Cinématique du SOLIDE INDÉFORMABLE
Cinématique plane : Résolution graphique

Sommaire

La cinématique des solides : Mouvement plan

Cinématique : Etude des mouvements sans se préoccuper des causes qui les provoquent.

1. DÉFINITION DU SOLIDE INDÉFORMABLE

On appelle système matériel un ensemble de points matériels. Un solide indéformable S est un système matériel, tel que la distance entre deux points A et B appartenant à ce système, reste constante au cours du temps et quel que soit sa position dans l'espace :

$$\forall A \in S \quad \text{et} \quad \forall B \in S\,,\ \|\overrightarrow{AB}\| = cte \ \text{ dans le temps et dans l'espace}$$

Le champ des vecteurs-vitesse d'un solide est antisymétrique et équiprojectif (voir cours « la cinématique des solides »). Ainsi pour deux points A et B appartenant au solide S_k en mouvement par rapport à un repère R_i, nous pouvons écrire :

$$\boxed{\overrightarrow{V_{A\in S_k/R_i}} = \overrightarrow{V_{B\in S_k/R_i}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S_k/R_i}} \Leftrightarrow \overrightarrow{V_{A\in S_k/R_i}} . \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_{B\in S_k/R_i}} . \overrightarrow{AB}}$$

2. CINEMATIQUE PLANE : MOUVEMENT PLAN SUR PLAN

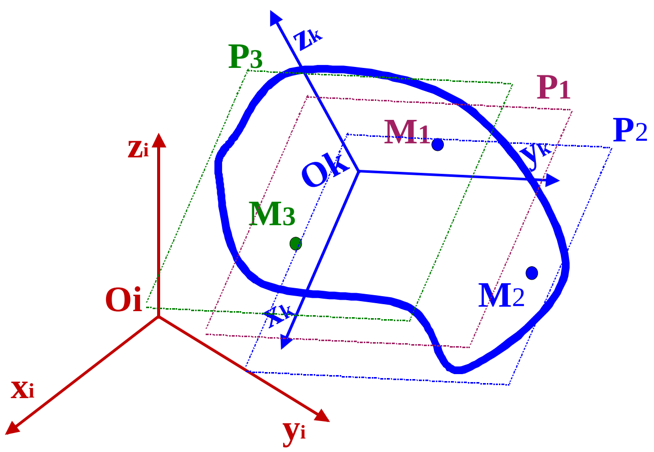
2.1. Définition

Un solide est animé d'un mouvement plan sur plan dans un repère de référence donné, si à tout instant, les vecteurs-vitesse de tous ses points restent parallèles à un plan fixe.

2.2. Théorème

Si trois points non alignés d'un solide S_k ont leur trajectoire dans un plan (P_i) appartenant au solide S_i, alors tous les points du solide S_k sont animés d'un mouvement plan, le plan du mouvement étant parallèle au plan (P_i).
Le mouvement du solide S_k est à tout instant une rotation instantanée d'axe perpendiculaire au plan (P_i).

Démonstration :
Soient trois points non alignés M_1, M_2 et M_3 appartenant au solide S_k et se déplaçant respectivement dans les plans P_1, P_2 et P_3 Parallèles entre eux de normale $\vec{z}_k$, dans un mouvement par rapport au solide S_i. de repère associé Ri.



 Jacques AÏACHE – Jean-Marc CHÉREAU

Nous pouvons donc affirmer que les vecteurs-vitesse $\overrightarrow{V_{M_1\in S_k/R_i}}$, $\overrightarrow{V_{M_2\in S_k/R_i}}$ et $\overrightarrow{V_{M_3\in S_k/R_i}}$ appartiennent aux plans ($P_{i=1,2,3}$).

La formule du champ des vecteurs-vitesse pour un solide nous permet d'écrire :

$$\overrightarrow{V_{M_1\in S_k/R_i}}=\overrightarrow{V_{O_k\in S_k/R_i}}+\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}\wedge\overrightarrow{O_kM_1},$$
$$\overrightarrow{V_{M_2\in S_k/R_i}}=\overrightarrow{V_{O_k\in S_k/R_i}}+\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}\wedge\overrightarrow{O_kM_2},$$
$$\overrightarrow{V_{M_3\in S_k/R_i}}=\overrightarrow{V_{O_k\in S_k/R_i}}+\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_{ii}}}\wedge\overrightarrow{O_kM_3}$$

À partir des trois relations ci-dessus, nous obtenons :

$\overrightarrow{V_{M_1\in S_k/R_i}}-\overrightarrow{V_{M_2\in S_k/R_i}}=\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}\wedge\overrightarrow{M_2M_1}$ soit $\overrightarrow{V_{M_1\in S_k/R_i}}-\overrightarrow{V_{M_2\in S_k/R_i}}\perp\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}$

