont vérifiées pour ce couple de valeurs x, y, et d'après ce qui a été démontré $y(x)$ sera continue et aura une dérivée pour la valeur choisie de x dans l'intervalle déjà mentionné.

De la même façon que ci-dessus on peut formuler et démontrer le théorème d'existence de la fonction implicite $z(x, y)$ définie par l'équation:

$$\Phi(x, y, z) = 0.$$

Examinons maintenant le système:

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0, \tag{28}$$

définissant y et z comme fonctions de x.

Dans ce cas on a le théorème:

T h é o r è m e. *Soit $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ une solution du système (28), supposons que $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ et leurs dérivées partielles du premier ordre* *sont des fonctions continues de (x, y, z) pour toutes les valeurs de ces variables suffisamment proches de (x_0, y_0, z_0) et supposons que l'expression*

$$\varphi'_y(x, y, z)\,\psi'_z(x, y, z)-\varphi'_z(x, y, z)\,\psi'_y(x, y, z)$$

ne soit pas nulle pour $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$. Alors pour toute valeur de x suffisamment proche de x_0 il existe un système défini de deux fonctions $y(x)$ et $z(x)$ vérifiant les équations (28) continues, ayant des dérivées du premier ordre et satisfaisant à la condition $y(x_0)=y_0$, $z(x_0)=z_0$.

Nous ne nous arrêterons pas à la démonstration de ce théorème. Au tome III nous étudierons le cas général d'un nombre quelconque de fonctions à un nombre quelconque de variables.

V-1-10. Courbes dans l'espace et surfaces. Commençons par indiquer certains faits connus en géométrie analytique. Soit un espace à trois dimensions rapporté à des axes rectilignes perpendiculaires OX, OY, OZ, de sorte que chaque point est déterminé par les coordonnées x, y, z. Soit a, b, c un ensemble ordonné de nombres dont l'un au moins est différent de zéro. Il lui correspond deux directions opposées dans l'espace dont *les cosinus directeurs* (les cosinus des angles formés par ces directions avec les axes OX, OY, OZ) sont proportionnels aux nombres (a, b, c).

Les cosinus mentionnés s'expriment par les formules

$$\cos\alpha=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \cos\beta=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Le choix du signe du radical (supérieur ou inférieur) détermine l'une des deux directions opposées.

Soient deux ensembles ordonnés de trois nombres (a, b, c) et (a_1, b_1, c_1). L'égalité

$$aa_1+bb_1+cc_1=0$$

exprime *la condition d'orthogonalité* des directions qui leur correspondent.

On sait en géométrie analytique qu'à toute équation de trois variables:

$$F(x, y, z)=0, \tag{29}$$

ou sous forme explicite:

$$z=f(x, y), \tag{30}$$

correspond en général une surface dans l'espace rapporté à des axes de coordonnées normaux OX, OY, OZ.

Une ligne dans l'espace peut être considérée comme l'intersection de deux surfaces et par suite peut être définie par l'ensemble des deux équations:

$$F_1(x, y, z)=0, \quad F_2(x, y, z)=0. \tag{31}$$

Autrement on peut définir une courbe sous forme paramétrique au moyen des équations:

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\omega(t). \tag{32}$$

La longueur de l'arc d'une courbe, de même que dans le cas d'une courbe plane, est définie comme la limite de la longueur des segments des lignes brisées inscrites dans cet arc lorsque chacun de ces segments tend vers zéro. Des raisonnements que nous ne reproduirons pas, car ils sont absolument analogues à ceux que nous avons faits [III-3-3] dans le cas d'une courbe plane, montrent que la longueur d'un tel arc s'exprime au moyen d'une intégrale définie

$$s=\int_{(M_1)}^{(M_2)}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\,dt, \tag{33}$$

où t_1 et t_2 sont les valeurs du paramètre t qui correspondent aux extrémités M_1 et M_2 de l'arc et la différentielle de l'arc s'écrit:

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}. \tag{34}$$

Si c'est la longueur de l'arc s de la courbe qui joue le rôle du paramètre t, en prenant pour origine un point bien défini de la courbe, on peut montrer, de la même façon que dans le cas de la courbe plane [II-5-1], que les dérivées $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ sont égales aux cosinus directeurs de la tangente à la courbe, c'est-à-dire qu'ils sont égaux aux cosinus des angles formés par la direction positive de cette tangente avec les axes de coordonnées. D'après (32) et (33), nous obtenons pour ces cosinus les formules:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{\varphi'(t)}{\pm\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}},\\ \cos\beta&=\frac{\psi'(t)}{\pm\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}},\\ \cos\gamma&=\frac{\omega'(t)}{\pm\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}}\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

en choisissant le signe du radical en conformité avec la direction de la tangente.

Ci-dessus nous avons supposé que les fonctions (32) ont des dérivées continues dont l'une au moins n'est pas nulle.

De la sorte, les cosinus directeurs de la tangente à la courbe au point (x, y, z) sont proportionnels à $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\omega'(t)$ ou à dx, dy, dz, et l'équation de la tangente peut être mise sous la forme:

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}, \tag{36$_1$}$$

soit :

$$\frac{X-x}{\varphi'(t)}=\frac{Y-y}{\psi'(t)}=\frac{Z-z}{\omega'(t)}. \tag{36$_2$}$$

Introduisons maintenant une notion nouvelle: la notion de plan tangent à une surface:

$$F(x, y, z)=0. \tag{37}$$

Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point quelconque de cette surface et L une ligne (32) de la surface passant par le point M_0, aussi bien que pour un certain $t=t_0$ nous avons $x_0=\varphi(t_0)$, $y_0=\psi(t_0)$, $z_0=\omega(t_0)$. Supposons que la fonction (37) possède au point M_0 et à son voisinage des dérivées partielles continues par rapport à x, y et z dont l'une au moins est différente de zéro. Que les fonctions (32) aient la propriété analogue pour $t=t_0$ au voisinage de cette valeur également.

Comme L est sur la surface (37), en rapportant (32) dans le premier membre de l'équation (37), nous obtiendrons l'égalité par rapport à t. En dérivant cette égalité par rapport à t, nous aurons

$$F_x(x, y, z)\varphi'(t)+F_y(x, y, z)\psi'(t)+F_z(x, y, z)\omega'(t)=0,$$

où il faut substituer à x, y, z les fonctions (32), et au point M_0

$$F_x(x_0, y_0, z_0)\varphi'(t_0)+F_y(x_0, y_0, z_0)\psi'(t_0)+F_z(x_0, y_0, z_0)\omega'(t_0)=0. \tag{38}$$

Nous avons vu que $\varphi'(t_0)$, $\psi'(t_0)$, $\omega'(t_0)$ sont proportionnels aux cosinus directeurs de la tangente à la ligne L au point M_0 et l'égalité (38) montre que la tangente à toute ligne L située sur la surface (37) et passant par le point M_0 est perpendiculaire à une certaine direction déterminée ne dépendant pas du choix de L, dont les cosinus directeurs sont proportionnels aux nombres $F_x(x_0, y_0, z_0)$, $F_y(x_0, y_0, z_0)$, $F_z(x_0, y_0, z_0)$. Nous voyons de la sorte que les tangentes au point M_0 à toutes les lignes situées sur la surface et passant par le point M_0 sont sur un seul et même plan. Cette surface s'appelle *plan tangent* à la surface (37) au point M_0. Elle passe, évidemment, par le point M_0. Soit

$$A(X-x_0)+B(Y-y_0)+C(Z-z_0)=0 \tag{39}$$

l'équation de ce plan. On sait de la géométrie analytique que les coefficients A, B, C doivent être proportionnels aux cosinus directeurs de la normale à cette surface, c'est-à-dire que dans le cas présent, ils sont proportionnels à $F_x(x_0, y_0, z_0)$, $F_y(x_0, y_0, z_0)$, $F_z(x_0, y_0, z_0)$; par la suite, au lieu du point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nous emploierons la notation générale du point $M(x, y, z)$. Ainsi, A, B et C doivent être proportionnels à $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$, $F'_z(x, y, z)$ et, par conséquent, l'équation du plan tangent à la surface peut être mise finalement sous la forme:

$$F'_x(x, y, z)(X-x)+F'_y(x, y, z)(Y-y)+$$
$$+F'_z(x, y, z)(Z-z)=0, \tag{40}$$

où X, Y, Z sont les coordonnées du point courant du plan tangent et x, y, z sont les coordonnées du point de contact M.

La normale au plan tangent passant par le point de contact M s'appelle *normale à la surface*. Ses cosinus directeurs sont proportionnels, comme nous venons de le voir, aux dérivées partielles $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$, $F'_z(x, y, z)$ et, par conséquent, l'équation de la normale sera:

$$\frac{X-x}{F'_x(x, y, z)}=\frac{Y-y}{F'_y(x, y, z)}=\frac{Z-z}{F'_z(x, y, z)}. \tag{41}$$

Si la surface est donnée par une équation explicite: $z=f(x, y)$, l'équation (37) sera de la forme:

$$F(x, y, z)=f(x, y)-z=0,$$

et, par conséquent,

$$F'_x(x, y, z)=f'_x(x, y), \quad F'_y(x, y, z)=f'_y(x, y), \quad F'_z(x, y, z)=-1.$$

En désignant, comme d'habitude, les dérivées partielles $f'_x(x, y)$ et $f'_y(x, y)$ par les symboles p et q, on obtient l'équation du plan tangent

$$p(X-x)+q(Y-y)-(Z-z)=0 \tag{42}$$

et de la normale à la surface

$$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1}. \tag{43}$$

Pour l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

l'équation du plan tangent en un certain point de celui-ci (x, y, z) sera:

$$\frac{2x}{a^2}(X-x)+\frac{2y}{b^2}(Y-y)+\frac{2z}{c^2}(Z-z)=0,$$

soit:

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}.$$

Le second membre de cette équation est égale à l'unité car les coordonnées du point de contact (x, y, z) doivent vérifier l'équation de l'ellipsoïde et en fin de compte l'équation du plan tangent sera:

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=1.$$

V-2. Formule de Taylor, maxima et minima d'une fonction de plusieurs variables

V-2-1. Généralisation de la formule de Taylor au cas d'une fonction de plusieurs variables indépendantes. Pour simplifier les notations limitons-nous au cas d'une fonction $f(x, y)$ de deux variables indépendantes. *La formule de Taylor* donne le développement de $f(a+h, b+k)$ en série de puissances de h et k qui sont les accroissements des variables indépendantes [IV-2-2]. Introduisons une nouvelle variable indépendante t en posant:

$$x=a+ht, \quad y=b+kt. \tag{1}$$

Nous obtenons de la sorte une fonction d'une variable indépendante t:

$$\varphi(t)=f(x, y)=f(a+ht, b+kt),$$

avec:

$$\varphi(0)=f(a, b) \quad \text{et} \quad \varphi(1)=f(a+h, b+k). \tag{2}$$

En utilisant la formule de Maclaurin avec le reste de Lagrange, on a [IV-2-2]:

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1!}+\frac{\varphi''(0)}{2!}+\ldots+\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}+$$
$$+\frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\,(0<\theta<1). \tag{3}$$

Exprimons maintenant les dérivées $\varphi^{(p)}(0)$ et $\varphi^{(n+1)}(\theta)$ au moyen de la fonction $f(x, y)$. Il résulte de (1) que x et y sont des fonctions linéaires d'une variable indépendante t et

$$dx=h\,dt, \quad dy=k\,dt.$$

Nous pouvons donc utiliser la formule symbolique pour définir la différentielle de n'importe quel ordre de la fonction $\varphi(t)$ [V-1-6]:

$$d^p\varphi(t)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(p)}f(x, y)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(p)}f(x, y)\,dt^p,$$

d'où

$$\varphi^{(p)}(t)=\frac{d^p\varphi(t)}{dt^p}=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(p)}f(x, y).$$

Pour $t = 0$ nous avons $x = a$ et $y = b$, pour $t = \theta$ nous avons $x = a + \theta h$ et $y = b + \theta k$, d'où:

$$\varphi^{(p)}(0) = \left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(p)} f(a, b) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(p)} f(x, y)\Big|_{\substack{x=a\\y=b}},$$

$$\varphi^{(n+1)}(\theta) = \left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(n+1)} f(a+\theta h, b+\theta k).$$

En portant ces expressions dans la formule (3) et en tenant compte de (2), on obtient finalement *la formule de Taylor*:

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right) f(a, b) + \\ + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(2)} f(a, b) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(n)} f(a, b) + \\ + \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(n+1)} f(a+\theta h, b+\theta k). \quad (4)$$

En remplaçant dans cette formule a par x et b par y et en désignant les accroissements h et k des variables indépendantes par dx et dy, et l'accroissement de la fonction, c'est-à-dire $f(x + dx, y + dy) - f(x, y)$, par $\Delta f(x, y)$, on peut mettre la formule sous la forme:

$$\Delta f(x, y) = df(x, y) + \frac{d^2 f(x, y)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(x, y)}{n!} + \\ + \left[\frac{d^{n+1} f(x, y)}{(n+1)!}\right]_{\substack{x+\theta\, dx\\ y+\theta\, dy}}.$$

Le second membre de cette formule contient les différentielles des différents ordres de la fonction $f(x, y)$ et dans le reste on a indiqué les valeurs des variables indépendantes qu'il faut introduire dans les dérivées du $(n + 1)^{\text{ième}}$ ordre qui figurent dans ce terme. Comme dans les cas d'une fonction d'une variable indépendante, la formule de Maclaurin qui donne le développement de la fonction $f(x, y)$ en série de puissances de x, y s'obtient à partir de la formule de Taylor (4) si on pose:

$$a=0, \quad b=0; \quad h=x, \quad k=y.$$

En obtenant la formule (4) nous avons supposé que la fonction $f(x, y)$ avait des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre $(n+1)$ dans un certain domaine ouvert contenant le segment de droite joignant les points (a, b) et $(a + h, b + k)$. Lorsque t varie de 0 à 1, le point variable $x = a + ht$, $y = b + kt$ décrit ce segment. Pour $n = 0$ on obtient la formule des accroissements finis:

$$f(a+h, b+k)-f(a, b)=hf'_a(a+\theta h, b+\theta k)+kf'_b(a+\theta h, b+\theta k).$$

Il en résulte comme en [II-3-7] que *si dans un certain domaine, les dérivées partielles du premier ordre sont partout nulles, la fonction est constante à l'intérieur de ce domaine.*

V-2-2. Conditions nécessaires d'existence des maxima et minima d'une fonction. Supposons que la fonction $f(x, y)$ est continue au point (a, b) et dans son voisinage. Comme dans le cas d'une variable indépendante nous dirons que *la fonction $f(x, y)$ de deux variables indépendantes atteint un maximum au point (a, b), si la valeur de $f(a, b)$ n'est pas plus petite que les valeurs de la fonction aux points voisins*, c'est-à-dire:

$$\Delta f=f(a+h, b+k)-f(a, b)\leqslant 0, \tag{5}$$

pour tout h et k suffisamment petits en valeur absolue.

De la même façon nous dirons que *la fonction $f(x, y)$ atteint un minimum pour $x = a$ et $y = b$, si*

$$\Delta f=f(a+h, b+k)-f(a, b)\geqslant 0 \tag{5_1}$$

pour toutes les valeurs h et k suffisamment petites en valeur absolue.

Ainsi, soit $x = a$, $y = b$ les valeurs des variables indépendantes pour lesquelles la fonction $f(x, y)$ atteint le maximum ou le minimum. Examinons la fonction $f(x, b)$ de la variable indépendante x; par définition, elle doit atteindre le maximum ou le minimum pour $x = a$, c'est pourquoi sa dérivée par rapport à x pour $x = a$ doit être nulle ou bien elle ne doit pas exister [II-3-2]. A l'aide d'un raisonnement identique on vérifiera que la fonction dérivée $f(a, y)$ par rapport à y doit être nulle ou ne pas exister au point $y = b$. Ainsi nous obtenons la condition nécessaire d'existence d'un maximum ou d'un minimum: *la fonction $f(x, y)$ de deux variables indépendantes peut passer par un maximum ou un minimum seulement pour les valeurs de x et y pour lesquelles les dérivées partielles du premier ordre $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ et $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ sont nulles ou n'existent pas.*

En faisant varier seulement x ou y on peut affirmer, selon [II-3-2], que lorsqu'il existe des dérivées du second ordre, la condition nécessaire pour qu'il existe un maximum est $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \leqslant 0$ et $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \leqslant 0$, et la condition nécessaire pour qu'il y ait un minimum est $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \geqslant 0$ et $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \geqslant 0$.

Les raisonnements précédents restent valables dans le cas d'une fonction d'un nombre quelconque de variables indépendantes. Nous pouvons alors énoncer la règle:

Une fonction de plusieurs variables indépendantes passe par un maximum ou un minimum seulement pour les valeurs des variables indépendantes pour lesquelles les dérivées partielles du premier ordre sont nulles ou n'existent pas. Dans la suite nous nous limiterons à l'étude du cas où les dérivées indiquées existent.

La différentielle du premier ordre est égale à la somme des produits des dérivées partielles par rapport aux variables indépendantes par les différentielles des variables indépendantes correspondantes [V-1-3], et nous pouvons dire que *pour les valeurs des variables indépendantes pour lesquelles la fonction a un maximum ou un minimum, sa différentielle du premier ordre doit être nulle.* Cette formulation de la condition nécessaire est commode car l'expression de la différentielle du premier ordre ne dépend pas du choix des variables [V-1-3]. En annulant les dérivées partielles du premier ordre, nous obtenons un système d'équations à partir duquel on détermine les valeurs des variables indépendantes pour lesquelles la fonction peut passer par un maximum ou un minimum. Pour résoudre complètement cette question il faut encore examiner les valeurs obtenues pour décider si la fonction passe effectivement, pour ces valeurs des variables indépendantes, par un maximum ou un minimum, et si oui, s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum. Au paragraphe suivant nous montrerons comment on effectue cette recherche dans le cas de deux variables indépendantes.

V-2-3. Etude du maximum et du minimum d'une fonction de deux variables indépendantes. Soit le système d'équations:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0, \tag{6}$$

exprimant les conditions nécessaires pour maximum ou minimum, nous donne les valeurs $x = a$ et $y = b$ à étudier. Supposons que $f(x, y)$ a des dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre au point (a, b) et au voisinage de ce point.

D'après la formule de Taylor (4) pour $n = 2$ nous avons:

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial a} h + \frac{\partial f(a, b)}{\partial b} k +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y} hk + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} k^2\right]_{\substack{x=a+\theta h \\ y=b+\theta k}}.$$

En tenant compte de ce que $x = a$ et $y = b$ sont solutions du système (6), nous pouvons écrire cette égalité sous la forme:

$$\Delta f = f(a+h,\ b+k) - f(a,\ b) =$$
$$= \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y}hk + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}k^2\right]_{\substack{x=a+\theta h\\ y=b+\theta k}}. \tag{7}$$

Posons:

$$r = \sqrt{h^2+k^2},\quad h = r\cos\alpha,\quad k = r\sin\alpha.$$

Pour des valeurs absolues petites de h et k, r sera petit et réciproquement, et les conditions h et $k \to 0$ d'une part et $r \to 0$ d'autre part sont équivalentes.

La formule (7) peut alors s'écrire:

$$\Delta f = \frac{r^2}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\cos^2\alpha + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y}\cos\alpha\sin\alpha + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\sin^2\alpha\right|_{\substack{x=a+\theta h\\ y=b+\theta k}}. \tag{8}$$

En tenant compte de la continuité des dérivées du second ordre et en considérant que h et k, ou, ce qui revient au même, r sont des infiniment petits, nous pouvons affirmer que les dérivées dans le second membre de la formule (8), calculées pour les valeurs de $a + \theta h$, $b + \theta k$ qui diffèrent d'un infiniment petit de a et b, diffèrent elles-mêmes d'un infiniment petit des nombres

$$\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial a^2} = A,\quad \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial a\,\partial b} = B,\quad \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial b^2} = C,$$

c'est pourquoi on peut remplacer dans le terme entre crochets de (8) les coefficients des $\cos^2\alpha$, $\cos\alpha\sin\alpha$ et $\sin^2\alpha$ respectivement par

$$A + \varepsilon_1,\quad 2B + \varepsilon_2,\quad C + \varepsilon_3,$$

où ε_1, ε_2, ε_3 deviennent des grandeurs infiniment petites en même temps que h et k (ou que r).

On peut alors écrire la formule (8) sous la forme:

$$\Delta f = \frac{r^2}{2!}[A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha + \varepsilon], \tag{9}$$

où

$$\varepsilon = \varepsilon_1\cos^2\alpha + 2\varepsilon_2\cos\alpha\sin\alpha + \varepsilon_3\sin^2\alpha$$

est un infiniment petit en même temps que h et k (ou que r).

De la définition du maximum et du minimum il résulte que si le second membre de (9), pour toutes les valeurs suffisamment petites de r, est négatif, les valeurs $x = a$ et $y = b$ définissent un maximum de la fonction $f(x,\ y)$; s'il est positif, on a un minimum de la fonction;

si enfin pour les valeurs de r arbitrairement petites le second membre de (9) peut être aussi bien négatif que positif, il n'y a ni maximum, ni minimum correspondant au point $x = a$, $y = b$.

Lorsqu'on examine le signe du second membre de l'égalité (9), on peut rencontrer les quatre cas suivants:

I. Si le trinôme

$$A \cos^2 \alpha + 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha \tag{10}$$

n'est jamais nul quelle que soit la valeur de α, en tant que fonction continue de α il conserve un signe constant [II-2-3]. Supposons qu'il est positif. Dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ cette fonction continue passe par sa valeur la plus petite (positive) m. Etant donné la périodicité de $\cos \alpha$ et de $\sin \alpha$, cette valeur la plus petite de m aura lieu pour toute valeur de α. La grandeur $|\varepsilon|$ pour toutes les valeurs suffisamment petites de r est plus petite que m, et alors le signe du second membre de l'égalité (9) est défini par le signe du trinôme (10), c'est-à-dire qu'il sera positif et dans ce cas nous aurons un minimum.

II. Supposons maintenant que le trinôme (10) ne soit jamais nul, quelle que soit la valeur de α et qu'il soit toujours négatif. Supposons que m est la plus petite valeur (négative) de ce trinôme dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ de variation de α. La grandeur $|\varepsilon|$ pour des valeurs suffisamment petites de r est plus petite que m, alors le second membre de l'égalité (9) sera toujours négatif, c'est-à-dire que dans ce cas nous aurons un maximum.

III. Supposons ensuite que le trinôme (10) change de signe, que pour $\alpha = \alpha_1$, il soit positif et égal à $+m_1$ et que pour $\alpha = \alpha_2$ il est négatif et égal à $-m_2$. Pour toutes les valeurs suffisamment petites de r, $|\varepsilon|$ sera plus petit que m_1 et m_2. Pour de telles valeurs de r et pour $\alpha = \alpha_1$ ou α_2 le second membre de l'égalité (9) aura un signe défini par le signe du trinôme (10), c'est-à-dire qu'il sera positif pour $\alpha = \alpha_1$ et négatif pour $\alpha = \alpha_2$. De la sorte que dans le cas considéré le second membre de l'égalité (9) peut être aussi bien positif que négatif pour des valeurs arbitrairement petites de r, c'est-à-dire que dans ce cas nous n'aurons ni maximum, ni minimum.

IV. Supposons enfin que le trinôme (10) qui conserve un signe constant puisse s'annuler pour certaines valeurs de α. Dans ce cas, sans examiner davantage le signe de ε, nous ne pouvons tirer aucune conclusion quant au signe du second membre de l'égalité (9), et ce cas reste douteux dans notre étude.

Ainsi tout a été réduit à l'examen du signe du trinôme (10) lorsque α varie et nous indiquerons des critères simples permettant de vérifier auquel des quatre cas nous avons affaire.

a) Supposons tout d'abord que $A \neq 0$. Mettons le trinôme (10) sous la forme:

$$\frac{(A \cos \alpha + B \sin \alpha)^2 + (AC - B^2) \sin^2 \alpha}{A}. \tag{11}$$

Si $AC - B^2$ est positif, le numérateur de la fraction écrite est la somme de deux termes positifs qui ne peuvent pas s'annuler simultanément. En effet, le second terme s'annule seulement si $\sin\alpha = 0$, mais alors $\cos\alpha = \pm 1$ et le premier terme devient $A^2 \neq 0$. De sorte que dans le cas considéré le signe de (11) est le même que celui de A et, par suite, pour $A > 0$ nous aurons le cas (I), c'est-à-dire un minimum et pour $A < 0$ on a le cas (II), c'est-à-dire un maximum.

b) Supposons encore que $A \neq 0$, mais que $AC-B^2$ soit négatif. Le numérateur de la fraction (11) sera positif si $\sin\alpha = 0$ et négatif pour $\operatorname{cotg}\alpha = -\frac{B}{A}$, c'est pourquoi dans les conditions indiquées nous aurons le cas (III), c'est-à-dire qu'on n'aura ni maximum ni minimum.

c) Si pour $A \neq 0$ nous avons $AC - B^2 = 0$, le numérateur de la fraction (11) se réduit au premier terme et, étant toujours positif, devient nul pour $\operatorname{cotg}\alpha = -\frac{B}{A}$, c'est-à-dire que dans ces conditions nous avons le cas douteux (IV).

d) Supposons maintenant que $A = 0$ mais que $B \neq 0$, le trinôme (10) peut alors s'écrire: $\sin\alpha\,(2B\cos\alpha + C\sin\alpha)$. Pour les valeurs de α proches de zéro, l'expression entre parenthèses garde un signe constant identique à celui de B et le terme $\sin\alpha$ a un signe différent suivant que α est plus grand ou plus petit que zéro, c'est-à-dire qu'on a le cas (III) où il n'y a ni maximum ni minimum.

e) Supposons enfin que $A = B = 0$. Alors le trinôme (10) se réduit au seul terme $C\sin^2\alpha$ et, par conséquent, peut s'annuler sans changer de signe, c'est-à-dire qu'on a le cas douteux.

En tenant compte de ce que dans le cas *d* on a $AC - B^2 < 0$ et dans le cas *e* nous avons $AC - B^2 = 0$, on peut énoncer la règle suivante: *pour obtenir les maxima et les minima à l'intérieur d'un domaine en supposant que la fonction $f(x, y)$ y soit continue et possède des dérivées continues du second ordre, il faut écrire les dérivées partielles $f'_x(x, y)$ et $f'_y(x, y)$ et résoudre le système d'équations*:

$$f'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0.$$

Soit $x = a$, $y = b$ une solution quelconque de ce système. En posant:

$$\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial a^2} = A, \quad \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial a\, \partial b} = B, \quad \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial b^2} = C,$$

on détermine la solution d'après le schéma suivant:

$AC-B^2$	+		−	0
A	+	−	ni min. ni max.	cas douteux
	min.	max.		

V-2-4. Exemples. 1. Examinons une surface $z = f(x, y)$. L'équation du plan tangent sera [V-1-10]:

$$p(X-x)+q(Y-y)-(Z-z)=0,$$

où p et q représentent les dérivées partielles $f'_x(x, y)$ et $f'_y(x, y)$.

Si pour certaines valeurs $x = a$ et $y = b$ la fonction z passe par un maximum ou un minimum, le point correspondant est *un sommet* de la surface: en un tel point le plan tangent doit être parallèle au plan XY, c'est-à-dire que les dérivées partielles p et q doivent s'annuler et la surface doit être située d'un côté du plan tangent, au voisinage du point de contact (fig. 163). Mais il

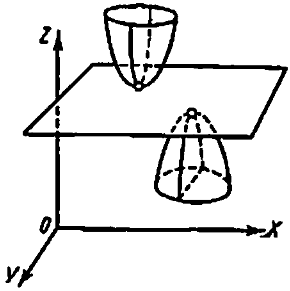

Fig. 163

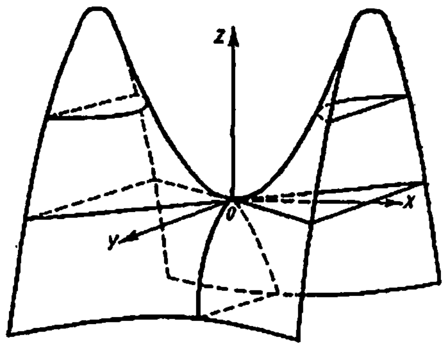

Fig. 164

peut arriver que p et q s'annulent en un certain point, c'est-à-dire que le plan tangent soit parallèle au plan XY mais la surface au voisinage de ce point est située des deux côtés du plan tangent, et dans ce cas pour des valeurs définies de x et de y la fonction z ne passera ni par un maximum ni par un minimum.

Indiquons encore une éventualité qui peut avoir lieu dans le cas que nous avons appelé douteux au paragraphe précédent. Supposons que pour $x = a$, $y = b$ le plan tangent est parallèle au plan XY et la surface est située d'un côté du plan tangent mais a en commun avec lui une ligne passant par le point de contact. Dans ce cas la différence:

$$f(a+h, b+k)-f(a, b),$$

ne changeant pas de signe pour des valeurs absolues de h et k suffisamment petites, pourra s'annuler, bien que h ou k ne soient pas nuls. Il est facile de réaliser ce cas, en s'imaginant par exemple un cylindre dont l'axe est parallèle au plan XY. Dans ce cas on dit aussi que la fonction $f(x, y)$ a un maximum ou un minimum pour $x = a$ et $y = b$ [V-2-2].

La surface

$$2z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$

est un paraboloïde hyperbolique. En annulant les dérivées partielles de z par rapport à x et à y on obtient $x = y = 0$, et le plan tangent à la surface à l'origine des coordonnées coïncidera avec le plan XY. Considérons les dérivées partielles du second ordre :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{b^2},$$

par conséquent, nous avons :

$$AC-B^2=-\frac{1}{a^2b^2}<0,$$

c'est-à-dire que pour $x=y=0$ la fonction z n'a ni maximum ni minimum et au voisinage de l'origine des coordonnées la surface est disposée de part et d'autre du plan tangent (fig. 164).

