

Analyse cinématique d'un mécanisme

SOMMAIRE

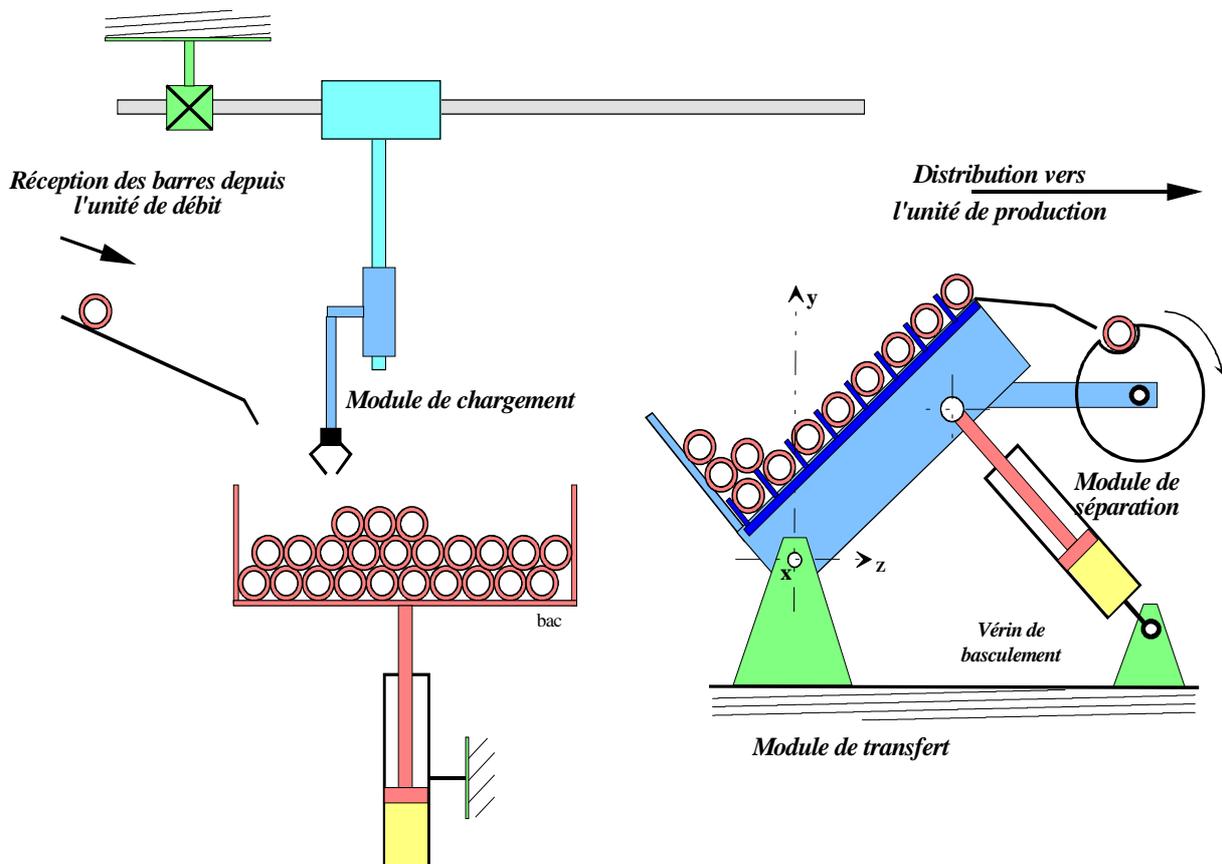
1. PRESENTATION DU SYSTEME SUPPORT : SYSTEME DE DISTRIBUTION AUTOMATIQUE DE BARRES : « DISTRIBAR ».....	2
1.1. ANALYSE FONCTIONNELLE	2
1.1.1. SADT A-0 de l'ensemble du système « DISTRIBAR »	3
1.1.2. 1-2. S.A.D.T. A0 du système « DISTRIBAR »	3
1.1.3. Présentation du MODULE DE CHARGEMENT	4
2. PRESENTATION DU SYSTEME MECANIQUE :POMPE A PISTONS AXIAUX A CYLINDREE AUTO REGLABLE	5
2.1. DESCRIPTION DU SYSTEME PAR UN DESSIN TECHNIQUE	5
2.1.1. Description et fonctionnement	5
2.1.1.1 Caractéristiques de la pompe PVB VICKERS	5
2.1.1.2 Dessin Technique de la pompe PVB VICKERS (DOCUMENT 1)	6
2.1.1.3 Nomenclature liées au document 1 (DOCUMENT 2)	7
3. A PARTIR D'UN DESSIN TECHNIQUE, COMMENT ELABORER LE SCHEMA CINEMATIQUE MINIMAL ?	8
3.1. RECHERCHER LES PIECES CINEMATIQUEMENT LIEES	8
3.2. TRACER DU GRAPHE DES LIAISONS OU DE STRUCTURE.....	9
3.2.1. Sous-ensembles de pièces cinématiquement liées : les sommets du graphe.....	9
3.2.1.1 Repères associés aux différents solides.....	9
3.2.1.2 Liaisons entre solides et paramètres géométriques	9
3.2.1.2.1 La liaison L01.....	9
3.2.1.2.2 La liaison L12.....	9
3.2.1.2.3 La liaison L23.....	10
3.2.1.2.4 La liaison L34.....	10
3.3. TABLEAU TRADUISANT VECTORIELLEMENT ET GEOMETRIQUEMENT LE GRAPHE DE STRUCTURE	10
3.4. TRACER DU SCHEMA CINEMATIQUE	11
3.5. TRACER DU SCHEMA CINEMATIQUE MINIMAL	11
4. ETUDE DES CHAINES SIMPLES FERMEES	12
4.1. ANALYSE CINEMATIQUE DES CHAINES FERMEES SIMPLES	12
4.1.1. Objectifs	12
4.1.2. Fermeture cinématique	12
4.1.3. Résolution	12
4.1.4. Degré de mobilité du mécanisme	12
4.1.5. Application : POMPE A PISTONS AXIAUX PVB VICKERS	13
4.2. ANALYSE GEOMETRIQUE DES CHAINES SIMPLES FERMEES	14
4.2.1. Objectif.....	14
4.2.2. Fermeture géométrique.....	15
4.2.3. Résolution	15
4.2.4. Fermeture géométrique appliquée au modèle de la pompe PVB VIKERS.....	15

1. PRESENTATION DU SYSTEME SUPPORT : SYSTEME DE DISTRIBUTION AUTOMATIQUE DE BARRES : « DISTRIBAR »

1.1. Analyse fonctionnelle

Le rôle de ce dispositif automatisé, est de stocker, séparer et distribuer en familles de pièces des barres ou des tubes entrant dans la fabrication de radiateurs de chauffage central. Ces barres ou tubes, de divers matériaux, sont de diamètre compris entre 10 mm et 60 mm et de longueur comprise entre 200 mm et 1200 mm.

Placé entre une unité de débit et une unité de production, ce système de distribution de barres comprend trois modules.



- un **MODULE DE CHARGEMENT** composé d'un bac tampon recevant les barres ou tubes de l'unité de débit et d'un manipulateur transférant les barres depuis le bac jusque sur le module de transfert.

- un **MODULE DE TRANSFERT** ayant pour rôle de transférer les barres jusqu'au module de séparation.