$\overrightarrow{V_{M_1\in S_k/R_i}}-\overrightarrow{V_{M_3\in S_k/R_i}}=\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}\wedge\overrightarrow{M_3M_1}$ soit $\overrightarrow{V_{M_1\in S_k/R_i}}-\overrightarrow{V_{M_3\in S_k/R_i}}\perp\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}$

Les trois points M_1, M_2 et M_3, non alignés, ont un mouvement à priori quelconque. Donc $\overrightarrow{V_{M_1\in S_k/R_i}}-\overrightarrow{V_{M_2\in S_k/R_i}}$ et $\overrightarrow{V_{M_1\in S_k/R_i}}-\overrightarrow{V_{M_3\in S_k/R_i}}$ sont deux vecteurs non colinéaires aux plans (P_i).

Le vecteur $\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}$, perpendiculaire à deux vecteurs non colinéaires aux plans (P_i), est donc perpendiculaire à ces plans (P_i).

Le torseur cinématique caractéristique du mouvement du solide S_k par rapport au solide S_i s'écrit en un point quelconque, M_1 par exemple :

$$\{\mathcal{V}(S_k/S_i)\}=\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}\\ \\ \overrightarrow{V_{M_1\in S_k/R_i}}\end{matrix}\right\}_{M_1}=\left\{\begin{matrix}0, & 0, \omega_z\\ V_x, V_y, & 0\end{matrix}\right\}_{M_1,\,\vec{x}_k,\vec{y}_k,\vec{z}_k}\quad ou\quad \overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}.\overrightarrow{V_{M_1\in S_k/R_i}}=0$$

L'automoment de ce torseur est donc nul. C'est un torseur- glisseur. Donc en tout point I appartenant à l'axe du glisseur, nous avons $\overrightarrow{V_{I\in S_k/R_i}}=\vec{0}$.

Ainsi tous les points de l'axe central (Δ_{ki}), perpendiculaire aux plans (P_i), du torseur cinématique caractérisant le mouvement plan sur plan du solide S_k par rapport au repère R_i ont une vitesse nulle.

Le mouvement est donc une rotation instantanée d'axe (I, $\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}$) perpendiculaire aux plans (P_i).

En conclusion, si les trois points M_1, M_2 et M_3 ont leurs trajectoires dans les plans (P_i), tous les points appartenant respectivement aux normales à ces plans issues de M_1, M_2 et M_3 ont leurs trajectoires appartenant à des plans parallèles au plan (P_i).

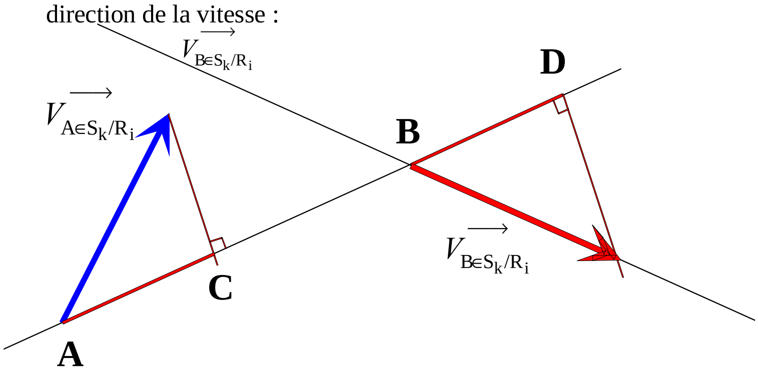
Donc l'étude du mouvement plan d'un solide se ramène à l'étude du mouvement des points d'un plan (P_k) appartenant au solide (S_k) et qui reste en coïncidence avec un plan (P_i) lié au solide (S_i). Ce mouvement, qui est une rotation instantanée d'axe $\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}$ perpendiculaire au plan (Pi), est appelé mouvement plan sur plan.

3. APPLICATION DE LA PROPRIÉTÉ D'ÉQUIPROJECTIVITÉ DU CHAMP DES VECTEURS-VITESSE

3.1. Traduction géométrique de l'équiprojectivité :

3.1.1. Traduction géométrique de la relation $\overrightarrow{V_{A\in S_k/R_i}}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_{B\in S_k/R_i}}.\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{V_{A\in S_k/R_i}}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_{B\in S_k/R_i}}.\overrightarrow{AB}$ traduit que la projection orthogonale de $\overrightarrow{V_{A\in S_k/R_i}}$ sur la direction de $\overrightarrow{AB}$ est égale à la projection orthogonale de $\overrightarrow{V_{B\in S_k/R_i}}$ sur la direction de $\overrightarrow{AB}$. D'où la construction géométrique suivante :



Les projections orthogonales $\overline{AC}=\overline{BD}$, respectivement des vecteurs-vitesse $\overrightarrow{V_{A\in S_k/R_i}}$ et $\overrightarrow{V_{B\in S_k/R_i}}$, sur la droite orientée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont des mesures algébriques. Ces projections sont donc du même côté par rapport aux points A et B.