2. Sur une surface on se donne n points M_i (a_i, b_i) $(i=1, 2, \ldots, n)$. On cherche le point M tel que la somme des produits des nombres positifs donnés m_i par le carré des distances du point M aux points M_i soit minimum. Soit (x, y) les coordonnées du point M cherché. La somme considérée sera :

$$w=\sum_{i=1}^{n} m_i\,[(x-a_i)^2+(y-b_i)^2].$$

En annulant les dérivées partielles w'_x et w'_y, il vient :

$$x=\frac{m_1a_1+m_2a_2+\ldots+m_na_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}, \qquad y=\frac{m_1b_1+m_2b_2+\ldots+m_nb_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}. \tag{12}$$

On peut facilement vérifier que dans le cas considéré A et $AC-B^2$ seront positifs et que, par conséquent, un minimum w correspondra effectivement aux valeurs trouvées de x et y. Ce minimum est la valeur la plus petite de w dans le plan (x, y) car $w\to+\infty$ lorsqu'on éloigne indéfiniment le point (x, y).

Si les points M_i sont des points matériels de masse m_i, *la formule* (12) *définit les coordonnées du centre de gravité pour le système des points M_i.*

V-2-5. Remarques supplémentaires sur la recherche des minima et des maxima d'une fonction. Les raisonnements précédents peuvent se généraliser au cas d'un plus grand nombre de variables indépendantes. Soit une fonction de trois variables indépendantes $f(x, y, z)$. Pour trouver les valeurs des variables indépendantes pour lesquelles cette fonction passe par un maximum ou un minimum, nous devons résoudre un système de trois équations avec trois inconnues [V-2-2] :

$$f'_x(x, y, z)=0, \quad f'_y(x, y, z)=0, \quad f'_z(x, y, z)=0. \tag{13}$$

Soit $x=a$, $y=b$, $z=c$ une des solutions du système. Exposons brièvement le moyen d'étudier ces valeurs. La formule de Taylor nous donne l'accroissement d'une fonction sous forme d'une somme de polynômes homogènes développés suivant les puissances des accroissements des variables indépendantes :

$$\Delta f=h\,\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial a}+k\,\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial b}+l\,\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial c}+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}+l\frac{\partial}{\partial c}\right)^{(2)} f(a, b, c)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}+l\frac{\partial}{\partial c}\right)^{(n+1)} f(a+\theta h,\, b+\theta k,\, c+\theta l) \quad (0<\theta<1). \tag{14}$$

Les valeurs $x = a$, $y = b$, $z = c$ vérifient les équations (13). Par suite:

$$h\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial a}+k\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial b}+l\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial c}=0.$$

Si l'ensemble des termes du second ordre par rapport à h, k, l

$$\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}+l\frac{\partial}{\partial c}\right)^{(2)} f(a, b, c) \tag{15}$$

s'annule seulement pour $h = k = l = 0$, le signe du second membre de (14) pour h, k, l suffisamment petits en valeur absolue est le même que celui de (15), et si ce signe est (+), $f(a, b, c)$ est un minimum de la fonction $f(x, y, z)$, si c'est (—), nous avons un maximum. Si l'expression (15) peut avoir des signes différents, $f(a, b, c)$ n'est ni un maximum, ni un minimum de la fonction. Si enfin l'expression (15), sans changer de signe, s'annule pour certaines valeurs de h, k, l différentes de $h = k = l = 0$, on a le cas douteux et il faut étudier dans le second membre de (14) des termes qui ont un degré supérieur à deux en h, k et l.

Effectuons l'examen complet de ce cas douteux dans l'exemple particulier de deux variables indépendantes:

$$u=x^2-2xy+y^2+x^3+y^3.$$

Les valeurs $x = y = 0$ rendent nulles les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$. De plus, nous avons:

$$A=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{\substack{x=0\\y=0}}=2, \qquad B=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\bigg|_{\substack{x=0\\y=0}}=-2, \qquad C=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\bigg|_{\substack{x=0\\y=0}}=2,$$

$$AC-B^2=0,$$

c'est-à-dire que nous sommes dans le cas douteux. Une particularité caractéristique de ce cas est que l'ensemble des termes du second degré dans l'expression de la fonction u est un carré parfait et nous pouvons écrire

$$u=(x-y)^2+(x^3+y^3).$$

Pour $x = y = 0$, u devient nul. Pour examiner le signe de u pour x et y voisins de zéro, introduisons les coordonnées polaires:

$$x=r\cos\alpha, \quad y=r\sin\alpha.$$

En remplaçant x et y par leurs valeurs, il vient:

$$u=r^2\left[(\cos\alpha-\sin\alpha)^2+r(\cos^3\alpha+\sin^3\alpha)\right].$$

Pour toute valeur de α dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, différente de $\frac{\pi}{4}$ et de $\frac{5\pi}{4}$:

$$\cos\alpha-\sin\alpha\neq 0,$$

et pour toute valeur de α on peut choisir un r_0 positif tel que pour $r < r_0$ l'expression entre crochets soit positive. Si $\alpha=\frac{\pi}{4}$, l'expression restera positive, mais pour $\alpha=\frac{5\pi}{4}$ elle devient négative et, par conséquent, pour $x = y = 0$ la fonction u n'aura ni maximum ni minimum.

Examinons maintenant la fonction:

$$u=(y-x^2)^2-x^6.$$

Il est facile de vérifier que pour $x = y = 0$ les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ s'annulent et que nous sommes dans le cas douteux. En prenant x arbitrairement petit et en posant $y = x^2$ on voit que la fonction u devient $(-x^6)$ et son signe dépendra de celui de x, c'est-à-dire que pour $x = y = 0$ la fonction ne passera ni par un maximum ni par un minimum. Introduisant les coordonnées polaires nous obtenons:

$$u = r^2 (\sin^2 \alpha - 2r \cos^2 \alpha \sin \alpha + r^2 \cos^4 \alpha - r^3 \cos^6 \alpha),$$

et on voit que pour toute valeur de α y compris $\alpha = 0$ et π, on peut trouver un r_0 positif tel que $u > 0$ pour $r < r_0$, c'est-à-dire que sur toute demi-droite issue

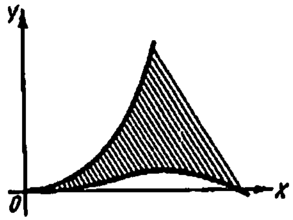

Fig. 165

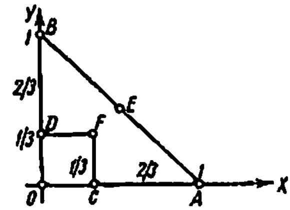

Fig. 166

de l'origine, la fonction u soit positive au voisinage de l'origine. Cependant cela n'entraîne pas que l'origine soit un minimum où $u = 0$ car on ne peut pas trouver un r_0 qui soit *le même* pour toutes les valeurs de α.

Nous avons tracé la courbe $(y - x^2)^2 - x^6 = 0$ [II-5-7], et nous avons vu qu'elle a un point de rebroussement du deuxième ordre à l'origine et que le premier membre de cette équation est négatif au voisinage de l'origine pour les points situés dans la région hachurée de la fig. 165 qui se trouve entre les deux branches de la courbe.

V-2-6. La plus grande et la plus petite valeur d'une fonction. Supposons que l'on veuille chercher la valeur la plus grande d'une fonction $f(x, y)$ donnée dans un certain domaine. La méthode exposée [V-2-3] nous permet de trouver tous les maxima *à l'intérieur* de ce domaine, c'est-à-dire les points du domaine où la fonction n'est pas moins grande qu'aux points voisins. Pour trouver la plus grande valeur de la fonction il faut tenir compte des valeurs de la fonction *aux limites* (contours) du domaine considéré et comparer ses maxima situés à l'intérieur du domaine avec ses valeurs sur les contours. La plus grande de toutes ces valeurs sera celle *la plus grande de la fonction dans le domaine donné.* On obtient de façon analogue *la plus petite valeur* de la fonction dans le domaine. Pour expliciter ces notions nous allons traiter un exemple.

Dans le plan on se donne le triangle OAB (fig. 166) *formé par les axes OX, OY et la droite*

$$x + y - 1 = 0. \tag{16}$$

On veut trouver le point de ce triangle pour lequel la somme des carrés des distances du point aux sommets du triangle soit la plus petite.

En tenant compte de ce que les sommets A et B ont pour coordonnées (1, 0) et (0, 1), nous pouvons écrire cette somme des carrés des distances du point variable (x, y) aux sommets du triangle:

$$z = 2x^2 + 2y^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2.$$

En annulant les dérivées partielles du premier ordre, nous obtenons $x =$ $= y = {}^1/_3$ et il est facile de montrer que la valeur correspondante de la fonction $z = {}^4/_3$ est le minimum. Examinons maintenant les valeurs de z sur le contour du triangle. Pour examiner la valeur de z sur le côté OA il suffit de poser $y = 0$ dans l'expression de z:

$$z = 2x^2 + (x-1)^2 + 1,$$

et x varie dans l'intervalle (0, 1). En faisant comme en [II-3-4], on voit que la plus petite valeur de z sur OA est ${}^5/_3$ au point C pour lequel $x = {}^1/_3$. De même, sur OB z passera par la plus petite valeur ${}^5/_3$ au point D pour lequel $y = {}^1/_3$. Pour examiner les valeurs de z sur le côté AB il suffit de poser $y = 1 - x$ dans l'expression (16) de z:

$$z = 3x^2 + 3(x-1)^2,$$

et x varie dans l'intervalle (0, 1). Dans ce cas la valeur minimum de z sera ${}^3/_2$ et se trouve au point E pour lequel $x = y = {}^1/_2$. Nous obtenons ainsi la table des valeurs les plus petites possibles de la fonction:

x, y	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}, 0$	$0, \frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
z	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$

On voit sur cette table que la plus petite valeur $z = {}^4/_3$ sera atteinte au point $({}^1/_3; {}^1/_3)$. Le problème posé peut être également résolu pour tout triangle et le point cherché est le centre de gravité du triangle.

V-2-7. Minima et maxima relatifs. Jusqu'à présent nous examinions les maxima et les minima d'une fonction en supposant que les variables dont dépendait la fonction étaient indépendantes. Dans de tels cas les maxima et les minima sont dits *absolus*. Passons maintenant à l'examen du cas où les variables dont dépend la fonction sont liées par certaines relations. Dans de tels cas les maxima et les minima sont dits *relatifs*.

Cherchons les maxima et les minima de la fonction:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n})$$

de $(m+n)$ variables x_i qui sont liées par n relations:

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) = 0 \qquad (17)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dans la suite pour abréger les notations nous n'écrirons pas les arguments des fonctions. En résolvant les n relations (17) relatives à n variables, par exemple:

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{m+n},$$

nous les exprimerons au moyen des m variables indépendantes

$$x_1, x_2, \ldots, x_m;$$

en portant ces expressions dans la fonction f, nous obtenons une fonction de m variables indépendantes, c'est-à-dire qu'on est ramené à chercher des maxima et des minima *absolus*. Mais une telle solution du système (17) est souvent difficile et parfois même impraticable, et nous indiquerons un autre moyen: *celui des multiplicateurs de Lagrange.*

Supposons qu'en un point $M(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n})$ la fonction f passe par un maximum ou un minimum relatif. En supposant l'existence de dérivées au point M, on peut affirmer que la différentielle totale de f doit s'annuler au point M [V-2-2]:

$$\sum_{s=1}^{m+n} \frac{\partial f}{\partial x_s} dx_s = 0. \tag{18}$$

D'autre part, en différentiant (17), on obtient au point M les n égalités suivantes:

$$\sum_{s=1}^{m+n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s} dx_s = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Multiplions ces équations par des coefficients qui sont pour l'instant indéterminés:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$

et les additionnons terme à terme entre elles et avec la relation (18):

$$\sum_{s=1}^{m+n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_s} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_s} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_s} + \ldots + \lambda_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_s} \right) dx_s = 0. \tag{19}$$

Définissons ces n multiplicateurs de façon à ce que les coefficients des n différentielles

$$dx_{m+1}, dx_{m+2}, \ldots, dx_{m+n}$$

des variables dépendantes soient nuls, c'est-à-dire que nous allons obtenir les $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ à partir de n égalités:

$$\frac{\partial f}{\partial x_s} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_s} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_s} + \ldots + \lambda_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_s} = 0 \tag{20}$$

$$(s = m+1, m+2, \ldots, m+n).$$

Alors, dans le premier membre de la relation (19), il ne restera que des termes contenant les différentielles des variables indépendantes :

$$dx_1,\ dx_2,\ \ldots,\ dx_m,$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_s}+\lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_s}+\lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_s}+\ldots+\lambda_n\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_s}\right)dx_s=0. \qquad (21)$$

Mais les différentielles dx_1, dx_2, . . ., dx_m des variables indépendantes sont des grandeurs arbitraires. En égalant l'une d'elles à 1 et les autres à 0, il résulte de l'égalité (21) que tous les coefficients de cette égalité doivent être nuls [V-1-8], c'est-à-dire que :

$$\frac{\partial f}{\partial x_s}+\lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_s}+\lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_s}+\ldots+\lambda_n\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_s}=0 \quad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \qquad (22)$$

Il faut tenir compte du fait que dans toutes les formules précédentes depuis (18), les variables x_s sont remplacées par les coordonnées du point M où, par hypothèse, f passe par un maximum ou un minimum relatif. En particulier, cela concerne les équations (20) à partir desquelles on doit déterminer λ_1, λ_2, . . ., λ_n.

De sorte que les équations (22), (20) et (17) expriment la condition nécessaire pour qu'au point $(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n})$ on soit en un maximum ou un minimum relatif.

Les équations (22), (20) *et* (17) *nous fournissent* $(m+2n)$ *équations pour déterminer* $(m+n)$ *variables* x_s *et* n *multiplicateurs* λ_i.

On voit, d'après le système (22) *et* (20), *que pour obtenir les valeurs des variables* x_s *pour lesquelles la fonction* f *passe par un maximum ou un minimum relatifs, il faut annuler les dérivées partielles par rapport à tous les* x_s *de la fonction* Φ *définie par la relation :*

$$\Phi=f+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\ldots+\lambda_n\varphi_n,$$

en considérant que λ_1, λ_2, . . ., λ_n *sont constants et leur adjoindre les* n *équations de liaison* (17).

Au paragraphe suivant, nous exposerons brièvement le problème des conditions suffisantes.

Notons que lors de l'obtention de la règle indiquée, nous avons supposé non seulement l'existence de dérivées des fonctions f et φ_i, mais aussi la possibilité de déterminer les multiplicateurs λ_1, λ_2, ..., λ_n à partir de l'équation (20). C'est pourquoi la règle indiquée peut ne pas donner certaines valeurs de $(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n})$ pour lesquelles on a un maximum ou un minimum relatif. Nous allons expliquer maintenant plus en détail cette circonstance dans les cas les plus simples et nous perfectionnerons la théorie.

V-2-8. Remarques complémentaires. Soit à chercher les maxima et minima relatifs d'une fonction $f(x, y)$ avec une condition supplémentaire:

$$\varphi(x, y) = 0, \tag{23}$$

et supposons, par exemple, que l'on passe par le maximum relatif au point (x_0, y_0) et que $\varphi(x_0, y_0) = 0$. Supposons que $\varphi(x, y)$ a des dérivées partielles continues du premier ordre au point (x_0, y_0) et à son voisinage et que de plus:

$$\varphi'_{y_0}(x_0, y_0) \neq 0. \tag{24}$$

Alors l'équation (23) définit de façon unique au voisinage de $x = x_0$ la fonction $y = \omega(x)$ continue, ainsi que sa dérivée continue et telle que $y_0 = \omega(x_0)$ [V-1-7]. En portant $y = \omega(x)$ dans la fonction $f(x, y)$, on peut affirmer que la fonction $f[x, \omega(x)]$ d'une variable x doit passer par un maximum pour $x = x_0$ et, par suite, que sa différentielle totale par rapport à x doit s'annuler pour $x = x_0$, c'est-à-dire:

$$f'_{x_0}(x_0, y_0) + f'_{y_0}(x_0, y_0)\,\omega'(x_0) = 0.$$

En portant $y = \omega(x)$ dans (23) et en différentiant par rapport à x on obtient au point (x_0, y_0) [II-4-3]:

$$\varphi'_{x_0}(x_0, y_0) + \varphi'_{y_0}(x_0, y_0)\,\omega'(x_0) = 0.$$

En multipliant cette équation par λ et en l'ajoutant terme à terme à la précédente, il vient:

$$(f'_{x_0} + \lambda\varphi'_{x_0}) + (f'_{y_0} + \lambda\varphi'_{y_0})\,\omega'(x_0) = 0.$$

En calculant λ à partir de la condition $f'_{y_0} + \lambda\varphi'_{y_0} = 0$, ce qui est possible, d'après (24), nous aurons $f'_{x_0} + \lambda\varphi'_{x_0} = 0$, c'est-à-dire qu'on a les deux équations:

$$f'_{x_0} + \lambda\varphi'_{x_0} = 0; \quad f'_{y_0} + \lambda\varphi'_{y_0} = 0, \tag{25}$$

auxquelles il faut ajouter l'équation $\varphi(x_0, y_0) = 0$, ce qui justifie la méthode des multiplicateurs. Si la condition (24) n'est pas satisfaite, c'est-à-dire si $\varphi'_{y_0}(x_0, y_0) = 0$ mais si $\varphi'_{x_0}(x_0, y_0) \neq 0$, on peut répéter tous les raisonnements précédents en intervertissant les rôles de x et de y. Si au point (x_0, y_0) nous avons:

$$\varphi'_{x_0}(x_0, y_0) = 0 \text{ et } \varphi'_{y_0}(x_0, y_0) = 0, \tag{26}$$

nous ne pouvons pas prouver que le point (x_0, y_0) peut être obtenu au moyen de la méthode des multiplicateurs.

Les égalités (26) montrent que le point (x_0, y_0) est un point singulier de la courbe (23) [II-5-7]. Donnons maintenant un exemple d'un problème pour lequel les conditions (26) sont vérifiées au minimum relatif.

Cherchons la distance minimum entre le point $(-1, 0)$ et les points situés sur la parabole semi-cubique $y^2 - x^3 = 0$ (v. fig. 87) [II-5-7]. Ainsi on cherche le minimum de la fonction $f = (x+1)^2 + y^2$ avec comme condition $\varphi = y^2 - x^3 = 0$. Il est évident par la géométrie que le minimum est atteint au point $(0, 0)$ situé sur la parabole semi-cubique et étant un point singulier. La méthode des multiplicateurs nous donne les deux équations:

$$2(x+1) - 3\lambda x^2 = 0, \qquad 2y + 2\lambda y = 0.$$

En faisant $x = 0$, $y = 0$ la première équation donne une égalité absurde $2 = 0$ et la deuxième est vérifiée pour tout λ. Dans ce cas, la méthode des multiplicateurs ne nous donnera pas le point $(0, 0)$ où on a un minimum relatif.

De façon analogue, on peut montrer que si au point (x_0, y_0, z_0) la fonction passe par un maximum ou un minimum avec une condition complémentaire

$\varphi(x, y, z) = 0$ et si l'une au moins des dérivées partielles du premier ordre de la fonction φ n'est pas nulle au point (x_0, y_0, z_0), ce point peut être obtenu au moyen des multiplicateurs.

Des raisonnements analogues s'appliquent aux cas plus généraux, mais il faut tenir compte du théorème des fonctions implicites pour les systèmes d'équations dont nous avons parlé [V-1-7]. Supposons par exemple que la fonction $f(x, y, z)$ passe par un maximum relatif au point (x_0, y_0, z_0) avec deux conditions complémentaires:

$$\varphi(x, y, z) = 0, \qquad \psi(x, y, z) = 0, \tag{27}$$

avec les hypothèses habituelles d'existence et de continuité des dérivées et si nous avons:

$$\varphi'_{y_0}(x_0, y_0, z_0)\,\psi'_{z_0}(x_0, y_0, z_0) - \varphi'_{z_0}(x_0, y_0, z_0)\,\psi'_{y_0}(x_0, y_0, z_0) \neq 0. \tag{28}$$

Alors les équations (27) définissent de façon unique les fonctions: $y = \omega_1(x)$ et $z = \omega_2(x)$ telles que $y_0 = \omega_1(x_0)$ et $z_0 = \omega_2(x_0)$. En portant ces fonctions dans la fonction f, on obtient une fonction de x seulement qui passe par un maximum pour $x = x_0$, d'où il résulte:

$$f'_{x_0}(x_0, y_0, z_0) + f'_{y_0}(x_0, y_0, z_0)\,\omega'_1(x_0) + f'_{z_0}(x_0, y_0, z_0)\,\omega'_2(x_0) = 0.$$

En portant ces fonctions dans (27) et en dérivant par rapport à x au point (x_0, y_0, z_0), on obtient:

$$\varphi'_{x_0} + \varphi'_{y_0}\omega'_1(x_0) + \varphi'_{z_0}\omega'_2(x_0) = 0, \quad \psi'_{x_0} + \psi'_{y_0}\omega'_1(x_0) + \psi'_{z_0}\omega'_2(x_0) = 0.$$

Multiplions ces équations par λ_1 et λ_2 et ajoutons-les à la précédente, il vient:

$$(f'_{x_0} + \lambda_1\varphi'_{x_0} + \lambda_2\psi'_{x_0}) + (f'_{y_0} + \lambda_1\varphi'_{y_0} + \lambda_2\psi'_{y_0}) + (f'_{z_0} + \lambda_1\varphi'_{z_0} + \lambda_2\psi'_{z_0}) = 0. \tag{29}$$

En tenant compte de (28), on peut affirmer qu'à partir des deux équations:

$$f'_{y_0} + \lambda_1\varphi'_{y_0} + \lambda_2\psi'_{y_0} = 0, \qquad f'_{z_0} + \lambda_1\varphi'_{z_0} + \lambda_2\psi'_{z_0} = 0 \tag{30}$$

nous pouvons obtenir λ_1 et λ_2 et l'équation (29) nous amène alors à l'égalité:

$$f'_{x_0} + \lambda_1\varphi'_{x_0} + \lambda_2\psi'_{x_0} = 0, \tag{31}$$

ce qui justifie l'application de la méthode des multiplicateurs dans le cas considéré. Il faut ajouter aux équations (30) et (31):

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Au lieu de la condition (28) on pourrait imposer une condition analogue en dérivant par rapport à x_0 et y_0 ou x_0 et z_0 au lieu de y_0 et z_0. Mais si en plus de l'expression qui figure dans le premier membre de (28) les deux autres expressions analogues obtenues en dérivant par rapport à x_0 et y_0 ou à x_0 et z_0 sont nulles, on ne peut plus justifier la méthode des multiplicateurs pour le point (x_0, y_0, z_0). On peut montrer que dans tous les cas qui seront examinés au paragraphe suivant, on ne pourra pas se trouver dans une telle situation. Ainsi dans l'exemple 1, on a une condition complémentaire (32) et dans le premier membre de cette condition l'un au moins des nombres A, B, C n'est pas nul. Si $C \neq 0$, par exemple, la dérivée du premier membre de (32) par rapport à z est égale à C et, par suite, elle est non nulle en tout point (x, y, z). Ceci montre que dans le cas considéré, toute réponse doit être obtenue par la méthode des multiplicateurs.

Donnons maintenant quelques indications sur les conditions suffisantes concernant les maxima et les minima relatifs, en nous limitant au cas où nous avons deux variables indépendantes. Nous cherchons les maxima et les minima relatifs de la fonction $f(x, y, z)$ avec la condition complémentaire $\varphi(x, y, z) = 0$. Formons la fonction $\Phi = f + \lambda\varphi$. Supposons qu'en annulant ses dérivées premières par rapport à x, y et z et en tenant compte de la condition supplémentaire, nous ayons obtenu $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ et $\lambda = \lambda_0$. Nous devons examiner les valeurs obtenues des variables, c'est-à-dire déterminer le signe de la différence $f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)$ pour tout (x, y, z) suffisamment proche de (x_0, y_0, z_0) et vérifiant la condition $\varphi(x, y, z) = 0$. Introduisons la fonction:

$$\psi(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda_0 \varphi(x, y, z).$$

De la condition $\varphi(x, y, z) = 0$ il résulte que l'on peut examiner la différence $\psi(x, y, z) - \psi(x_0, y_0, z_0)$ au lieu de $f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)$. Les dérivées partielles du premier ordre de la fonction $\psi(x, y, z)$ au point (x_0, y_0, z_0) sont nulles par hypothèses. En développant la dernière différence en série de Taylor et en se limitant aux termes ayant des dérivées secondes, on obtient une équation du type [V-2-5]:

$$\psi(x, y, z) - \psi(x_0, y_0, z) = a_{11}dx^2 + a_{22}dy^2 + a_{33}dz^2 + \\ + 2a_{12}dx\,dy + 2a_{13}dx\,dz + 2a_{23}dy\,dz + \ldots,$$

où on a désigné par a_{ik} les valeurs correspondantes des dérivées partielles du second ordre de la fonction $\psi(x, y, z)$ au point (x_0, y_0, z_0) et par dx, dy, dz les accroissements des variables. Supposons que $\varphi'_{z_0}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, de sorte que la condition donne $z = \omega(x, y)$ et $z_0 = \omega(x_0, y_0)$. Il résulte de la condition que:

$$\varphi'_x(x, y, z)\,dx + \varphi'_y(x, y, z)\,dy + \varphi'_z(x, y, z)\,dz = 0.$$

En faisant $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, on exprime dz en fonction de dx et de dy:

$$dz = -\frac{\varphi'_{x_0}(x_0, y_0, z_0)}{\varphi'_{z_0}(x_0, y_0, z_0)}\,dx - \frac{\varphi'_{y_0}(x_0, y_0, z_0)}{\varphi'_{z_0}(x_0, y_0, z_0)}\,dy.$$

En remplaçant dz par sa valeur dans le développement et en regroupant, il vient:

$$\psi(x, y, z) - \psi(x_0, y_0, z_0) = A\,dx^2 + 2B\,dx\,dy + C\,dy^2 + \ldots$$

On peut maintenant utiliser les résultats de [V-2-3]. Ainsi, par exemple, si $AC - B^2 > 0$ et $A > 0$, au point (x_0, y_0, z_0) la fonction $f(x, y, z)$ passe par un minimum relatif. Il résulte des raisonnements exposés au paragraphe [V-2-3] que pour justifier la règle indiquée, il suffit de supposer que les fonctions $f(x, y, z)$ et $\varphi(x, y, z)$ ont au point (x_0, y_0, z_0) et dans son voisinage des dérivées continues jusqu'au second ordre.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur le problème des conditions suffisantes du maximum et du minimum relatifs. Ce qui a été essentiel dans les raisonnements précédents, c'est la substitution à $f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)$ de la différence $\psi(x, y, z) - \psi(x_0, y_0, z_0)$ dont les dérivées premières sont nulles au point (x_0, y_0, z_0), ainsi que le fait que la différentielle dz de la variable liée est définie par une équation du premier degré en dx, dy, différentielles des variables indépendantes. On peut examiner de façon analogue les conditions suffisantes pour un nombre quelconque de variables et de liaisons.

V-2-9. **Exemples.** 1. *On cherche la plus courte distance du point (a, b, c) à la surface*

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{32}$$

Le carré de la distance du point donné (a, b, c) au point courant (x, y, z) est:

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2. \tag{33}$$

Dans le cas présent les coordonnées (x, y, z) doivent vérifier l'équation (32) (le point doit se trouver sur la surface). Cherchons le minimum de l'expression (33) avec la condition (32). On forme la fonction:

$$\Phi = (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+\lambda_1(Ax+By+Cz+D).$$

En annulant ses dérivées partielles par rapport à x, y, z, nous obtenons:

$$x=a-\frac{1}{2}\lambda_1 A, \quad y=b-\frac{1}{2}\lambda_1 B, \quad z=c-\frac{1}{2}\lambda_1 C. \tag{34}$$

En portant ces valeurs dans (32) on peut obtenir λ_1:

$$\lambda_1=\frac{2(Aa+Bb+Cc+D)}{A^2+B^2+C^2}. \tag{35}$$

Nous avons obtenu l'unique solution, et comme une valeur minimum doit exister, les valeurs obtenues des variables doivent lui correspondre. En portant les valeurs (34) dans (33), on obtient l'expression du carré de la distance du point à la surface:

$$r_0^2=\frac{1}{4}\lambda_1^2(A^2+B^2+C^2),$$

où λ_1 est défini par la formule (35).

2. *Développer un nombre positif donné a suivant trois composantes positives x, y, z, telles que l'expression:*

$$x^m y^n z^p \tag{36}$$

soit la plus grande possible (m, n, p sont des nombres positifs donnés).

Cherchons le maximum de (36) avec comme condition complémentaire:

$$x+y+z=a. \tag{37}$$

Au lieu du maximum de (36) on peut chercher le maximum de son logarithme:

$$m\ln x+n\ln y+p\ln z.$$

Formons la fonction:

$$\Phi=m\ln x+n\ln y+p\ln z+\lambda_1(x+y+z-a).$$

En annulant ses dérivées partielles:

$$x=-\frac{m}{\lambda_1}, \quad y=-\frac{n}{\lambda_1}, \quad z=-\frac{p}{\lambda_1},$$

et la relation (37) nous donne:

$$\lambda_1=-\frac{m+n+p}{a},$$

c'est-à-dire:

$$x=\frac{ma}{m+n+p}, \quad y=\frac{na}{m+n+p}, \quad z=\frac{pa}{m+n+p}, \tag{38}$$

et les valeurs obtenues des variables sont des nombres positifs. On peut montrer qu'avec les conditions imposées (36) on doit avoir un maximum, et l'unicité de la solution montre, comme pour l'exemple 1, que les valeurs trouvées des variables donnent la valeur maximum à l'expression (36).

Les formules (38) montrent que pour résoudre le problème, il faut diviser a en trois parties proportionnelles aux exposants m, n et p.

Nous allons maintenant examiner dans les deux exemples suivants les conditions suffisantes par la méthode exposée au paragraphe précédent.

3. *Un conducteur de longueur l_0 se divise à l'une de ses extrémités en k conducteurs de longueur l_s $(s = 1, 2, \ldots, k)$ et l'intensité du courant dans les différentes parties du conducteur est $i_0, i_1, \ldots, i_k$. On se demande quelle section $q_0, q_1, \ldots, q_k$ il faut donner aux différentes parties du conducteur afin qu'avec la différence de potentiel E donné pour les circuits (l_0, l_1), (l_0, l_2) $\ldots$, (l_0, l_k), on consomme la plus petite quantité de matière première V pour construire le circuit* (fig. 167).

