

## COMPLEMENTS (DIPOLES NON LINEAIRES, ANALYSE SPECTRALE)

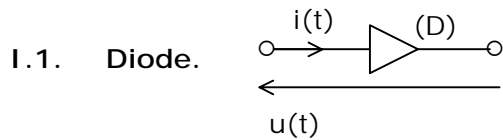
**Plan** (Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)

\*\*\*\*\*

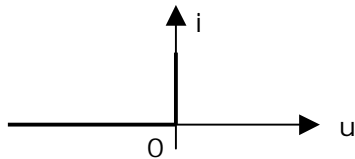
I.	Composants non linéaires. ....	1
II.	Analyse spectrale. ....	7

\*\*\*\*\*

### I. Composants non linéaires.



On se limitera au cas de diodes idéales, dont la caractéristique  $i = f(u)$  est la suivante :

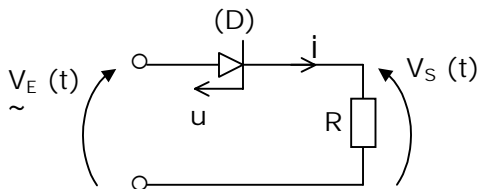


\*Si  $u < 0$  : (D) bloquée :  $i = 0$  (interrupteur ouvert)

\*Si  $i \geq 0$  : (D) passante :  $u = 0$  (interrupteur fermé)

#### Exemples d'utilisation :

##### \*Redressement monoalternance

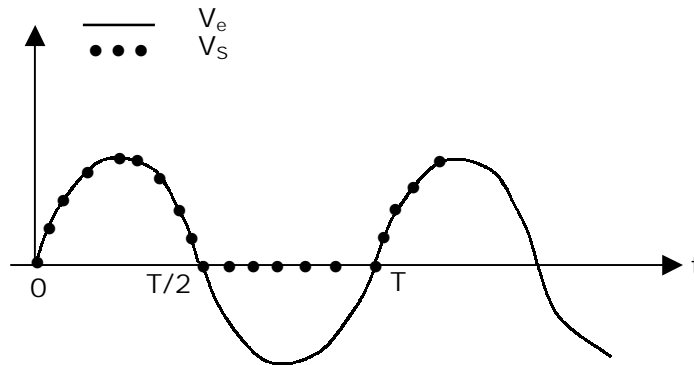


- $V_E(t) = V_e \sqrt{2} \sin \omega t$
- (D) passante :  $V_s = V_E$

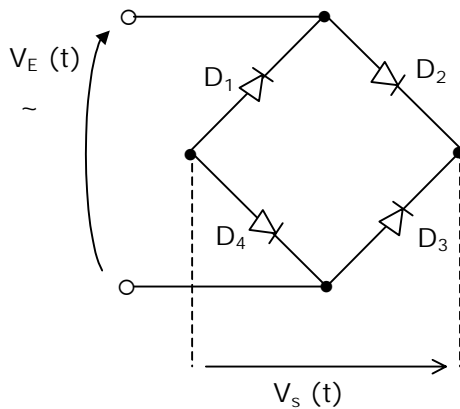
• (D) bloqué :  $i = 0 \Rightarrow V_s = 0$

Validité :  $u < 0 \Rightarrow V_E - V_s < 0$ , soit  $V_E < 0$

Ainsi, le circuit « redresse » l'alternance négative de  $V_E(t)$ .