3.1.2. Analyse et utilisation de la relation d'équiprojectivité

La relation $\overrightarrow{V_{A\in S_k/R_i}}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_{B\in S_k/R_i}}.\overrightarrow{AB}$ est une relation scalaire. A priori nous avons quatre inconnues scalaires dans le plan formé par les vecteurs-vitesse $\overrightarrow{V_{A\in S_k/R_i}}$ et $\overrightarrow{V_{B\in S_k/R_i}}$. Nous ne pouvons donc appliquer cette relation d'équiprojectivité que dans la condition suivante : l*e vecteur-vitesse du point A et la direction du vecteur-vitesse du point B sont connus.*

L'ordre des opérations est le suivant :

1. projeter $\overrightarrow{V_{A\in S_k/R_i}}$ sur la droite (A,B) ce qui donne $\overline{AC}$,
2. placer le point D sur la droite (A,B) tel que : $\overline{AC}=\overline{BD}$,
3. du point D, élever une perpendiculaire à la droite AB qui coupe la direction du vecteur-vitesse $\overrightarrow{V_{B\in S_k/R_i}}$ en un point qui est l'extrémité de ce vecteur.

Remarque :

Cette construction est impossible si la direction du vecteur-vitesse $\overrightarrow{V_{B\in S_k/R_i}}$ est perpendiculaire à la droite (A,B).

3.2. Centre instantané de rotation ou C.I.R.

3.2.1. Définition

On appelle centre instantané de rotation I_{ki} du mouvement du solide S_k par rapport au solide S_i le point où l'axe central (Δ_{ki}), du torseur cinématique caractérisant ce mouvement, perce le plan d'étude.

Remarque :

Cette définition nous montre que :

- $\overrightarrow{V_{I_{k/i}\in S_k/S_i}}=\vec{0}$, car tous les points de l'axe central (Δ_{ki}) du torseur cinématique caractérisant le mouvement plan sur plan du solide S_k par rapport au repère R_i ont une vitesse nulle.

3.2.2. Propriété du CIR

Le centre instantané de rotation I_{ki} est identique à I_{ik}.

3.2.3. Détermination analytique du centre instantané de rotation

Il suffit de reprendre la démarche employée pour déterminer l'axe central d'un torseur (voir cours sur Les outils vectoriels et torseuriels)

$$\overrightarrow{O_k I_{ki}}=\frac{\overrightarrow{\Omega_{Sk/Ri}}\wedge\overrightarrow{V_{O_k\in Sk/Ri}}}{\overrightarrow{\Omega_{Sk/Ri}}^2}$$

Remarque :
Le centre instantané de rotation est obtenu par le produit vectoriel de vecteurs uniques. **Il est donc unique.**

3.3. Base et Roulante

3.3.1. Définition

La base et la roulante dans un mouvement plan sur plan sont respectivement l'intersection de la surface axoïde base et de la surface axoïde roulante avec le plan (P_i). Donc la base est le lieu du centre instantané de rotation I_{ki} dans le repère fixe R_i et la roulante est le lieu du centre instantané de rotation I_{ki} dans le repère mobile R_k.

3.3.2. Propriétés

Ces deux courbes sont en contact au point I_{ki}, centre instantané de rotation du mouvement du solide S_k par rapport au solide S_i. Comme $\overrightarrow{V_{O_k\in Sk/Ri}}=\vec{0}$, **la base et la roulante roulent sans glisser et sans pivoter l'une sur l'autre.**

3.3.3. Détermination analytique de la roulante dans un mouvement plan sur plan

Exemple :
La roulante est le lieu du centre instantané de rotation I_{ki} dans le repère mobile R_k. Le vecteur $\overrightarrow{O_k I_{ki}}=\dfrac{\overrightarrow{\Omega_{Sk/Ri}}\wedge\overrightarrow{V_{O_k\in Sk/Ri}}}{\overrightarrow{\Omega_{Sk/Ri}}^2}$, exprimé au moyen de ses coordonnées paramétriques x_k et y_k dans le repère mobile R_k, permet d'obtenir, en éliminant le paramètre de mouvement ou mobilité du mécanisme, l'équation cartésienne de la roulante.