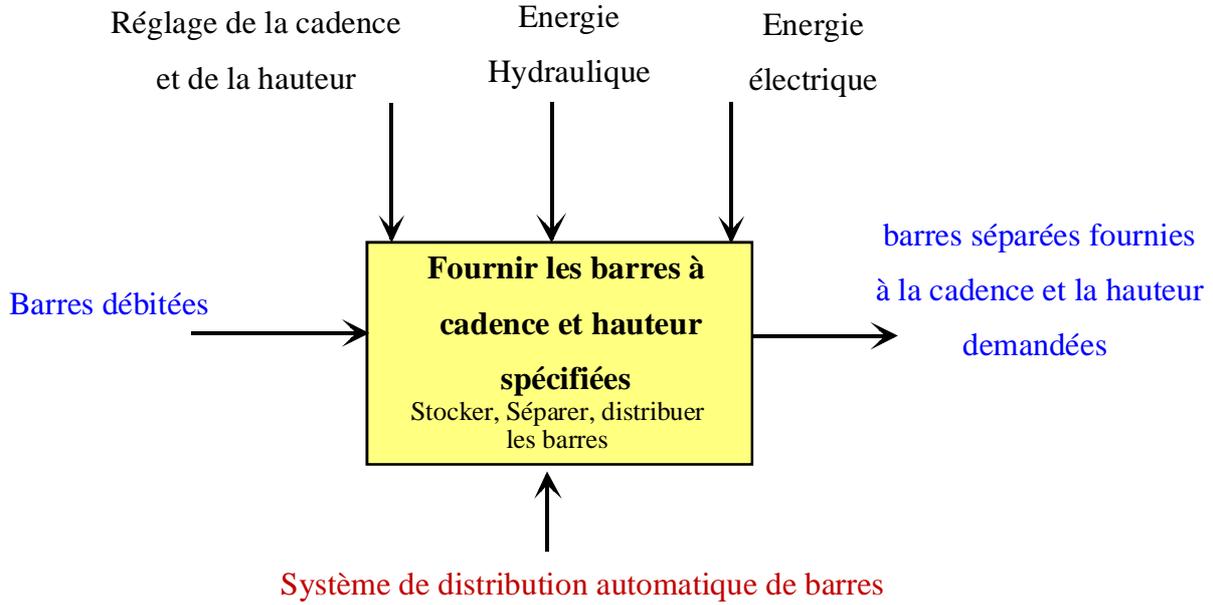
- un **MODULE DE SEPARATION** qui fournit les barres une à une au processus de production à l'aide d'un plateau à encoche, et ce, à la cadence de fonctionnement demandée.

Afin d'alimenter plusieurs unités de production situées à des hauteurs différentes, l'ensemble formé par le **MODULE DE TRANSFERT** et le **MODULE DE SEPARATION** peut basculer autour de l'axe X.

Cet ensemble est contrôlé par un automate programmé en logique séquentielle.

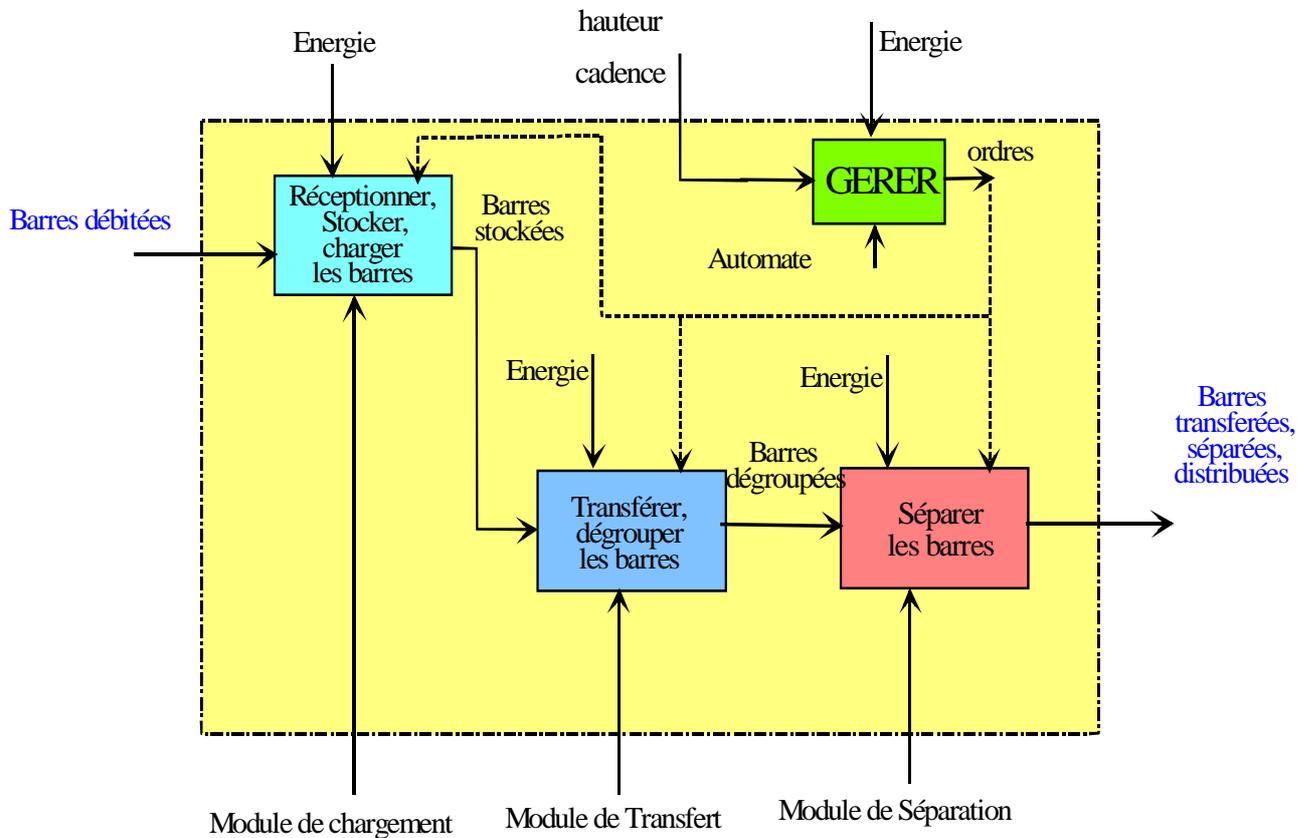
1.1.1. SADT A-0 de l'ensemble du système « DISTRIBAR ».

S.A.D.T A-0



1.1.2. 1-2. S.A.D.T. A0 du système « DISTRIBAR ».