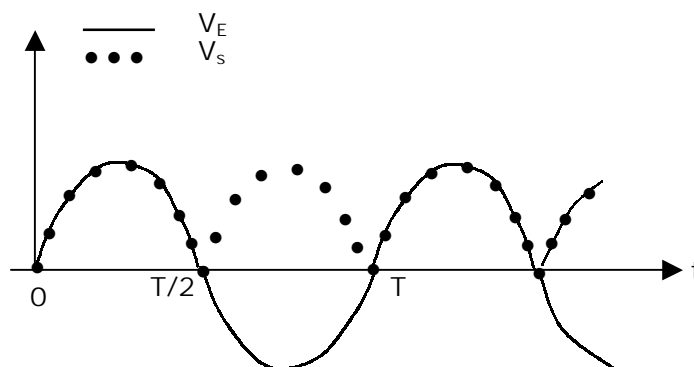


\*Redressement bialternance :

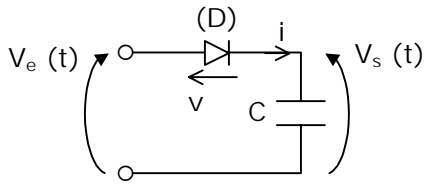


- $V_E > 0$  :  $\left( \begin{array}{l} D_2 \text{ et } D_4 \text{ passantes} \\ D_1 \text{ et } D_3 \text{ bloquées} \end{array} \right) \Rightarrow \underline{V_S = V_E}$
- $V_E < 0$  :  $\left( \begin{array}{l} D_2 \text{ et } D_4 \text{ bloquées} \\ D_1 \text{ et } D_3 \text{ passantes} \end{array} \right) \Rightarrow \underline{V_S = -V_E}$

Le circuit « redresse » alors les deux alternances de  $V_E(t)$ .



\*Détecteur de crête :



$$\begin{cases} V_e(t) = V_E \sqrt{2} \sin \omega t \\ V_s(0^+) = 0 \end{cases}$$

Supposons (D) bloquée à  $t = 0$  :  $i = C \overset{\circ}{V}_s = 0$   
 $\Rightarrow V_s = \text{cste} = 0$

Alors :  $V = V_e - V_s = V_e > 0$  : contradiction

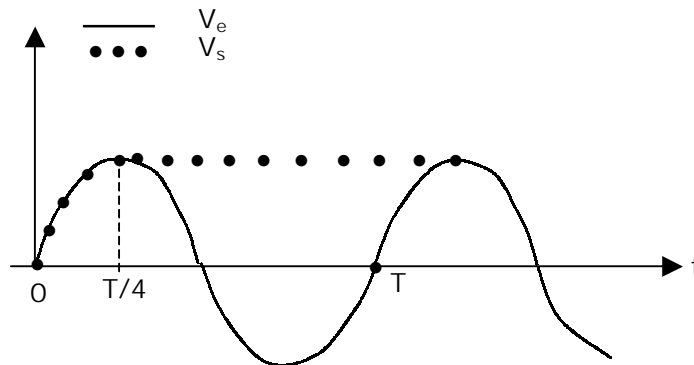
Donc (D) passante à  $t = 0$

Tant que (D) est passante :

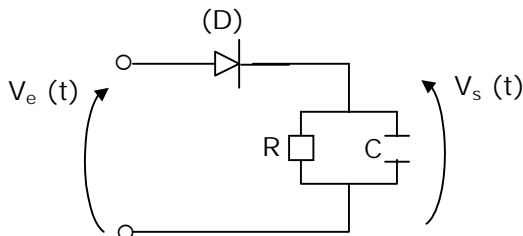
$$\begin{cases} V_s = V_e \\ i = C \overset{\circ}{V}_e = C \omega U_o \cos \omega t \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow t \leq T/4$

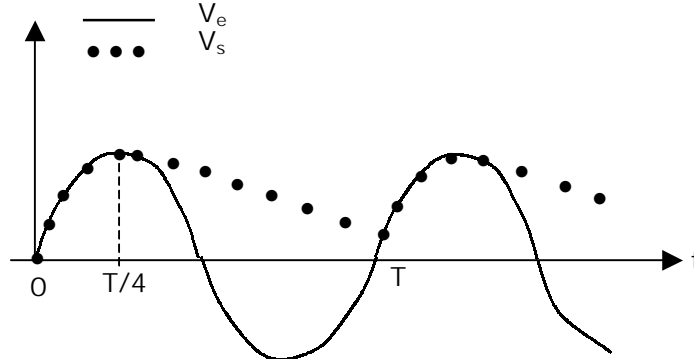
La diode se bloque donc à  $t = T/4$ , et reste bloquée ensuite ( $i = 0$ )