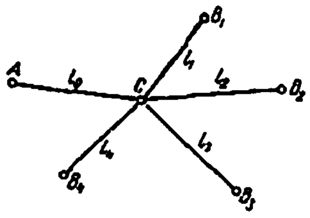

Fig. 167

Soit c la résistance du fil dont la longueur et la section sont égales à l'unité (résistivité).

La fonction V des variables $q_0, q_1, \ldots, q_k$ dont on cherche la plus petite valeur sera :

$$V = l_0q_0 + l_1q_1 + \ldots + l_kq_k.$$

En tenant compte de la différence de potentiel donné E, on peut écrire k relations

$$\varphi_s = c\left(\frac{l_0i_0}{q_0} + \frac{l_si_s}{q_s}\right) - E = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, k). \tag{39}$$

Formons la fonction :

$$\Phi = (l_0q_0 + l_1q_1 + \ldots + l_kq_k) + \sum_{s=1}^{k} \lambda_s \left[c\left(\frac{l_0i_0}{q_0} + \frac{l_si_s}{q_s}\right) - E\right].$$

En annulant les dérivées partielles de Φ par rapport à $q_0, q_1, \ldots, q_k$, on obtient :

$$\left.\begin{aligned} &l_0 - \frac{cl_0i_0}{q_0^2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k) = 0, \\ &l_s - \frac{\lambda_s c l_s i_s}{q_s^2} = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, k). \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

La condition (39) nous donne :

$$\frac{l_1i_1}{q_1} = \frac{l_2i_2}{q_2} = \ldots = \frac{l_ki_k}{q_k} = \frac{E}{c} - \frac{l_0i_0}{q_0};$$

en désignant par σ la valeur commune de ces rapports, on peut écrire :

$$q_s = \frac{l_si_s}{\sigma} \quad (s = 1, 2, \ldots, k), \qquad \sigma = \frac{E}{c} - \frac{l_0i_0}{q_0}. \tag{41}$$

L'équation (40) nous donne :

$$\lambda_s = \frac{q_s^2}{ci_s} = \frac{l_s^2i_s}{c\sigma^2}.$$

En portant ces expressions des λ_s dans la première des équations (40), il vient :

$$q_0^2 = \frac{i_0}{\sigma^2}(l_1^2i_1 + l_2^2i_2 + \ldots + l_k^2i_k)$$

soit :

$$q_0 = \frac{\sqrt{i_0(l_1^2i_1 + l_2^2i_2 + \ldots + l_k^2i_k)}}{\frac{E}{c} - \frac{l_0i_0}{q_0}}.$$

d'où finalement:

$$q_0 = \frac{c}{E}\left[l_0 i_0 + \sqrt{i_0 (l_1^2 i_1 + l_2^2 i_2 + \ldots + l_k^2 i_k)}\right].$$

En portant cette valeur de q_0 dans les relations (41), nous obtenons pour $q_1, q_2, \ldots, q_k$:

$$q_s = \frac{c l_s i_s}{E}\left(1 + \frac{l_0 i_0}{\sqrt{i_0 (l_1^2 i_1 + l_2^2 i_2 + \ldots + l_k^2 i_k)}}\right) \qquad (s = 1, 2, \ldots, k).$$

De sorte que les conditions nécessaires pour que l'on ait un maximum et un minimum de V nous donnent un système unique de valeurs positives pour $q_0, q_1, \ldots, q_k$; mais pour des raisons physiques il est évident que pour un choix donné des sections on doit avoir la plus petite quantité de matière première, et on peut affirmer que les valeurs obtenues de $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_k$ nous donnent des solutions du problème.

Chapitre VI

NOMBRES COMPLEXES, FONDEMENTS DE L'ALGÈBRE SUPÉRIEURE ET INTÉGRATION DES FONCTIONS

VI-1. Les nombres complexes

VI-1-1. Les nombres complexes. Si on se limite aux seuls nombres réels, on sait qu'il n'est pas toujours possible d'extraire la racine d'un nombre ; la racine de degré pair d'un nombre négatif n'existe pas dans le domaine des nombres réels. C'est pourquoi une équation du second degré à coefficients réels n'a pas toujours de racines réelles. Ceci conduit, naturellement, à une généralisation de la notion de nombre, à l'introduction de nouveaux nombres, d'une espèce plus générale et dont les nombres réels présentent un cas particulier. Il est important de définir ces nombres et les opérations qu'on peut leur faire subir de sorte que toutes les règles principales connues pour les nombres réels restent valables pour les nouveaux nombres. C'est une chose possible, comme nous le verrons par la suite.

En plus de l'impossibilité d'extraire des racines, des considérations géométriques simples conduisent à une généralisation naturelle de la notion de nombres. Nous utiliserons ces considérations géométriques comme fil directeur pour généraliser la notion de nombre.

Nous savons que tout nombre réel peut être représenté graphiquement sur un axe donné OX, soit comme un segment sur cet axe, soit comme un point de cet axe, si on convient de placer l'origine de tous les segments à l'origine des coordonnées ; inversement, on peut associer à tout segment ou à tout point de l'axe OX un nombre réel défini.

Si maintenant, au lieu de ne considérer que l'axe OX, nous examinerons *le plan* tout entier rapporté aux axes de coordonnées OX, OY, généralisant la notion de nombre, nous pourrons associer à chaque *vecteur* ou à chaque *point* du plan un certain nombre que nous appellerons *complexe*.

Si on convient de ne pas distinguer les vecteurs de même longueur et de direction identique, on peut associer un nombre réel non seulement à tout vecteur de l'axe OX mais, plus généralement, à tout vecteur parallèle à OX. En particulier, au vecteur dont le sens coïncide avec la direction positive de l'axe OX et de longueur unité correspond le nombre réel unité.

Associons le symbole i appelé *unité imaginaire* au vecteur de longueur unité dont la direction coïncide avec la direction positive de l'axe OY. Tout vecteur $\overrightarrow{MN}$ du plan peut être représenté comme somme de deux vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{PN}$ parallèles aux axes de coordonnées (fig. 168). On fait correspondre au vecteur $\overrightarrow{MP}$ parallèle à l'axe OX un nombre réel a. Et faisons correspondre au vecteur $\overrightarrow{PN}$ parallèle à l'axe OY le symbole bi, où b est un nombre réel dont la valeur absolue est égale à la longueur du vecteur $\overrightarrow{PN}$ et qui sera positif si la direction de $\overrightarrow{PN}$ coïncide avec la direction positive de l'axe OY et négatif s'il est opposé à la direction positive de l'axe OY. De sorte qu'il est logique d'associer au vecteur $\overrightarrow{MN}$ *le nombre complexe*

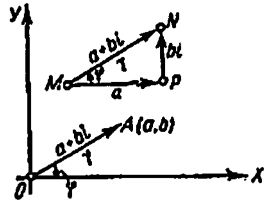

Fig. 168

$$a + bi.$$

Notons que le signe (+) dans l'expression $a + bi$ n'est pas un signe d'opération. Il faut considérer cette expression comme un symbole unique servant à désigner le nombre complexe. Nous reviendrons à l'examen de ce signe après avoir défini l'addition des nombres complexes.

Les nombres réels a et b représentent évidemment les grandeurs des projections du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sur les axes de coordonnées.

Traçons à partir de l'origine des coordonnées le vecteur $\overrightarrow{OA}$ (fig. 168) ayant même longueur et même orientation que le vecteur $\overrightarrow{MN}$. L'extrémité A de ce vecteur aura pour coordonnées (a, b) et on peut associer au point A le même nombre complexe $a + bi$ qu'aux vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{OA}$.

Ainsi, *à chaque vecteur du plan* (*à chaque point du plan*) *correspond un nombre complexe $a + bi$. Les nombres réels a et b sont égaux aux projections du vecteur considéré sur les axes de coordonnées* (*aux coordonnées du point considéré*).

En donnant dans l'expression $a + bi$ toutes les valeurs réelles possibles aux symboles a et b, nous obtiendrons un ensemble de nombres complexes; on dira que a est *la partie réelle* et que bi est *la partie imaginaire* du nombre complexe.

Dans le cas particulier d'un vecteur parallèle à l'axe OX le nombre complexe coïncide avec sa partie réelle:

$$a+0i=a. \tag{1}$$

De sorte que le nombre réel a est un cas particulier de nombre complexe.

La notion d'égalité de deux nombres complexes découle de l'interprétation géométrique. Deux vecteurs sont dits égaux s'ils ont mêmes longueurs et même orientation, c'est-à-dire s'ils ont des projections identiques sur les axes de coordonnées, c'est pourquoi on dira que *deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, leurs parties réelles sont égales ainsi que leurs parties imaginaires, c'est-à-dire que la condition d'égalité de deux nombres complexes*

$$a_1+b_1i=a_2+b_2i \text{ sera équivalente à } a_1=a_2,\ b_1=b_2. \tag{2}$$

En particulier,

$$a+bi=0 \text{ est équivalent à } a=0,\ b=0.$$

Au lieu de définir le vecteur $\overrightarrow{MN}$ par ses projections a et b sur les axes de coordonnées, on peut le définir par deux autres grandeurs, à savoir, la longueur r et l'angle φ, que forme la direction de $\overrightarrow{MN}$ avec la direction positive de l'axe OX (fig. 168). Si nous considérons que le nombre complexe $a+bi$ correspond au point de coordonnées (a, b), alors r et φ seront les coordonnées polaires de ce point. On sait qu'on a alors les relations

$$\left.\begin{aligned} &a=r\cos\varphi, \quad b=r\sin\varphi, \quad r=\sqrt{a^2+b^2},\\ &\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Le nombre positif r est *le module* et φ *l'argument* du nombre complexe $a+bi$. L'argument n'est défini qu'à un multiple de 2π près, car tout vecteur $\overrightarrow{MN}$ coïncidera avec lui-même si on le fait tourner un nombre quelconque de fois autour du point M dans un sens ou dans l'autre. Dans le cas où $r=0$ le nombre complexe est nul et son argument est complètement indéterminé. *La condition pour que deux nombres complexes soient égaux est évidemment que leurs modules soient égaux et que leurs arguments ne diffèrent que d'un multiple entier de 2π.*

Un nombre entier a un argument égal à $2k\pi$, s'il est positif, et égal à $(2k+1)\pi$ s'il est négatif, où k est un entier quelconque. Si la partie réelle d'un nombre complexe est nulle, il est de la forme bi et on dit qu'il est *imaginaire pur*. Le vecteur qui correspond à un tel nombre est un vecteur parallèle à l'axe OY et l'argument d'un nombre imaginaire pur bi est égal à $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, si $b>0$ et à $(3\pi/2+2k\pi)$, si $b<0$.

Le module d'un nombre réel est égal à sa valeur absolue. Pour représenter le module du nombre $a+bi$ on l'écrit entre deux traits verticaux :

$$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Dans ce qui suit nous désignerons souvent un nombre complexe au moyen d'une lettre. Si α est un nombre complexe, on désignera son module par $|\alpha|$. En tenant compte de l'expression (3) pour a et b on peut écrire l'expression d'un nombre complexe au moyen de son module et de son argument sous la forme :

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Dans ce cas on dit que le nombre complexe a été mis *sous forme trigonométrique*.

VI-1-2. Addition et soustraction de nombres complexes. La somme de vecteurs est égale au vecteur qui ferme le polygone formé par les vecteurs composants. Si on tient compte de ce que la projection du vecteur qui ferme le polygone est égale à la somme des projections des vecteurs composants, on a *la définition suivante de l'addition des nombres complexes*:

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)+\ldots+(a_n+b_ni)=$$
$$=(a_1+a_2+\ldots+a_n)+(b_1+b_2+\ldots+b_n)\,i. \qquad (4)$$

On voit sans difficulté que la somme de nombres complexes ne dépend pas de l'ordre des composantes (commutativité) et que les composantes peuvent être regroupées (associativité) car les sommes de nombres réels a_k et b_k jouissent de ces propriétés.

Nous avons déjà vu que le nombre complexe $a+0i$ est identique au nombre réel a. De même le nombre $0+bi$ peut se mettre simplement sous la forme bi (nombre imaginaire pur). En utilisant la définition de l'addition nous pouvons dire que le nombre complexe $a+bi$ est la somme du nombre réel a et du nombre imaginaire pur bi, c'est-à-dire que $a+bi=(a+0i)+(0+bi)$.

La soustraction se définit comme l'opération inverse de l'addition, c'est-à-dire que la différence

$$x+yi=(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)$$

est définie à partir de la condition :

$$(x+yi)+(a_2+b_2i)=a_1+b_1i,$$

soit en tenant compte de (4) et de (2) : $x + a_2 = a_1$; $y + b_2 = b_1$, c'est-à-dire que $x = a_1 - a_2$, $y = b_1 - b_2$ et en fin de compte on trouve la relation :

$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i. \qquad (5)$$

La soustraction d'un nombre complexe $(a_2 + b_2 i)$, ainsi que nous l'avons vu, est équivalente à l'addition des nombres complexes

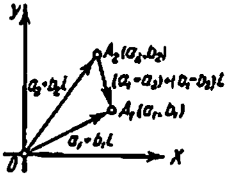

Fig. 169

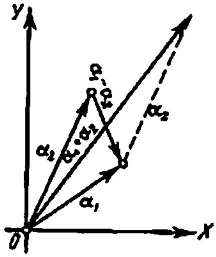

Fig. 170

$(a_1 + b_1 i)$ et $(- a_2 - b_2 i)$. Ceci correspond à ce qui suit : *la soustraction de vecteurs se réduit à l'addition d'un vecteur avec un vecteur de longueur égale et opposé à celui que l'on veut retrancher.*

Examinons le vecteur $\overrightarrow{A_2A_1}$ dont l'origine est au point A_2 auquel correspond le nombre complexe $a_2 + b_2 i$ et dont l'extrémité est au point A_1 auquel correspond le nombre complexe $a_1 + b_1 i$. Ce vecteur représente évidemment la différence du vecteur $\overrightarrow{OA_1}$ et $\overrightarrow{OA_2}$ (fig. 169) et par suite on peut lui faire correspondre le nombre complexe

$$(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i,$$

égal à la différence des nombres complexes correspondant à son extrémité et à son origine.

Etablissons maintenant les propriétés du module de la somme et de la différence de deux nombres complexes. En tenant compte de ce que le module d'un nombre complexe est égal à la longueur du vecteur qui lui correspond et de ce qu'un côté du triangle est plus petit que la somme de deux autres, nous obtenons (fig. 170)

$$|\alpha_1 + \alpha_2| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2|,$$

et on n'aura l'égalité que lorsque les vecteurs correspondant aux nombres complexes α_1 et α_2 ont même orientation, c'est-à-dire lorsque les arguments de ces nombres sont égaux ou ne diffèrent que d'un multiple entier de 2π. La propriété que nous venons d'établir reste vraie dans le cas d'un nombre quelconque de composantes:

$$|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n|\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_n|,$$

c'est-à-dire que *le module d'une somme est plus petit ou égal à la somme des modules des termes, et l'égalité n'a lieu que dans le cas où les arguments des termes sont égaux ou ne diffèrent que d'un multiple entier de 2π.*

En tenant compte de ce que le côté du triangle est plus grand que la différence des deux autres côtés, on a

$$|\alpha_1+\alpha_2|\geqslant|\alpha_1|-|\alpha_2|,$$

c'est-à-dire que *le module d'une somme de deux termes est plus grand ou égal à la différence des modules de ces deux termes.* On aura l'égalité seulement lorsque les vecteurs associés seront d'orientation opposée.

La soustraction de vecteurs et de nombres complexes revient, comme nous l'avons déjà vu, à une addition, et nous aurons pour le module de la différence de deux nombres complexes, comme pour le module de la somme, les relations (fig. 170):

$$|\alpha_1|-|\alpha_2|\leqslant|\alpha_1-\alpha_2|\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|.$$

VI-1-3. Multiplication de nombres complexes. Nous définirons le produit de deux nombres complexes de la même façon que le produit de deux nombres réels: le produit est considéré comme un nombre formé d'un multiplicande alors que le multiplicateur est pris pour unité. Le vecteur correspondant au nombre complexe de module r et d'argument φ peut être obtenu à partir du *vecteur unité* dont la longueur est égale à l'unité et dont la direction coïncide avec la direction positive de l'axe OX en l'allongeant de r fois et en le faisant tourner dans le sens positif de l'angle φ.

Le produit d'un certain vecteur $\vec{a}_1$ par le vecteur $\vec{a}_2$ sera le vecteur obtenu en appliquant au vecteur $\vec{a}_1$ l'allongement indiqué ci-dessus et la rotation à l'aide desquels le vecteur $\vec{a}_2$ peut être obtenu à partir du vecteur unité; à ce dernier correspond alors, évidemment, une unité réelle.

Si (r_1, φ_1) et (r_2, φ_2) sont les modules et les arguments des nombres complexes qui correspondent aux vecteurs $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$, au produit de ces deux vecteurs correspondra un nombre complexe de module r_1r_2 et d'argument $(\varphi_1+\varphi_2)$. Nous obtenons ainsi la définition suivante du produit de deux nombres complexes:

Le produit de deux nombres complexes est un nombre complexe tel que son module soit égal au produit des modules des facteurs et son argument à la somme de leurs arguments.

De sorte que si le nombre complexe est donné sous forme trigonométrique, on a

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ = r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]. \qquad (6)$$

Donnons maintenant la règle de formation du produit dans le cas où les nombres complexes ne sont pas donnés sous forme trigonométrique:

$$(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = x + yi.$$

En se servant de la notation utilisée ci-dessus pour les modules et les arguments des facteurs, on peut écrire:

$$a_1 = r_1\cos\varphi_1, \quad b_1 = r_1\sin\varphi_1, \quad a_2 = r_2\cos\varphi_2, \quad b_2 = r_2\sin\varphi_2;$$

d'après la définition du produit (6):

$$x = r_1r_2\cos(\varphi_1+\varphi_2), \qquad y = r_1r_2\sin(\varphi_1+\varphi_2),$$

d'où

$$x = r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) = \\ = r_1\cos\varphi_1\cdot r_2\cos\varphi_2 - r_1\sin\varphi_1\cdot r_2\sin\varphi_2 = a_1a_2 - b_1b_2,$$

$$y = r_1r_2(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2) = r_1\sin\varphi_1\cdot r_2\cos\varphi_2 + \\ + r_1\cos\varphi_1\cdot r_2\sin\varphi_2 = b_1a_2 + a_1b_2,$$

et finalement nous obtenons:

$$(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (b_1a_2 + a_1b_2)i. \qquad (7)$$

Si $b_1 = b_2 = 0$, les facteurs sont des nombres réels a_1 et a_2 et le produit se réduit au produit a_1a_2 de ces deux nombres. Si $a_1 = a_2 = 0$ et si $b_1 = b_2 = 1$, l'égalité (7) nous donne

$$i\cdot i = i^2 = -1,$$

c'est-à-dire que *le carré de l'unité imaginaire est égal à* (-1).

En calculant successivement les puissances entières positives de i, il vient:

$$i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i,\ i^6 = -1, \ldots$$

et en général pour tout k positif entier:

$$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i.$$

La règle de multiplication définie par l'égalité (7) peut être formulée de la manière suivante: *les nombres complexes peuvent être multipliés comme des polynômes sous forme littérale en posant* $i^2 = -1$.

Si α est le nombre complexe $a + bi$, on appellera complexe *conjugué* de α le nombre $a - bi$ et on le désignera par $\bar{\alpha}$. D'après la formule (3) on a:

$$|\alpha|^2 = a^2 + b^2.$$

Mais il résulte de (7) que :

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2,$$

et, par conséquent,

$$|\alpha|^2=(a+bi)(a-bi)=\alpha\bar{\alpha},$$

c'est-à-dire que *le produit de deux nombres conjugués complexes est égal au carré du module de chacun d'eux.*

Donnons encore des formules évidentes :

$$\alpha+\bar{\alpha}=2a,\quad \alpha-\bar{\alpha}=2bi. \tag{8}$$

Il résulte des formules (4) et (7) que l'addition et la multiplication des nombres complexes sont commutatives, c'est-à-dire que l'ordre des termes ou facteurs n'influe pas sur le résultat. Il est également facile de vérifier que les règles d'associativité et de distributivité sont valables, elles s'expriment par les formules :

$$(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_3=\alpha_1+(\alpha_2+\alpha_3),\quad (\alpha_1\alpha_2)\alpha_3=\alpha_1(\alpha_2\alpha_3),$$
$$(\alpha_1+\alpha_2)\beta=\alpha_1\beta+\alpha_2\beta.$$

Nous laisserons au lecteur le soin de vérifier que ces formules sont vraies.

Notons enfin que *le produit de plusieurs facteurs aura un module égal au produit des modules des facteurs et un argument égal à la somme des arguments des facteurs. De sorte que le produit de nombres complexes sera nul si, et seulement si, l'un des facteurs au moins est nul.*

VI-1-4. Division des nombres complexes. La division des nombres complexes se définit comme l'opération inverse de la multiplication. De sorte que si (r_1, φ_1) et (r_2, φ_2) sont les modules et les arguments du dividende et du diviseur, il est facile de voir que la division a un résultat défini, si le diviseur n'est pas nul, et que le module du quotient sera r_1/r_2 et son argument sera $(\varphi_1 - \varphi_2)$. En écrivant la division sous forme de fraction, on peut écrire :

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]. \tag{9}$$

Ainsi, *le module du quotient est égal au quotient des modules du dividende et du diviseur, et l'argument du quotient est égal à la différence des arguments du dividende et du diviseur.* Si $r_2 = 0$, la formule (9) n'a plus de sens.

Si le dividende et le diviseur sont donnés non pas sous forme trigonométrique, mais sous la forme $a_1 + b_1i$ et $a_2 + b_2i$, nous obtiendrons, si nous exprimons les modules et les arguments par a_1, a_2, b_1, b_2 dans la formule (9), l'expression suivante pour le quotient :

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i,$$

que l'on peut obtenir directement, si l'on considère i comme un terme irrationnel et si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur par le nombre complexe, conjugué du dénominateur, de façon à éliminer i du dénominateur:

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{a_2^2+b_2^2}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(b_1a_2-a_1b_2)\,i}{a_2^2+b_2^2},$$

et finalement:

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\,i. \tag{10}$$

Nous avons déjà indiqué [VI-1-3], que les lois de commutativité, d'associativité et de distributivité restent vraies pour l'addition et la multiplication des nombres complexes, c'est pourquoi, dans les expressions contenant des nombres complexes, toutes les transformations qui découlent de ces lois et que l'on utilise pour les nombres réels restent valables. Par exemple la mise en facteurs, l'ouverture des parenthèses, la formule du binôme de Newton dans le cas d'un exposant positif entier, les formules des progressions, etc.

Notons encore une propriété importante des expressions contenant des nombres complexes, liés par les signes des quatre opérations élémentaires. Il résulte directement des formules (4), (5), (7) et (10) que *si dans une somme, une différence, un produit et un quotient, nous remplaçons tous les nombres par leurs conjugués, les résultats des opérations sont également remplacés par leurs conjugués.*

Ainsi par exemple, si nous remplaçons dans la formule (7), b_1 et b_2 par $(-b_1)$ et $(-b_2)$ nous obtiendrons:

$$(a_1-b_1i)(a_2-b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)-(b_1a_2+a_1b_2)\,i.$$

Cette propriété sera, bien entendu, valable pour toute expression contenant des nombres complexes liés par les signes des quatre opérations élémentaires.

VI-1-5. Puissance d'un nombre complexe. Si nous appliquons la formule (6) dans le cas de n facteurs égaux, nous obtenons la règle permettant d'élever un nombre complexe à une puissance positive entière:

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi), \tag{11}$$

c'est-à-dire que *pour élever un nombre complexe à une puissance entière positive, il faut élever son module à cette puissance et multiplier son argument par l'exposant de la puissance.*

En supposant que dans la formule (11) $r=1$, nous obtenons *la formule de Moivre*

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi. \tag{12}$$

Exemples. 1. Si nous développons le premier membre de l'égalité (12) d'après la formule du binôme de Newton, et si nous égalons les parties réelles et imaginaires d'après la condition (2), nous obtiendrons des expressions pour $\cos n\varphi$ et $\sin n\varphi$ en fonction des puissances de $\cos\varphi$ et de $\sin\varphi$ *:

$$\cos n\varphi=\cos^n\varphi-\binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi+$$
$$+\binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi+\ldots+(-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}\varphi\sin^{2k}\varphi+$$
$$+\ldots+\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n\varphi & (n \text{ est pair})\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}n\cos\varphi\sin^{n-1}\varphi & (n \text{ est impair});\end{cases}\qquad(13)$$
$$\sin n\varphi=\binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi-\binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi+\binom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi-$$
$$-\ldots+(-1)^k\binom{n}{2k+1}\cos^{n-2k-1}\varphi\sin^{2k+1}\varphi+\ldots+$$
$$+\ldots+\begin{cases}(-1)^{\frac{n-2}{2}}n\cos\varphi\sin^{n-1}\varphi & (n \text{ est pair})\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin^n\varphi & (n \text{ est impair}).\end{cases}$$

En particulier, pour $n = 3$, la formule (12) aura, après ouverture des parenthèses, la forme:

$$\cos^3\varphi+3i\cos^2\varphi\sin\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi-i\sin^3\varphi=\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi,$$

d'où

$$\cos 3\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi,\quad \sin 3\varphi=3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi.$$

2. Faisons la somme des expressions:

$$A_n=1+r\cos\varphi+r^2\cos 2\varphi+\ldots+r^{n-1}\cos(n-1)\varphi,$$
$$B_n=r\sin\varphi+r^2\sin 2\varphi+\ldots+r^{n-1}\sin(n-1)\varphi.$$

Supposons que:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

et formons le nombre complexe:

$$A_n+B_ni=1+r(\cos\varphi+i\sin\varphi)+r^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)+\ldots+$$
$$+r^{n-1}[\cos(n-1)\varphi+i\sin(n-1)\varphi].$$

Utilisons l'égalité (11) et la formule de la somme d'une progression géométrique:

$$A_n+B_ni=1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}=\frac{1-z^n}{1-z}=\frac{1-r^n(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n}{1-r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=$$
$$=\frac{(1-r^n\cos n\varphi)-ir^n\sin n\varphi}{(1-r\cos\varphi)-ir\sin\varphi}.$$

---

* Nous désignons par le symbole $\binom{n}{m}$ le nombre de combinaisons de n éléments pris m à m, c'est-à-dire:

$$\binom{n}{m}=\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\ldots m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Si nous multiplions le numérateur et le dénominateur de la dernière fraction par la grandeur $(1 - r\cos\varphi) + ir\sin\varphi$, conjuguée complexe du dénominateur, nous obtiendrons:

$$A_n + B_n i = \frac{[(1-r^n\cos n\varphi) - ir^n\sin n\varphi]\,[(1-r\cos\varphi)+ir\sin\varphi]}{(1-r\cos\varphi)^2+r^2\sin^2\varphi} =$$
$$= \frac{(1-r^n\cos n\varphi)(1-r\cos\varphi)+r^{n+1}\sin\varphi\sin n\varphi}{r^2-2r\cos\varphi+1}+$$
$$+\frac{(1-r^n\cos n\varphi)\,r\sin\varphi-(1-r\cos\varphi)\,r^n\sin n\varphi}{r^2-2r\cos\varphi+1}\,i=$$
$$=\frac{r^{n+1}\cos(n-1)\varphi-r^n\cos n\varphi-r\cos\varphi+1}{r^2-2r\cos\varphi+1}+$$
$$+\frac{r^{n+1}\sin(n-1)\varphi-r^n\sin n\varphi+r\sin\varphi}{r^2-2r\cos\varphi+1}\,i.$$

Si nous égalisons les parties réelles et imaginaires d'après la condition (2), nous aurons:

$$A_n = 1 + r\cos\varphi + r^2\cos 2\varphi + \ldots + r^{n-1}\cos(n-1)\varphi =$$
$$= \frac{r^{n+1}\cos(n-1)\varphi - r^n\cos n\varphi - r\cos\varphi + 1}{r^2-2r\cos\varphi+1},$$
$$B_n = r\sin\varphi + r^2\sin 2\varphi + \ldots + r^{n-1}\sin(n-1)\varphi =$$
$$= \frac{r^{n+1}\sin(n-1)\varphi - r^n\sin n\varphi + r\sin\varphi}{r^2-2r\cos\varphi+1}.$$

En considérant que la valeur absolue du nombre réel r est inférieure à 1, et en faisant croître n indéfiniment, nous obtiendrons à la limite de la somme des séries infinies:

$$\left.\begin{aligned} 1 + r\cos\varphi + r^2\cos 2\varphi + \ldots &= \frac{1-r\cos\varphi}{r^2-2r\cos\varphi+1}, \\ r\sin\varphi + r^2\sin 2\varphi + \ldots &= \frac{r\sin\varphi}{r^2-2r\cos\varphi+1}. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Dans les expressions de A_n et de B_n faisons $r = 1$, nous obtiendrons alors:

$$1+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\ldots+\cos(n-1)\varphi = \frac{\cos(n-1)\varphi-\cos n\varphi-\cos\varphi+1}{2(1-\cos\varphi)} =$$
$$= \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi + 2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}} =$$
$$= \frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi+\sin\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{(n-1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}. \qquad (15_1)$$

Nous obtiendrons de même:

$$\sin\varphi+\sin 2\varphi+\ldots+\sin(n-1)\varphi = \frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{(n-1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}. \qquad (15_2)$$

VI-1-6. Extraction de racine d'un nombre complexe. On appelle *racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe un nombre complexe dont la puissance n est égale au nombre sous le signe du radical.*

Ainsi, l'égalité

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\rho(\cos\psi+i\sin\psi)$$

est équivalente à l'égalité

$$\rho^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Mais les modules de nombres complexes égaux doivent être égaux, et les arguments ne peuvent différer que d'un multiple entier de 2π, c'est-à-dire que

$$\rho^n=r,\quad n\psi=\varphi+2k\pi,$$

d'où :

$$\rho=\sqrt[n]{r},\qquad \psi=\frac{\varphi+2k\pi}{n},$$

où $\sqrt[n]{r}$ est la valeur arithmétique de la racine et k un nombre entier quelconque. Nous obtenons ainsi :

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\qquad (16)$$

c'est-à-dire que *pour extraire la racine d'un nombre complexe, il faut extraire la racine de son module et diviser l'argument par l'exposant.*

Dans la formule (16), le nombre k peut prendre toutes les valeurs entières possibles; on peut cependant démontrer qu'il n'y aura que n valeurs différentes de la racine, et qu'elles correspondront aux valeurs :

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1).\qquad (17)$$

Pour démontrer cela, remarquons que les seconds membres dans la formule (16) seront différents pour les deux valeurs $k=k_1$ et $k=k_2$, alors que les arguments $\frac{\varphi+2k_1\pi}{n}$ et $\frac{\varphi+2k_2\pi}{n}$ ne différeront pas d'un multiple entier de 2π, et ils seront identiques, si les arguments en question diffèrent d'un multiple entier de 2π.