3.3.4. Détermination analytique de la base dans un mouvement plan sur plan

La base est le lieu du centre instantané de rotation I_{ki} dans le repère fixe R_i. Le vecteur

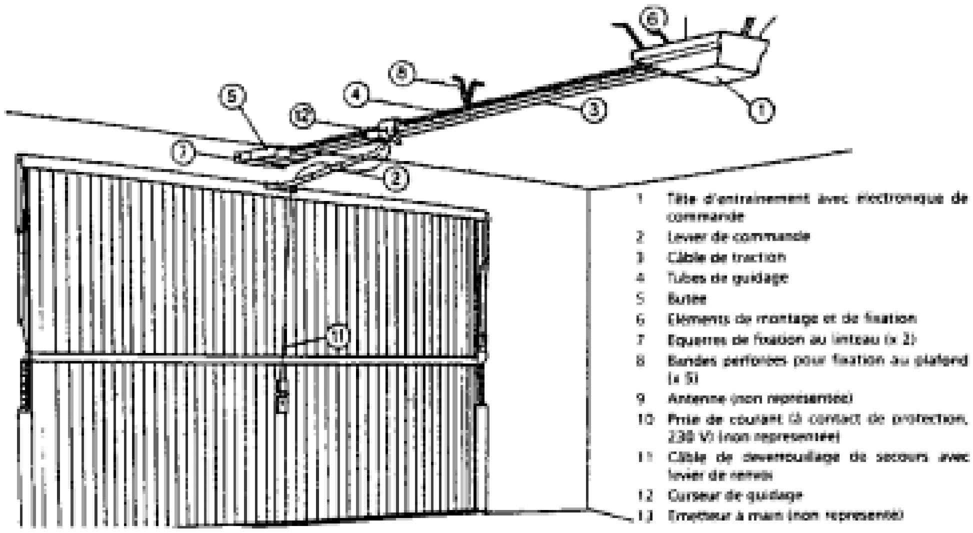
$\overrightarrow{O_i I_{ki}}=\overrightarrow{O_i O_k}+\overrightarrow{O_k I_{ki}}=\overrightarrow{O_i O_k}+\dfrac{\overrightarrow{\Omega_{Sk/Ri}}\wedge\overrightarrow{V_{O_k\in Sk/Ri}}}{\overrightarrow{\Omega_{Sk/Ri}}^2}$, exprimé au moyen de ses coordonnées paramétriques x_i et y_i dans le repère mobile R_i, permet d'obtenir, en éliminant le paramètre de mouvement ou mobilité du mécanisme, l'équation cartésienne de la base.

3.3.5. Exemple de détermination de la base et de la roulante d'un mouvement.

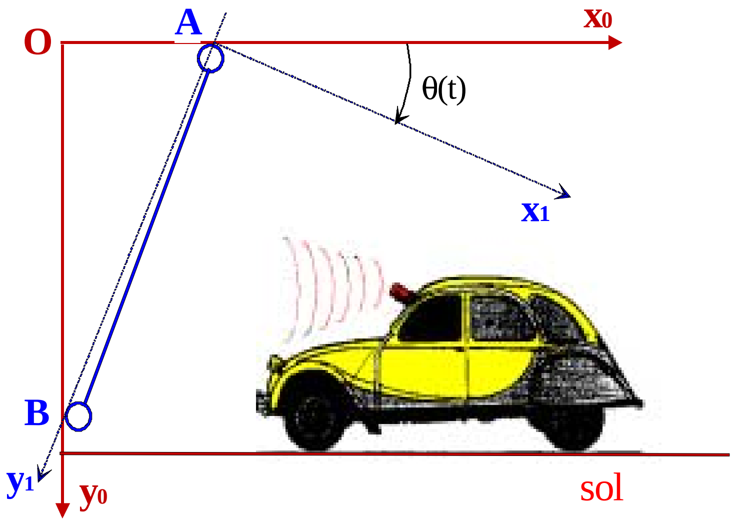
3.3.5..1 Présentation du système support de l'étude

Une radiocommande permet de commander la fermeture et l'ouverture d'une porte de garage automatique basculante. Un dispositif manuel permet d'ouvrir la porte en cas de non fonctionnement de la motorisation. Un dispositif de sécurité est présent pour agir en cas d'entrave à la fermeture

Vue d'ensemble de la porte de garage



Soit la modélisation cinématique du mouvement de la porte par rapport au mur.