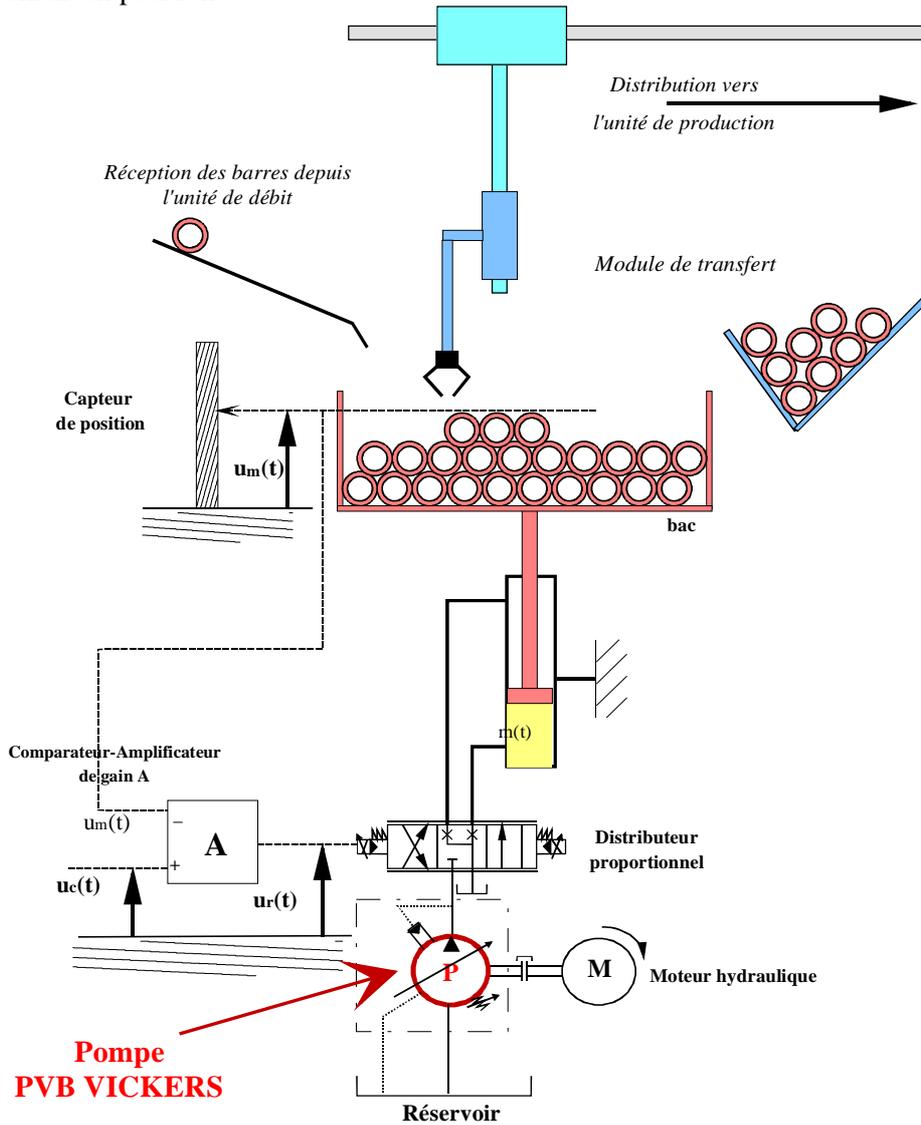
S.A.D.TA0



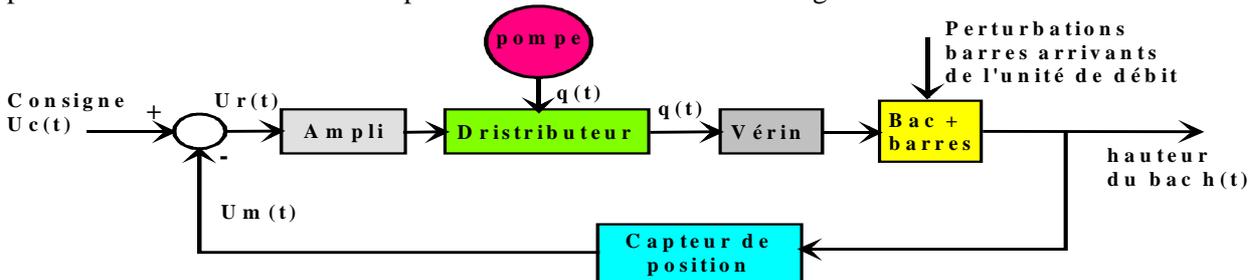
1.1.3. Présentation du MODULE DE CHARGEMENT

Il est composé d'un bac tampon recevant les barres ou tubes de l'unité de débit et d'un manipulateur transférant les barres depuis le bac jusque sur le module de transfert.

Les barres arrivent de l'unité de débit et sont consommées par l'unité de production de manière très irrégulière. De ce fait, le nombre de barres stockées dans le bac est très variable. Le manipulateur qui transporte les barres depuis le bac jusque sur le module de transfert ne pouvant saisir les barres situées dans le bac qu'à une altitude fixe y_0 , il faut s'assurer que quelque soit le degré de remplissage du bac, les barres situées sur le dessus soient constamment à cette hauteur y_0 . Cette fonction est assurée par un asservissement en position.



Une pompe PVB VIKERS Hydraulique à cylindrée auto variable est utilisée dans la chaîne fonctionnelle présentée ci-dessus par un dessin structural et ci-dessous par un schéma fonctionnel présentant l'asservissement de la position du bac du module de chargement.



2. PRESENTATION DU SYSTEME MECANIQUE : POMPE A PISTONS AXIAUX A CYLINDREE AUTO REGLABLE

2.1. Description du système par un dessin technique

2.1.1. Description et fonctionnement

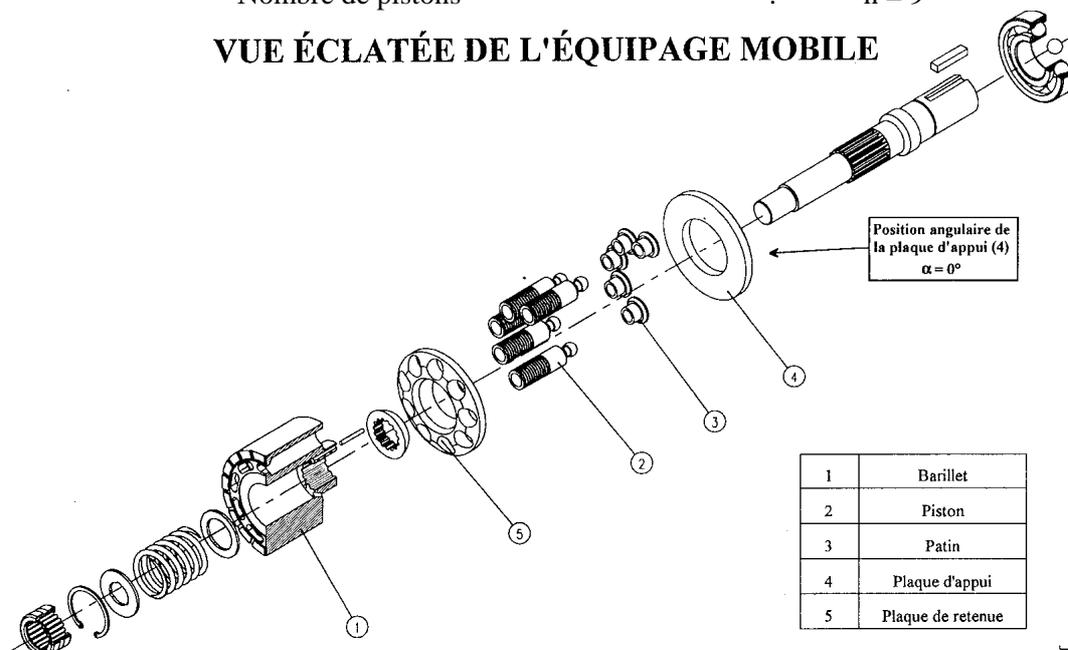
La pompe hydraulique, dont le plan d'ensemble (*document 1*) et la nomenclature (*document 2*) sont donnés ci dessous, est principalement constituée :

- d'un barillet **12-1** entraîné en rotation par l'arbre cannelé **7**, de neuf ensembles pistons-patins **12-2/12-3**, d'une plaque d'appui **12-4** fixe par rapport à l'étrier **10** dont l'inclinaison détermine la cylindrée de la pompe en provoquant le mouvement des pistons dans le barillet,
- d'un carter de distribution **2** qui permet la circulation du fluide grâce aux orifices d'admission et de refoulement,
- d'un ensemble compensateur **30** dont le tiroir **30-1** est soumis à l'effort du ressort de tarage **30-2** d'une part et à la pression de refoulement par le passage A d'autre part.
Au démarrage, l'étrier **10** est maintenu par le piston de retenue **25** en position cylindrée maximale.