Mais la différence (k_1-k_2) de deux nombres de la série (17) sera inférieure en valeur absolue à n, c'est pourquoi la différence

$$\frac{\varphi+2k_1\pi}{n}-\frac{\varphi+2k_2\pi}{n}=\frac{k_1-k_2}{n}2\pi$$

ne peut pas être un multiple entier de 2π, c'est-à-dire qu'à n valeurs k de la série (17) correspondent n valeurs distinctes de la racine.

Soit maintenant k_2 un nombre entier (positif ou négatif) qui ne figure pas dans la somme (17). Nous pouvons le mettre sous la forme:

$$k_2 = qn + k_1,$$

où q est un nombre entier, et k_1 un des nombres de la série (17), c'est pourquoi:

$$\frac{\varphi + 2k_2\pi}{n} = \frac{\varphi + 2k_1\pi}{n} + 2\pi q,$$

c'est-à-dire qu'à la valeur k_2 correspond la même valeur de la racine qu'à la valeur k_1 figurant dans la série (17). Ainsi, *la racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe possède n valeurs différentes.*

Un cas particulier fait exception à cette règle. C'est le cas où le nombre sous le signe du radical est égal à zéro, c'est-à-dire où $r = 0$. Dans ce cas, toutes les valeurs indiquées plus haut sont égales à zéro.

Exemples. 1. Déterminons toutes les valeurs de $\sqrt[3]{i}$. Le module de i est égal à 1, et son argument à $\frac{\pi}{2}$, c'est pourquoi:

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} +$$
$$+ i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \qquad (k = 0, 1, 2).$$

Nous obtenons les trois valeurs suivantes pour $\sqrt[3]{i}$:

$$\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \ \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$
$$\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

2. Etudions toutes les valeurs de $\sqrt[n]{1}$, c'est-à-dire toutes les solutions du binôme:

$$z^n = 1.$$

Le module de 1 est égal à 1, et l'argument à zéro, c'est pourquoi:

$$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Désignons par la lettre ε la valeur de cette racine que l'on obtient pour $k = 1$:

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

D'après la formule de Moivre:

$$\varepsilon^k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},$$

c'est-à-dire que toutes les racines de l'équation $z^n = 1$ sont de la forme:

$$\varepsilon^k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

et on doit alors considérer que $\varepsilon^0 = 1$.

Etudions maintenant le binôme de la forme:

$$z^n = a.$$

Introduisons à la place de z une nouvelle inconnue u, en supposant que

$$z = u\sqrt[n]{a},$$

où $\sqrt[n]{a}$ est une valeur de la racine $n^{\text{ième}}$ de a. En substituant l'expression de z dans l'équation donnée, nous obtiendrons pour u l'équation:

$$u^n = 1.$$

D'où l'on voit que toutes les racines de l'équation $z^n = a$ peuvent être mises sous la forme:

$$\sqrt[n]{a}\varepsilon^k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

où $\sqrt[n]{a}$ est une des n valeurs de cette racine, et où ε^k prend toutes les valeurs de la racine $n^{\text{ième}}$ de 1.

VI-1-7. Fonction exponentielle. Nous avons étudié précédemment la fonction exponentielle e^x, dans le cas d'un exposant réel x. Etendons maintenant la notion de fonction exponentielle au cas d'un exposant complexe quelconque. La fonction e^x, avec un exposant réel, peut être présentée sous forme d'une série [IV-2-4]:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Définissons par une série analogue une fonction exponentielle d'exposant purement imaginaire, c'est-à-dire supposons que:

$$e^{yi} = 1 + \frac{yi}{1!} + \frac{(yi)^2}{2!} + \frac{(yi)^3}{3!} + \ldots$$

Si nous séparons les termes réels des termes imaginaires, nous aurons:

$$e^{yi} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots\right) + \\ + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \ldots\right),$$

d'où, nous rappelant les développements en série de $\cos y$ et de $\sin y$ [IV-2-5], nous avons:

$$e^{yi} = \cos y + i \sin y. \tag{18}$$

Cette formule définit la fonction exponentielle d'un exposant imaginaire pur. Si nous remplaçons y par $(-y)$:

$$e^{-yi} = \cos y - i \sin y \tag{19}$$

et si nous résolvons (18) et (19) par rapport à $\cos y$ et $\sin y$, nous obtiendrons *les formules d'Euler*, qui expriment les fonctions trigonométriques au moyen de fonctions exponentielles d'exposant imaginaire pur:

$$\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}, \qquad \sin y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}. \tag{20}$$

La formule (18) donne *la nouvelle forme exponentielle d'un nombre complexe* ayant un module r et un argument φ:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{\varphi i}.$$

Définissons *une fonction exponentielle d'exposant complexe quelconque* $x + yi$ par la formule:

$$e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi} = e^x(\cos y + i\sin y), \tag{21}$$

c'est-à-dire que *le module du nombre* e^{x+yi} *sera considéré comme égal à* e^x, *et l'argument égal à* y.

Il est facile d'étendre au cas des exposants complexes la règle d'addition des exposants de la multiplication. Soit $z = x + yi$ et $z_1 = x_1 + y_1 i$:

$$e^z \cdot e^{z_1} = e^x(\cos y + i\sin y) \cdot e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1),$$

ou, si nous appliquons la règle de multiplication des nombres complexes [VI-1-3],

$$e^z \cdot e^{z_1} = e^{x+x_1}[\cos(y + y_1) + i\sin(y + y_1)].$$

Mais l'expression qui se trouve dans le second membre de cette égalité est, par définition (21):

$$e^{(x+x_1)+(y+y_1)i}, \text{ c'est-à-dire } e^{z+z_1}.$$

La règle de soustraction des exposants lors de la division

$$\frac{e^z}{e^{z_1}} = e^{z-z_1}$$

peut être directement vérifiée, si l'on multiplie le quotient par le diviseur.

Dans le cas où n est un entier positif, nous aurons:

$$(e^z)^n = \underbrace{e^z e^z \ldots e^z}_{n \text{ fois}} = e^{nz}.$$

Si nous utilisons les formules d'Euler, nous pourrons exprimer n'importe quelle puissance positive entière de $\sin\varphi$ et de $\cos\varphi$, ainsi que le produit de ces puissances, sous la forme d'une somme de termes ne contenant que la première puissance du sinus ou du cosinus des arcs multiples:

$$\sin^m \varphi = \frac{(e^{\varphi i} - e^{-\varphi i})^m}{2^m i^m}, \quad \cos^m \varphi = \frac{(e^{\varphi i} + e^{-\varphi i})^m}{2^m}. \tag{22}$$

Si nous développons les seconds membres de ces égalités d'après la formule du binôme de Newton, en les multipliant et en ramenant les fonctions exponentielles dans les développements obtenus à des fonctions trigonométriques, selon les formules (18) et (19), nous obtenons l'expression recherchée.

Exemples. 1.

$$\cos^4 \varphi = \frac{(e^{\varphi i} + e^{-\varphi i})^4}{16} = \frac{e^{4\varphi i}}{16} + \frac{4e^{2\varphi i}}{16} + \frac{6}{16} + \frac{4e^{-2\varphi i}}{16} + \frac{e^{-4\varphi i}}{16} =$$

$$= \frac{1}{8}\,\frac{e^{4\varphi i} + e^{-4\varphi i}}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{e^{2\varphi i} + e^{-2\varphi i}}{2} + \frac{3}{8} =$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{8}\cos 4\varphi.$$

2.

$$\sin^4 \varphi \cos^3 \varphi = \frac{(e^{\varphi i} - e^{-\varphi i})^4}{16} \cdot \frac{(e^{\varphi i} + e^{-\varphi i})^3}{8} =$$

$$= \frac{(e^{2\varphi i} - e^{-2\varphi i})^3 (e^{\varphi i} - e^{-\varphi i})}{128} =$$

$$= \frac{(e^{6\varphi i} - 3e^{2\varphi i} + 3e^{-2\varphi i} - e^{-6\varphi i})(e^{\varphi i} - e^{-\varphi i})}{128} =$$

$$= \frac{e^{7\varphi i} - e^{5\varphi i} - 3e^{3\varphi i} + 3e^{\varphi i} + 3e^{-\varphi i} - 3e^{-3\varphi i} - e^{-5\varphi i} + e^{-7\varphi i}}{128} =$$

$$= \frac{3}{64}\cos\varphi - \frac{3}{64}\cos 3\varphi - \frac{1}{64}\cos 5\varphi - \frac{1}{64}\cos 7\varphi.$$

Remarquons ici que toute puissance entière de $\cos\varphi$ et toute puissance paire de $\sin\varphi$ sont des fonctions paires de φ, c'est-à-dire qu'elles ne changent pas de valeur lorsqu'on remplace φ par $(-\varphi)$, et l'expression de ces fonctions paires de φ ne contiendra que les cosinus des arcs multiples. Si donc une fonction est une fonction impaire de φ, c'est-à-dire si cette fonction change de signe lorsqu'on remplace φ par $(-\varphi)$, comme cela se fera par exemple dans le cas d'une puissance impaire de $\sin\varphi$, le développement de cette fonction ne contiendra que les sinus des arcs multiples, et il n'y aura certainement pas de terme libre dans ce développement. Nous étudierons cela plus en détail dans l'exposé des séries trigonométriques.

VI-1-8. Fonctions trigonométriques et hyperboliques. Nous n'avons jusqu'ici étudié les fonctions trigonométriques que dans le cas d'un argument réel. Définissons les fonctions trigonométriques, pour un argument complexe quelconque z, au moyen des formules d'Euler:

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i},$$

les expressions des seconds membres ayant alors pour z complexe quelconque un sens, que l'on a indiqué [VI-1-7].

Il est facile, en utilisant ces formules et les propriétés fondamentales d'une fonction exponentielle, de vérifier l'exactitude des formules de trigonométrie dans le cas d'un argument complexe. Nous proposons au lecteur, comme exercice, de démontrer, par exemple, les relations:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$$
$$\sin(z+z_1) = \sin z \cos z_1 + \cos z \sin z_1,$$
$$\cos(z+z_1) = \cos z \cos z_1 - \sin z \sin z_1.$$

Les fonctions $\operatorname{tg} z$ et $\operatorname{cotg} z$ sont définies par les formules:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{2zi} - 1}{e^{2zi} + 1},$$
$$\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\,\frac{e^{zi} + e^{-zi}}{e^{zi} - e^{-zi}} = i\,\frac{e^{2zi} + 1}{e^{2zi} - 1}.$$

Introduisons maintenant *les fonctions hyperboliques*. Le sinus et le cosinus hyperboliques se définissent selon les formules:

$$\operatorname{sh} z = \frac{\sin iz}{i} = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$
$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1},$$
$$\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1}.$$

Il est facile, en utilisant ces formules, de vérifier, par exemple, les relations suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1,\\
&\operatorname{sh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2,\\
&\operatorname{ch}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2,\\
&\operatorname{sh} 2z = 2 \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{ch} 2z = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z,\\
&\operatorname{th} 2z = \frac{2 \operatorname{th} z}{1 + \operatorname{th}^2 z}, \quad \operatorname{cth} 2z = \frac{1 + \operatorname{cth}^2 z}{2 \operatorname{cth} z}.
\end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Nous avons donc introduit *une trigonométrie hyperbolique* avec des formules analogues aux formules de la trigonométrie du cercle habituelle. Si nous remplaçons dans les formules de la trigonométrie ordinaire $\sin z$ par $i \operatorname{sh} z$, et $\cos z$ par $\operatorname{ch} z$, nous obtiendrons les formules correspondantes de la trigonométrie hyperbolique. Ce fait découle directement des formules qui définissent les fonctions hyperboliques.

En utilisant cette indication, il est facile d'obtenir les formules suivantes de réduction d'une somme de fonctions hyperboliques à la forme logarithmique:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sh} z_1 + \operatorname{sh} z_2 &= 2 \operatorname{sh} \frac{z_1+z_2}{2} \operatorname{ch} \frac{z_1-z_2}{2}, \\ \operatorname{sh} z_1 - \operatorname{sh} z_2 &= 2 \operatorname{sh} \frac{z_1-z_2}{2} \operatorname{ch} \frac{z_1+z_2}{2}, \\ \operatorname{ch} z_1 + \operatorname{ch} z_2 &= 2 \operatorname{ch} \frac{z_1+z_2}{2} \operatorname{ch} \frac{z_1-z_2}{2}, \\ \operatorname{ch} z_1 - \operatorname{ch} z_2 &= 2 \operatorname{sh} \frac{z_1+z_2}{2} \operatorname{sh} \frac{z_1-z_2}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Etudions maintenant les fonctions hyperboliques pour des valeurs réelles de l'argument:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}, \qquad \operatorname{cth} x = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}.$$

La courbe de la fonction $y = \operatorname{ch} x$ est une chaînette [II-5-9], dont nous ferons l'étude plus en détail [VI-1-9]. Les courbes des fonctions $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ sont représentées sur la fig. 171.

Si nous dérivons directement, nous obtiendrons pour les dérivées les expressions suivantes:

$$\frac{d \operatorname{sh} x}{dx} = \operatorname{ch} x, \qquad \frac{d \operatorname{ch} x}{dx} = \operatorname{sh} x,$$

$$\frac{d \operatorname{th} x}{dx} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \qquad \frac{d \operatorname{cth} x}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

De là, nous obtenons la table d'intégrales:

$$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C,$$

$$\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

L'appellation elle-même de « fonctions hyperboliques » est la conséquence de ce que les fonctions $\operatorname{ch} t$ et $\operatorname{sh} t$ jouent, dans la repré-

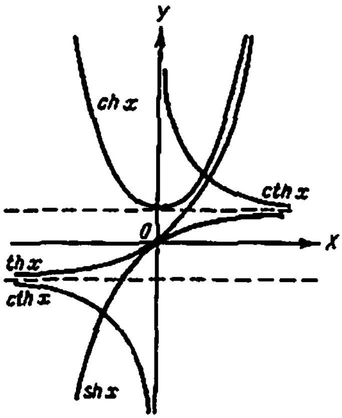

Fig. 171

sentation paramétrique de l'hyperbole équilatère

$$x^2-y^2=a^2,$$

le même rôle que les fonctions $\cos t$ et $\sin t$ pour le cercle

$$x^2+y^2=a^2.$$

La représentation paramétrique du cercle est :

$$x=a\cos t, \quad y=a\sin t,$$

et pour une hyperbole équilatère

$$x=a\,\mathrm{ch}\,t, \quad y=a\,\mathrm{sh}\,t,$$

comme il est facile de le constater à l'aide de la relation :

$$\mathrm{ch}^2\,t-\mathrm{sh}^2\,t=1.$$

La valeur géométrique du paramètre t dans les deux cas, pour le cercle et pour l'hyperbole, est identique. Si nous désignons par S

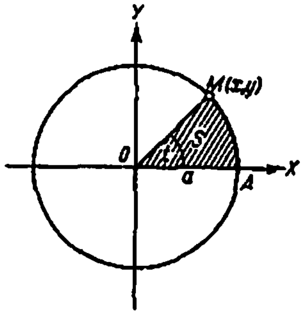

Fig. 172

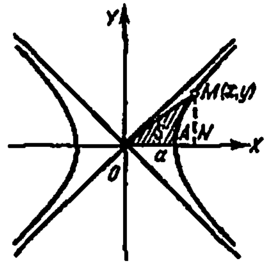

Fig. 173

l'aire du secteur AOM (fig. 172) et par S_0 l'aire du cercle tout entier ($S_0=\pi a^2$), nous aurons :

$$t=2\pi\frac{S}{S_0}.$$

Admettons maintenant que S désigne l'aire d'un secteur analogue de l'hyperbole équilatère (fig. 173). Nous avons :

$$S=\text{surf. } OMN-\text{surf. } AMN=\frac{1}{2}xy-\int_a^x y\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\int_a^x\sqrt{x^2-a^2}\,dx.$$

En calculant l'intégrale d'après la formule de [III-1-7], nous trouvons:

$$S = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2} \left[x \sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \ln \left(x + \sqrt{x^2 - a^2} \right) \right]_a^x =$$
$$= \frac{1}{2} a^2 \ln \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right).$$

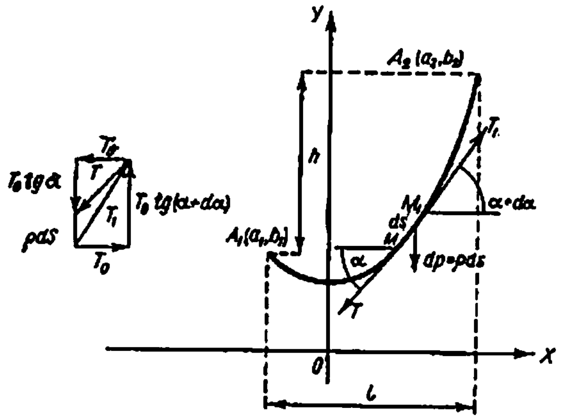

Fig. 174

Si maintenant nous supposons, en désignant à nouveau par S_0 l'aire du cercle, que:

$$t = 2\pi \frac{S}{S_0} = \ln \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right),$$

nous trouverons sans peine que:

$$e^t = \frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1},$$
$$e^{-t} = \frac{1}{\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}} = \frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1},$$

d'où, en additionnant terme à terme et en multipliant par $\frac{a}{2}$:

$$x = \frac{a}{2} (e^t + e^{-t}) = a \operatorname{ch} t,$$
$$y = \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 t - a^2} = a^2 = a \operatorname{sh} t,$$

c'est-à-dire que nous trouvons bien la représentation paramétrique d'une hyperbole équilatère.

VI-1-9. La chaînette. Examinons la courbe d'un fil pesant homogène, suspendu par ses extrémités A_1 et A_2 (fig. 174).

Dans le plan de cette courbe, menons un axe OX horizontalement et un axe OY verticalement vers le haut. Examinons les éléments $MM_1 = ds$ du fil. Sur chacun d'eux agissent les tensions T et T_1 des autres parties du fil et le poids de l'élément. Les tensions sont appliquées aux extrémités M et M_1 de l'élément et dirigées suivant des tangentes (T suivant la direction négative de la tangente, et T_1 suivant la direction positive). Nous pouvons prendre le poids proportionnel à la longueur de l'élément:

$$dp = \rho\, ds,$$

où ρ est la densité linéaire du fil (poids de l'unité de longueur courante).

Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que la somme des projections des forces, exerçant une action sur l'élément, aussi bien horizontalement que verticalement, soit égale à zéro. Puisque la projection du poids de l'élément ds suivant la direction horizontale est nulle, les composantes horizontales des forces T et T_1 doivent être égales et de signes contraires. Nous désignerons par T_0 leur composante horizontale.

Ensuite, nous obtenons, à partir de la figure, pour les composantes verticales des tensions respectivement les expressions:

$$-T_0 \operatorname{tg} \alpha = -T_0 y' \quad \text{et} \quad T_0 \operatorname{tg} (\alpha + d\alpha) = T_0 (y' + dy'),$$

où $d\alpha$ est l'accroissement de l'angle α formé par la tangente avec l'axe OX, lorsqu'on se déplace de M en M_1, et dy' l'accroissement correspondant du coefficient angulaire de la tangente, c'est-à-dire de la grandeur $\operatorname{tg} \alpha$.

En annulant la somme des projections T, T_1 et du poids $\rho\, ds$ sur l'axe OY, nous obtiendrons:

$$T_0 (y' + dy') - T_0 y' - \rho\, ds = 0,$$

c'est-à-dire

$$T_0\, dy' = \rho\, ds,$$

ce que l'on peut écrire aussi:

$$T_0\, dy' = \rho \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \tag{25}$$

Les variables se séparent [III-1-8]:

$$\frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{dx}{k}, \quad \text{où} \quad k = \frac{T_0}{\rho};$$

remarquons que k est une constante directement proportionnelle à la composante horizontale de la tension et inversement proportionnelle à la densité linéaire du fil. Intégrons l'équation obtenue:

$$\ln (y' + \sqrt{1 + y'^2}) = \frac{x + C_1}{k},$$

d'où:

$$e^{\frac{x + C_1}{k}} = y' + \sqrt{1 + y'^2};$$

pour définir y', introduisons la grandeur inverse:

$$e^{-\frac{x + C_1}{k}} = \frac{1}{y' + \sqrt{1 + y'^2}} = \sqrt{1 + y'^2} - y'.$$

En retranchant membre à membre cette égalité de la précédente, nous trouvons:

$$y' = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x + C_1}{k}} - e^{-\frac{x + C_1}{k}}\right).$$

Si nous intégrons encore une fois, nous obtiendrons l'équation de la courbe du fil cherchée:

$$y+C_2=\frac{k}{2}\left(e^{\frac{x+C_1}{k}}+e^{-\frac{x+C_1}{k}}\right). \qquad (26)$$

Les constantes arbitraires C_1 et C_2 sont définies par la condition que la courbe passe par les points A_1 (a_1, b_1) et A_2 (a_2, b_2). Cependant, ce n'est pas l'équation de la courbe elle-même, qui présente le plus d'intérêt dans les applications (c'est-à-dire les constantes C_1 et C_2), mais le rapport entre les distances horizontale et verticale des points d'attache et la longueur de l'arc A_1A_2.

Si nous étudions la relation de ces trois grandeurs, nous pouvons, bien entendu, effectuer une translation des axes de coordonnées. Si nous plaçons l'origine au point $(-C_1, -C_2)$, nous pouvons faire dans l'équation (26) $C_1 = C_2 = 0$, et remplacer cette expression par une autre plus simple:

$$y=\frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}\right)=k\operatorname{ch}\frac{x}{k}, \qquad (26_1)$$

d'où il est évident que *la courbe est une chaînette.*

Supposons, avec les axes de coordonnées que l'on a choisis, que le point d'attache A_1 ait pour coordonnées (a_1, b_1), et A_2 (a_2, b_2). Si nous désignons par l, h, s les distances horizontale et verticale des points d'attache et la longueur du fil, nous aurons:

$$l=a_2-a_1,\quad h=b_2-b_1=k\left(\operatorname{ch}\frac{a_2}{k}-\operatorname{ch}\frac{a_1}{k}\right),$$

$$s=\int_{a_1}^{a_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_{a_1}^{a_2}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{k}}\,dx=$$

$$=\int_{a_1}^{a_2}\operatorname{ch}\frac{x}{k}\,dx=k\left(\operatorname{sh}\frac{a_2}{k}-\operatorname{sh}\frac{a_1}{k}\right).$$

D'après les formules (24) nous trouvons:

$$h=2k\operatorname{sh}\frac{a_2+a_1}{2k}\operatorname{sh}\frac{a_2-a_1}{2k}=2k\operatorname{sh}\frac{l}{2k}\operatorname{sh}\frac{a_2+a_1}{2k},$$

$$s=2k\operatorname{sh}\frac{a_2-a_1}{2k}\operatorname{ch}\frac{a_2+a_1}{2k}=2k\operatorname{sh}\frac{l}{2k}\operatorname{ch}\frac{a_2+a_1}{2k},$$

d'où, en tenant compte de la première relation (23),

$$s^2-h^2=4k^2\operatorname{sh}^2\frac{l}{2k},$$

ce qui nous donne la relation entre l, h et s, que nous cherchions. Nous pouvons l'écrire sous cette autre forme:

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{l}{2k}}{\frac{l}{2k}}=\frac{\sqrt{s^2-h^2}}{l}. \qquad (27)$$

Si l'on donne les points d'attache et la longueur du fil, les grandeurs l, h et s sont connues, et nous obtenons une équation définissant le paramètre k, ou, si la densité linéaire du fil ρ est également connue, l'équation (27) peut également servir à définir la composante horizontale de tension T_0. Pour condenser les notations, posons:

$$\frac{l}{2k}=\xi,\quad \frac{\sqrt{s^2-h^2}}{l}=c.$$

L'équation (27) deviendra:

$$\frac{\operatorname{sh}\xi}{\xi}=c. \tag{27$_1$}$$

Nous rappelant le développement d'une fonction exponentielle en une série de puissance [IV-2-4], nous trouverons:

$$\frac{\operatorname{sh}\xi}{\xi}=\frac{e^{\xi}-e^{-\xi}}{2\xi}=1+\frac{\xi^2}{3!}+\frac{\xi^4}{5!}+\frac{\xi^6}{7!}+\ldots,$$

d'où nous voyons que lorsque ξ croît de 0 à $+\infty$, le rapport croît également de 1 à $+\infty$. Par conséquent, pour toute valeur donnée $c \geqslant 1$, l'équation (27$_1$) possède une seule racine positive que l'on peut calculer en utilisant des tables de fonctions hyperboliques. Les grandeurs données l, h et s doivent alors vérifier la condition:

$$c=\frac{\sqrt{s^2-h^2}}{l}\geqslant 1 \quad \text{ou} \quad s^2\geqslant h^2+l^2,$$

qui est évidente à partir de la représentation géométrique, puisque $\sqrt{h^2+l^2}$ est une corde de A_1A_2, et s un arc de la chaînette entre ces mêmes points.

Soit, par exemple:

$$s=100 \text{ m},\ l=50 \text{ m},\ h=20 \text{ m},\ \rho=20 \text{ kg/m},$$

nous obtiendrons:

$$c=0{,}02\sqrt{10\,000-400}=0{,}8\cdot\sqrt{6}=1{,}96$$

et nous trouverons dans les tables hyperboliques la racine de l'équation (27$_1$):

$$\xi=\frac{l}{2k}=2{,}15,$$

d'où:

$$T_0=k\rho=\frac{l}{2\xi}\rho=\frac{50}{2\cdot 2{,}15}\cdot 20=232 \text{ kg}.$$

Supposons que les points d'attache se trouvent à la même hauteur. Suivons la flèche du fil f (fig. 175):

$$f=\overline{OA}-\overline{OC}=\frac{k}{2}\left(e^{\frac{l}{2k}}+e^{-\frac{l}{2k}}\right)-k=\frac{k}{2}\left(e^{\frac{l}{2k}}+e^{-\frac{l}{2k}}-2\right).$$

Si nous développons la fonction exponentielle en série, nous obtiendrons:

$$f=\frac{1}{2!}\frac{l^2}{2^2\cdot k}+\frac{1}{4!}\frac{l^4}{2^4\cdot k^3}+\ldots \tag{28}$$

De même, nous aurons pour $s=\widehat{A_1A_2}$ [formule (27) pour $h=0$]:

$$s=2k\operatorname{sh}\frac{l}{2k}=k\left(e^{\frac{l}{2k}}-e^{-\frac{l}{2k}}\right)=l+\frac{1}{3!}\frac{l^3}{2^2\cdot k^2}+\frac{1}{5!}\frac{l^5}{2^4\cdot k^4}+\ldots \tag{29}$$

Nous limitant dans la série (28) à un seul terme, nous définirons de façon approchée

$$k \approx \frac{l^2}{8f}.$$

Du développement de (29) déduisons les deux premiers termes, et portons-les dans l'expression que nous avons trouvée pour k:

$$s \approx l + \frac{8}{3}\frac{f^2}{l}.$$

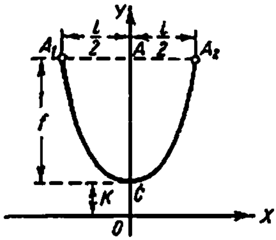

Fig. 175

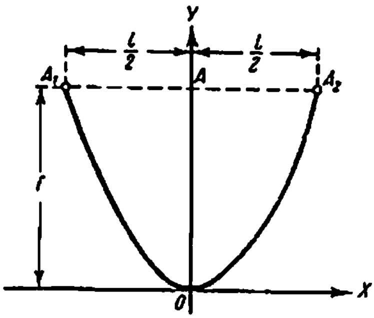

Fig. 176

Si nous différentions ce rapport, nous obtiendrons *la relation entre l'allongement du fil et l'accroissement de la flèche*:

$$ds \approx \frac{16}{3}\frac{f\,df}{l}, \quad \text{ou} \quad df \approx \frac{3l}{16f}\,ds.$$

Nous avons obtenu l'équation (25), en admettant que la pesanteur agit sur chaque élément de fil, proportionnellement à la longueur de l'élément. Dans certains cas, par exemple dans l'étude des câbles de ponts, il faut considérer que le poids est proportionnel à la longueur non de l'élément lui-même, mais de sa projection sur l'axe horizontal. Cela arrive lorsque la charge du tablier est si grande devant le poids du câble, que l'on peut négliger ce dernier. Dans ce cas, nous aurons à la place de l'équation (25):

$$T_0\,dy' = p\,dx,$$

d'où:

$$y' = \frac{p}{T_0}x + C_1$$

et

$$y = \frac{p}{2T_0}x^2 + C_1 x + C_2,$$

c'est-à-dire que *la courbe sera une parabole.*

Supposons que les extrémités du fil A_1 et A_2 se trouvent à la même hauteur, et plaçons l'origine des coordonnées au sommet de la parabole (fig. 176), de sorte que son équation sera:

$$y = \alpha x^2 \quad \left(\alpha = \frac{p}{2T_0}\right).$$

Déterminons, comme ci-dessus, la longueur de la portée $l = A_1A_2$ et de la flèche $f = OA$. Nous obtiendrons à partir de l'équation de la parabole

$$f = \alpha \frac{l^2}{4}, \text{ d'où } \alpha = \frac{4f}{l^2}.$$

Calculons la longueur de l'arc A_1A_2 égale au double de l'arc OA_2:

$$s = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \sqrt{1+4\alpha^2x^2}\,dx.$$

D'après la formule du binôme de Newton, nous avons:

$$\sqrt{1+4\alpha^2x^2} = (1+4\alpha^2x^2)^{1/2} = 1+2\alpha^2x^2-2\alpha^4x^4+\ldots$$

et, en intégrant, nous trouvons pour s le développement:

$$s = l+\frac{1}{6}\alpha^2l^3-\frac{1}{40}\alpha^4l^5+\ldots$$

Remplaçons α par l'expression que nous avons trouvée plus haut, il vient:

$$s = l+\frac{8}{3}\left(\frac{f}{l}\right)^2 l-\frac{32}{5}\left(\frac{f}{l}\right)^4 l+\ldots = l\left[1+\frac{8}{3}\varepsilon^2-\frac{32}{5}\varepsilon^4+\ldots\right],$$

où $\varepsilon = \frac{f}{l}$. Si nous nous limitons dans ce développement aux deux premiers termes, nous obtiendrons la formule approchée:

$$s \approx l+\frac{8}{3}\frac{f^2}{l},$$

qui coïncide avec la formule de la chaînette.