Rem. : avec le circuit :



Lorsque (D) est bloquée, le condensateur se décharge à travers R :

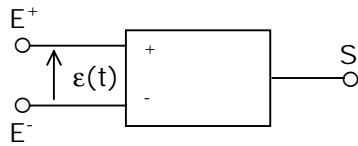


On aura un « détecteur de crête » si  $\tau = RC \gg T$ .

**I.2. AO en régime non linéaire.**

Il s'agira d'un AO (supposé idéal), soit non bouclé, soit bouclé sur E<sup>+</sup>.

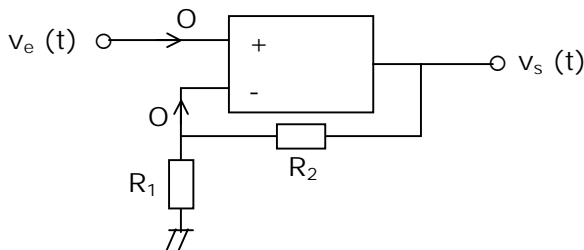
Alors :



- $v_s = + V_{sat}$  (état « haut ») ; validité :  $\epsilon > 0$
- ou
- $v_s = - V_{sat}$  (état « bas ») ; validité :  $\epsilon < 0$

Exemples

\*Comparateur à hystérésis :



Montrons tout d'abord que ce montage ne peut conduire à un fonctionnement linéaire de l'AO. Pour ce faire, on utilise l'équation différentielle caractéristique de l'AO (supposé alors non idéal) :

Alors :

$$\begin{cases} \tau \dot{v}_s + v_s = \mu_0 \varepsilon \\ \varepsilon = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s - v_e \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tau \dot{v}_s + v_s \left( 1 - \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2} \right) = -\mu_0 v_e$$

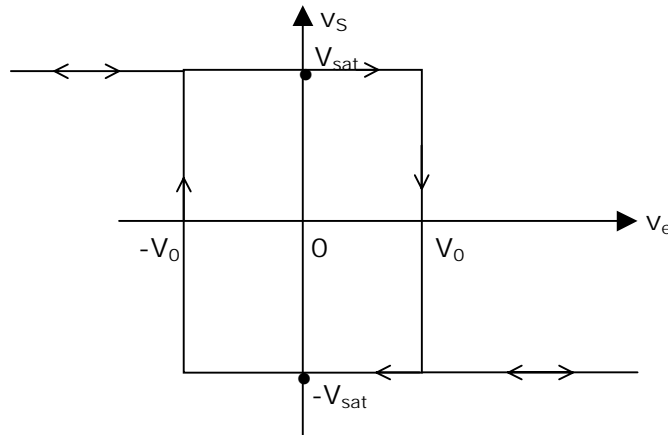
$< 0$  en général ( $\mu_0 \gg 1$ )

Ainsi (sauf cas très particulier pour  $R_1$  et  $R_2$ ), le régime libre est divergent : toute petite perturbation sur l'entrée est spontanément amplifiée, et l'AO sature.

Alors, en revenant au modèle de l'AO idéal :

$$\begin{aligned} & v_s = +V_{sat} : \text{validité } \varepsilon = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} - v_e > 0 \\ \text{ou} & \Rightarrow v_e < v_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} \\ & v_s = -V_{sat} : \text{validité } \varepsilon = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} - v_e < 0 \\ & \Rightarrow v_e > -v_0 \end{aligned}$$

La caractéristique  $V_s = f(V_e)$  est alors la suivante :