2.1.1.1 Caractéristiques de la pompe PVB VICKERS

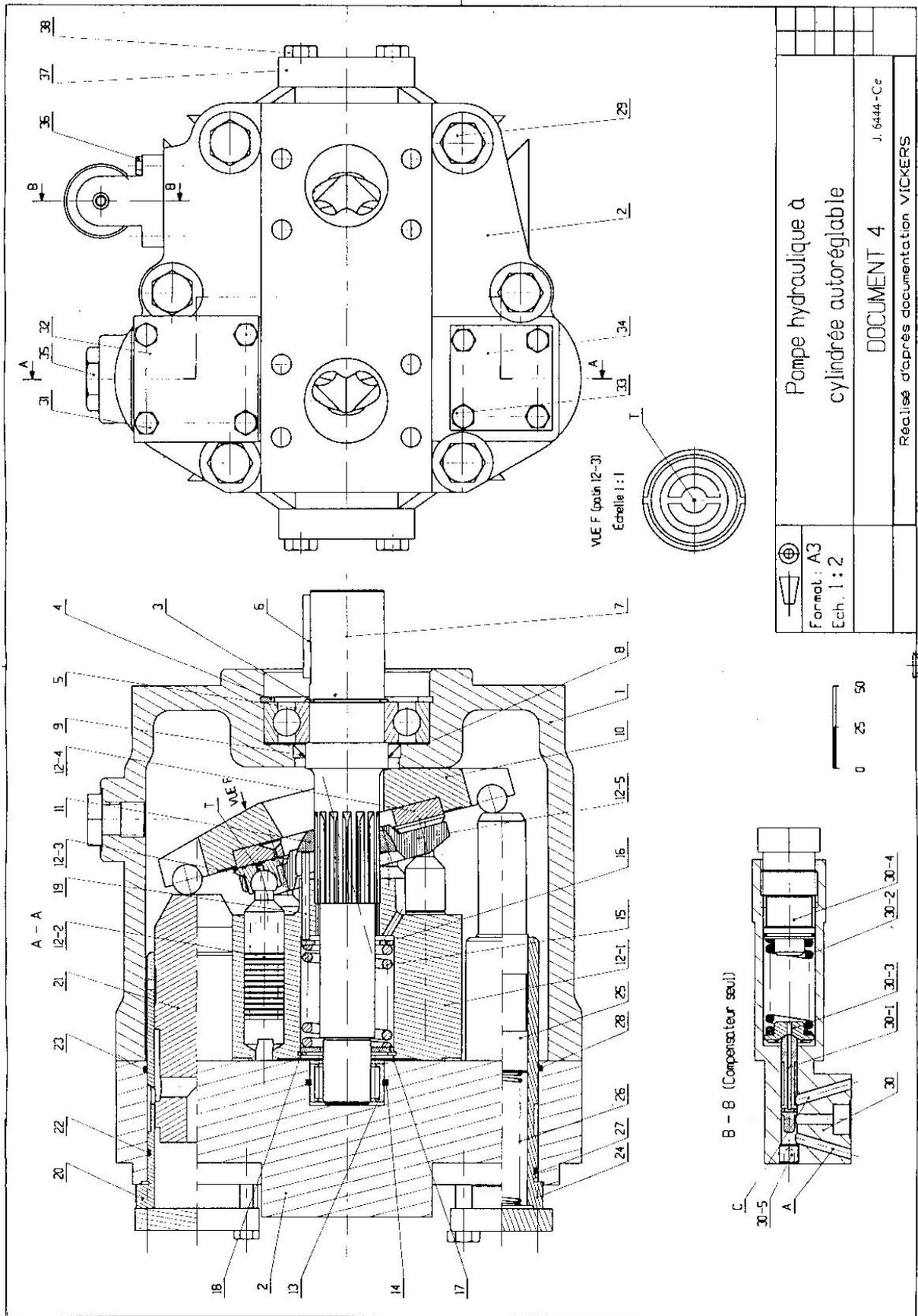
Puissance théorique	:	$P = 15 \text{ kW}$
Vitesse de rotation de l'arbre d'entrée	:	$N = 1800 \text{ tr.mn}^{-1}$
Pression de refoulement maximale	:	$p_R = 20 \text{ MPa}$
Cylindrée maximale	:	$V_T = 100 \text{ cm}^3.\text{tr}^{-1}$
Masse	:	$M = 96 \text{ kg}$
Angle maximal d'inclinaison de l'étrier	:	$\alpha_M = 15^\circ$
Nombre de pistons	:	$n = 9$

VUE ÉCLATÉE DE L'ÉQUIPAGE MOBILE



L'étude mécanique que l'on se propose de mener, concerne l'équipage mobile **12** dont l'éclaté, ci-dessus.