VI-1-10. Logarithme d'un nombre complexe. *On appelle logarithme naturel d'un nombre complexe* $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *la puissance à laquelle il faut élever e pour obtenir le logarithme du nombre.* En désignant par ln le logarithme naturel, nous pouvons dire que l'égalité

$$\ln[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)] = x+yi$$

est équivalente à:

$$e^{x+yi} = r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

On peut écrire ainsi cette dernière égalité:

$$e^x(\cos y+i\sin y) = r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

d'où, en comparant les modules et les arguments, nous obtiendrons:

$$e^x = r, \qquad y = \varphi+2k\pi \qquad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

c'est-à-dire:

$$x = \ln r \text{ et } x+yi = \ln r+(\varphi+2k\pi)i$$

et finalement:

$$\ln[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)] = \ln r+(\varphi+2k\pi)i, \tag{30}$$

c'est-à-dire que *le logarithme naturel d'un nombre complexe est égal à un nombre complexe dont la partie réelle est le logarithme ordinaire du module, et la partie imaginaire est le produit de i par une des valeurs de l'argument.*

Nous voyons ainsi que le logarithme naturel d'un nombre quelconque possède une quantité infinie de valeurs. La seule exception est zéro, qui n'a pas de logarithme. Si nous imposons à l'argument de vérifier l'inégalité:

$$-\pi < \varphi \leqslant \pi,$$

nous obtiendrons ce que l'on appelle *la valeur principale du logarithme*. Pour distinguer la valeur principale d'un logarithme de sa valeur générale, donnée par la formule (30), on emploie pour désigner la valeur principale lg au lieu de ln, de sorte que:

$$\lg [r (\cos \varphi + i \sin \varphi)] = \lg r + \varphi i, \tag{31}$$

où $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Déterminons à l'aide du logarithme *la puissance complexe d'un nombre complexe quelconque*. Si u et v sont deux nombres complexes, et que $u \neq 0$, nous supposerons que:

$$u^v = e^{v \ln u}.$$

Notons que $\ln u$, et donc u^v, ont, en général, une quantité infinie de valeurs.

Exemples. 1. Le module i est égal à 1 et l'argument à $\frac{\pi}{2}$, c'est pourquoi:

$$\ln i = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

2. Déterminons i^i:

$$i^i = e^{i \ln i} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

VI-1-11. Grandeurs sinusoïdales et diagrammes vectoriels. Signalons l'utilisation des grandeurs complexes pour l'étude des oscillations harmoniques. Etudions le courant variable dont l'intensité j a, à chaque instant, dans tout le circuit, la même valeur qu'on peut définir par la formule:

$$j = j_m \sin (\omega t + \varphi), \tag{32}$$

où t est le temps, et j_m, ω et φ sont des constantes.

La constante j_m que nous considérerons comme positive, s'appelle *amplitude*; la constante ω s'appelle *pulsation* et est liée à *la période* T par la relation:

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

la constante φ est appelée *phase* du courant alternatif.

Le courant dont l'intensité est définie par la formule (32) est dit *sinusoïdal*. Ce qui vient d'être dit est valable également pour la tension:

$$v = v_m \sin (\omega t + \varphi_1), \tag{33}$$

et nous étudierons plus loin l'intensité et la tension du courant qui varient selon la loi sinusoïdale définie par les formules (32) et (33).

Il existe une représentation géométrique simple des grandeurs sinusoïdales de même fréquence. Menons par un point O du plan un rayon que nous ferons tourner à une vitesse angulaire ω dans le sens des aiguilles d'une montre; nous appellerons ce rayon *axe des temps*.

Admettons que la position initiale de l'axe des temps pour $t = 0$ coïncide avec l'axe OX. Construisons un vecteur $\overrightarrow{OA}$ (fig. 177) de longueur j_m, qui forme

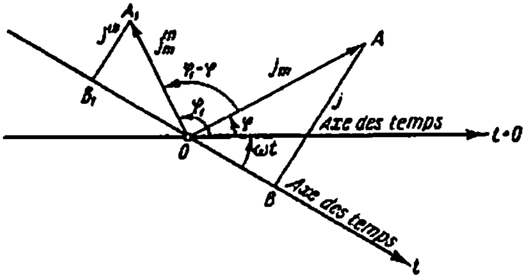

Fig. 177

l'angle φ avec la position initiale de l'axe des temps (rappelons que nous considérons la direction inverse de celle des aiguilles d'une montre, comme direction positive pour mesurer des angles).

A l'instant t, le vecteur $\overrightarrow{OA}$ formera un angle $(\varphi + \omega t)$ avec l'axe des temps qui aura tourné d'un angle ωt; la projection du vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans une direction perpendiculaire à l'axe des temps et obtenue par une rotation de cette projection d'un angle $\frac{\pi}{2}$ en sens inverse des aiguilles d'une montre, ou, en un mot, la longueur, prise avec le signe convenable, de la perpendiculaire menée de l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{OA}$ sur l'axe des temps nous donne, comme on le voit, la grandeur

$$j = j_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Pour représenter une autre grandeur sinusoïdale de même période:

$$j^{(1)} = j_m^{(1)} \sin(\omega t + \varphi_1)$$

il faudra tracer un vecteur de longueur $j_m^{(1)}$ formant avec le premier vecteur l'angle:

$$\psi = \varphi_1 - \varphi.$$

Ainsi, nous pouvons représenter, à l'aide des vecteurs fixes du plan, des grandeurs sinusoïdales de même fréquence. La longueur de chaque vecteur donne l'amplitude de la grandeur correspondante, et l'angle situé entre deux vecteurs est la différence de phase des grandeurs correspondant à ces vecteurs. Les vecteurs ainsi construits donnent ce qu'on appelle *le diagramme vectoriel* du système de grandeurs sinusoïdales de même période.

La somme géométrique de plusieurs vecteurs d'un diagramme vectoriel correspondra, d'après le théorème sur la projection de la résultante, à une grandeur sinusoïdale de même période égale *à la somme des grandeurs sinusoïdales* qui correspondent aux vecteurs à additionner.

En utilisant la définition donnée de la multiplication [VI-1-3], on peut conférer aux opérations sur les diagrammes vectoriels une forme analytique pratique.

Par la suite, nous désignerons les vecteurs par les mêmes lettres, mais en caractères gras.

Nous considérerons le produit d'un vecteur **j** *par un nombre complexe* $re^{\varphi i}$ *comme égal au vecteur que l'on obtient à partir du vecteur* **j** *en multipliant sa longueur par* r *et en le faisant tourner d'un angle* φ, c'est-à-dire que nous considérerons que le produit $re^{\varphi i}$ **j** s'obtient d'après la règle donnée dans [VI-1-3] de la multiplication d'un nombre complexe, représentant le vecteur **j**, par un nombre complexe $re^{\varphi i}$.

Si on écrit le nombre complexe $re^{\varphi i}$ sous la forme $(a + bi)$, on peut représenter le produit sous la forme d'une somme de deux vecteurs:

$$(a+bi)\,\mathbf{j} = a\mathbf{j} + bi\mathbf{j},$$

le premier terme étant un vecteur parallèle au vecteur **j**, et le second un vecteur perpendiculaire au vecteur **j**.

Nous pouvons, en projetant un vecteur $\mathbf{j}_1$ quelconque suivant deux directions perpendiculaires, le représenter sous la forme:

$$\mathbf{j}_1 = a\mathbf{j} + bi\mathbf{j} = (a+bi)\,\mathbf{j}.$$

On a alors $|a + bi|$ égal au rapport des longueurs des vecteurs de **j** et $\mathbf{j}_1$, et l'argument du nombre $(a + bi)$ est l'angle formé par le vecteur $\mathbf{j}_1$ et le vecteur **j**. Cet angle donne la différence de phase des grandeurs correspondantes aux vecteurs $\mathbf{j}_1$ et **j**.

Introduisons la notion de valeur *quadratique moyenne* d'une grandeur sinusoïdale (32), que nous désignerons par le symbole $M(j^2)$. Elle est définie par l'équation:

$$M(j^2) = \frac{1}{T}\int_0^T j^2\,dt.$$

Si nous intégrons l'expression

$$j^2 = j_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} j_m^2 - \frac{1}{2} j_m^2 \cos 2(\omega t + \varphi)$$

entre les limites 0 et $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, nous obtiendrons:

$$M(j^2) = \frac{1}{2} j_m^2 - \left[\frac{1}{4\omega} j_m^2 \sin 2(\omega t + \varphi)\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{1}{2} j_m^2.$$

La racine carrée de la valeur quadratique moyenne est *la valeur efficace d'une grandeur*:

$$j_{eff} = \sqrt{M(j^2)} = \frac{j_m}{\sqrt{2}}.$$

Dans la pratique, quand on construit des diagrammes vectoriels, on prend habituellement la longueur du vecteur égale non pas à l'amplitude, mais à la valeur efficace de la grandeur, c'est-à-dire que l'on diminue les longueurs des vecteurs, par rapport à la construction exposée ci-dessus, dans le rapport $1 : \sqrt{2}$.

Si nous différentions la formule (32), nous obtiendrons:

$$\frac{dj}{dt} = \omega j_m \cos(\omega t + \varphi) = \omega j_m \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

c'est-à-dire que la dérivée de $\frac{d\mathfrak{j}}{dt}$ ne diffère de $\mathfrak{j}$ qu'en ce que l'amplitude est multipliée par ω et que la phase augmente de $\frac{\pi}{2}$.

On écrira la relation entre ces grandeurs vectorielles ainsi:

$$\frac{d\mathfrak{j}}{dt}=\omega i\mathfrak{j}. \tag{34}$$

Si nous intégrons la formule (32) et négligeons la constante arbitraire, ce qui est nécessaire si nous voulons obtenir également une grandeur sinusoïdale de même période, nous avons:

$$\int j\,dt=-\frac{1}{\omega}j_m\cos(\omega t+\varphi)=\frac{1}{\omega}j_m\sin\left(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2}\right),$$

d'où il résulte*:

$$\int \mathfrak{j}\,dt=\frac{1}{\omega i}\mathfrak{j}. \tag{35}$$

VI-1-12. Exemples. 1. Etudions un circuit de courant alternatif, formé successivement: d'une résistance R, d'une self-induction L et d'une capacité C. Si nous désignons par v la tension et par j l'intensité du courant, nous aurons la relation, employée en physique:

$$v=Rj+L\frac{dj}{dt}+\frac{1}{C}\int j\,dt.$$

Limitons-nous pour le moment aux phénomènes *permanents*, et en particulier au cas où la tension et l'intensité du courant sont des grandeurs sinusoïdales de même période. On peut écrire l'équation précédente sous une forme vectorielle, en introduisant à la place de v et j *les vecteurs* tension et intensité du courant $\mathfrak{v}$ et $\mathfrak{j}$.

$$\mathfrak{v}=R\mathfrak{j}+L\frac{d\mathfrak{j}}{dt}+\frac{1}{C}\int \mathfrak{j}\,dt;$$

nous rappelant les formules (34) et (35), nous trouverons à partir de là:

$$\mathfrak{v}=R\mathfrak{j}+\omega Li\mathfrak{j}+\frac{1}{\omega Ci}\mathfrak{j}=(R+ui)\,\mathfrak{j}=\zeta\mathfrak{j}, \tag{36}$$

où:

$$u=\omega L-\frac{1}{\omega C},\quad \zeta=R+ui. \tag{37}$$

La relation obtenue entre les vecteurs tension et intensité a la forme de l'habituelle loi d'Ohm, avec cette différence qu'à la place de la résistance entre ici un facteur complexe ζ appelé *résistance apparente du circuit* ou impédance et qui est composé de la somme de trois « résistances »: *résistance ohmique* (R), *impédance de la self-induction* (ωLi) *et impédance de la capacité* $\left(\frac{1}{\omega Ci}\right)$.

---

* Le symbole $\frac{d\mathfrak{j}}{dt}$ désigne le vecteur correspondant à la grandeur sinusoïdale $\frac{dj}{dt}$, et le symbole $\int \mathfrak{j}\,dt$ le vecteur correspondant à $\int j\,dt$.

La formule (36) donne en plus la décomposition du vecteur v en deux composantes: $R\mathrm{j}$ dans la direction de j, et $ui\mathrm{j}$ dans la direction perpendiculaire à j. La première s'appelle composante *active*, et la deuxième, la composante *réactive* de la tension. Ces termes deviendront clairs si nous calculons *la puissance moyenne* W du courant de notre circuit, qui est définie comme la moyenne arithmétique sur toute la période à partir de la puissance instantanée de vj:

$$W=\frac{1}{T}\int_0^T vj\,dt=\frac{v_m j_m}{T}\int_0^T \sin(\omega t+\varphi_1)\sin(\omega t+\varphi_2)\,dt;$$

φ_1 désigne ici la phase de tension, φ_2 la phase de l'intensité, de sorte que:

$$v=v_m\sin(\omega t+\varphi_1),\quad j=j_m\sin(\omega t+\varphi_2).$$

Nous trouverons sans peine:

$$W=\frac{v_m j_m}{2T}\int_0^T[\cos(\varphi_1-\varphi_2)-\cos(2\omega t+\varphi_2)]\,dt=$$

$$=\frac{v_m j_m}{2}\cos(\varphi_1-\varphi_2)=v_{eff}j_{eff}\cos(\varphi_1-\varphi_2). \tag{38}$$

Ainsi, on obtient la plus grande puissance moyenne en valeur absolue lorsque les phases de la tension et de l'intensité coïncident ou diffèrent de π; on obtient la plus petite puissance (nulle), lorsque ces phases diffèrent de $\frac{\pi}{2}$.

Lorsqu'on établit l'expression de W, la composante réactive $ui\mathrm{j}$ du vecteur v donne une puissance moyenne égale à zéro, puisque le vecteur $ui\mathrm{j}$ est perpendiculaire au vecteur j, c'est-à-dire que pour lui $\cos(\varphi_1-\varphi_2)=0$, et l'on n'obtient la puissance moyenne, qui se transforme en chaleur suivant la loi de Joule, qu'à partir de la composante active (« de travail »).

On peut écrire le rapport (36) sous la forme suivante:

$$\mathrm{j}=\frac{1}{\zeta}\mathrm{v}=\eta\mathrm{v},\quad \text{où}\quad \eta=\frac{1}{R+ui}=g+hi,$$

ou:

$$\mathrm{j}=g\mathrm{v}+hi\mathrm{v}.$$

On appelle le facteur complexe η *la conductibilité apparente du circuit; il est égal à l'inverse de l'impédance.* La formule précédente donne le développement du vecteur intensité du courant en composantes active et réactive (dans la direction de v et perpendiculairement à lui).

2. Les règles fondamentales pour calculer la résistance d'un circuit complexe parcouru par un courant continu, dans lequel les résistances sont en série ou en parallèle, ont été tirées des lois d'Ohm et de Kirchhoff; elles restent valables pour les circuits parcourus par un courant sinusoïdal alternatif à l'état de régime permanent, si nous convenons seulement de remplacer les valeurs instantanées de la tension et de l'intensité par les vecteurs correspondants, et les résistances ohmiques par des impédances.

Ainsi, si les résistances apparentes sont incluses *en série* dans le circuit:

$$\zeta_1=R_1+x_1i,\quad \zeta_2=R_2+x_2i,\ \ldots,$$

les vecteurs tension et intensité seront liés par les relations:

$$\mathrm{v}=\zeta'\mathrm{j},\quad \text{où}\quad \zeta'=\zeta_1+\zeta_2+\ldots, \tag{39}$$

c'est-à-dire que *lorsque les impédances sont en série, elles s'ajoutent.*

Par contre, si les impédances sont en parallèle, nous obtiendrons la relation:

$$\mathrm{v}=\zeta''\mathrm{j},\quad \text{où}\quad \frac{1}{\zeta''}=\frac{1}{\zeta_1}+\frac{1}{\zeta_2}+\ldots, \tag{40}$$

c'est-à-dire que *lorsque les conductibilités apparentes sont en parallèle, elles s'additionnent.*

La construction graphique de l'impédance, lorsque les impédances $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$, sont en série, se ramène à la construction géométrique de la somme des vecteurs qui représentent ces nombres complexes.

Indiquons la construction dans le cas où deux impédances ζ_1 et ζ_2 sont en parallèle. Nous avons, d'après la règle précédente:

$$\zeta'' = \frac{1}{\frac{1}{\zeta_1} + \frac{1}{\zeta_2}} = \frac{\zeta_1 \zeta_2}{\zeta_1 + \zeta_2}.$$

En admettant que:

$$\zeta'' = \rho e^{\theta i}, \quad \zeta_1 = \rho_1 e^{\theta_1 i}, \quad \zeta_2 = \rho_2 e^{\theta_2 i}, \quad \zeta_1 + \zeta_2 = \rho_0 e^{\theta_0 i},$$

nous aurons:

$$\rho = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_0}, \quad \theta = \theta_1 + \theta_2 - \theta_0.$$

Cela nous amène à la construction géométrique suivante (fig. 178) *. Trouvons

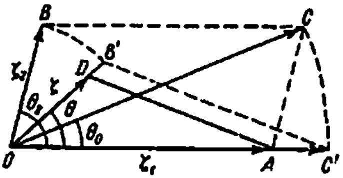

Fig. 178

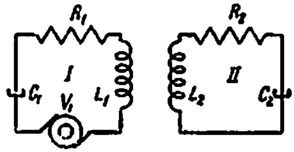

Fig. 179

d'abord la somme $\zeta_1 + \zeta_2 = \overline{OC}$; construisons ensuite $\triangle AOD$, qui est semblable à $\triangle COB$, en faisant tourner $\triangle COB$ jusqu'en $C'OB'$, et menons la droite $\overline{AD}$ parallèle à $\overline{C'B'}$.

De la similitude des triangles, nous obtenons:

$$\overline{OD} = \overline{OA}\,\frac{\overline{OB}}{\overline{OC}}, \text{ c'est-à-dire } \rho = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_0},$$

$$\theta = \theta_2 - \theta_0 \qquad (\theta_1 = 0),$$

ce qu'il fallait démontrer.

3. Etudions les oscillations couplées de deux circuits liés par mutuelle induction (fig. 179). Admettons que v_1 et i_1 désignent la force électromotrice externe et l'intensité du courant dans le circuit I, et que i_2 désigne l'intensité du courant dans le circuit II (sans force électromotrice externe); R_1, R_2, L_1, L_2, C_1, C_2 seront respectivement les résistances, les coefficients de self-induction et les capacités de ces circuits, M les coefficients d'induction mutuelle des circuits I et II.

---

* Sur la figure, nous avons, pour simplifier, dirigé l'axe OX suivant le vecteur ζ_1 ce qui nous amène à supposer que $\theta_1 = 0$. Dans le cas général, il suffit de tourner l'axe OX d'un angle θ_1 dans le sens des aiguilles d'une montre.

Nous avons les rapports:

$$v_1 = R_1 j_1 + L_1 \frac{dj_1}{dt} + M \frac{dj_2}{dt} + \frac{1}{C_1} \int j_1\, dt,$$

$$0 = R_2 j_2 + L_2 \frac{dj_2}{dt} + M \frac{dj_1}{dt} + \frac{1}{C_2} \int j_2\, dt.$$

Si nous étudions le phénomène à l'état de régime permanent, au cours duquel la tension et l'intensité varient selon la loi sinusoïdale de fréquence égale, nous pouvons mettre ces équations sous forme vectorielle:

$$\mathrm{v}_1 = \left(R_1 + \omega L_1 i + \frac{1}{\omega C_1 i}\right) \mathrm{j}_1 + \omega M i \mathrm{j}_2 = \zeta_1 \mathrm{j}_1 + \omega M i \mathrm{j}_2,$$

$$0 = \omega M i \mathrm{j}_1 + \left(R_2 + \omega L_2 i + \frac{1}{\omega C_2 i}\right) \mathrm{j}_2 = \omega M i \mathrm{j}_1 + \zeta_2 \mathrm{j}_2,$$

où ζ_1 et ζ_2 sont les impédances des circuits I et II. En résolvant par rapport à j_1 et j_2, nous obtiendrons sans peine:

$$\mathrm{j}_1 = \frac{\zeta_2}{\zeta_1\zeta_2 + \omega^2 M^2} \mathrm{v}_1, \qquad \mathrm{j}_2 = -\frac{\omega M i}{\zeta_1\zeta_2 + \omega^2 M^2} \mathrm{v}_1.$$

En mettant la première équation sous la forme:

$$\mathrm{v}_1 = \left(\zeta_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\zeta_2}\right) \mathrm{j}_1,$$

nous pouvons dire que la présence du circuit II modifie l'impédance ζ du circuit I d'un terme: $\dfrac{\omega^2 M^2}{\zeta_2}$.

VI-1-13. **Courbes définies sous forme complexe.** Si l'on convient de représenter les nombres réels par des points sur un axe OX, la variation de la variable réelle revient à un déplacement du point correspondant sur l'axe OX. De même pour une variable complexe, $\zeta = x + yi$, cela revient au déplacement d'un point dans *le plan XOY*.

Il est surtout intéressant d'étudier le cas où la variable ζ décrit, lors de sa variation, une certaine courbe; ce cas se présente lorsque les parties réelle et imaginaire, c'est-à-dire les coordonnées x et y, sont fonctions d'un paramètre u que nous considérerons comme réel:

$$x = \varphi_1(u), \quad y = \varphi_2(u). \tag{41}$$

Nous écrirons alors simplement:

$$\zeta = f(u), \quad \text{où} \quad f(u) = \varphi_1(u) + i\varphi_2(u),$$

et nous appellerons cette équation *équation de la courbe considérée* (41) *sous forme complexe.*

Les équations (41) donnent une représentation paramétrique de la courbe en coordonnées *orthogonales*. Nous passerons aux coordonnées *polaires*, si nous écrivons la variable ζ sous forme exponentielle:

$$\zeta = \rho e^{\theta i}, \quad \rho = \psi_1(u), \quad \theta = \psi_2(u).$$

Dans cette expression, le facteur ρ n'est pas autre chose que $|\zeta|$ et le facteur $e^{\theta i}$ qui, dans le cas où ζ est réel ($\theta = 0$ ou π), coïncide avec le « signe » (± 1), est un vecteur de longueur unité et se note à l'aide du symbole:

$$\operatorname{Sgn} \zeta = e^{\theta i} = \frac{\zeta}{|\zeta|}.$$

Les diagrammes vectoriels conduisent à l'étude des équations des courbes sous forme complexe. Si nous considérons dans la relation:

$$v = \zeta j$$

le vecteur intensité j comme constant, mais que nous fassions varier l'une des constantes du circuit, l'impédance ζ et le vecteur v varieront; l'extrémité de ce vecteur v décrit une courbe appelée *diagramme de la tension*; quand on aura construit cette courbe, on aura une représentation claire de la variation du vecteur v. Le point ζ décrit également une courbe (*diagramme d'impédance*), qui ne se différenciera du diagramme de tension que par le choix de l'échelle (on prendra le vecteur j pour unité).

Étudions maintenant les équations de quelques courbes simples.

1. L'équation d'une droite passant par un point donné $\zeta_0 = x_0 + y_0 i$ et formant un angle α avec l'axe OX:

$$\zeta = \zeta_0 + ue^{\alpha i},$$

le paramètre u désigne la distance de ζ_0 à ζ.

2. L'équation d'une circonférence dont le centre est au point ζ_0 et de rayon r:

$$\zeta = \zeta_0 + re^{ui}.$$

3. Une ellipse dont le centre est à l'origine des coordonnées, et dont les demi-axes sont a et b; le grand axe étant orienté suivant l'axe OX a, sous forme complexe, l'équation [VI-1-8]:

$$\zeta = x + yi = a\cos u + bi\sin u = \frac{a+b}{2}e^{ui} + \frac{a-b}{2}e^{-ui}.$$

Si le grand axe forme un angle φ_0 avec l'axe OX, l'équation de l'ellipse sera de la forme:

$$\zeta = e^{\varphi_0 i}\left[\frac{a+b}{2}e^{ui} + \frac{a-b}{2}e^{-ui}\right].$$

Dans le cas général, lorsque le centre de l'ellipse se trouve au point ζ_0 et que le grand axe forme un angle avec l'axe OX, l'ellipse aura pour équation:

$$\zeta = \zeta_0 + e^{\varphi_0 i}\left[\frac{a+b}{2}e^{ui} + \frac{a-b}{2}e^{-ui}\right].$$

Si $b = a$, cette équation devient l'équation du cercle de rayon a:

$$\zeta = \zeta_0 + ae^{(\varphi_0+u)i},$$

où $(\varphi_0 + u)$ est, comme u, un paramètre réel. Si $b = 0$, nous obtiendrons le segment de droite:

$$\zeta = \zeta_0 + ae^{\varphi_0 i}\frac{e^{ui}+e^{-ui}}{2} = \zeta_0 + ae^{\varphi_0 i}\cos u, \quad \zeta = \zeta_0 + ve^{\varphi_0 i},$$

formant un angle φ_0 avec l'axe OX, de longueur $2a$, et dont le centre est au point ζ_0 car le paramètre $v = a\cos u$ est réel, comme u, mais ne peut prendre que des valeurs comprises entre $(-a)$ et $(+a)$.

Si nous considérons les cas du cercle et du segment de droite comme des cas limites de l'ellipse obtenus lorsque le demi-petit axe devient égal au grand ou s'annule, nous pouvons alors dire de façon générale que *l'équation*

$$\zeta = \zeta_0 + \mu_1 e^{ui} + \mu_2 e^{-ui}, \tag{42}$$

où ζ_0, μ_1, μ_2 sont des nombres complexes quelconques, représente toujours l'équation d'une ellipse.

En effet, si nous supposons que:

$$\mu_1 = M_1 e^{\theta_1 i},\quad \mu_2 = M_2 e^{\theta_2 i},\quad \frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \varphi_0,\quad \frac{\theta_1-\theta_2}{2} = \theta_0,$$

nous pouvons écrire l'équation (42) sous la forme:

$$\zeta = \zeta_0 + M_1 e^{(u+\theta_1)i} + M_2 e^{-(u-\theta_2)i} = \zeta_0 + e^{\varphi_0 i}\,[M_1 e^{(u+\theta_0)i} + M_2 e^{-(u+\theta_0)i}],$$

d'où l'on voit que la courbe étudiée est bien une ellipse dont le centre est au point ζ_0, dont les demi-axes sont $(M_1 \pm M_2)$, et dont le grand axe forme avec l'axe OX l'angle φ_0, c'est-à-dire qu'il a pour direction la bissectrice de l'angle formé par les vecteurs μ_1 et μ_2. Pour $M_2 = 0$, l'ellipse se transforme en circonférence, pour $M_2 = M_1$, en segment de droite.

4. Les courbes dont l'équation sous forme complexe a l'aspect suivant:

$$\zeta = \nu e^{\gamma u}, \tag{43}$$

où ν et γ sont des constantes complexes arbitraires, s'emploient très souvent pour l'étude des phénomènes du courant alternatif dans les circuits à distribution continue des résistances, des capacités et de la self-induction.

Posons $\nu = N_1 e^{\varphi_0 i}$, $\gamma = a + bi$ et en passant aux coordonnées polaires, nous avons:

$$\zeta = \rho e^{\theta i} = N_1 e^{\varphi_0 i} e^{(a+bi)u} = N_1 e^{au} e^{(bu+\varphi_0)i},$$

c'est-à-dire:

$$\rho = N_1 e^{au},\quad \theta = bu + \varphi_0,$$

d'où

$$u = \frac{\theta-\varphi_0}{b},$$

et finalement:

$$\rho = Ne^{\frac{a}{b}\theta}\quad \left(N = N_1 e^{-\frac{a\varphi_0}{b}}\right),$$

c'est-à-dire que la courbe étudiée est une spirale logarithmique (fig. 180, correspondant au cas $\frac{a}{b} > 0$).

Nous pouvons obtenir des courbes plus compliquées du type:

$$\zeta = \nu_1 e^{\gamma_1 u} + \nu_2 e^{\gamma_2 u} + \ldots + \nu_s e^{\gamma_s u},$$

si nous construisons les « composantes de la spirale »:

$$\zeta_1 = \nu_1 e^{\gamma_1 u},\quad \zeta_2 = \nu_2 e^{\gamma_2 u},\ \ldots,\ \zeta_s = \nu_s e^{\gamma_s u}$$

et si nous calculons pour chaque valeur de u la somme géométrique des valeurs correspondantes de $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_s$ (fig. 181).