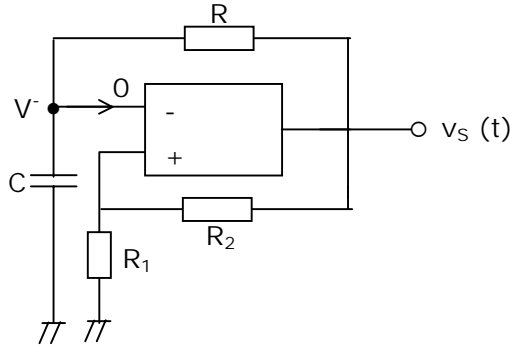


Elle présente un « hystérésis », le seuil de basculement n'est pas le même à  $v_e$  croissant ( $V_0$ ) et  $v_e$  décroissant ( $-V_0$ ).

Ce montage renseigne donc sur la valeur de  $v_e$  par rapport à  $V_0$ , et sur son sens de variation.

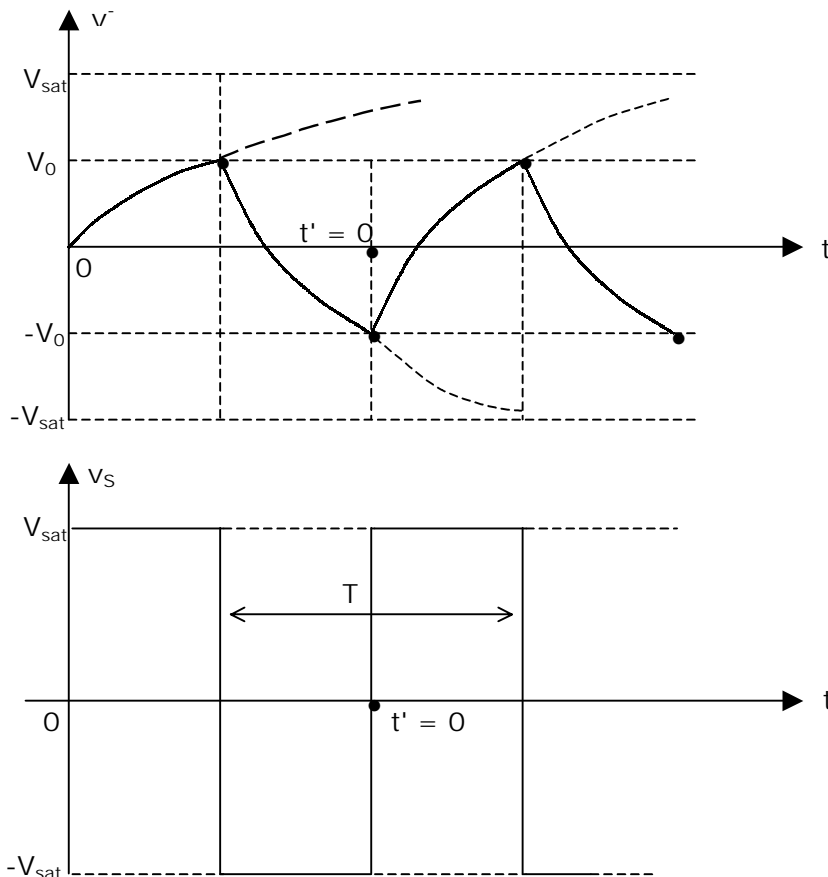
\*Oscillateur de relaxation (« multivibrateur astable »)

Il s'agit d'un système délivrant une sortie périodique non sinusoidale, sans entrée.



A  $t = 0^+$  :  $v^- = 0$ ,  $v_s = +V_{sat}$  par exemple. Alors : C se charge à travers R :  $v^-$  augmente jusqu'à atteindre  $V_0$  : l'AO bascule dans l'état bas ; donc C se décharge à travers R :  $v^-$  diminue, jusqu'à atteindre  $-V_0$  : l'AO bascule dans l'état haut...

Le point de fonctionnement décrit donc périodiquement le cycle d'hystérésis précédent, et  $v_s$  varie périodiquement entre  $+V_{sat}$  et  $-V_{sat}$  :



Calculons la période T.