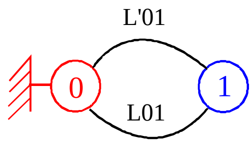


Repérage :

Au solide porte : $\Re_1(A,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$

Au solide mur : $\Re_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$

Graphe de structure :



L'01 : liaison Sphère/Plan de normale $A,\vec{y}_0$

L01 : liaison Sphère/Plan de normale $B,\vec{x}_0$

Géométrie : $\overrightarrow{AB}=L.\vec{y}_1$

Paramétrage : une seule mobilité

$$\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}=\dot{\theta}(t).\vec{z}_{01}$$

3.3.5..2 Recherche du centre instantané de rotation I

Pour ce faire, il est nécessaire de déterminer la cinématique du mouvement de R1 par rapport à R0. Recherchons donc le torseur cinématique en A de R1 par rapport à R0.

$$\overrightarrow{OA}=L.\sin\theta.\vec{x}_0 \text{ d'où } \overrightarrow{V_{A\in R1/R0}}=L.\dot{\theta}.\cos\theta.\vec{x}_0 \text{ donc}$$

$$\left\{V_{R1/R0}\right\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}=\dot{\theta}(t).\vec{z}_{01}\\ \\ \overrightarrow{V_{A\in R1/R0}}=L.\dot{\theta}.\cos\theta.\vec{x}_0\end{array}\right\}_A=\left\{\begin{array}{cc}0 & L.\dot{\theta}.\cos\theta\\ 0 & 0\\ \dot{\theta} & 0\end{array}\right\}_{A,(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)}$$

recherchons le point I appartenant au plan z=0 tel que $\overrightarrow{V_{I\in R1/R0}}=\vec{0}$ de coordonnées $\overrightarrow{OI}=x_I.\vec{x}_0+y_I.\vec{y}_0$

$$\overrightarrow{V_{A\in R_1/R_0}}=\overrightarrow{V_{I\in R_1/R_0}}+\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}}\wedge\overrightarrow{AI}$$

$$\left|\begin{array}{c}L.\dot{\theta}.\cos\theta\\ 0\\ 0\end{array}\right._{R0}=\left|\begin{array}{c}0\\ 0\\ 0\end{array}\right._{R0}+\left|\begin{array}{c}x_I-L.\sin\theta\\ y_I\\ 0\end{array}\right._{R0}\wedge\left|\begin{array}{c}0\\ 0\\ \dot{\theta}\end{array}\right._{R0}\Leftrightarrow\begin{array}{l}x_I=L.\sin\theta\\ y_I=L.\cos\theta\\ z_I=0\end{array}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OI}=L.\sin\theta.\vec{x}_0+L.\cos\theta.\vec{y}_0}$$

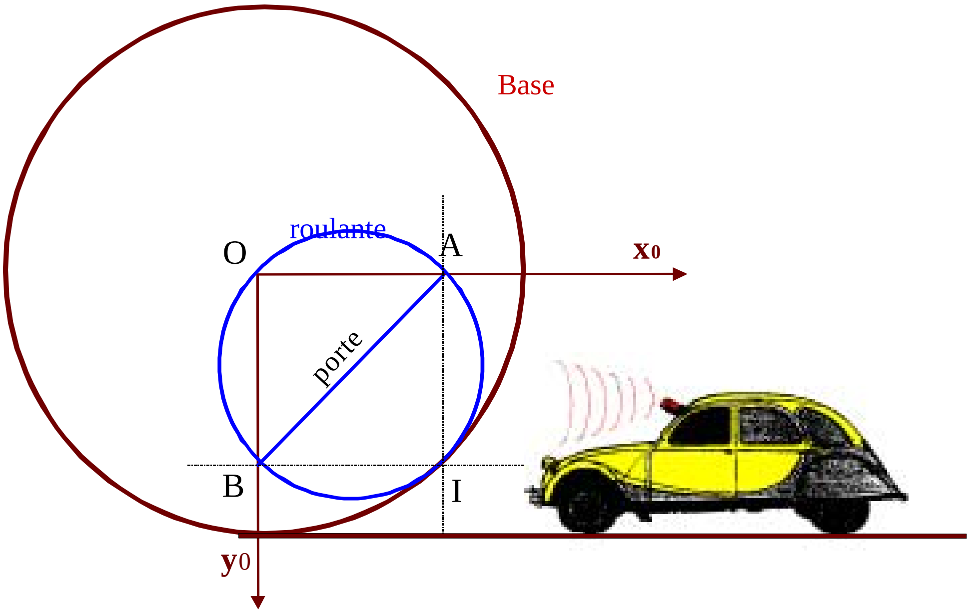
3.3.5..3 Equation cartésienne de la base du mouvement de R1 par rapport à R0.

$\overrightarrow{OI}=\left|\begin{array}{c}L.\sin\theta\\ L.\cos\theta\\ 0\end{array}\right._{R0}$ en éliminant θ, on obtient $x_I^{\,2}+y_I^{\,2}=L^2$, l'équation d'un cercle de centre O et de rayon L.

3.3.5..4 Equation cartésienne de la roulante du mouvement de R1 par rapport à R0.