VI-1-14. Représentation d'une oscillation harmonique sous forme complexe. L'oscillation harmonique amortie est exprimée à l'aide de la formule:

$$x = Ae^{-\varepsilon t}\sin(\omega t + \varphi_0), \tag{44}$$

où A et ε sont des constantes positives. Introduisons la grandeur complexe:

$$\zeta = Ae^{\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right)i} e^{(\omega + \varepsilon i)ti} = Ae^{-\varepsilon t + \left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right)i}. \tag{45}$$

La partie réelle de cette grandeur complexe coïncide avec l'expression (44). Nous pouvons, ainsi, représenter une oscillation harmonique amortie quelconque, comme la partie réelle d'une expression complexe de la forme:

$$\zeta = \alpha e^{\beta u},$$

où α et β sont des nombres complexes. Dans le cas de la formule (45):

$$\alpha = Ae^{\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right)i} \quad \text{et} \quad \beta = \omega + \varepsilon i.$$

Dans le cas d'une oscillation harmonique pure sans amortissement, $\varepsilon = 0$, et β

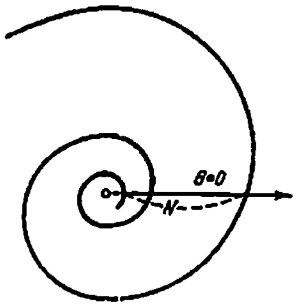

Fig. 180

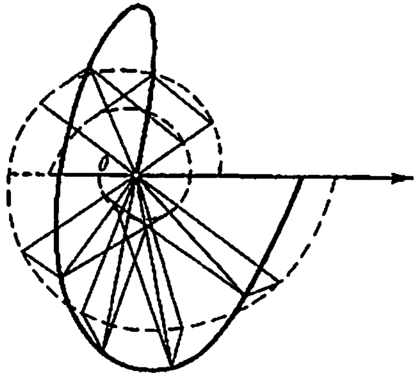

Fig. 181

sera un nombre réel. L'expression (45) pour ζ coïncide avec l'expression (43) pour:

$$v = Ae^{\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right)i}, \quad \gamma = (\omega + \varepsilon i)\, i = -\varepsilon + \omega i \quad \text{et} \quad u = t.$$

On voit de là que lorsque t varie, le point ζ décrit une spirale logarithmique, l'angle polaire θ étant alors une fonction linéaire du temps t:

$$\theta = \omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire que le rayon vecteur tourne, de l'origine des coordonnées au point ζ, autour de l'origine avec une vitesse angulaire ω constante. La projection du point ζ sur l'axe OX effectue des oscillations amorties (44). Si $\varepsilon = 0$, le point ζ tourne suivant un cercle $\rho = A$, et sa projection sur l'axe OX tourne suivant la loi des oscillations harmoniques non amorties:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

VI-2. Propriétés fondamentales des polynômes entiers et calcul de leurs racines

VI-2-1. Equation algébrique. Nous étudierons dans ce paragraphe le polynôme entier:

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_k z^{n-k} + \ldots + a_{n-1} z + a_n,$$

où a_0, a_1, . . . , a_k, . . . , a_n sont des nombres complexes donnés et z une variable complexe, le coefficient a_0 pouvant être considéré comme différent de zéro. On connaît (algèbre élémentaire) les opérations fondamentales sur les polynômes. Nous ne rappellerons que le cas de la division. Si $f(z)$ et $\varphi(z)$ sont deux polynômes et si le degré de $\varphi(z)$ n'est pas supérieure au degré de $f(z)$, nous pouvons représenter $f(z)$ sous la forme:

$$f(z)=\varphi(z)\cdot Q(z)+R(z),$$

où $Q(z)$ et $R(z)$ sont également des polynômes, le degré de $R(z)$ étant inférieure au degré de $\varphi(z)$. On dit que les polynômes $Q(z)$ et $R(z)$ sont, respectivement, le quotient et le reste lors de la division de $f(z)$ par $\varphi(z)$. Le quotient et le reste sont des polynômes entièrement définis, de sorte que la représentation de $f(z)$ sous la forme indiquée ci-dessus en fonction de $\varphi(z)$ est unique.

On appelle racines du polynôme les valeurs de z pour lesquelles le polynôme est égal à zéro. Ainsi, *les racines de* $f(z)$ sont les racines de l'équation:

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_kz^{n-k}+\ldots+a_{n-1}z+a_n=0. \qquad (1)$$

On dit que cette équation est *une équation algébrique de degré n.*

Si l'on divise $f(z)$ par le binôme $(z-a)$, le quotient $Q(z)$ sera un polynôme de degré $(n-1)$ ayant a_0 pour coefficient du terme de plus haut degré, et le reste R ne contiendra pas z. D'après la propriété fondamentale de la division, on a l'identité:

$$f(z)=(z-a)\,Q(z)+R.$$

Si nous mettons dans cette identité $z=a$, nous obtiendrons:

$$R=f(a),$$

c'est-à-dire que *le reste obtenu par la division du polynôme* $f(z)$ *par* $(z-a)$ *est égal à* $f(a)$ (théorème de Bézout).

En particulier, pour que le polynôme $f(z)$ soit divisible par $(z-a)$ sans que l'on ait de reste, il faut et il suffit que:

$$f(a)=0,$$

c'est-à-dire que *pour que le polynôme soit divisible par le binôme* $(z-a)$, *sans qu'il y ait de reste, il faut et il suffit que $z=a$ soit une racine de ce polynôme.*

Ainsi, si nous connaissons la racine $z=a$ du polynôme $f(z)$, nous pouvons extraire de ce polynôme le facteur $(z-a)$:

$$f(z)=(z-a)\,f_1(z),$$

où :

$$f_1(z) = b_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \ldots + b_{n-2} z + b_{n-1} \ (b_0 = a_0).$$

Chercher les autres racines revient à résoudre l'équation:

$$b_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \ldots + b_{n-2} z + b_{n-1} = 0$$

de degré $(n - 1)$.

Nous devons répondre pour la suite de cet exposé à la question suivante: est-ce que toute équation algébrique possède des racines? Dans le cas d'une équation non algébrique on peut répondre par la négative. Ainsi, par exemple, l'équation:

$$e^z = 0 \ (z = x + yi)$$

ne possède aucune racine, puisque le module e^x du premier membre n'est égal à zéro pour aucune valeur de x. Mais dans le cas d'une équation algébrique, on donnera à la question précédente une réponse affirmative, qui s'exprime par le théorème fondamental de l'algèbre: *toute équation algébrique possède, au moins, une racine.*

Nous admettrons ici ce théorème sans démonstration. Nous en ferons la démonstration dans le tome III, dans l'exposé de la théorie des fonctions d'une variable complexe.

VI-2-2. Décomposition d'un polynôme en produit de facteurs. Tout polynôme

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n \tag{2}$$

possède, d'après le théorème fondamental, une racine $z = z_1$, et, par conséquent, il est divisible par $(z - z_1)$, et nous pouvons écrire [VI-2-1]:

$$f(z) = (z - z_1)(a_0 z^{n-1} + \ldots).$$

Le second facteur du produit dans le deuxième membre de cette égalité possède, d'après le théorème fondamental précité, la racine $z = z_2$, et par conséquent est divisible par $(z - z_2)$, donc nous pouvons écrire:

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2)(a_0 z^{n-2} + \ldots).$$

Si nous continuons ainsi à extraire les facteurs du premier degré, nous obtiendrons finalement la mise en facteurs suivante dans $f(z)$:

$$f(z) = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n), \tag{3}$$

c'est-à-dire que *l'on peut mettre tout polynôme de degré n sous forme d'un produit de $(n + 1)$ facteurs, dont l'un est égal au coefficient de la plus grande puissance, les autres étant des binômes du premier degré de la forme $(z - a)$.*

Lorsqu'on fait $z = z_s$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$, un au moins des facteurs de (3) est égal à zéro, c'est-à-dire que *les valeurs* $z = z_s$ *sont les racines de* $f(z)$.

Toute valeur de z, différente des z_s, ne peut pas être une racine de $f(z)$, puisque pour cette valeur de z aucun des facteurs de (3) ne deviendra égal à zéro.

Si tous les nombres z_s sont différents, $f(z)$ a n racines distinctes. S'il y a parmi les nombres z_s des nombres identiques, le nombre des racines distinctes de $f(z)$ sera inférieur à n.

Nous pouvons ainsi énoncer le théorème: *un polynôme de degré* n *(ou une équation algébrique de degré* n*) ne peut avoir plus de* n *racines distinctes.*

Conséquence directe de ce théorème: *si on sait qu'un polynôme, dont le degré n'est pas supérieur à* n, *possède plus de* n *racines distinctes, tous les coefficients de ce polynôme et le terme libre sont égaux à zéro, c'est-à-dire que ce polynôme est identiquement nul.*

Supposons que les valeurs de deux polynômes $f_1(z)$ et $f_2(z)$, dont le degré n'est pas supérieur à n, coïncident pour plus de n valeurs distinctes de z. Leur différence $f_1(z) - f_2(z)$ est un polynôme de degré non supérieur à n, ayant plus de n racines distinctes, et par conséquent cette différence est identiquement nulle, et $f_1(z)$ et $f_2(z)$ ont des coefficients identiques. *Si les valeurs de deux polynômes de degré non supérieur à* n *coïncident pour plus de* n *valeurs distinctes de* z, *tous les coefficients de ces polynômes et les termes constants sont égaux, c'est-à-dire que ces polynômes sont identiques.*

Cette propriété des polynômes est à la base de la méthode dite des coefficients indéterminés, que nous utiliserons par la suite. Le principe de cette méthode est qu'il résulte de l'identité de deux polynômes que les coefficients des termes ayant le même *degré* z sont égaux.

Nous avons obtenu la mise en facteurs (3) en plaçant les facteurs du premier degré du polynôme $f(z)$ dans un ordre déterminé. Démontrons maintenant que la forme définitive du développement en produit de facteurs ne dépend pas de la façon dont nous les avons extraits, c'est-à-dire que *le polynôme ne peut être mis que sous une forme de produits de facteurs du type* (3).

Supposons qu'en plus de la mise en facteurs (3), on ait la mise en facteurs:

$$f(z) = b_0 (z - z_1')(z - z_2') \ldots (z - z_n'). \tag{3_1}$$

Si nous comparons ces deux produits de facteurs, nous pouvons écrire identiquement:

$$a_0 (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n) = b_0 (z - z_1')(z - z_2') \ldots (z - z_n').$$

Le premier membre de cette identité s'annule pour $z = z_1$; par suite, il doit en être de même pour le second membre, c'est-à-dire qu'au moins un des facteurs en z'_k doit être égal à z_1. On peut, par exemple, considérer que $z'_1 = z_1$. En divisant les deux membres de l'identité écrite par $(z - z_1)$, nous obtiendrons l'égalité:

$$a_0(z-z_2)\ldots(z-z_n) = b_0(z-z'_2)\ldots(z-z'_n),$$

vérifiée pour toutes les valeurs de z, sauf, peut-être, $z = z_1$. Mais, d'après l'affirmation ci-dessus, cette égalité doit être également une identité. Nous démontrerons, en raisonnant comme ci-dessus, que $z'_2 = z_2$, etc., et, enfin, que $b_0 = a_0$, c'est-à-dire que la mise en facteurs (3_1) doit coïncider avec la mise en facteurs (3).

VI-2-3. Racines multiples. Il peut y avoir, comme nous l'avons déjà dit, des nombres identiques parmi les z_s entrant dans le produit de facteurs (3). En groupant dans ce produit les facteurs identiques, nous pouvons écrire le produit sous la forme:

$$f(z) = a_0(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\ldots(z-z_m)^{k_m}, \tag{4}$$

où les nombres $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont distincts et

$$k_1+k_2+\ldots+k_m = n. \tag{5}$$

Si l'on a dans ce produit un facteur $(z - z_s)^{k_s}$, on appelle la racine $z = z_s$ *racine d'ordre* k_s *et, de façon générale, on appelle la racine* $z = a$ *du polynôme* $f(z)$ *racine d'ordre* k, *si* $f(z)$ *est divisible par* $(z - a)^k$ *et n'est pas divisible par* $(z - a)^{k+1}$.

Démontrons maintenant un autre critère permettant de déterminer si une racine quelconque est une racine multiple. Utilisons la formule de Taylor. Remarquons d'abord que nous pouvons déterminer les dérivées du polynôme $f(z)$ à l'aide des formules que nous avons employées dans le cas d'une variable réelle:

$$f(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_kz^{n-k} + \ldots + a_{n-1}z + a_n;$$
$$f'(z) = na_0z^{n-1} + (n-1)a_1z^{n-2} + \ldots + (n-k)a_kz^{n-k-1} + \ldots + a_{n-1};$$
$$f''(z) = n(n-1)a_0z^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1z^{n-3} + \ldots$$
$$\ldots + (n-k)(n-k-1)a_kz^{n-k-2} + \ldots + 2\cdot 1a_{n-2}.$$

. . . .

La formule de Taylor

$$f(z) = f(a) + \frac{z-a}{1!}f'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(z-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \ldots + \frac{(z-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) \tag{6}$$

est une identité algébrique élémentaire, contenant les symboles a et z, vérifée non seulement pour les valeurs réelles, mais aussi pour les valeurs complexes de ces symboles.

Donnons maintenant la condition pour que $z = a$ soit une racine d'ordre k de $f(z)$. Ecrivons (6) sous la forme:

$$f(z) = (z-a)^k \left[\frac{1}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{z-a}{(k+1)!} f^{(k+1)}(a) + \ldots + \frac{(z-a)^{n-k}}{n!} f^{(n)}(a)\right] + \\ + \left[f(a) + \frac{z-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(z-a)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(a)\right].$$

Le polynôme qui se trouve dans le second crochet a un degré inférieur au degré de $(z - a)^k$, et de là on voit [VI-2-1] que le premier crochet est le quotient, et le second le reste de la division de $f(z)$ par $(z - a)^k$. Pour que $f(z)$ soit divisible par $(z - a)^k$, il faut et il suffit que ce reste soit identiquement nul. Si nous le considérons comme un polynôme de la variable $(z - a)$, nous obtenons la condition suivante:

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0. \tag{7}$$

Nous devons y ajouter la condition:

$$f^{(k)}(a) \neq 0, \tag{8}$$

car si $f^{(k)}(a) = 0$, $f(z)$ serait divisible non seulement par $(z - a)^k$ mais aussi par $(z - a)^{k+1}$. Ainsi, *les conditions* (7) *et* (8) *sont nécessaires et suffisantes pour que $z = a$ soit une racine d'ordre k du polynôme $f(z)$.*

Supposons que $\psi(z) = f'(z)$, par suite:

$$\psi'(z) = f''(z),\ \psi''(z) = f'''(z),\ \ldots,\ \psi^{(s-1)}(z) = f^{(s)}(z).$$

Si $z = a$ est une racine d'ordre k du polynôme $f(z)$, d'après (7) et (8):

$$\psi(a) = \psi'(a) = \ldots = \psi^{(k-2)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad \psi^{(k-1)}(a) \neq 0,$$

c'est-à-dire que $z = a$ sera une racine d'ordre $(k - 1)$ de $\psi(z)$ ou, ce qui revient au même, de $f'(z)$, c'est-à-dire que *la racine d'ordre k d'un polynôme est une racine d'ordre $(k - 1)$ de la dérivée de ce polynôme.* Si nous appliquons successivement cette propriété, nous verrons *qu'elle sera racine d'ordre $(k - 2)$ de la dérivée seconde, racine d'ordre $(k - 3)$ pour la dérivée troisième, etc., enfin racine d'ordre un, ou comme on dit, racine simple pour la $(k - 1)^{\text{ième}}$ dérivée.*

Ainsi, si nous avons pour $f(z)$ facteurs: le développement en produit de

$$f(z) = a_0 (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_m)^{k_m}, \tag{9}$$

nous aurons pour $f'(z)$:

$$f'(z) = (z - z_1)^{k_1 - 1} (z - z_2)^{k_2 - 1} \ldots (z - z_m)^{k_m - 1} \omega(z), \tag{10}$$

où $\omega(z)$ est un polynôme n'ayant pas de racines communes avec $f(z)$.

VI-2-4. Règle de Horner. Indiquons maintenant une règle commode dans la pratique pour calculer les valeurs de $f(z)$ et de ses dérivées, pour une valeur donnée $z = a$.

Supposons que l'on ait, en divisant $f(z)$ par $(z-a)$, un quotient $f_1(z)$ et un reste r_1; en divisant $f_1(z)$ par $(z-a)$, un quotient $f_2(z)$ et un reste r_2, etc. :

$$f(z) = (z-a) f_1(z) + r_1, \quad r_1 = f(a),$$
$$f_1(z) = (z-a) f_2(z) + r_2, \quad r_2 = f_1(a),$$
$$f_2(z) = (z-a) f_3(z) + r_3, \quad r_3 = f_2(a),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ecrivons la formule (6) sous la forme :

$$f(z) = f(a) + (z-a)\left[\frac{f'(a)}{1} + \frac{f''(a)}{2!}(z-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-1}\right].$$

Si nous comparons cette formule à la première égalité écrite ci-dessus, nous obtiendrons :

$$f_1(z) = \frac{f'(a)}{1} + \frac{f''(a)}{2!}(z-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-1}, \quad r_1 = f(a).$$

En faisant la même chose avec $f_1(z)$, nous trouverons :

$$f_2(z) = \frac{f''(a)}{2!} + \frac{f'''(a)}{3!}(z-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-2}, \quad r_2 = \frac{f'(a)}{1}.$$

et, plus généralement :

$$r_{k+1} = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Supposons maintenant que :

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n,$$
$$f_1(z) = b_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \ldots + b_{n-2} z + b_{n-1}, \quad b_n = r_1,$$

et montrons comment on calcule les coefficients du quotient b_s et le reste b_n. Si nous ouvrons les parenthèses et que nous groupons les termes de même puissance en z, nous obtiendrons l'identité :

$$\begin{aligned} a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n &= \\ &= (z-a)(b_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \ldots + b_{n-2} z + b_{n-1}) + b_n = \\ &= b_0 z^n + (b_1 - b_0 a) z^{n-1} + (b_2 - b_1 a) z^{n-2} + \ldots + \\ &\qquad + (b_{n-1} - b_{n-2} a) z + (b_n - b_{n-1} a), \end{aligned}$$

et si nous comparons les coefficients de degré identique de z :

$$a_0 = b_0, \; a_1 = b_1 - b_0 a, \; a_2 = b_2 - b_1 a, \; \ldots, \; a_{n-1} = b_{n-1} - b_{n-2} a,$$
$$a_n = b_n - b_{n-1} a,$$

d'où

$$b_0 = a_0, \; b_1 = b_0 a + a_1, \; b_2 = b_1 a + a_2, \; \ldots, \; b_{n-1} = b_{n-2} a + a_{n-1},$$
$$b_n = b_{n-1} a + a_n = r_1.$$

Ces égalités donnent la possibilité de déterminer successivement les grandeurs b_s.

De même, si nous désignons le quotient et le reste de la division $f_1(z)$ par $(z-a)$:

$$f_2(z)=c_0z^{n-2}+c_1z^{n-3}+\ldots+c_{n-3}z+c_{n-2}; \quad c_{n-1}=r_2,$$

nous aurons:

$$c_0=b_0,\ c_1=c_0a+b_1,\ c_2=c_1a+b_2,\ \ldots,\ c_{n-2}=c_{n-3}a+b_{n-2},$$
$$c_{n-1}=c_{n-2}a+b_{n-1}=r_2,$$

c'est-à-dire que l'on calcule successivement les coefficients c_s à l'aide de b_s, comme b_s à l'aide de a_s.

Cette méthode de calcul s'appelle règle ou algorithme de Horner *. En appliquant cette règle, nous obtiendrons les grandeurs $\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

Donnons un schéma des calculs, qui n'a pas besoin d'être expliqué:

$$\begin{array}{c|llllllll}
a & a_0, & a_1, & a_2, & a_3, \ldots, & a_{n-2}, & a_{n-1}, & a_n & \\
 & + & b_0a, & b_1a, & b_2a, \ldots, & b_{n-3}a, & b_{n-2}a, & b_{n-1}a & \\
\hline
 & b_0=a_0, & b_1, & b_2, & b_3, \ldots, & b_{n-2}, & b_{n-1}, & & \boxed{b_n=r_1=f(a)} \\
 & + & c_0a, & c_1a, & c_2a, \ldots, & c_{n-3}a, & c_{n-2}a & & \\
\hline
 & c_0=a_0, & c_1, & c_2, & c_3, \ldots, & c_{n-2}, & \boxed{c_{n-1}=r_2=\dfrac{f'(a)}{1}} & & \\
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\hline
 & l_0=a_0, & l_1 & \boxed{l_2=r_{n-1}=\dfrac{f^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}} & & & & & \\
 & + & m_0a & & & & & & \\
\hline
 & m_0=a_0 & \boxed{m_1=r_n=\dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}} & & & & & & \\
\hline
 & \boxed{m_0=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}} & & & & & & & \\
\end{array}$$

E x e m p l e. Trouver les valeurs de la fonction:

$$f(z)=z^5+2z^4-2z^2-25z+100$$

et de ses dérivées pour $z=-5$.

---

* On appelle de façon générale algorithme une règle donnant l'ordre dans lequel il faut effectuer des opérations mathématiques pour obtenir un résultat cherché.

$a=-5$	1,	2,	−0,	−2,	−25,	100	
		−5,	15,	−75,	385,	−1800	
	1,	−3,	15,	−77,	360		$-1700=f(-5)$
		−5,	40,	−275,	1760		
	1,	−8,	55,	−352			$2120=\frac{f'(-5)}{1!}$
		−5,	65,	−600			
	1,	−13,	120				$-952=\frac{f''(-5)}{2!}$
		−5,	90				
	1,	−18					$210=\frac{f'''(-5)}{3!}$
		−5					
	1						$-23=\frac{f^{(IV)}(-5)}{4!}$
	$1=\frac{f^{(V)}(-5)}{5!}$						

VI-2-5. **Le plus grand commun diviseur.** Etudions deux polynômes $f_1(z)$ et $f_2(z)$. Chacun d'eux a une mise en facteurs déterminée de la forme (3). On appelle *le plus grand commun diviseur* $D(z)$ de ces deux polynômes, le produit de tous les facteurs binômes de la forme $(z - a)$ entrant aussi bien dans la mise en facteurs de $f_1(z)$ que dans celle de $f_2(z)$, ces facteurs communs étant pris avec un exposant égal au plus petit des exposants, avec lequel ils entrent dans les mises en facteurs de $f_1(z)$ et de $f_2(z)$. Les facteurs constants ne jouent aucun rôle dans l'établissement du plus grand commun diviseur. Ainsi, le plus grand commun diviseur de deux polynômes est un polynôme dont les racines sont communes à ces deux polynômes, d'ordre égal au plus petit des deux ordres avec lesquels ils entrent dans ces polynômes. Si des polynômes donnés n'ont pas de racines communes, on dit qu'ils sont *premiers entre eux*. On peut, comme précédemment, déterminer le plus grand commun diviseur de quelques polynômes.

Pour établir le plus grand commun diviseur par la méthode indiquée ci-dessus, il faut avoir une mise des polynômes donnés en facteurs du premier degré. Mais on trouve la mise en facteurs (3) en résolvant l'équation $f(z) = 0$, ce qui est un des problèmes fondamentaux de l'algèbre.

On peut cependant, comme cela se fait en arithmétique pour le plus grand commun diviseur des nombres entiers, indiquer un autre procédé pour trouver le plus grand commun diviseur qui ne nécessite pas la mise en facteurs, *le procédé de la division successive*. Supposons donc que le degré de $f_1(z)$ ne soit pas inférieur à celui de $f_2(z)$. Divisons le premier polynôme par le second, puis divisons le second polynôme $f_2(z)$ par le reste, obtenu lors de la première division, divisons ce premier reste par le reste obtenu lors de la deuxième division, etc., jusqu'à ce que nous arrivions à une division donnant un reste nul. *Le dernier reste, différent de zéro, est le plus grand commun diviseur des deux polynômes donnés.* Si ce reste ne contient pas z, les polynômes seront premiers entre eux. Ainsi, *on trouve le plus grand commun diviseur en divisant des polynômes, ordonnés suivant les degrés décroissants d'une variable.* En divisant $f_1(z)$ et $f_2(z)$ par $D(z)$, nous obtiendrons des polynômes premiers entre eux. L'un d'eux ou les deux peuvent ne pas contenir z.

En comparant les produits de facteurs (9) et (10), nous voyons que le plus grand commun diviseur $D(z)$ du polynôme $f(z)$ et de sa dérivée $f'(z)$ sera:

$$D(z)=(z-z_1)^{k_1-1}(z-z_2)^{k_2-1}\ldots(z-z_m)^{k_m-1},$$

où nous laissons de côté le facteur constant, ce qui est sans importance.

En divisant $f(z)$ par $D(z)$, nous obtiendrons:

$$\frac{f(z)}{D(z)}=a_0(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_m),$$

c'est-à-dire *qu'en divisant le polynôme $f(z)$ par le plus grand commun diviseur de $f(z)$ et de $f'(z)$, on obtient un polynôme ayant toutes ses racines simples et coïncidant avec les différentes racines de $f(z)$.*

Si $f(z)$ et $f'(z)$ sont premiers entre eux, $f(z)$ a toutes ses racines simples, et réciproquement.

VI-2-6. Polynômes réels. Etudions maintenant un polynôme ayant des coefficients réels:

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n,$$

et supposons que ce polynôme ait une racine complexe multiple $z=a+bi$ $(b\neq 0)$ d'ordre k, c'est-à-dire:

$$f(a+bi)=f'(a+bi)=\ldots=f^{(k-1)}(a+bi)=0,$$
$$f^k(a+bi)=A+Bi\neq 0.$$

Remplaçons maintenant dans l'expression $f(a+bi)$ et dans les dérivées toutes les grandeurs par les grandeurs conjuguées. Dans cette transformation, les coefficients a_s, en tant que nombres réels, restent les mêmes, et seul $(a+bi)$ devient $(a-bi)$, c'est-à-dire que le polynôme $f(z)$ reste le même, mais on mettra à la place de

$z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$. Après qu'on a remplacé les nombres complexes par leurs conjugués, comme on le sait d'après [VI-1-4], le résultat général lui-même, c'est-à-dire les valeurs du polynôme, devient le conjugué. Nous obtiendrons ainsi:

$$f(a-bi) = f'(a-bi) = \ldots = f^{(k-1)}(a-bi) = 0,$$
$$f^{k}(a-bi) = A - Bi \neq 0,$$

c'est-à-dire que *si le polynôme à coefficients réels a une racine complexe multiple* $z = a + bi$ $(b \neq 0)$ *d'ordre* k, *il doit avoir également une racine conjuguée* $z = a - bi$ *du même ordre.*

Ainsi, les racines complexes du polynôme $f(z)$ à coefficients réels sont réparties par couples de racines conjuguées. Supposons que la variable z ne prenne que des valeurs réelles, et désignons-la par la lettre x. D'après la formule (3):

$$f(x) = a_0(x-z_1)(x-z_2)\ldots(x-z_n).$$

Si parmi les racines de z il y en a d'imaginaires, les facteurs correspondants seront aussi imaginaires. En multipliant deux par deux les facteurs correspondant à un couple de racines conjuguées complexes, nous obtiendrons:

$$[x-(a+bi)][x-(a-bi)] = [(x-a)-bi][(x-a)+bi] =$$
$$= (x-a)^2 + b^2 = x^2 + px + q,$$

où:

$$p = -2a, \quad q = a^2 + b^2 \quad (b \neq 0).$$

Ainsi, un couple de racines conjuguées complexes, donne un facteur réel du second degré, et nous pouvons énoncer la proposition suivante: *un polynôme ayant des coefficients réels se décompose, en facteurs réels du premier et du second degré.*

Cette mise en facteurs est de la forme:

$$f(x) = a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\times$$
$$\times(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\ldots(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}, \qquad (11)$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_r$ sont des racines réelles de $f(x)$ d'ordre $k_1, k_2, \ldots, k_r$ et les facteurs du second degré viennent de couples de racines conjuguées complexes d'ordre $l_1, l_2, \ldots, l_t$.

VI-2-7. Relations entre racines et coefficients d'une équation. Soit, comme ci-dessus, $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les racines de l'équation:

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n = 0.$$

D'après la formule (3), nous avons l'identité:

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n = a_0(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n).$$

Si nous appliquons au second membre la formule d'algèbre élémentaire de multiplication des binômes ne différant que par leur second terme, nous pouvons mettre l'identité précédente sous la forme:

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_kz^{n-k} + \ldots + a_n =$$
$$= a_0[z^n - S_1z^{n-1} + S_2z^{n-2} + \ldots + (-1)^k S_kz^{n-k} + \ldots + (-1)^n S_n],$$

où S_k désigne la somme de tous les produits possibles des nombres z_s ($s = 1, 2, \ldots, n$) de k facteurs chacun. Si nous comparons les coefficients de degré identique en z, nous obtiendrons:

$$S_1 = -\frac{a_1}{a_0}, \quad S_2 = \frac{a_2}{a_0}, \quad \ldots, \quad S_k = (-1)^k \frac{a_k}{a_0}, \quad \ldots, \quad S_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0},$$

ou, si nous développons:

$$\left.\begin{array}{r} z_1 + z_2 + \ldots + z_n = -\dfrac{a_1}{a_0}, \\ z_1z_2 + z_2z_3 + \ldots + z_{n-1}z_n = \dfrac{a_2}{a_0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_1z_2 \ldots z_n = (-1)^n \dfrac{a_n}{a_0}. \end{array}\right\} \qquad (12)$$

Ces formules sont la généralisation des propriétés connues des racines d'une équation du second degré dans le cas d'une équation de degré quelconque. Elles donnent, entre autres, la possibilité d'établir l'équation lorsqu'on connaît ses racines.

VI-2-8. Equation du troisième degré. Nous n'étudierons pas en détail la question du calcul effectif des racines d'équations algébriques. Ce point est développé dans les manuels de calcul approximatif. Nous nous arrêterons seulement sur le cas d'une équation du troisième degré et nous indiquerons également quelques méthodes de calcul qui seront utiles par la suite.

Commençons par l'étude d'une équation du troisième degré:

$$y^3 + a_1y^2 + a_2y + a_3 = 0. \qquad (13)$$

Remplaçons y par une nouvelle inconnue x, en supposant que:

$$y = x + \alpha.$$

En le substituant dans le premier membre de l'équation (13), nous obtiendrons l'équation:

$$x^3 + (3\alpha + a_1)x^2 + (3\alpha^2 + 2a_1\alpha + a_2)x + (\alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + a_3) = 0.$$

Si nous supposons que $\alpha = -\frac{a_1}{3}$, le terme contenant x^2 est éliminé et, par conséquent, la substitution:

$$y = x - \frac{a_1}{3}$$

ramène l'équation (13) à la forme:

$$f(x) = x^3 + px + q = 0, \qquad (14)$$

qui ne contient pas de terme en x^2.

Si p et q sont réels, l'équation (14) peut avoir ses trois racines réelles, ou bien une racine réelle et deux racines conjuguées complexes [VI-2-6]. Pour savoir dans quel cas on se trouve, calculons la dérivée première du premier membre de l'équation :

$$f'(x)=3x^2+p.$$

Si $p>0$, $f'(x)>0$, et $f(x)$ croît continûment et n'aura qu'une racine réelle car lorsque x passe de $-\infty$ à $+\infty$, la fonction $f(x)$ change de signe (de négative elle devient positive). Supposons maintenant que $p<0$. La fonction $f(x)$, comme il est facile de le voir, passera par un maximum pour $x=-\sqrt{-\frac{p}{3}}$ et par un minimum pour $x=\sqrt{-\frac{p}{3}}$. En remplaçant x par ses valeurs dans l'expression de fonction $f(x)$, nous obtiendrons respectivement pour le maximum et le minimum de cette fonction :

$$q\mp\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Si ces deux valeurs sont de même signe, c'est-à-dire si :

$$\left(q-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)\left(q+\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)=q^2+\frac{4p^3}{27}>0$$

ou :

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0, \tag{15_1}$$

l'équation n'a qu'une racine réelle, comprise soit dans l'intervalle $\left(-\infty, -\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$ soit dans l'intervalle $\left(+\sqrt{-\frac{p}{3}}, +\infty\right)$.