Pour  $t' = [0, T/2]$  :  $v^-(t') = Ae^{-t'/\tau} + V_{sat}$

Avec : 
$$\begin{cases} v^-(0) = -V_0 \\ v^-(T/2) = +V_0 \end{cases}, \quad \text{donc :}$$

$$\begin{cases} -V_0 = A + V_{sat} \\ V_0 = Ae^{-T/2\tau} + V_{sat} \end{cases}$$

On en déduit :

$$T = 2\tau \ln \left( \frac{V_{sat} + V_0}{V_{sat} - V_0} \right) = 2RC \ln \left( 1 + \frac{2R_1}{R_2} \right)$$

## II. Analyse spectrale.

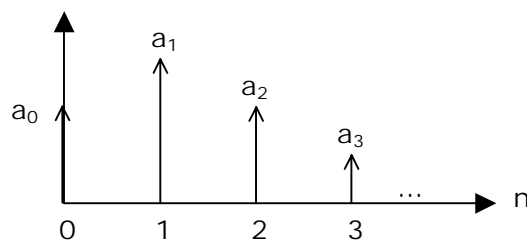
### II.1. Décomposition en série de Fourier.

Soit  $x_E(t)$  un signal périodique de période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  : on peut décomposer  $x_E(t)$  en une somme de fonctions sinusoïdales de pulsation  $\omega_n = n\omega$  :

$$x_E(t) = \underbrace{\langle x_E \rangle}_{a_0} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t + \varphi_n)}_{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)}$$

- $n = 1$  : « fondamental »
- $n > 1$  : « harmoniques »

La « répartition spectrale du signal », ou « spectre en amplitude », est représenté par un diagramme en bâtons :



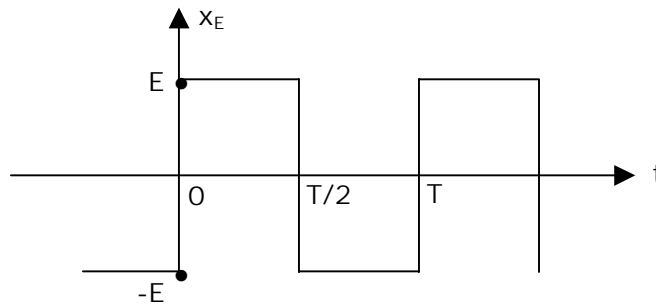
On calcule  $a_n$  et  $b_n$  par les formules suivantes :

$$\begin{cases} a_0 = \langle x_E \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x_E(t) dt \\ a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x_E \cos(n\omega t) dt \\ b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x_E \sin(n\omega t) dt \end{cases}$$

Rem. : \*pour une fonction  $\left\{ \begin{array}{l} \text{paire : } b_n = 0 \\ \text{impaire : } a_n = 0 \end{array} \right.$

\* $a_0$  est la « composante continue » du signal.

Exemple :

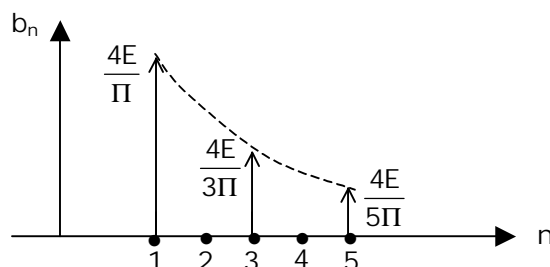


$a_0 = 0$  ;  $a_n = 0$  (fonction impaire de valeur moyenne nulle)

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \times \frac{2}{T} \int_0^{T/2} x_E \sin n\omega t dt \\ &= \frac{4E}{T} \left[ -\frac{\cos n\omega t}{n\omega} \right]_0^{T/2} = \frac{4E}{2n\pi} [1 - \cos n\pi] \end{aligned}$$

Donc :  $\begin{cases} b_n = 0 \text{ si } n \text{ pair} \\ b_n = \frac{4E}{n\pi} \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$