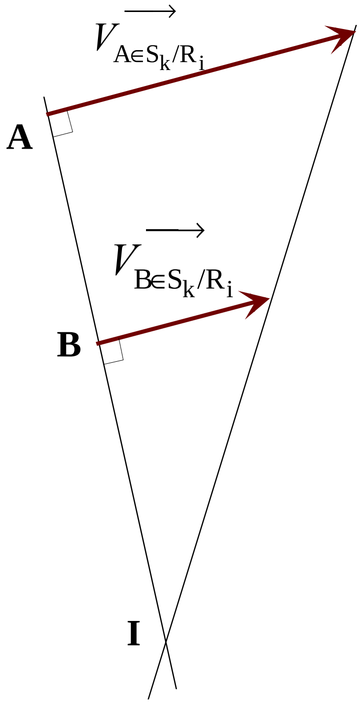
$\overrightarrow{AI}=\left|\begin{array}{c}L.\sin\theta.\cos\theta\\ L.(\cos\theta)^2\\ 0\end{array}\right._{R1}\left|\begin{array}{c}\frac{L}{2}.\sin2\theta.\cos\theta\\ \frac{L}{2}.\cos2\theta+\frac{L}{2}\\ 0\end{array}\right._{R1}$ en éliminant θ, on obtient $x^2+\left(y-\frac{L}{2}\right)^2=\left(\frac{L}{2}\right)^2$, l'équation d'un cercle de centre C, milieu du segment AB et de rayon L/2.

3.3.5..5 Tracer de la base et roulante du mouvement de R1 par rapport à R0.



La cinématique de la porte de garage par rapport au mur, se comporte comme un engrenage intérieur tel que les deux roues dentées roulent sans glisser l'une sur l'autre en I, Centre Instantané de Rotation du mouvement de R1 par rapport à R0.

3.4. Distribution des vecteurs-vitesse à partir du centre instantané de rotation



Le centre instantané de rotation I_{ki}= I distribue les vitesses des points liés au plan mobile (P_k) comme dans un mouvement de rotation. Considérons deux points A et B appartenant au plan (P_k) en mouvement par rapport au solide S_i. En tenant compte des propriétés du centre instantané de rotation, nous pouvons écrire :

- $\overrightarrow{V}_{A\in Sk/Ri}=\overrightarrow{V}_{I\in Sk/Ri}+\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{\Omega}_{Sk/Ri}=\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{\Omega}_{Sk/Ri}$ car $\overrightarrow{V}_{I\in Sk/Ri}=\vec{0}$

d'où : $\underbrace{\overrightarrow{V}_{A\in Sk/Ri}=\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{\Omega}_{Sk/Ri}}_{\overrightarrow{AI}\perp\overrightarrow{V}_{A\in Sk/Ri}}$

- $\overrightarrow{V}_{B\in Sk/Ri}=\overrightarrow{V}_{I\in Sk/Ri}+\overrightarrow{BI}\wedge\overrightarrow{\Omega}_{Sk/Ri}=\overrightarrow{BI}\wedge\overrightarrow{\Omega}_{Sk/Ri}$ car $\overrightarrow{V}_{I\in Sk/Ri}=\vec{0}$

d'où : $\underbrace{\overrightarrow{V}_{B\in Sk/Ri}=\overrightarrow{BI}\wedge\overrightarrow{\Omega}_{Sk/Ri}}_{\overrightarrow{BI}\perp\overrightarrow{V}_{B\in Sk/Ri}}$

$$\overrightarrow{O_iI_{ki}}=\overrightarrow{O_iO_k}+\overrightarrow{O_kI_{ki}}=\overrightarrow{O_iO_k}+\frac{\overrightarrow{\Omega}_{Sk/Ri}\wedge\overrightarrow{V}_{O_k\in Sk/Ri}}{\overrightarrow{\Omega}_{Sk/Ri}^{\,2}}$$

Donc le vecteur-vitesse du point B (respectivement du point A) appartenant au solide S_k, par rapport au solide S_i, est perpendiculaire $\overrightarrow{I_{ki}A}$ (respectivement à $\overrightarrow{I_{ki}B}$).

Comme $\overrightarrow{\Omega}_{k/i}$ est perpendiculaire au plan (P_k) nous avons :

$$\left\|\overrightarrow{V}_{A\in Sk/Ri}\right\|=\left\|\overrightarrow{\Omega}_{Sk/Ri}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{I_{ki}A}\right\|$$

$$\left\|\overrightarrow{V}_{B\in Sk/Ri}\right\|=\left\|\overrightarrow{\Omega}_{Sk/Ri}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{I_{ki}B}\right\|$$

A partir des deux relations ci-dessus nous obtenons :

$$\frac{\left\|\overrightarrow{V}_{A\in Sk/Ri}\right\|}{\left\|\overrightarrow{V}_{B\in Sk/Ri}\right\|}=\frac{\left\|\overrightarrow{I_{ki}A}\right\|}{\left\|\overrightarrow{I_{ki}B}\right\|}$$

Nous pouvons conclure que le centre instantané de rotation distribue bien les vitesses comme dans un mouvement de rotation.