2.1.1.2 Dessin Technique de la pompe PVB VICKERS (DOCUMENT 1)



2.1.1.3 Nomenclature liées au document 1 (DOCUMENT 2)

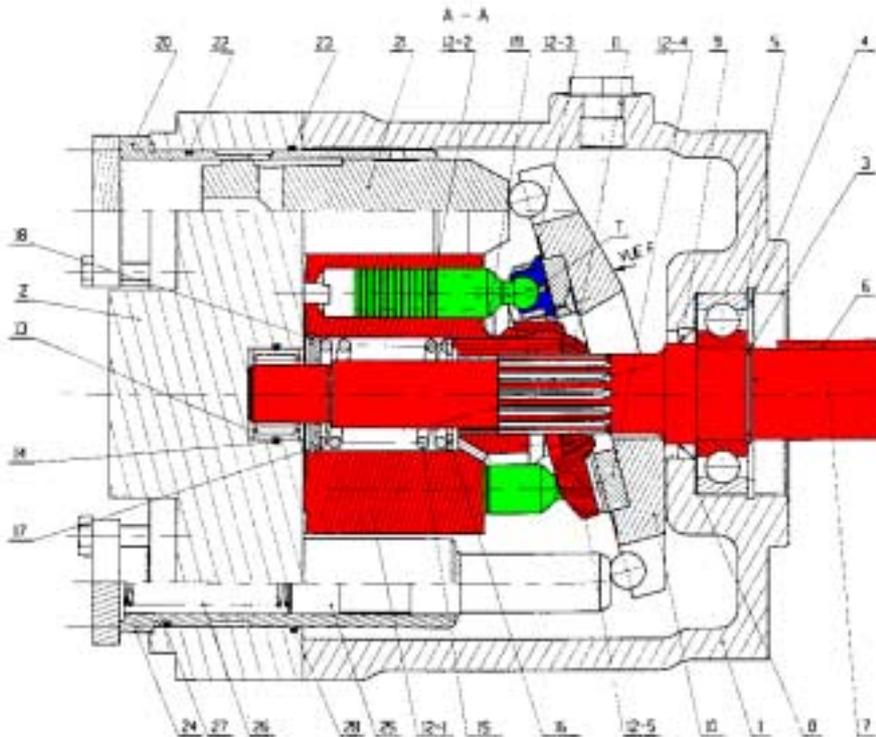
48	Vis H	4
47	Plaque	4
46	Joint torique	1
45	Joint torique	1
44	Ressort	1
43	Piston	1
42	Cylindre	1
41	Joint torique	1
40	Plaque	1
39	Vis H	4
38	Entretoise	1
37	Joint torique	1
36	Piston	1
35	Joint torique	1
34	Cylindre	1
33	Joint torique	1
32	Bouchon	5
31	Vis H	6
30	Compensateur	1
29	Vis C	1
28	Plaquette : Sens de rotation	2
27	Plaque d'identification	1
26	Vis C	1
25	Vis C	2
24	Plaque d'identification	14
23	Vis CHc	8
22	Plaque	2
21	Joint d'étanchéité	2
20	Axe	2
19	Roulement à aiguilles	2
18	Aiguille	2
17	Bouchon de vidange	1
16	Joint torique	1
15	Joint d'étanchéité	1
14	anneau élastique	1
13	Roulement à aiguilles	1
12	Ensemble mobile	1
11	Vis CHc	2
10	Etrier	1
9	Entretoise	1
8	Rondelle	1
7	Arbre	1
6	Clavette	1
5	Roulement à billes	1
4	Circlips	1
3	Circlips	1
2	Couvercle	1
1	Carter	1
N°	Désignation	Nb

3. A PARTIR D'UN DESSIN TECHNIQUE, COMMENT ELABORER LE SCHEMA CINEMATIQUE MINIMAL ?

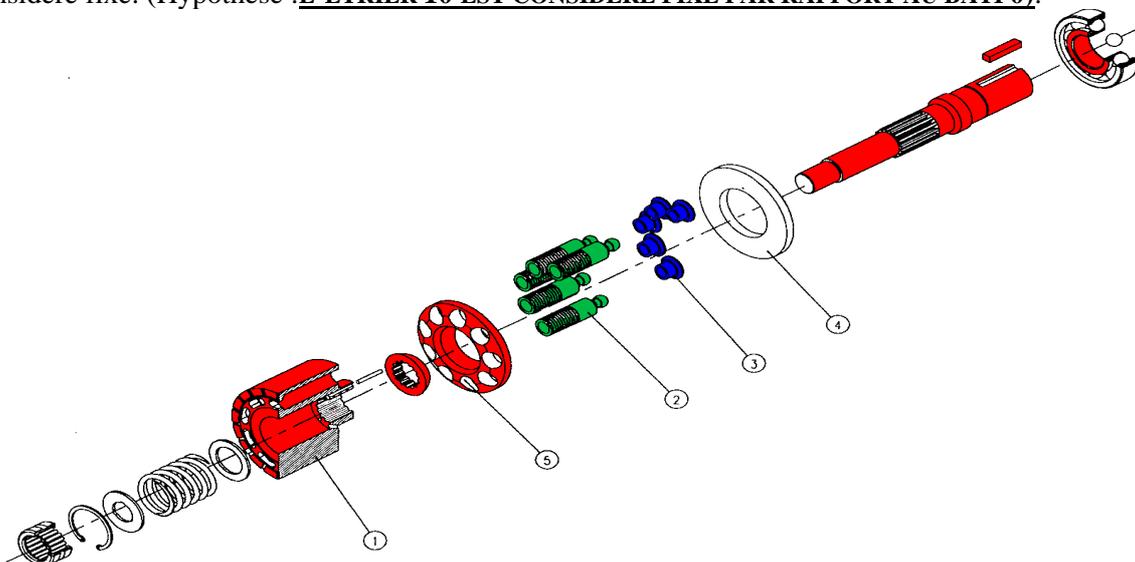
3.1. Rechercher les pièces cinématiquement liées

Dans un premier, il est nécessaire de rechercher les sous-ensembles de pièces cinématiquement liées pour les modéliser par des solides. Pour cela, colorier les pièces liées entre elles par une liaison complète : en liaison encastrement. Ce travail n'est pas facile, puisque le temps en cours pour assimiler la représentation normalisée est très insuffisant. C'est pourquoi, il est fortement conseillé pour les MPSI, pour les PCSI et PSI d'utiliser les heures de TP pour étudier les dessins techniques relatifs aux différents supports industriels des Laboratoires.

En se limitant à l'équipage mobile **12**, on obtient :



Le bâti, ici n'est pas colorié. De plus tout le système de réglage de la pente du plan de la pièce 10 est considéré fixe. (Hypothèse : **L'ETRIER 10 EST CONSIDERE FIXE PAR RAPPORT AU BATI 0**).

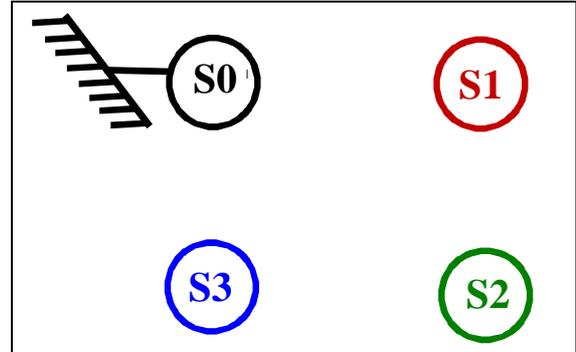


3.2. Tracer du graphe des liaisons ou de structure

Le but de cette représentation est de passer du réel au modèle vectoriel ou torseuriel. Notre savoir étant uniquement vectoriel (la cinématique est une théorie purement mathématique), cette traduction est donc primordiale.

3.2.1. Sous-ensembles de pièces cinématiquement liées : les sommets du graphe

- **S0** : Bâti
- **S1** : L'arbre d'entrée et le barillet 1
- **S2** : un piston 2
- **S3** : Un coussinet 3



3.2.1.1 Repères associés aux différents solides

Soient les repères : $\mathfrak{R}_i(A_{ij}; \vec{x}_i; \vec{y}_i; \vec{z}_i)$ où A_{ij} est le point caractéristique de la liaison L_{ij}

$R_i(\vec{x}_i; \vec{y}_i; \vec{z}_i)$ base orthonormée directe associée à la liaison L_{ij}

- * $\mathfrak{R}_0(A; \vec{x}_0; \vec{y}_0; \vec{z}_0)$ lié au bâti **0** A=A₁₀
- * $\mathfrak{R}_1(B; \vec{x}_1; \vec{y}_1; \vec{z}_1)$ lié au barillet **1** B=A₂₁
- * $\mathfrak{R}_2(C; \vec{x}_2; \vec{y}_2; \vec{z}_2)$ lié au piston **2** C=A₃₂
- * $\mathfrak{R}_3(D; \vec{x}_3; \vec{y}_3; \vec{z}_3)$ lié au patin **3** D=A₄₃
- * $\mathfrak{R}_4(E; \vec{x}_4; \vec{y}_4; \vec{z}_4)$ lié à la plaque d'appui **4** E=A₄₀