Ainsi :  $x_E(t) = \frac{4E}{\pi} \left[ \sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right]$





Aspect « énergétique » :

On montre que :

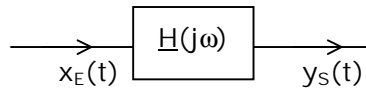
$$x_{E_{eff}}^2 = \langle x_E^2 \rangle = \langle x_E \rangle^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{2}$$

(Formule de Parseval)

**II.2. Filtrage sélectif :**

Appliquons à l'entrée d'un système linéaire une grandeur  $x_E(t)$  périodique a priori non sinusoïdale.

La seule connaissance de la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega)$  permet de déterminer la sortie  $y_S(t)$  :



Si

$$\underline{H}(j\omega) = H(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

$$x_E(t) = a_0 +$$

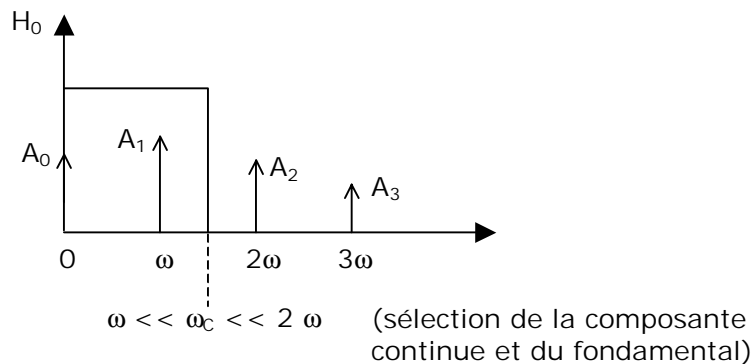
$$\sum_1^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

Alors :

$$y_S(t) = H_0 a_0 + \sum_1^{\infty} H(n\omega) A_n \cos(n\omega t + \varphi_n + \varphi(n\omega))$$

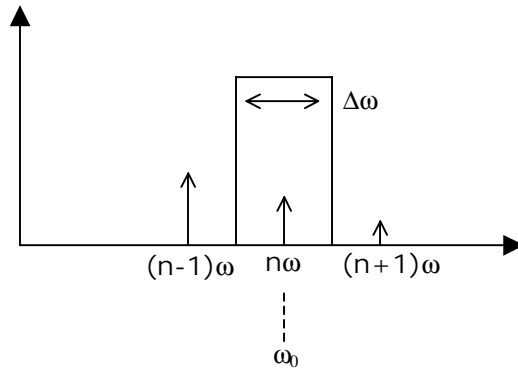
Un « filtre » va sélectionner dans le spectre de  $x_E(t)$  certains harmoniques « intéressants », et « couper » les autres.

\*Filtre passe-bas : permet de sélectionner la composante continue et/ou le fondamental du signal.



Pour ne sélectionner que la composante continue, choisir  $\omega_c \ll \omega$ .

\*Filtre passe-bande : un filtre passe-bande sélectif permet « d'analyser » le spectre du signal, et de ne sélectionner qu'un harmonique.



La configuration la plus favorable est :

$$\omega_0 = n\omega \quad (\text{on « accorde » le filtre sur l'harmonique } n).$$

Il faut alors réaliser :

$$\Delta\omega \ll 2\omega$$

Soit, pour un filtre du 2<sup>e</sup> ordre :

$$\frac{\omega_0}{Q_0} \ll 2\omega = \frac{2\omega_0}{n}$$

Ainsi, il faut choisir :

$$Q_0 \gg \frac{n}{2}$$

(Filtre « sélectif »)

Rem. : expérimentalement, pour « analyser » le spectre d'un signal, il est plus pratique (plutôt que de faire varier  $\omega_0$ ) de faire varier  $\omega$  (donc T) : alors les différents harmoniques « défilent » dans la fenêtre du filtre passe-bande.