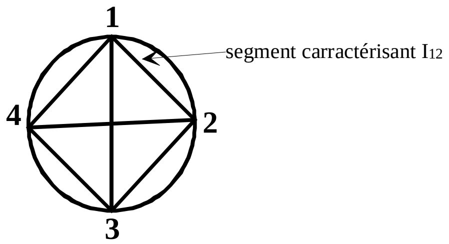
3.5. Détermination de tous les centres instantanés de rotation

Soit un système formé de N plans appartenant à N solides différents glissant les uns sur les autres. Le nombre n de centres instantanés de rotation est égal au nombre de combinaisons que l'on peut faire en prenant deux plans parmi les N plans du système. Mathématiquement ce nombre n est donné par la relation :

$$n=C_N^2=\frac{N(N-1)}{2}=\frac{N!}{(N-2)!\,2!}$$

La recherche de tous les centres instantanés de rotation peut-être facilitée en utilisant :

- le cercle des centres instantanés de rotation avec N points correspondant à N solides (exemple : cas de 4 solides, n=6) :



- ou la table des centres instantanés de rotation (exemple : cas de 4 solides, n=6) :

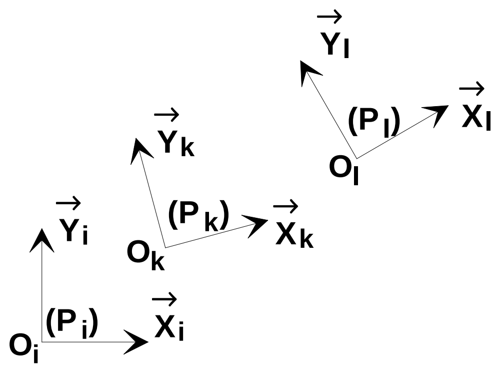
1	2	3	4
I_{12}	I_{23}	I_{34}	
I_{13}	I_{24}		
I_{14}			

Ainsi au fur et à mesure de la recherche, il faut barrer les segments sur le cercle ou les centres instantanés de rotation dans la table.

Pour déterminer tous les centres instantanés de rotation d'un système, le théorème des trois plans glissants est très utile.

3.6. Théorème des trois plans glissants (ou des trois plans mobiles ou des trois C.I.R.)

Supposons connus le mouvement du plan (P_k) par rapport au plan (P_i) et I_{ki} ainsi que le mouvement plan (P_l) par rapport au plan (P_k) et I_{lk}.



$\vec{Z_i}=\vec{Z_k}=\vec{Z_l}=\vec{Z}$

on pose :

$\vec{\Omega}_{l/i}=\omega_{l/i}\vec{Z}$

$\vec{\Omega}_{k/i}=\omega_{k/i}\vec{Z}$

$\vec{\Omega}_{l/k}=\omega_{l/k}\vec{Z}$

Quel que soit le point M, nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{V_{M\in Sk/Ri}} = \overrightarrow{V_{M\in Sk/Sl}} + \overrightarrow{V_{M\in Sl/Ri}} \text{ , d'où :}$$

$$\overrightarrow{V_{I_{li}\in Sl/Ri}} + \overrightarrow{\Omega_{Sl/Ri}}\wedge\overrightarrow{I_{li}M} = \overrightarrow{V_{I_{lk}\in Sl/Rk}} + \overrightarrow{\Omega_{Sl/Rk}}\wedge\overrightarrow{I_{lk}M} + \overrightarrow{V_{I_{ki}\in Sl/Rk}} + \overrightarrow{\Omega_{Sk/Ri}}\wedge\overrightarrow{I_{ki}M}$$

D'après les propriétés du centre instantané de rotation, nous obtenons :

$$\overrightarrow{\Omega_{Sl/Ri}}\wedge\overrightarrow{I_{li}M} = \overrightarrow{\Omega_{Sl/Rk}}\wedge\overrightarrow{I_{lk}M} + \overrightarrow{\Omega_{Sk/Ri}}\wedge\overrightarrow{I_{ki}M}$$

Donc : $\vec{Z}\wedge\omega_{l/i}\overrightarrow{I_{li}M} = \vec{Z}\wedge\omega_{l/k}\overrightarrow{I_{lk}M} + \vec{Z}\wedge\omega_{k/i}\overrightarrow{I_{ki}M}$