Si le maximum de $f(x)$ que nous venons de voir est positif, et le minimum négatif, c'est-à-dire si :

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0, \tag{15_2}$$

$f(-\infty)$, $f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$, $f\left(+\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$, $f(+\infty)$ auront respectivement les signes $(-)$, $(+)$, $(-)$, $(+)$ et l'équation (14) aura trois racines réelles. Remarquons, de plus, que pour $p>0$, la condition (15_1) est certainement vérifiée. Nous proposons au lecteur de démontrer que dans le cas :

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0 \tag{15_3}$$

l'équation (14) a une racine multiple $\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$ et la racine $\frac{3q}{p}$, où nous considérons que $p\neq 0$, et il résulte de (15_3) que $p<0$. Pour $p=0$ et $q\neq 0$ nous avons l'inégalité (15_1), et l'équation (14) prend la forme $x^3+q=0$, c'est-à-dire que $x=\sqrt[3]{-q}$, d'où il résulte que l'équation (14) a une seule racine réelle [VI-1-6]. Pour $p=q=0$, l'équation (14) sera : $x^3=0$, et aura la racine triple $x=0$.

Nous avons rassemblé les résultats obtenus dans la table suivante :

$x^3+px+q=0$	
$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$	Une racine réelle et deux racines conjuguées complexes
$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$	Trois racines réelles différentes
$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$	Trois racines réelles dont l'une est multiple

On a représenté sur la fig. 182 la courbe de la fonction:

$$y=x^3+px+q$$

pour les différentes valeurs de $\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)$. Dans le cas (15_3), à la racine double correspond un point où la courbe est tangente à l'axe OX.

Cherchons maintenant la formule qui exprime les racines de l'équation (14) en fonction de ses coefficients. Cette formule n'est pas valable pour les calculs pratiques, et dans le paragraphe suivant nous donnerons un procédé pratique commode pour calculer les racines, en utilisant les fonctions trigonométriques.

Remplaçons les inconnues x par deux nouvelles inconnues u et v, en supposant que:

$$x=u+v. \qquad (16)$$

En portant ces valeurs dans l'équation (14), il vient:

$$(u+v)^3+p\,(u+v)+q=0,$$

$$u^3+v^3+(u+v)\,(3uv+p)+q=0. \qquad (17)$$

Nous imposerons aux inconnues u et v la condition suivante:

$$3uv+p=0,$$

l'équation (17) nous donne alors:

$$u^3+v^3=-q.$$

Nous avons été ainsi amenés à résoudre deux équations:

$$uv=-\frac{p}{3}, \quad u^3+v^3=-q. \qquad (18)$$

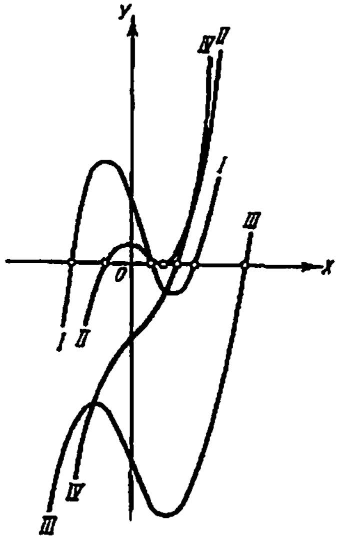

Fig. 182

En élevant au cube les deux membres de la première équation, nous avons:

$$u^3v^3=-\frac{p^3}{27}, \quad u^3+v^3=-q,$$

et, par conséquent, u^3 et v^3 sont les racines de l'équation du second degré:

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0,$$

c'est-à-dire

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}, \quad v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}. \qquad (19)$$

Finalement, d'après la formule (16), nous trouverons:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}. \qquad (20)$$

Cette formule qui résout l'équation cubique (14) s'appelle *formule de Cardan*, du nom d'un mathématicien italien du XVI[e] siècle.

Désignons en abrégé par R_1 et R_2 les expressions sous le signe de racine cubique dans la formule (20):

$$x=\sqrt[3]{R_1}+\sqrt[3]{R_2}.$$

Chaque racine cubique possède trois valeurs différentes [VI-1-6], de sorte que la formule précédente donnera, en général, neuf valeurs distinctes de x, et trois d'entre elles seulement seront racines de l'équation (14). Nous avons obtenu des valeurs parasites de x du fait que nous avions élevé la première des équations (18) au troisième degré. Seules peuvent nous convenir les valeurs pour lesquelles u et v sont liées par la première relation de (18), c'est-à-dire que *nous devons prendre dans la formule* (20) *seulement les valeurs des racines cubiques dont le produit est égal à* $\left(-\frac{p}{3}\right)$.

Désignons par la lettre ε l'une des valeurs de la racine cubique de 1:

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$
$$\varepsilon^2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

et soit $\sqrt[3]{R_1}$ et $\sqrt[3]{R_2}$ des valeurs quelconques des racines vérifiant la condition que nous avons vue plus haut. En les multipliant par ε et ε^2, nous obtiendrons les trois valeurs de la racine [VI-1-6].

Comme $\varepsilon^3=1$, nous obtiendrons l'expression suivante pour les racines de l'équation (14), en considérant p et q comme des nombres complexes quelconques:

$$x_1=\sqrt[3]{R_1}+\sqrt[3]{R_2},\ x_2=\varepsilon\sqrt[3]{R_1}+\varepsilon^2\sqrt[3]{R_2},\ x_3=\varepsilon^2\sqrt[3]{R_1}+\varepsilon\sqrt[3]{R_2}. \qquad (21)$$

VI-2-9. Solution sous forme trigonométrique d'une équation du troisième degré. Supposons que les coefficients p et q de l'équation (14) soient des nombres réels. La formule de Cardan, comme nous l'avons déjà dit, ne convient pas pour calculer les racines, et nous donnerons des formules plus pratiques. Étudions séparément quatre cas.

I. $$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0.$$

Il en résulte que $p<0$. Les expressions R_1 et R_2 de la formule (20) seront imaginair s mais, malgré cela, les trois racines de l'équation seront, comme on le soit, réelles [VI-2-8]. Supposons que:

$$-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=-\frac{q}{2}\pm i\sqrt{-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}=r(\cos\varphi\pm i\sin\varphi),$$

d'où [VI-1-2]:

$$r=\sqrt{-\frac{p^3}{27}},\quad \cos\varphi=-\frac{q}{2r}. \tag{22}$$

D'après la formule de Cardan, nous avons:

$$x=\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right)+$$
$$+\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}-i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right)\qquad(k=0,\ 1,\ 2).$$

En prenant dans les deux termes des valeurs égales pour k, nous obtiendrons comme produit de ces membres un nombre positif: $\sqrt[3]{r^2}=-\frac{p}{3}$. Nous aurons finalement:

$$x=2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}\qquad(k=0,\ 1,\ 2), \tag{23}$$

où r et φ sont définis par la formule (22), et il n'est pas difficile alors de démontrer que, si nous prenons différents φ vérifiant la seconde équation (22), nous obtiendrons un ensemble de racines, identique à celui obtenu à partir de la formule (23).

II. $$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0 \quad\text{et}\quad p<0.$$

L'équation (14) a une seule racine réelle et deux racines conjuguées complexes [VI-2-8], et il en résulte que:

$$-\frac{p^3}{27}<\frac{q^2}{4}.$$

Introduisons l'angle auxiliaire ω, en supposant que:

$$\sqrt{-\frac{p^3}{27}}=\frac{q}{2}\sin\omega. \tag{24$_1$}$$

Cela nous donnera:

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\frac{q}{2}\cos\omega}=-\sqrt{-\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}},$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\frac{q}{2}\cos\omega}=-\sqrt{-\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}},$$

puisque d'après (24$_1$):

$$\sqrt{-\frac{p}{3}}=\sqrt[3]{\frac{q}{2}\sin\omega}.$$

En introduisant enfin l'angle φ défini par la formule:

$$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}, \tag{24$_2$}$$

nous obtiendrons l'expression suivante pour la racine réelle :

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{p}{3}}\,(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{cotg}\varphi) = -\frac{2\sqrt{-\frac{p}{3}}}{\sin 2\varphi}. \qquad (25_1)$$

Nous proposons au lecteur de démontrer, en utilisant la formule (21), que les racines imaginaires seront de la forme :

$$\frac{\sqrt{-\frac{p}{3}}}{\sin 2\varphi} \pm i\sqrt{-p}\,\operatorname{cotg} 2\varphi. \qquad (25_2)$$

III. $$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0 \text{ et } p > 0.$$

Dans ce cas, l'expression (14) aura, comme précédemment, une seule racine réelle et deux racines conjuguées complexes. $\sqrt{\frac{p^3}{27}}$ peut alors être indifféremment inférieur et supérieur à $\left|\frac{q}{2}\right|$, et nous introduirons à la place de la formule (24_1) l'angle ω de façon suivante :

$$\sqrt{\frac{p^3}{27}} = \frac{q}{2}\operatorname{tg}\omega. \qquad (26_1)$$

Cela donne :

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{\frac{q\sin^2\frac{\omega}{2}}{\cos\omega}} = \sqrt{\frac{p}{3}}\,\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}},$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{\frac{q\cos^2\frac{\omega}{2}}{\cos\omega}} = \sqrt{\frac{p}{3}}\,\sqrt[3]{\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}}.$$

En introduisant un nouvel angle φ selon la formule :

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}, \qquad (26_2)$$

nous aurons finalement :

$$x_1 = \sqrt{\frac{p}{3}}\,(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{cotg}\varphi) = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{cotg} 2\varphi. \qquad (27_1)$$

Les racines imaginaires seront :

$$\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{cotg} 2\varphi \pm \frac{i\sqrt{p}}{\sin 2\varphi}. \qquad (27_2)$$

IV. $$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0.$$

L'équation (14) a une racine multiple et, dans ce cas, comme dans le cas où $p = 0$, la résolution de l'équation ne présente aucune difficulté.

Nous pouvons, en utilisant les formules trigonométriques, calculer à l'aide d'une table de logarithmes les racines d'une équation cubique avec une très grande précision.

E x e m p l e. 1.

$$x^3+9x^2+23x+14=0.$$

En supposant que $x=y-3$, mettons l'équation sous la forme:

$$y^3-4y-1=0,$$

et cette équation possède trois racines réelles [VI-2-8]. Les formules (22) donnent $\cos\varphi$, et en trouvant l'angle φ lui-même, nous déterminons les racines selon les formules (23):

$\cos\varphi=\frac{\sqrt{27}}{16}$; $\lg\cos\varphi=\bar{1},51156$
$\varphi=71°2'36''$
$\frac{\varphi}{3}=23°40'59''$; $\frac{\varphi+360°}{3}=143°40'59''$; $\frac{\varphi+720°}{3}=263°40'59''$
$\lg\frac{4}{\sqrt{3}}=0,36350$
$\lg y_1=0,32529$; $\lg(-y_2)=0,26970$; $\lg(-y_3)=\bar{1},40501$
$y_1=2,1149$; $y_2=-1,8608$; $y_3=-0,2541$
$x_1=-0,8851$; $x_2=-4,8608$; $x_3=-3,2541$

E x e m p l e 2.

$$x^3-3x+5=0.$$

Définissons l'angle ω à l'aide de la formule (24_1) et l'angle φ à l'aide de la formule (24_2), et calculons ensuite les racines [cf. (25_1) et (25_2)]:

$\lg\sin\omega=\bar{1},60206$; $\omega=23°34'41''$; $\frac{\omega}{2}=11°47'20''$
$\lg\operatorname{tg}\varphi=\bar{1},77318$; $\varphi=30°40'31''$; $2\varphi=61°21'02''$
$\lg\frac{1}{\sin 2\varphi}=0,05672$; $\frac{1}{\sin 2\varphi}=1,13935$
$\lg\sqrt{-p}\operatorname{cotg}2\varphi=\bar{1},97602$; $\sqrt{-p}\operatorname{cotg}2\varphi=0,94628$
$x_1=-2,2790$; $x_2,\ x_3=1,1395\pm0,94628\,i$

VI-2-10. Méthode itérative. Dans de nombreux cas, lorsqu'on a une valeur approchée x_0 d'une racine cherchée ξ avec une faible précision, il est commode d'améliorer cette valeur approchée de la racine. *Le procédé d'itération* ou *procédé des approximations successives* est un des moyens que l'on emploie pour *préciser* la valeur approchée d'une racine. Ce procédé, comme on le verra par la suite, est valable non seulement pour les équations algébriques, mais aussi pour les équations transcendantes.

Supposons que nous écrivions l'équation:

$$f(x)=0 \tag{28}$$

sous la forme:

$$f_1(x)=f_2(x), \tag{29}$$

$f_1(x)$ étant telle que l'équation

$$f_1(x)=m$$

possède pour tout m réel une seule racine réelle qu'il est facile de calculer avec une très grande précision. Le calcul de la racine de l'équation (29) à l'aide d'ité-

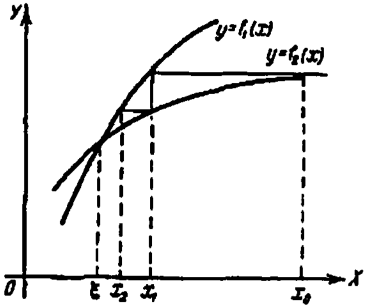

Fig. 183

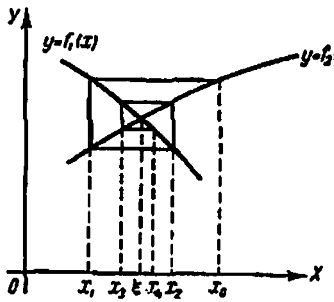

Fig. 184

ration consiste à substituer la valeur approchée x_0 de la racine cherchée dans le deuxième membre de l'équation (29) pour déterminer une deuxième approximation x_1 de la racine cherchée de l'équation:

$$f_1(x)=f_2(x_0).$$

En substituant x_1 dans le second membre de (29) pour l'approximation suivante x_2, on résout l'équation $f_1(x)=f_2(x_1)$, etc. On détermine ainsi une suite de valeurs:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, \tag{30}$$

où

$$\left.\begin{aligned} &f_1(x_1)=f_2(x_0),\\ &f_1(x_2)=f_2(x_1), \ldots,\\ &f_1(x_n)=f_2(x_{n-1}), \ldots \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Il est facile de montrer la signification géométrique des approximations obtenues. La racine cherchée est l'abscisse du point d'intersection des courbes:

$$y=f_1(x) \tag{32$_1$}$$

et

$$y=f_2(x). \tag{32$_2$}$$

On a représenté sur les fig. 183 et 184 ces deux courbes; dans le cas de la fig. 183, les dérivées $f_1'(x)$ et $f_2'(x)$ sont de même signe au point d'intersection, et dans le cas de la fig. 184, elles sont de signes contraires, et dans les deux cas:

$$|f_2'(\xi)| < |f_1'(\xi)|.$$

Aux égalités (31) correspond la construction suivante: menons la droite $x = x_0$ parallèle à l'axe OY, jusqu'à son intersection au point (x_0, y_0) avec la courbe (32_2); menons par ce point d'intersection la droite $y = y_0$ parallèle à l'axe OX, jusqu'à son intersection au point (x_1, y_0) avec la courbe (32_1); menons alors par le point (x_1, y_0) la droite $x = x_1$ parallèle à l'axe OY, jusqu'à son intersection avec la courbe (32_2) au point (x_1, y_1); par ce dernier point, menons la droite $y = y_1$ jusqu'à son intersection avec la courbe (32_1) au point (x_2, y_1), etc. Les abscisses des points d'intersection nous donnent la suite (30).

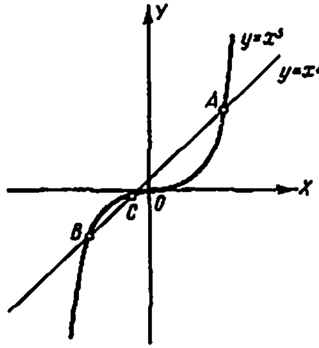

Fig. 185

Si l'on prend la première approximation suffisamment près de ξ, cette suite, comme on le voit sur la figure, tend vers une limite ξ, et, dans le cas où $f_1'(\xi)$ et $f_2'(\xi)$ sont de même signe, on obtient une ligne brisée en escalier, tendant vers ξ (fig. 183); et si $f_1'(\xi)$ et $f_2'(\xi)$ sont de signes différents, cette ligne brisée tend vers ξ, en ayant la forme d'une spirale (fig. 184). Nous ne donnerons pas de conditions ni de démonstration rigoureuse de ce que la suite (30) tend vers une limite ξ. On peut dans de nombreux cas le constater directement à l'aide de la figure.

Le procédé indiqué est particulièrement commode pour les applications dans le cas où l'équation (29) a la forme:

$$x = f_2(x).$$

Soit ξ la racine de cette équation, dont la valeur approchée:

$$x_0 = \xi + h$$

nous est connue. La suite des approximations successives sera:

$$x_1 = f_2(x_0),\ x_2 = f_2(x_1),\ \ldots,\ x_n = f_2(x_{n-1}),\ \ldots$$

On peut démontrer qu'effectivement $x_n \to \xi$ pour $n \to \infty$, si la fonction $f_2(x)$ possède une dérivée $f_2'(x)$ qui vérifie la condition:

$$|f_2'(x)| \leqslant q < 1$$

dans l'intervalle

$$\xi - h \leqslant x \leqslant \xi + h.$$

E x e m p l e 1. Etudions l'équation:

$$x^5 - x - 0,2 = 0. \tag{33}$$

Ses racines réelles sont les abscisses des points d'intersection des lignes (fig. 185):

$$y = x^5, \tag{34_1}$$

$$y = x + 0,2, \tag{34_2}$$

et comme on le voit sur la fig. 185, l'équation (33) possède une racine positive et deux racines négatives.

Aux points d'intersection A et B correspondant à la racine positive et à la racine négative plus grande en valeur absolue, le coefficient angulaire de la droite (34_2) est inférieur en valeur absolue au coefficient angulaire de la tangente à la courbe (34_1), c'est-à-dire que lorsqu'on calcule ces racines par itérations successives on doit représenter l'équation (33) sous la forme:

$$x^5 = x + 0{,}2.$$

En prenant pour approximation du premier ordre dans le calcul de la racine positive $x_0 = 1$, nous obtiendrons la table (I).

$\sqrt[5]{x_n+0{,}2}$	$x_n+0{,}2$
	1,2
$x_1=1{,}037$	1,237
$x_2=1{,}0434$	1,2434
$x_3=1{,}0445$	1,2445
$x_4=1{,}04472$	

(I)

La valeur x_4 donne la racine cherchée à la cinquième décimale près. Pour calculer la racine négative, plus grande en valeur absolue, nous prendrons comme approximation du premier ordre $x_0 = -1$ et obtiendrons la table (II).

$\sqrt[5]{x_n+0{,}2}$	$x_n+0{,}2$
	$-0{,}8$
$x_1=-0{,}956$	$-0{,}756$
$x_2=-0{,}9456$	$-0{,}7456$
$x_3=-0{,}9430$	$-0{,}7430$
$x_4=-0{,}9423$	$-0{,}7423$
$x_5=-0{,}94214$	$-0{,}74214$
$x_6=-0{,}94210$	

(II)

Au point C, auquel correspond la racine négative, la plus petite en valeur absolue, le coefficient angulaire de la tangente à la courbe (34_1) est inférieur à 1 en valeur absolue, et, par conséquent, lorsqu'on effectue les itérations, il faut présenter l'équation (33) sous la forme:

$$x = x^5 - 0{,}2.$$

En prenant pour approximation du premier ordre $x_0 = 0$, nous avons:

$x_n^5-0{,}2$	x_n^5
	-0
$x_1=-0{,}2$	$-0{,}00032$
$x_2=-0{,}20032$	

(III)

Dans les trois cas, l'approximation de la racine s'est faite suivant une ligne en escalier, comme on l'a représenté sur la fig. 183, ce qui n'est pas difficile à démontrer d'après la fig. 185, et dans les trois cas, les approximations x_n tendent, lorsque n croît, vers la racine cherchée, en variant de façon monotone.

Exemple 2.

$$x = \operatorname{tg} x. \tag{35}$$

Les racines de cette équation sont les abscisses des points d'intersection des lignes (fig. 186)

$$y = x, \quad y = \operatorname{tg} x,$$

et, comme on le voit d'après la fig. 186, l'équation possède une racine dans chaque intervalle:

$$\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}, \quad (2n+1)\frac{\pi}{2}\right],$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Pour les racines positives, on aura l'égalité approchée:

$$\alpha_n \approx (2n+1)\frac{\pi}{2},$$

où nous désignerons par α_n la racine positive de degré n de l'équation (35).

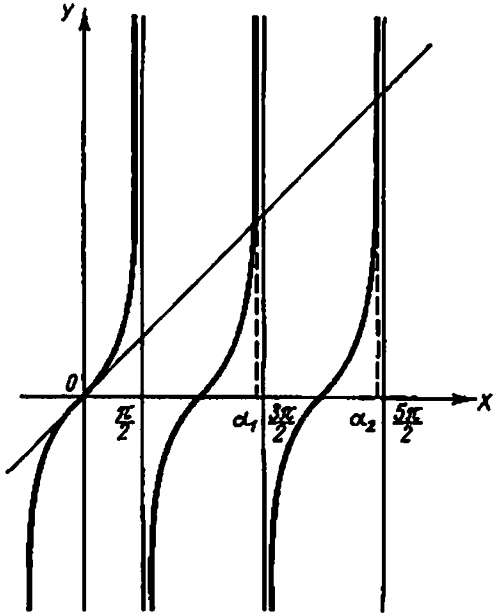

Fig. 186

Calculons la racine α_1, voisine de $\frac{3\pi}{2}$. Pour appliquer la méthode itérative, écrivons l'équation (35) sous la forme:

$$x = \operatorname{arc\,tg} x$$

et prenons comme approximation du premier ordre $x_0 = \frac{3\pi}{2}$.

Lorsqu'on calcule la suite des approximations:

$$x_n = \text{arc tg}\, x_{n-1},$$

il faut toujours prendre une valeur d'arc tg contenue dans le troisième quadrant. En utilisant les tables de logarithmes et en exprimant les arcs en radians, nous obtiendrons:

$$x_0 = 4{,}7124, \qquad x_1 = 4{,}5033,$$
$$x_2 = 4{,}4938, \qquad x_3 = 4{,}4935.$$

VI-2-11. Procédé de Newton. La méthode itérative, indiquée sur les fig. 183 et 184, consiste à approcher de la racine cherchée, suivant des droites parallèles

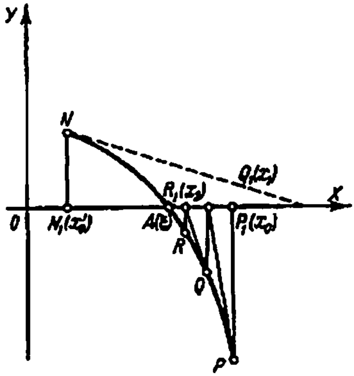

Fig. 187

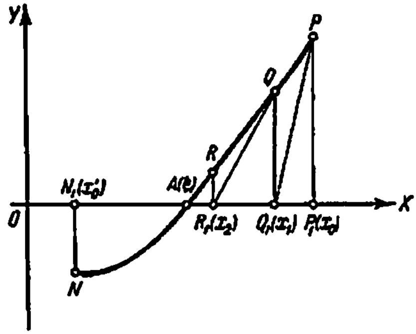

Fig. 188

aux axes de coordonnées. Nous allons maintenant montrer d'autres procédés d'itération dans lesquels on utilise également des droites obliques par rapport aux axes de coordonnées. Le procédé de Newton en est un.

Soit x_0' et x_0 deux valeurs approchées de la racine ξ de l'équation:

$$f(x) = 0, \tag{36}$$

et supposons que cette équation ne possède dans l'intervalle (x_0', x_0) qu'une seule racine ξ. Sur les fig. 187 et 188, on a représenté graphiquement la courbe:

$$y = f(x).$$

Les abscisses des points N et P sont les valeurs approchées x_0' et x_0 de la racine ξ, qui est l'abscisse du point A. Par le point P on mène la tangente PQ_1 à la courbe, et du point d'intersection Q_1 de cette tangente avec l'axe des abscisses, on a mené l'ordonnée $\overline{Q_1Q}$ de la courbe; du point Q, on mène la tangente QR_1 à la droite, et du point R_1 est menée l'ordonnée $\overline{R_1R}$ de la courbe, etc.

Les points P_1, Q_1, R_1, . . ., comme on le voit sur la figure, tendent vers le point A, de sorte que leurs abscisses x_0, x_1, x_2, . . . sont des approximations successives de la racine ξ. Donnons la formule qui exprime x_n en fonction de x_{n-1}.

L'équation de la tangente PQ_1 sera:

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(X - x_0)\cdot$$

En faisant $Y = 0$, nous trouverons l'abscisse du point Q_1:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \tag{37}$$

et, plus généralement :

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \qquad n = 1, 2, 3 \ldots \tag{38}$$

Nous voyons que les x_n sont effectivement des approximations de la racine ξ simplement en regardant la figure qui est tracée dans le cas où $f(x)$ est monotone et reste convexe (ou concave) dans l'intervalle (x_0', x_0), autrement dit, lorsque

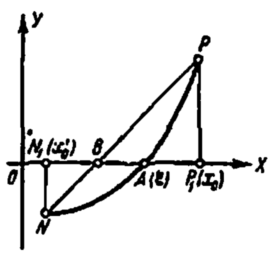

Fig. 189

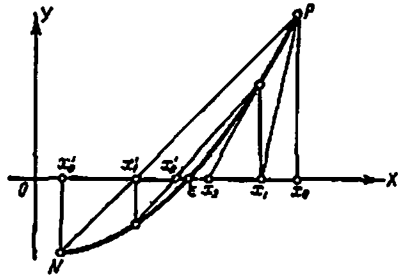

Fig. 190

$f'(x)$ et $f''(x)$ conservent leur signe dans cet intervalle [II-3-1, II-5-2]. Nous ne ferons pas de démonstration analytique rigoureuse de cela.

Remarquons que si nous avions appliqué le procédé de Newton non pas à l'extrémité x_0, mais à l'extrémité x_0', nous n'aurions pas obtenu d'approximation de la racine, comme le montre la tangente tracée en pointillé. Dans le cas de la fig. 188, la courbe est concave du côté des ordonnées positives, c'est-à-dire que $f''(x) > 0$, et il faut appliquer le procédé de Newton, comme nous le voyons, à l'extrémité où $f(x) > 0$. Il résulte de la fig. 187 que pour $f''(x) < 0$, il faut appliquer le procédé de Newton à l'extrémité où l'ordonnée $f(x) < 0$. Nous arrivons ainsi à la règle suivante: *si $f'(x)$ et $f''(x)$ ne sont pas nulles dans l'intervalle (x_0', x_0), et que les ordonnées $f(x_0')$ et $f(x_0)$ soient de signes différents, nous obtiendrons, en appliquant le procédé de Newton à l'extrémité de l'intervalle où les signes de $f(x)$ et $f''(x)$ sont les mêmes, des approximations successives de la racine unique de l'équation* (36) *contenue dans l'intervalle* (x_0', x_0).

VI-2-12. **Méthode d'interpolation simple.** Exposons un autre procédé de calcul approché d'une racine. Menons une droite par les extrémités N et P d'un arc de courbe. L'abscisse de l'intersection B de cette droite avec l'axe des abscisses donnera une valeur approchée de la racine (fig. 189). Soit, comme précédemment, x_0' et x_0 les abscisses des extrémités de l'intervalle. L'équation de la droite NP sera:

$$\frac{Y - f(x_0)}{f(x_0') - f(x_0)} = \frac{X - x_0}{x_0' - x_0}.$$

En supposant que $Y = 0$, nous trouverons l'abscisse du point B:

$$\frac{x_0' f(x_0) - x_0 f(x_0')}{f(x_0) - f(x_0')},$$

soit :

$$x_0' - \frac{(x_0 - x_0') f(x_0')}{f(x_0) - f(x_0')}, \tag{39}$$

soit encore :

$$x_0 - \frac{(x_0 - x_0') f(x_0)}{f(x_0) - f(x_0')}.$$

Remplacer un arc de courbe par un segment de la droite passant par les extrémités de cet arc de courbe revient à remplacer la fonction $f(x)$ dans l'intervalle considéré par un polynôme du premier degré ayant les mêmes valeurs extrêmes que $f(x)$, ou, ce qui revient au même, c'est supposer que dans l'intervalle considéré les variations de $f(x)$ sont proportionnelles aux variations de x. Ce procédé, que l'on appelle couramment *interpolation linéaire*, est utilisé par exemple, lorsqu'on se sert de tables logarithmiques. Le procédé de calcul d'une racine que nous avons cité s'appelle aussi parfois *règle de la fausse supposition*.

Si on utilise simultanément la méthode d'interpolation linéaire et la méthode de Newton, on peut rapprocher les deux limites x_0' et x_0 de la racine ξ.

Supposons, par exemple, que les signes de $f(x)$ et de $f''(x)$ coïncident à l'extrémité de x_0, de sorte qu'il faut appliquer la méthode de Newton justement en ce point.

En appliquant les deux procédés, nous obtiendrons deux nouvelles valeurs approchées (fig. 190) :

$$x_1' = \frac{x_0' f(x_0) - x_0 f(x_0')}{f(x_0) - f(x_0')},$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

On peut à nouveau appliquer aux valeurs approchées de x_1' et x_1 les mêmes formules et on obtiendra les nouvelles valeurs :

$$x_2' = \frac{x_1' f(x_1) - x_1 f(x_1')}{f(x_1) - f(x_1')},$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Nous obtiendrons ainsi deux séries de valeurs :

$$x_0', x_1', x_2', \ldots, x_n' \ldots$$

et

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

approchant la racine ξ à gauche et à droite.

