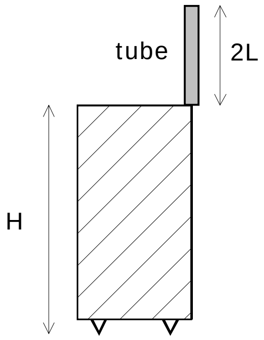
-EXERCICE 17.3-

• ENONCE :

« Chute d'un tube du haut d'une armoire »



On considère un tube de longueur 2L=40cm, posé en équilibre instable sur le haut d'une armoire (H=1,80m / sol).
A t=0, on pousse légèrement le tube qui amorce une rotation autour de l'arête de l'armoire; on suppose qu'il y a assez de frottements pour que le glissement n'apparaisse pas.
Dans cette phase du mouvement, la position du tube est repérée par l'angle qu'il fait avec la verticale.
La masse du tube est notée m, et son moment d'inertie par rapport à un axe passant par l'arête de l'armoire est notée J.

Pour les calculs, on pourra prendre : $J = \dfrac{4mL^2}{3}$, et $g = 9{,}81 m.s^{-2}$.

1) Déterminer l'angle θ_0 à partir duquel le tube cesse d'être en contact avec l'armoire ; en déduire la vitesse de rotation ω_0 acquise par le tube à cet instant, ainsi que la vitesse verticale v_{z_0} du centre d'inertie G au même instant.

   (on suppose que le mouvement se fait dans un plan perpendiculaire à l'arête de l'armoire, et que le tube est homogène)

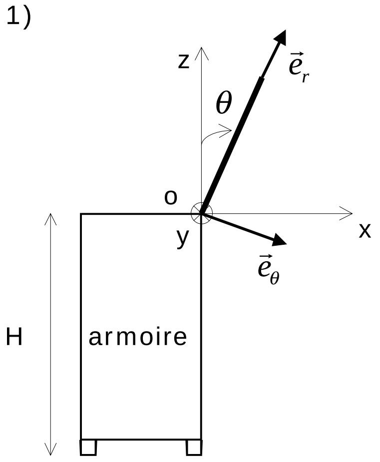
2) Déterminer l'angle θ_1 dont a tourné le tube sur lui-même lorsque G touche le sol.

3) En pratique, il y a de fortes chances pour qu'une extrémité du tube vienne buter contre le sol avant que G ne touche ce dernier : de quelle hauteur devrait tomber le tube pour que θ_1 soit égal à $3\pi/2$? (dans ce dernier cas, le tube touche le sol en position horizontale).

• CORRIGE :

« Chute d'un tube du haut d'une armoire »

1)



Le référentiel sera le sol et le système le tube; les forces appliquées sont le poids et la réaction de l'arête de l'armoire sur le tube: cette réaction se décompose en une composante normale N et une composante tangentielle T.
Le contact entre le tube et l'armoire cesse lorsque N=0.

• Le poids $m\vec{g}$ s'applique en G= milieu du tube, et la réaction s'écrit : $\vec{R} = N\vec{e}_r + T\vec{e}_\theta$; en projection sur $\vec{e}_r$, le TRC donne :

$-m\omega^2 L = -mg\cos\theta + N$; il faut une autre équation pour éliminer ω $\Rightarrow$ utilisons le TEC, qui est une intégrale première du mouvement et donne directement accès à ω^2. En fait, puisqu'il n'y a pas de glissement, T ne « travaille » pas (N, quant à elle, ne travaille jamais) $\Rightarrow$ la seule force à prendre en compte est le poids, qui dérive d'une énergie potentielle $\Rightarrow$ nous appliquerons la conservation de l'énergie mécanique ; il vient alors :

$$0 + mgL = \frac{1}{2}J\omega^2 + mgL\cos\theta$$ (en prenant l'origine des énergies potentielles en O)

Rq : l'énergie cinétique a l'expression ci-dessus car la rotation se fait bien autour d'un axe fixe (l'arête de l'armoire), ceci en l'absence de glissement.

• Après élimination de ω^2 et en se plaçant en θ_0 (où $N = 0$), on a :

$$mgL = \frac{1}{2}J \times \frac{g\cos\theta_0}{L} + mgL\cos\theta_0 \Rightarrow \boxed{\cos\theta_0 = \frac{1}{1+\dfrac{J}{2mL^2}} = \frac{3}{5}} \Rightarrow \boxed{\theta_0 = 53°}$$

• Par ailleurs : $\omega_0^2 = \dfrac{g}{L}\cos\theta_0 \Rightarrow \boxed{\omega_0 = 5{,}42\ rad.s^{-1}}$

et : $\boxed{v_{z_0} = -L\omega_0\sin\theta_0 = -0{,}867\ m.s^{-1}}$ (le mouvement de G étant circulaire, $\vec{v}_G$ est orthoradiale)

2) • Dans la deuxième phase du mouvement, le tube est en chute libre (mis à part les frottements avec l'air, que nous négligerons...) et la seule force agissante est le poids, dont le moment en G est nul ; le TMC indique que $\omega = cste \Rightarrow \boxed{\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t}$ (1) (t compté à partir de l'instant où le contact tube-armoire cesse).

 Christian MAIRE

• Le mouvement de G est alors uniformément accéléré ; en tenant compte de $v_{z_0} = -L\omega_0 \sin\theta_0$ et de $z_G(0) = L\cos\theta_0$, il vient pour l'ordonnée du centre d'inertie G :

$$\boxed{z_G(t) = -\frac{1}{2}gt^2 - L\omega_0 \sin\theta_0 \times t + L\cos\theta_0} \quad (2)$$

• Pour $z_G = -1{,}80\ m$, t_1 est solution de : $\frac{9{,}81}{2}t^2 + 0{,}867t - 1{,}92 \Rightarrow \boxed{t_1 = 0{,}543\ \text{s}}$ ($t_1 \succ 0$) ;

alors : $\boxed{\theta_1 = \theta_0 + \omega_0 t_1 \simeq 222°}$ ($\omega_0 \simeq 5{,}42\ rad.s^{-1}$, à convertir en $°.s^{-1}$)

3) Cette fois, avec $\theta_2 = 270°$, on trouve t_2 (grâce à la relation (1)) : $\boxed{t_2 = 0{,}699\ s}$

On reporte cette valeur dans (2) pour obtenir : $\boxed{H = -z_G(t_2) \simeq 2{,}88\ m}$

Rq : on peut facilement réaliser cette expérience, qui confirme assez bien les valeurs numériques trouvées dans les cas où le tube tombe « à plat » ; on constatera la grande importance de **l'absence de glissement** pendant <u>toute</u> la rotation autour de l'arête de l'armoire (avec du glissement, ω_0 est plus faible et les angles de rotation également).