D'où : $\vec{Z}\wedge(\omega_{l/i}\overrightarrow{I_{li}M} - \omega_{l/k}\overrightarrow{I_{lk}M} - \omega_{k/i}\overrightarrow{I_{ki}M}) = \vec{0}$

Comme le module du vecteur unitaire $\vec{Z}$ n'est pas nul et que les deux vecteurs de ce produit vectoriel ne peuvent pas être parallèles puisque nous sommes dans un mouvement plan sur plan, nous obtenons donc :

$$\omega_{l/i}\overrightarrow{I_{li}M} - \omega_{l/k}\overrightarrow{I_{lk}M} - \omega_{k/i}\overrightarrow{I_{ki}M} = \vec{0}\,.$$

Cette expression étant vraie quel que soit M, elle l'est aussi en I_{li}. Nous obtenons donc :

$$\omega_{l/k}\overrightarrow{I_{lk}I_{li}} + \omega_{k/i}\overrightarrow{I_{ki}I_{li}} = \vec{0}$$

Cette relation caractérise le théorème des trois plans glissants. I_{li} est le barycentre des points I_{lk} et I_{ki} affectés des coefficients $\omega_{l/k}$ et $\omega_{k/i}$. I_{li} appartient donc à la droite $I_{lk}I_{ki}$. Nous pouvons donc en déduire que :

$$I_{li} \in I_{lk}I_{ki}\,.$$

Remarque :

Ce théorème n'est pas applicable si un des mouvements est une translation. En effet, si $\omega_{l/k} = 0$ par exemple, alors $\|\overrightarrow{I_{lk}I_{li}}\| = \infty$

4. MODÉLISATION PLANE DES MECANISMES

Dans un problème considéré comme plan, un solide S_k possède au maximum trois degrés de liberté par rapport à un repère de référence R_i.

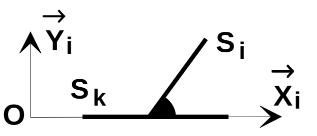
Si le plan d'étude est le plan (P_i) de normale $\vec{Z}_i = \vec{Z}_k = \vec{Z}$ alors le mouvement du solide S_k par rapport au solide S_i est décrit par le torseur cinématique :

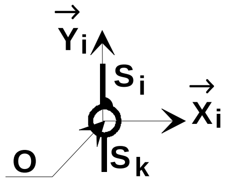
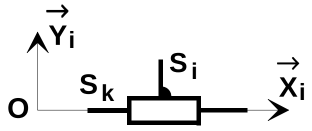
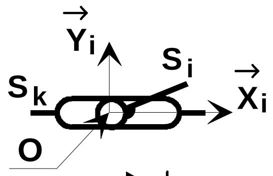
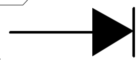
$$\left\{ T_c(S_k/S_i) \right\}_{O_k} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{k/i}} = \omega_{k/i}\vec{Z} \\ \overrightarrow{V_{O_k \in S_k/S_i}} = V_x\vec{X}_i + V_y\vec{Y}_i \end{array} \right\}_{O_k}$$

L'automoment de ce torseur est toujours nul ; instantanément les mouvements sont soit des translations, soit des rotations pures, mais jamais des mouvements hélicoïdaux complets.

4.1. Modèles des liaisons dites planes

Parmi les onze liaisons usuelles , quatre modèles de liaisons, correspondant à des formes particulières du torseur cinématique, peuvent être retenues :

Liaison	Torseur cinématique associé	Schématisation
Encastrement	$\left\{ T_c(S_k/S_i) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{k/i}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{M \in S_k/S_i}} = \vec{0} \end{array} \right\}_M \quad \forall M$	

Pivot ou Articulation	$\left\{T_c(S_k/S_i)\right\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{k/i}} = \omega_{k/i}\vec{Z} \\ \overrightarrow{V_{O\in S_k/S_i}} = \vec{0}\end{array}\right\}_O$	 $I_{ki} \equiv O$
Glissière	$\left\{T_c(S_k/S_i)\right\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{k/i}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{O\in S_k/S_i}} = V_x\vec{X}_i\end{array}\right\}_M$ $\forall$M	 **I_{ki} à l'infini suivant $\vec{Y}_i$**
Ponctuelle Plane	$\left\{T_c(S_k/S_i)\right\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{k/i}} = \omega_{k/i}\vec{Z} \\ \overrightarrow{V_{O\in S_k/S_i}} = V_x\vec{X}_i\end{array}\right\}_O$	 ou 

La liaison pivot, **uniquement dans le cadre des mécanismes plans**, est parfois appelée articulation.
En Cinématique plane :

- on ne schématise pas des modèles de liaison (on ne tient donc pas compte des couples de surfaces en contact),
- on représente les **mouvements relatifs entre deux pièces dans le plan d'étude.**