3.2.1.2 Liaisons entre solides et paramètres géométriques

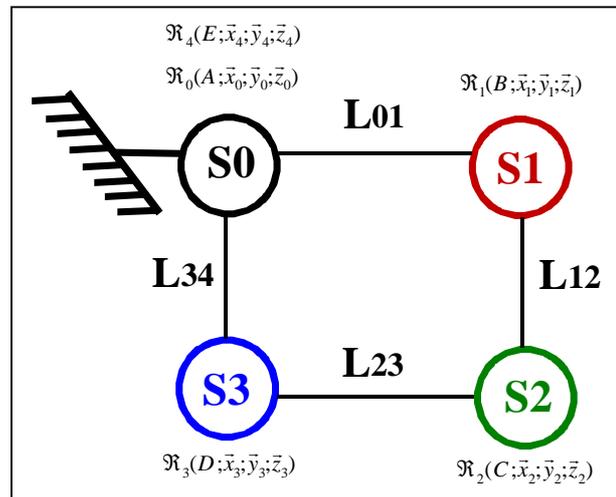
Sur le graphe des liaisons, à chaque contact entre les solides modélisant les sous-ensembles de pièces cinématiquement liées, on associe un arc.

3.2.1.2.1 La liaison L01.

Cette liaison est réalisée par un roulement rigide à billes (8) et un roulement à aiguilles (13), donc pas d'ambiguïté sur la liaison. L'axe de cette liaison est défini par le point A et de direction l'axe des roulements.

- **L₁₂** : liaison pivot d'axe (A, \vec{x}_{01})

$$\Theta_{01} = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$$



3.2.1.2.2 La liaison L12

Le contact entre le solide S1 et le solide S2 est un contact surfacique cylindrique. Deux possibilités, La liaison pivot ou la liaison Cylindre/cylindre. Par la pensée, en prenant dans chaque main le barillet (12-1) et un piston (12-2), on se rend compte que la translation du piston entre la barillet est possible dans la direction de l'axe du cylindre définissant la géométrie du piston.

- **L₀₁** : liaison cylindre/cylindre d'axe (B, \vec{x}_{12})

$$\Theta_{12}=(\vec{y}_1, \vec{y}_2)=(\vec{z}_1, \vec{z}_2)$$

3.2.1.2.3 La liaison L23

Le contact entre le solide S2 et le solide S3 est un contact surfacique sphérique. Deux possibilités, La liaison sphérique ou la liaison sphérique à doigt. Pas d'ambiguïté sur la liaison, la sphérique à doigt est souvent réalisée par un cardan.

- **L₂₃ : liaison sphérique (rotule) en C**

Le point C est le centre géométrique de la sphère de contact.

3.2.1.2.4 La liaison L34

Le contact entre le solide S3 et le solide S0 est un contact surfacique plan. Pas d'ambiguïté sur la liaison, c'est une liaison plane (plan/plan)

Il faut définir la direction de sa normale \vec{x}_3

- **L₃₄ : liaison plane de normale \vec{x}_{34}**

$$\Theta_{34}=(\vec{y}_3, \vec{y}_4)=(\vec{z}_3, \vec{z}_4) \text{ et } \alpha=\alpha_M=(\vec{z}_0, \vec{z}_4)$$

3.3. Tableau traduisant vectoriellement et géométriquement le graphe de structure

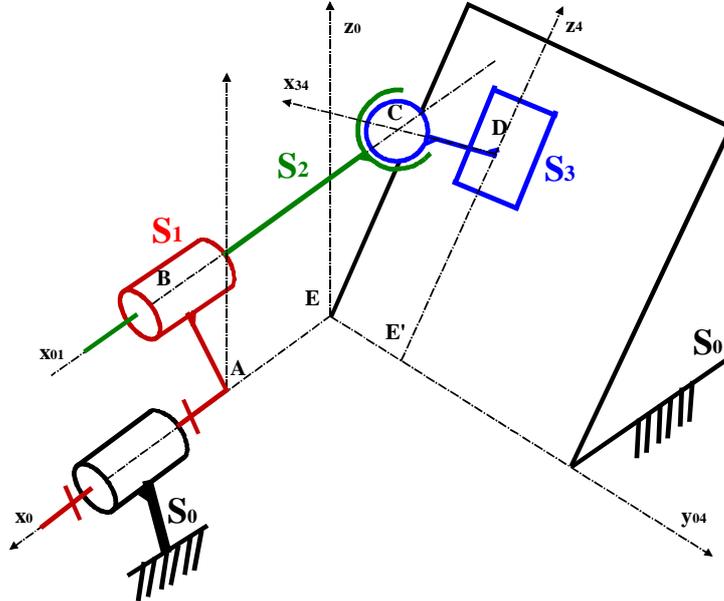
Nom de la liaison et ses caractéristiques	Le paramétrage	Le torseur cinématique associé (et ou torseur inter effort)	Le schéma cinématique
liaison pivot d'axe (A, \vec{x}_{01})	$\Theta_{01}=(\vec{y}_0, \vec{y}_1)=(\vec{z}_0, \vec{z}_1)$	$\{V(S_1/S_0)\}_A = \begin{Bmatrix} \alpha_{10} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A, R_{01}}$	
liaison cylindre/cylindre d'axe (B, \vec{x}_{12})	$\Theta_{12}=(\vec{y}_1, \vec{y}_2)=(\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ $\vec{CB}=\lambda(t)\vec{x}_1$	$\{V(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{21} & u_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B, R_{012}}$	
liaison sphérique (rotule) en C	Trois angles	$\{V(S_3/S_2)\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{32} & 0 \\ \beta_{32} & 0 \\ \gamma_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{C, -}$	
liaison plane de normale \vec{x}_{34}	$\vec{DE}=-v\vec{y}_0-w\vec{z}_4$ $\Theta_{34}=(\vec{y}_3, \vec{y}_4)=(\vec{z}_3, \vec{z}_4)$ $\alpha=\alpha_M=(\vec{z}_4, \vec{z}_0)$	$\{V(S_3/S_0)\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{30} & 0 \\ 0 & v_{30} \\ 0 & w_{30} \end{Bmatrix}_{-, R_{34}}$	

La géométrie nécessaire pour faire l'étude cinématique est donnée par les vecteurs définissant la position relative des points caractéristiques des liaisons du graphe de structure.

$$\vec{AB}=R\vec{y}_1, \vec{DC}=h\vec{x}_{34} \text{ et } \vec{AE}=-d\vec{x}_{01}$$

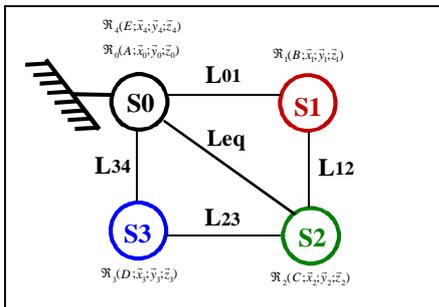
3.4. Tracer du schéma cinématique

Il suffit maintenant de tracer sur un dessin en perspective isométrique (ou plane) les liaisons correctement positionnées et orientées. Il vient donc :