Si dans les valeurs x_n' et x_n les premières décimales coïncident, on aura la même précision pour la racine ξ qui est contenue entre x_n' et x_n.

Exemple. L'équation

$$f(x) = x^5 - x - 0{,}2 = 0,$$

que nous avons étudiée dans l'exemple 1 du [VI-2-10], possède une racine positive dans l'intervalle $1 < x < 1{,}1$, et dans cet intervalle :

$$f'(x) = 5x^4 - 1 \quad \text{et} \quad f''(x) = 20x^3$$

ne changent pas de signe. Nous pouvons ainsi supposer que :

$$x_0' = 1\,; \qquad x_0 = 1{,}1.$$

Calculons les valeurs de la fonction $f(x)$:

$$f(1) = -0{,}2, \quad f(1{,}1) = 0{,}31051,$$

d'où l'on voit qu'à l'extrémité de droite ($x_0 = 1{,}1$), $f(x)$ et $f''(x)$ ont le même signe (+) et, par conséquent, il faut utiliser la méthode de Newton en ce point. Calculons d'abord la valeur de $f'(x)$ à l'extrémité de droite:

$$f'(1{,}1) = 6{,}3205.$$

D'après les formules (37) et (39), nous aurons:

$$x_1' = 1 + \frac{0{,}1 \cdot 0{,}2}{0{,}51051} = 1{,}039,$$

$$x_1 = 1{,}1 - \frac{0{,}31051}{6{,}3205} = 1{,}051.$$

Calculons pour l'approximation suivante:

$$f(1{,}039) = -0{,}0282, \quad f(1{,}051) = 0{,}0313, \quad f'(1{,}051) = 5{,}1005,$$

d'où

$$x_2' = 1{,}039 + \frac{0{,}012 \cdot 0{,}0282}{0{,}0595} = 1{,}04469,$$

$$x_2 = 1{,}051 - \frac{0{,}0313}{5{,}1005} = 1{,}04487,$$

ce qui donne la valeur de la racine avec une précision à deux unités près à la quatrième décimale [VI-2-10]:

$$1{,}04469 < \xi < 1{,}04487.$$

VI-3. Intégration des fonctions

VI-3-1. Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples. Nous avons donné une série de méthodes pour calculer les intégrales indéfinies. Nous allons, dans ce paragraphe, compléter ces indications et leur donner un caractère plus systématique. La première question sera celle de l'intégration d'*une fraction rationnelle*, c'est-à-dire du quotient de deux polynômes. Avant de résoudre cette question, nous établirons la formule qui représente une fonction rationnelle sous forme d'une somme de plusieurs fractions plus simples. Cette représentation s'appelle *décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples.*

Soit la fraction rationnelle

$$\frac{F(x)}{f(x)}.$$

Si c'est une fraction irrégulière, c'est-à-dire si le degré de son numérateur n'est pas inférieur à celui du dénominateur, nous pouvons, en divisant, obtenir la partie entière: le polynôme $Q(x)$ et représenter la fraction sous la forme:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = Q(x) + \frac{\varphi(x)}{f(x)}, \tag{1}$$

où $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ est une fraction régulière dont le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur. Nous considérerons, de plus, cette fraction comme irréductible, c'est-à-dire que nous considérerons que le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux [VI-2-5].

Soit $x = a$ la racine du dénominateur d'ordre k:

$$f(x) = (x-a)^k f_1(x) \quad \text{et} \quad f_1(a) \neq 0.$$

Démontrons que l'on peut représenter la fraction par la somme:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^k f_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)}, \tag{2}$$

où A est une constante et le deuxième terme du second membre est une fraction régulière. Formons la différence:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^k f_1(x)} - \frac{A}{(x-a)^k} = \frac{\varphi(x) - Af_1(x)}{(x-a)^k f_1(x)}$$

et déterminons la constante A de manière que le numérateur de la fraction du second membre soit divisible par $(x - a)$ [VI-2-1]:

$$\varphi(a) - Af_1(a) = 0,$$

d'où

$$A = \frac{\varphi(a)}{f_1(a)} \qquad (f_1(a) \neq 0).$$

On peut, avec une telle valeur de A, simplifier la fraction précédente par $(x - a)$, et on arrivera ainsi à l'identité (2). Elle montre que nous pouvons, en éliminant le terme du type $\frac{A}{(x-a)^k}$, que l'on appelle fraction simple, abaisser le degré du facteur $(x - a)$, entrant dans le dénominateur, d'une unité au moins.

Supposons que le dénominateur puisse être développé en produit de facteurs:

$$f(x) = (x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots(x-a_m)^{k_m}.$$

Nous n'écrivons pas le facteur constant puisqu'il peut être reporté au numérateur. Nous obtiendrons, en appliquant successivement la règle indiquée ci-dessus, la décomposition de la fraction rationnelle régulière en éléments simples:

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1}} &+ \frac{A_{k_1-1}^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{A_1^{(1)}}{x-a_1} + \\ &+ \frac{A_{k_2}^{(2)}}{(x-a_2)^{k_2}} + \frac{A_{k_2-1}^{(2)}}{(x-a_2)^{k_2-1}} + \dots + \frac{A_1^{(2)}}{x-a_2} + \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ \frac{A_{k_m}^{(m)}}{(x-a_m)^{k_m}} + \frac{A_{k_m-1}^{(m)}}{(x-a_m)^{k_m-1}} + \dots + \frac{A_1^{(m)}}{x-a_m}.\end{aligned} \tag{3}$$

Indiquons maintenant des méthodes pour déterminer les coefficients du deuxième membre de l'identité précédente. En chassant le dénominateur, nous arriverons à l'identité de deux polynômes, et en égalant leurs coefficients correspondants, nous obtiendrons un système d'équations du premier degré pour déterminer les coefficients cherchés. Cette méthode, comme nous l'avons déjà dit [VI-2-2], s'appelle *la méthode des coefficients indéterminés.*

On peut s'y prendre différemment, en donnant par exemple dans l'identité des polynômes précédente différentes valeurs particulières à la variable x. On peut encore utiliser cette *méthode de substitution*, si on différentie au préalable un nombre quelconque de fois l'identité précédente.

On peut démontrer — mais nous ne nous y arrêterons pas — que le développement (3) est unique, c'est-à-dire que ses coefficients ont une valeur parfaitement définie qui ne dépend pas de la méthode de décomposition. Nous donnerons plus loin des exemples d'application de ces méthodes de détermination des coefficients inconnus d'une décomposition.

Dans le cas de polynômes $\varphi(x)$ et $f(x)$ réels, le deuxième membre de l'identité (3) peut quand même contenir des termes imaginaires provenant de racines imaginaires du dénominateur. Nous citerons une autre décomposition d'une fraction rationnelle qui ne présente pas cet inconvénient, mais nous nous limiterons au cas où le dénominateur de la fraction n'a que des racines simples, puisque ce cas est le plus important dans les applications.

Il est facile de démontrer qu'au couple de racines conjuguées complexes du dénominateur $x = a \pm bi$ correspondra une somme de fractions simples:

$$\frac{A+Bi}{x-a-bi}+\frac{A-Bi}{x-a+bi}.$$

En réduisant ces fractions au même dénominateur, nous obtiendrons une fraction simple de la forme:

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q} \qquad (p=-2a,\ q=a^2+b^2).$$

Ainsi, dans le cas considéré, la fraction rationnelle réelle se décompose en fractions réelles simples:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_r}{x-a_r}+$$
$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2x+N_2}{x^2+p_2x+q_2}+\ldots+\frac{M_sx+N_s}{x^2+p_sx+q_s}, \qquad (4)$$

où l'on a, sur la première ligne, les fractions correspondant aux racines réelles du dénominateur, et sur la seconde ligne, les fractions correspondant aux couples de racines conjuguées complexes.

VI-3-2. Intégration d'une fraction rationnelle. L'intégration d'une fraction rationnelle se ramène, d'après la formule (1), à l'intégration d'un polynôme, ce qui donnera un nouveau polynôme, et à l'intégration d'une fraction rationnelle, ce que nous allons étudier maintenant.

Si le dénominateur d'une fraction ne possède que des racines simples, elle se ramène, d'après la formule (4), à des intégrales de deux types:

I. $$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln(x-a)+C$$

II. $$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx.$$

A l'aide de ce qui a été dit [III-1-7], nous obtiendrons une solution du type:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \lambda \ln(x^2+px+q)\times\mu \operatorname{arc\,tg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Ainsi, l'intégrale est exprimée par des logarithmes et des arcs tangentes.

Etudions maintenant le cas où le dénominateur d'une fraction rationnelle régulière contient des racines multiples. Considérons la décomposition (3). Les nombres imaginaires que l'on peut y rencontrer, ne joueront qu'un rôle d'intermédiaire dans les calculs, et disparaîtront dans le résultat final.

En intégrant des fractions simples dont le dénominateur est de degré supérieur au premier, nous obtiendrons également une fraction rationnelle:

$$\int \frac{A_{k_i-s}^{(i)}}{(x-a_i)^{k_i-s}}\,dx = \frac{A_{k_i-s}^{(i)}}{(1-k_i+s)(x-a_i)^{k_i-s-1}}+C \qquad (k_i-s>1).$$

La somme des fractions obtenues après intégration nous donnera *la partie algébrique* de l'intégrale qui, réduite au même dénominateur, sera évidemment une fraction régulière de la forme:

$$\frac{\omega(x)}{(x-a_1)^{k_1-1}(x-a_2)^{k_2-1}\ldots(x-a_m)^{k_m-1}}.$$

Le numérateur $\omega(x)$ est un polynôme dont le degré est au moins d'une unité inférieur à celui du dénominateur, et le dénominateur est le plus grand commun diviseur $D(x)$ du dénominateur de la fraction à intégrer $f(x)$ et de sa dérivée première $f'(x)$ [VI-2-5].

La somme des fractions à intégrer restantes:

$$\frac{A_1^{(1)}}{x-a_1}+\frac{A_1^{(2)}}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_1^{(m)}}{x-a_m},$$

réduite au même dénominateur, sera une fraction régulière de la forme:

$$\frac{\omega_1(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)},$$

où $\omega_1(x)$ est un polynôme de degré inférieur d'au moins une unité à celui du dénominateur, lequel est le quotient $D_1(x)$ de la division de $f(x)$ par $D(x)$. De la sorte, nous obtenons *la formule d'Ostrogradski-Hermite*:

$$\int \frac{\varphi(x)}{f(x)}dx=\frac{\omega(x)}{D(x)}+\int\frac{\omega_1(x)}{D_1(x)}dx. \qquad (5)$$

Les polynômes $D(x)$ et $D_1(x)$ peuvent être obtenus sans qu'on connaisse les racines de $f(x)$ [VI-2-5]. Indiquons maintenant comment déterminer les coefficients des polynômes $\omega(x)$ et $\omega_1(x)$ que nous pouvons considérer d'un degré inférieur d'une unité à celui de leurs dénominateurs respectifs. En différentiant l'égalité (5), on élimine le signe somme. En éliminant les dénominateurs, on aura l'identité de deux polynômes et en utilisant la méthode des coefficients indéterminés, ou de la substitution, nous pourrons obtenir les coefficients de $\omega(x)$ et de $\omega_1(x)$.

La formule d'Ostrogradski-Hermite nous permet donc d'obtenir la partie algébrique de l'intégrale d'une fraction rationnelle régulière, même lorsque les racines du dénominateur ne sont pas connues. Le dénominateur de la fraction située sous le signe intégrale dans le second membre de l'égalité (5) ne contient que des racines simples et, en décomposant cette fraction, nous pourrons calculer cette intégrale qui, comme nous l'avons déjà vu, sera exprimée au moyen de logarithmes et d'arcs tangentes. Pour effectuer cette dernière opération, nous avons besoin de connaître les racines de $D_1(x)$.

E x e m p l e. D'après la formule d'Ostrogradski-Hermite,

$$\int\frac{dx}{(x^3+1)^2}=\frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{x^3+1}+\int\frac{\delta x^2+\varepsilon x+\eta}{x^3+1}dx.$$

En différentiant par rapport à x:

$$\frac{1}{(x^3+1)^2}=\frac{(2\alpha x+\beta)(x^3+1)-3x^2(\alpha x^2+\beta x+\gamma)}{(x^3+1)^2}+\frac{\delta x^2+\varepsilon x+\eta}{x^3+1}$$

et, en éliminant les dénominateurs, nous avons:

$$1=(2\alpha x+\beta)(x^3+1)-3x^2(\alpha x^2+\beta x+\gamma)+(\delta x^2+\varepsilon x+\eta)(x^3+1).$$

En comparant les coefficients de x^5, on obtient $\delta=0$, puis en comparant ceux de x^2, on obtient $\gamma=0$. En faisant $\gamma=\delta=0$ dans l'identité et en comparant les coefficients des autres degrés, nous aurons:

$$\varepsilon-\alpha=0,\quad \eta-2\beta=0,\quad 2\alpha+\varepsilon=0,\quad \beta+\eta=1,$$

d'où finalement:

$$\alpha=\gamma=\delta=\varepsilon=0,\quad \beta=\frac{1}{3},\quad \eta=\frac{2}{3}$$

et par suite :

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^3+1}.$$

On calcule cette dernière intégrale en décomposant la fraction en éléments simples :

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1}.$$

En éliminant le dénominateur :

$$1 = A(x^2-x+1) + (Mx+N)(x+1).$$

En supposant que $x=-1$, on obtient $a = \frac{1}{3}$, et en comparant les coefficients de x^2 et les termes constants :

$$M = -\frac{1}{3}, \quad N = \frac{2}{3},$$

d'où

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{x-2}{3(x^2-x+1)}.$$

Finalement, on obtient :

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx =$$
$$\frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C,$$

d'où

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{2}{9}\ln(x+1) - \frac{1}{9}\ln(x^2-x+1) +$$
$$+ \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

VI-3-3. Intégrale d'expressions contenant des radicaux. Etudions encore certains autres types d'intégrales qui se ramènent à des intégrales de fraction rationnelle.

1. L'intégrale :

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\lambda}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\mu}, \ldots\right]dx, \tag{6}$$

où R est une fonction rationnelle de ses arguments, c'est-à-dire le quotient de polynômes de ces arguments et $\lambda, \mu, \ldots$ sont des nombres rationnels. Soit m le dénominateur commun de ces fractions. Introduisons une nouvelle variable t:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m.$$

Il est évident que x, $\frac{dx}{dt}$ et les expressions

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\lambda}, \quad \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\mu}$$

seront des fonctions rationnelles de t et que l'intégrale (6) se ramènera à l'intégrale de fraction rationnelle.

2. *Différentielle de binôme. Les intégrales de différentielles de binôme* se ramènent dans certains cas à l'intégrale (6):

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx, \tag{7}$$

où m, n et p sont des nombres rationnels.

Posons $x = t^{\frac{1}{n}}$:

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1} (a+bt)^p\,dt.$$

Si p ou $\frac{m+1}{n}$ sont des nombres entiers, l'intégrale obtenue sera une intégrale de la forme (6). De l'égalité évidente

$$\int t^{\frac{m+1}{n}-1} (a+bt)^p\,dt = \int t^{\frac{m+1}{n}+p-1} \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p dt$$

il résulte que dans le cas où $\frac{m+1}{n}+p$ est un nombre entier, l'intégrale (7) se ramène aussi à la forme (6).

Il existe *un théorème de Tchébychev* d'après lequel les trois cas cités épuisent tous les cas où l'intégrale de la différentielle d'un binôme s'exprime sous forme de fonctions élémentaires.

VI-3-4. Intégrales du type $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$. Les intégrales du type:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \tag{8}$$

où R est une fonction rationnelle de ses arguments, se ramènent aux intégrales de fraction rationnelle grâce à *la substitution d'Euler*.

Dans le cas où $a > 0$, on peut utiliser *la première substitution* d'Euler:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x.$$

En élevant les deux membres de cette égalité au carré et en résolvant par rapport à x, nous obtiendrons:

$$x = \frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b},$$

d'où nous voyons que x, $\frac{dx}{dt}$ et $\sqrt{ax^2+bx+c}$ seront des fonctions rationnelles de t, et, par conséquent, l'intégrale (8) se ramènera à une intégrale de fraction rationnelle.

Dans le cas où $c > 0$, on peut utiliser *la deuxième substitution* d'Euler :

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \sqrt{c}.$$

Le lecteur pourra le vérifier.

Dans le cas où $a < 0$, le trinôme $(ax^2 + bx + c)$ doit avoir des racines réelles x_1 et x_2 car dans le cas contraire il serait négatif pour toute valeur réelle de x, et $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ serait imaginaire. Dans le cas où il y aurait des racines réelles du trinôme cité, l'intégrale (8) se ramènerait à une intégrale de fraction rationnelle en utilisant *la troisième substitution* d'Euler :

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_2).$$

Le lecteur pourra le vérifier.

Les substitutions d'Euler conduisent la plupart du temps à des calculs compliqués, c'est pourquoi nous allons indiquer une autre méthode de calcul de l'intégrale (8).

Désignons pour simplifier les notations :

$$y = \sqrt{ax^2+bx+c}.$$

Toute puissance positive paire de y représente un polynôme en x, et il n'est pas difficile de ramener la fonction à intégrer à la forme :

$$R(x, y) = \frac{\omega_1(x) + \omega_2(x)\,y}{\omega_3(x) + \omega_4(x)\,y},$$

où $\omega_i(x)$ est un polynôme de x. En éliminant l'irrationnel dans le dénominateur et en effectuant des transformations élémentaires, nous pouvons mettre l'expression précédente sous la forme :

$$R(x, y) = \frac{\omega_5(x)}{\omega_6(x)} + \frac{\omega_7(x)}{\omega_8(x)\,y}.$$

Le premier terme est une fraction rationnelle que nous savons déjà intégrer. En extrayant de la fraction $\frac{\omega_7(x)}{\omega_8(x)}$ la partie entière et en décomposant la fraction irréductible en fractions plus simples, nous arriverons aux intégrales de la forme :

$$\int \frac{\varphi(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \tag{9}$$

et

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{10}$$

où $\varphi(x)$ est un polynôme de x.

En outre nous supposons que le polynôme $\omega_8(x)$ n'a que des racines réelles.

Avant de passer à l'examen des intégrales (9) et (10) notons deux cas particuliers simples de l'intégrale (9):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(x+\frac{b}{2a}+\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}\right)+C \qquad (a>0), \qquad (11)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+bx+c}}=\int \frac{dx}{\sqrt{m^2-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2}}=\arc\sin\frac{x-\frac{b}{2}}{m}+C. \qquad (12)$$

La formule (11) n'est pas difficile à obtenir si l'on utilise la première substitution d'Euler. L'intégrale (12) a déjà été étudiée précédemment [III-1-7].

Pour calculer l'intégrale (9) il est commode d'utiliser la formule:

$$\int \frac{\varphi(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=\psi(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (13)$$

où $\psi(x)$ est un polynôme de degré inférieur d'une unité à celui de $\psi(x)$ et λ est une constante. Nous ne nous arrêterons pas à la démonstration de la formule (13). En différentiant la relation (13) et en chassant le dénominateur, nous obtiendrons une identité de deux polynômes, d'où nous pourrons déterminer les coefficients des polynômes $\psi(x)$ et la constante λ.

L'intégrale (10) se ramène à une intégrale (9) grâce à la substitution:

$$x-a=\frac{1}{t}.$$

Exemple.

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\int\frac{x-\sqrt{x^2-x+1}}{x-1}\,dx=$$

$$=\int\frac{x}{x-1}\,dx-\int\frac{x^2-x+1}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}\,dx=$$

$$=x+\ln|x-1|-\int\frac{x^2-x+1}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}\,dx$$

Or:

$$\frac{x^2-x+1}{x-1}=x+\frac{1}{x-1},$$

c'est pourquoi:

$$\int\frac{x^2-x+1}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}\,dx=\int\frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}}\,dx+\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}.$$

D'après la formule (13) :

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}}\,dx = a\sqrt{x^2-x+1}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}\,.$$

En différentiant cette relation et en chassant le dénominateur, nous obtiendrons l'identité :

$$2x = a\,(2x-1)+2\lambda,$$

d'où :

$$a=1,\quad \lambda=\frac{1}{2}\,,$$

et, par conséquent, d'après la formule (11) :

$$\int\frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}}\,dx=\sqrt{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\ln\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right)+C.$$

En posant :

$$x-1=\frac{1}{t}\,,$$

nous obtiendrons:

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}=-\ln\left(t+\frac{1}{2}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{t^2+t+1}\,\right)+C=-\ln\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)}+1}\right)+C=$$

$$=-\ln\left(x+1+2\sqrt{x^2-x+1}\right)+\ln\,(x-1)+C,$$

finalement :

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=x-\sqrt{x^2-x+1}-\frac{1}{2}\ln\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right)+$$

$$+\ln\,(x+1+2\sqrt{x^2-x+1}+C.$$

L'intégrale (8) est un cas particulier de *l'intégrale abélienne*, qui est de la forme :

$$\int R\,(x,\ y)\,dx, \tag{14}$$

où R est une fonction rationnelle de ses arguments et y est *une fonction algébrique de x* , c'est-à-dire une fonction de x, qui est définie par l'équation:

$$f\,(x,\ y)=0, \tag{15}$$

dont le premier membre est un polynôme entier en x et y. Si

$$y=\sqrt{P\,(x)},$$

où $P\,(x)$ est un polynôme du troisième ou du quatrième degré en x, l'intégrale abélienne (14) sera *une intégrale elliptique*. Nous nous occuperons de ces intégrales dans le troisième tome. Cette dernière intégrale, sans parler de l'intégrale abélienne générale, ne s'exprime pas au moyen de fonctions élémentaires. Si le degré du polynôme $P\,(x)$ est plus élevé que 4, l'intégrale (14) s'appellera *hyperelliptique*.

Si la relation (15) qui exprime y comme une fonction algébrique de x possède la propriété que x et y pouvent être exprimés sous forme de fonctions rationnelles à l'aide du paramètre auxiliaire t, il est évident que l'intégrale abélienne (14) se ramène à l'intégrale de fraction rationnelle. Dans le cas cité, la courbe algébrique représentative de la relation (15) s'appelle courbe *unicursale*. En particulier, les substitutions d'Euler servent à montrer que la courbe:

$$y^2 = ax^2 + bx + c$$

est unicursale.

VI-3-5. Intégrales du type $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$. L'intégrale du type:

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\, dx, \tag{16}$$

où R est une fonction rationnelle de ses arguments, se ramène à une intégrale de fraction rationnelle, si on introduit une nouvelle variable:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

En effet, d'après les formules connues de la trigonométrie, nous avons:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

et par ailleurs:

$$x = 2 \operatorname{arc\,tg} t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

d'où il découle directement notre affirmation.

Indiquons maintenant quelques cas particuliers où les calculs peuvent être simplifiés.

1. Supposons que $R(\sin x, \cos x)$ ne varie pas si l'on remplace $\sin x$ et $\cos x$ respectivement par $(-\sin x)$ et $(-\cos x)$, c'est-à-dire supposons que $R(\sin x, \cos x)$ ait une période égale à π. Comme

$$\sin x = \cos x \operatorname{tg} x,$$

$R(\sin x, \cos x)$ apparaît comme une fonction rationnelle de $\cos x$ et $\operatorname{tg} x$, ne variant pas lorsqu'on remplace $\cos x$ par $(-\cos x)$, c'est-à-dire ne contenant que des puissances paires de $\cos x$:

$$R(\sin x,\ \cos x) = R_1(\cos^2 x,\ \operatorname{tg} x).$$

Dans ce cas, pour ramener l'intégrale (16) à une intégrale de fraction rationnelle, il suffit de poser:

$$t = \operatorname{tg} x.$$

En effet, nous aurons:

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

Ainsi, si R (sin x, cos x) *ne change pas quand on remplace* sin x *et* cos x *respectivement par* (—sin x) *et* (—cos x), *l'intégrale* (16) *se ramène à une intégrale de fraction rationnelle en posant* $t = \operatorname{tg} x$.

2. Supposons maintenant que R (sin x, cos x) ne change que de signe quand on remplace sin x par (—sin x). La fonction

$$\frac{R(\sin x, \cos x)}{\sin x}$$

restera dans ce cas constante, c'est-à-dire qu'elle ne contiendra que des puissances paires de sin x, et il s'ensuit que:

$$R(\sin x, \cos x) = R_1(\sin^2 x, \cos x)\cdot\sin x.$$

En faisant $t = \cos x$, nous obtiendrons:

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = -\int R_1(1-t^2, t)\, dt,$$

c'est-à-dire que *si* R (sin x, cos x) *ne change que de signe lorsque* sin x *devient* (—sin x), *l'intégrale* (16) *se ramène à une intégrale de fraction rationnelle au moyen de la substitution* $t = \cos x$.

3. De même il est facile de montrer que *si* R (sin x, cos x), *quand on remplace* cos x *par* (—cos x), *ne change que de signe, l'intégrale* (16) *se ramène à une intégrale de fraction rationnelle à l'aide de la substitution* $t = \sin x$.

VI-3-6. Intégrales du type $\int e^{ax}[P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx]\,dx$. L'intégrale du type:

$$\int e^{ax}\varphi(x)\, dx, \tag{17}$$

où $\varphi(x)$ est un polynôme de x de degré n, en intégrant par parties, se ramène à:

$$\int e^{ax}\varphi(x)\, dx = \frac{1}{a} e^{ax}\varphi(x) - \frac{1}{a}\int e^{ax}\varphi'(x)\, dx.$$

De cette manière, sortant de l'intégrale le terme formé du produit de e^{ax} par un polynôme de degré n, nous pouvons abaisser le degré du polynôme à intégrer d'une unité. En continuant de la même manière à intégrer par parties et en tenant compte de ce que:

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C,$$

nous obtiendrons:

$$\int e^{ax}\varphi(x)\, dx = e^{ax}\psi(x) + C, \tag{18}$$

où $\psi(x)$ est un polynôme du même degré n que $\varphi(x)$, c'est-à-dire que *l'intégrale du produit de la fonction exponentielle* e^{ax} *par le polynôme de degré* n *a également la forme de ce produit.*

En différentiant la relation (18) et en divisant les deux parties de l'identité obtenue par e^{ax}, nous pouvons déterminer les coefficients du polynôme $\psi(x)$ au moyen de coefficients indéterminés.

Etudions maintenant l'intégrale d'une forme plus générale:

$$\int e^{ax}[P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx]\,dx, \tag{19}$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes en x. Soit n le degré le plus élevé de ces deux polynômes. En introduisant, en tant que moyen auxiliaire, les grandeurs complexes, nous pouvons ramener l'intégrale (19) à l'intégrale (17), en remplaçant $\cos bx$ et $\sin bx$ par leurs valeurs obtenues d'après les formules d'Euler [VI-1-7]:

$$\cos bx = \frac{e^{bxi} + e^{-bxi}}{2}, \qquad \sin bx = \frac{e^{bxi} - e^{-bxi}}{2i},$$

nous obtiendrons:

$$\int e^{ax}[P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx]\,dx =$$
$$= \int e^{(a+bi)x}\varphi(x)\,dx + \int e^{(a-bi)x}\varphi_1(x)\,dx,$$

où $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$ sont des polynômes de degré inférieur ou égal à n. En appliquant la formule (18):

$$\int e^{ax}[P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx]\,dx =$$
$$= e^{(a+bi)x}\psi(x) + e^{(a-bi)x}\psi_1(x) + C,$$

où $\psi(x)$ et $\psi_1(x)$ sont des polynômes de degré inférieur ou égal à n et en remplaçant:

$$e^{\pm bxi} = \cos bx \pm i\sin bx,$$

nous avons en définitive:

$$\int e^{ax}[P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx]\,dx =$$
$$= e^{ax}[R(x)\cos bx + S(x)\sin bx] + C, \tag{20}$$

où $R(x)$ et $S(x)$ sont des polynômes de degré non supérieur à n. De cette façon, nous voyons que *l'intégrale* (19) *a une expression de la même forme que la fonction à intégrer, en outre les degrés des polynômes dans l'intégrale doivent être choisis égaux au plus grand des degrés des polynômes se trouvant dans la fonction à intégrer.*

En différentiant la relation (20), en simplifiant l'identité obtenue par e^{ax} et en égalant les coefficients des termes semblables de forme $x^s\cos bx$ et $x^s\sin bx$ ($s = 0, 1, 2, \ldots, n$) se trouvant dans le premier et le second membre, nous obtiendrons un système d'équations du premier degré, servant à déterminer les coefficients des polynômes $R(x)$ et $S(x)$. Remarquons par ailleurs que si $\cos bx$ ou $\sin bx$ ne rentre pas sous le signe de l'intégrale, dans le second membre de la formule on doit obligatoirement écrire les deux fonctions trigonométriques en tenant compte de la règle citée plus haut de la détermination des degrés des polynômes $R(x)$ et $S(x)$.

Les intégrales de la forme:

$$\int e^{ax}\varphi(x)\sin(a_1x+b_1)\sin(a_2x+b_2)\ldots$$

$$\ldots\cos(c_1x+d_1)\cos(c_2x+d_2)\ldots dx$$

se ramènent directement aux intégrales de la forme (19).

En effet, en utilisant les formules de trigonométrie bien connues qui expriment la somme et la différence des sinus et des cosinus sous la forme d'un produit, on peut, inversement, exprimer le produit de deux fonctions trigonométriques citées plus haut sous forme de somme et de différence de sinus et de cosinus. En appliquant un certain nombre de fois cette transformation, nous pouvons ramener à un seul le nombre de facteurs trigonométriques sous le signe d'intégration, et de cette façon nous obtiendrons une intégrale de la forme (19).

E x e m p l e. D'après la formule (20):

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=e^{ax}(A\cos bx+B\sin bx)+C.$$

En différentiant et en simplifiant par e^{ax}:

$$\sin bx=(aA+bB)\cos bx+(-bA+aB)\sin bx,$$

d'où:

$$aA+bB=0,\qquad -bA+aB=1,$$

c'est-à-dire:

$$A=-\frac{b}{a^2+b^2},\qquad B=\frac{a}{a^2+b^2},$$

et finalement

$$e^{ax}\sin bx\,dx=e^{ax}\left(-\frac{b}{a^2+b^2}\cos bx+\frac{a}{a^2+b^2}\sin bx\right)+C. \qquad (21)$$

INDEX

A NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Notre adresse: Editions Mir,
1er Rijski péréoulok, 2.
Moscou
U.R.S.S.

Imprimé en Union Soviétique