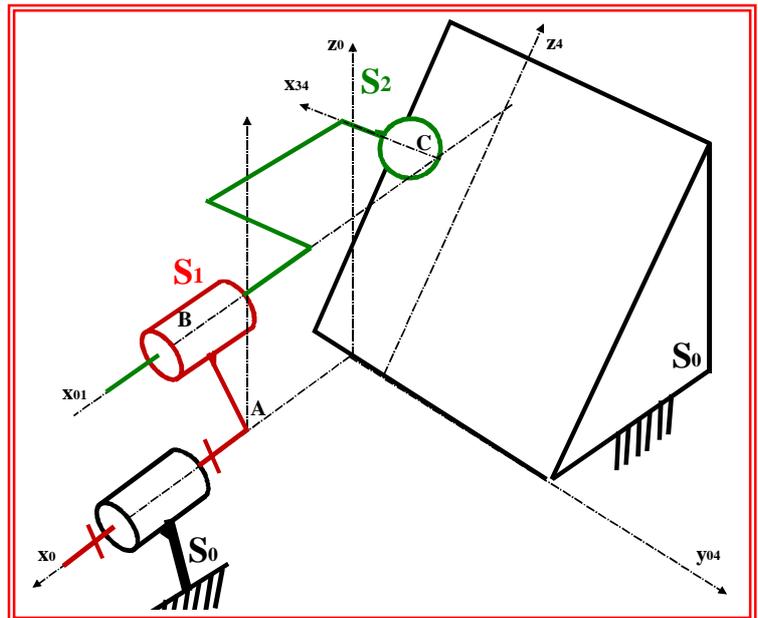
3.5. Tracer du schéma cinématique minimal

Le but est de réduire le plus possible le nombre de sommet du graphe (sans modifier la géométrie) en recherchant les liaisons équivalentes.



La liaison équivalente entre S_2 et S_0 est une liaison ponctuelle en C de normale \vec{x}_{34} . Voir le cours sur les liaisons et les assemblage en série des liaisons usuelles.

D'où le schéma cinématique minimal de la pompe PVB VICKERS



4. ETUDE DES CHAINES SIMPLES FERMEES

4.1. Analyse cinématique des chaînes fermées simples

4.1.1. Objectifs

- Etablir les relations liant les paramètres cinématiques inconnus du mécanisme et les paramètres cinématiques donnés.
- Déterminer la mobilité du mécanisme.

4.1.2. Fermeture cinématique

Soit $\{V(S_i/S_j)\}_A$ le torseur cinématique, au point A, du solide S_i dans son mouvement par rapport au solide S_j .
La fermeture cinématique s'écrit alors:

$$\sum_{i=1}^n \{V(S_i/S_{i-1})\}_A = \{V(S_n/S_0)\}_A$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{\Omega}(S_i / S_{i-1}) = \vec{\Omega}(S_n / S_0)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{V}(A, S_i / S_{i-1}) = \vec{V}(A, S_n / S_0)$$

4.1.3. Résolution

- **Projection de (2) et (3) sur** $R(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

On obtient un système linéaire homogène de 6 équations scalaires à N_c paramètres cinématiques inconnus.

- **Rang cinématique du système r_c**

Appelons r_c le nombre d'équations indépendantes du système (E). On a: $r_c \leq 6$

Le système s'écrit alors : $(A)(X) = (B)$
où

(X) désigne un vecteur unicolonne contenant r_c inconnues cinématiques.

(B) désigne un vecteur unicolonne contenant $(N_c - r_c)$ paramètres cinématiques donnés
désigne une matrice (r_c, r_c) des coefficients cinématiques.

4.1.4. Degré de mobilité du mécanisme

- **Définition**

On appelle mobilité d'un mécanisme, notée m , le nombre de paramètres cinématiques à fixer pour déterminer les r_c inconnues cinématiques restantes. $m = N_c - r_c$

- **Signification de m**

$m=0$	$(B)=(0)$	$(X)=(0)$
$m=1$	$(B)=\lambda(K)$	$(X)=\lambda(A^{-1})(K)$

$m > 1$	$(B) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (K_i)$	$(X) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (A)^{-1} (K_i)$
$m=0$	le mécanisme est bloqué	
$m=1$	le mécanisme est à transformation de mouvement	
$m=m_u+m_i$	mécanisme est à composition de mouvement et/ou à mobilités internes.	

m_u désigne le nombre d'*inconnues cinématiques indépendantes* associées aux liaisons de sortie du mécanisme.

m_i désigne le nombre d'*inconnues cinématiques indépendantes non nulles* du mécanisme quand on immobilise les liaisons d'entrée et les liaisons de sortie du mécanisme.

4.1.5. Application : POMPE A PISTONS AXIAUX PVB VICKERS

• *Torseurs cinématiques associés aux liaisons*

$$\left. \begin{aligned} \{v(S_1/S_0)\}_A &= \begin{Bmatrix} \alpha_{10} 0 \\ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \end{Bmatrix}_{A, R_{01}} \\ \{v(S_2/S_1)\} &= \begin{Bmatrix} \alpha_{21} u_{21} \\ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \end{Bmatrix}_{BouC, R_{012}} \\ \{v(S_3/S_2)\} &= \begin{Bmatrix} \alpha_{32} 0 \\ \beta_{32} 0 \\ \gamma_{32} 0 \end{Bmatrix}_{C, -} \\ \{v(S_3/S_0)\} &= \begin{Bmatrix} \alpha_{30} \ 0 \\ 0 \ v_{30} \\ 0 \ w_{30} \end{Bmatrix}_{-, R_{34}} \end{aligned}$$

Lorsque les torseurs sont écrits en colonne comme ci-contre, il est facile de voir que pour sommet ces torseurs, il faut ici, au moindre travail, écrire tout ces torseur en C et le projeter dans la base R0.

• *Fermeture cinématique de la chaîne 0-1-2-3-0*

De la composition des mouvement, il vient :

$$\{v(S_1/S_0)\}_C + \{v(S_2/S_1)\}_C + \{v(S_3/S_2)\}_C - \{v(S_3/S_0)\}_C = \{0\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{\Omega}(S_1/S_0) + \vec{\Omega}(S_2/S_1) + \vec{\Omega}(S_3/S_2) - \vec{\Omega}(S_3/S_0) &= \vec{0} \end{aligned} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{V}(C, S_1/S_0) + \vec{V}(C, S_2/S_1) + \vec{V}(C, S_3/S_2) - \vec{V}(C, S_3/S_0) &= \vec{0} \end{aligned} \right. \quad (4)$$

du calcul de $\vec{V}(C, S_1/S_0) = \vec{V}(A, S_1/S_0) + \vec{CA} \wedge \vec{\Omega}(S_1/S_0)$, il vient ;

$$\vec{V}(C, S_1/S_0) = [\lambda \vec{x}_1 - R \vec{y}_1] \wedge \alpha_{10} \vec{x}_1 = R \alpha_{10} \vec{z}_1$$

• *Projections de (3) et (4) sur R_0*

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \alpha_{10} + \alpha_{21} + \alpha_{32} - \alpha_{30} \cos \alpha = 0 \\
 (2) \quad & \beta_{32} = 0 \\
 (3) \quad & \gamma_{32} + \alpha_{30} \sin \alpha = 0 \\
 (4) \quad & u_{21} + w_{30} \sin \alpha = 0 \\
 (5) \quad & R\alpha_{10} \sin \theta_{01} + v_{30} = 0 \\
 (6) \quad & R\alpha_{10} \cos \theta_{01} - w_{30} \cos \alpha = 0
 \end{aligned}$$

• *Bilan*

Inconnues cinématiques: $\alpha_{32}; \beta_{32}; \gamma_{32}; u_{21}; v_{30}; w_{30}; \alpha_{10}; \alpha_{21}; \alpha_{30}$

$$N_c = 9$$

Rang cinématique:

$$r_c = 6$$

Mobilité du mécanisme

$$m = N_c - r_c = 3$$

$$(m_u=1; m_i=2)$$

Paramètres cinématiques donnés: $\alpha_{10}; \alpha_{21}; \alpha_{30}$

Paramètres cinématiques inconnus: $\alpha_{32}; \beta_{32}; \gamma_{32}; u_{21}; v_{30}; w_{30}$

• *Système linéaire associé*

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}}_{(A)} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{32} \\ \beta_{32} \\ \gamma_{32} \\ u_{21} \\ v_{30} \\ w_{30} \end{bmatrix}}_{(X)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha_{10} - \alpha_{21} + \alpha_{30} \cos \alpha \\ 0 \\ -\alpha_{30} \sin \alpha \\ 0 \\ R\alpha_{10} \sin \theta_{01} \\ R\alpha_{10} \cos \theta_{01} \end{bmatrix}}_{(B)}$$

d'où

α_{32}	$=$	$-\alpha_{10} - \alpha_{21} + \alpha_{30} \cos \alpha$
β_{32}	$=$	0
γ_{32}	$=$	$-\alpha_{30} \sin \alpha$
u_{21}	$=$	$-R\alpha_{10} \operatorname{tg} \alpha \cos \theta_{01}$
v_{30}	$=$	$-R\alpha_{10} \sin \theta_{01}$
w_{30}	$=$	$-R\alpha_{10} \frac{\cos \theta_{01}}{\cos \alpha}$

si $\det A = -\cos \alpha \neq 0$

4.2. Analyse géométrique des chaînes simples fermées

4.2.1. Objectif

- Etablir les relations liant les paramètres géométriques inconnus du mécanisme et les paramètres géométriques donnés.

- Déterminer la relation entrée-sortie.

4.2.2. Fermeture géométrique

La fermeture géométrique traduit, grâce à la relation de Chasles, la position relative des liaisons dans le mécanisme. Si on appelle A_i le centre géométrique de la liaison $L_{i/i-1}, i \in [1, n]$, la fermeture géométrique s'écrit, par exemple:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n A_i A_{i+1} = A_1 A_{n+1}$$

4.2.3. Résolution

- **Projection de (1) sur** $R(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

On obtient un système (E) linéaire homogène de 3 équations scalaires à N paramètres géométriques inconnus

- **Rang du système géométrique r**

Appelons r le nombre d'équations indépendantes du système (E)

On a: $r \leq 3$

Le système s'écrit alors:

$$(A)(X) = (B)$$

où

(X) désigne un vecteur unicolonne contenant r inconnues géométriques.

(B) désigne un vecteur unicolonne contenant (N-r) paramètres géométriques donnés

(A) désigne une matrice (r,r) des coefficients géométriques.

- **Calcul de (X): Relation entrée sortie**

$$(X) = (A^{-1})(B) \text{ si } \det A \neq 0$$

4.2.4. Fermeture géométrique appliquée au modèle de la pompe PVB VIKERS

Pour écrire la fermeture géométrique, on utilise le graphe des liaisons en traduisant la fermeture géométrique du graphe.

- **L₀₁ : liaison pivot d'axe** (A, \vec{x}_{01})
- **L₁₂ : liaison cylindre/cylindre d'axe** (B, \vec{x}_{12})
- **L₂₃ : liaison sphérique (rotule) en C**
- **L₃₄ : liaison plane de normale** \vec{x}_{34}

$$\text{Il vient donc : } \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$$

Cette équation doit être décomposée en utilisant CHASLES tel que chaque vecteur de la somme s'écrit de la forme : $\vec{A_i B_i} = a_i \vec{u}$ où \vec{u} est un vecteur égal à un vecteur unitaire \vec{x}_i, \vec{y}_i ou \vec{z}_i composant les bases définies dans le paramétrage.

D'où

$$\begin{cases} \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EA} = \vec{0} \\ R\vec{y}_1 - \lambda\vec{x}_0 - h\vec{x}_3 - v\vec{y}_{04} - w\vec{z}_4 + d\vec{x}_0 = \vec{0} \end{cases} \quad (1)$$

- **Résolution : projection de (1) sur $R(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$**

$$\begin{cases} -\lambda - h\cos\alpha + w\sin\alpha + d = 0 \\ R\cos\theta_{01} - v = 0 \\ R\sin\theta_{01} - h\sin\alpha - w\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

Remarque : pour trouver rapidement λ en fonction de θ_{01} ($-\lambda - h\cos\alpha + w\sin\alpha + d = 0$), il faut projeter l'équation $R\vec{y}_1 - \lambda\vec{x}_0 - h\vec{x}_3 - v\vec{y}_0 - w\vec{z}_4 + d\vec{x}_0 = \vec{0}$ sur \vec{x}_4 pour éliminer v et w .

- **Bilan**

paramètres géométriques: $\lambda; h; v; w; d; \alpha; \theta_{01}$ $N=7$

rang géométrique: $r=3$

paramètres géométriques donnés: $h; d; \alpha; \theta_{01}$

paramètres géométriques inconnus ; $v; \lambda$

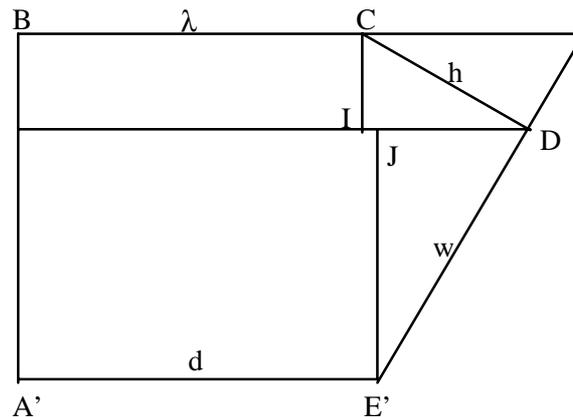
Enfinement, il vient (si $\cos\alpha \neq 0$)

$$w = \frac{R \sin \theta_{01}}{\cos \alpha} + h \tan \alpha$$

$$v = R \cos \theta_{01}$$

$$\lambda = d - h \cos \alpha + h \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + R \sin \theta_{01} \tan \alpha$$

- **Signification géométrique**



$$BA' = CI + JE'$$

d'où

$$R \sin \theta_{01} = h \tan \alpha + w \cos \alpha$$

or

$$BC = A'E' - IJ = A'E' - (ID - JD) \text{ soit}$$

donc

$$\lambda = d - h \cos \alpha + w \sin \alpha$$

enfinement

$$\lambda = d - h \cos \alpha + h \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + R \sin \theta_{01} \tan \alpha$$

Remarque : Vitesse instantanée du piston 2 par rapport au barillet (1) :

$$\vec{V}(C,2/1) = \left(\frac{dBC}{dt} \right)_{R_1} = \left(\frac{d(-\lambda \vec{x}_1)}{dt} \right)_{R_1} \text{ soit } \vec{V}(C,2/1) = -\frac{d\lambda}{dt} = -R \omega_{10} \tan \alpha \cos \theta_{01}$$