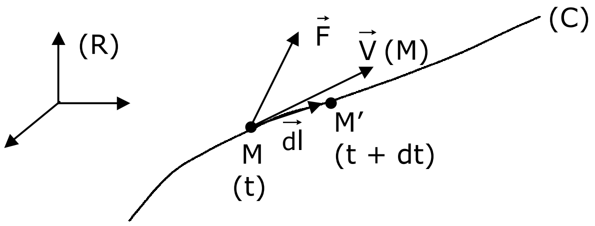
ASPECT ENERGETIQUE

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

****

****

I. Travail et puissance d'une force.



Si M est soumis à la force $\vec{F}$ et se déplace dans (R), cette force travaille.

I.1 - Le travail élémentaire de $\vec{F}$ de M à M' (pendant dt) est :

$$\boxed{\delta W = \vec{F}.\vec{dl} = \vec{F}.\vec{V}\,dt}$$

I.2 - Le travail de la force $\vec{F}$ de M_1 à M_2 est alors :

$$\boxed{W_1^2 = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.\vec{dl}} \qquad \text{(W en Joules)}$$

Rem. :

- En général, <u>le travail d'une force dépend du « chemin suivi »</u> pour aller de M_1 à M_2. Pour une force de frottement, il paraît évident que |W| augmentera avec la longueur du trajet.
- <u>W dépend bien sûr du référentiel d'étude</u>. On omettra de préciser ce référentiel, s'il n'y a pas d'ambiguïté.

I.3 - La puissance P de la force $\vec{F}$ (dans (R)) est :

$$\boxed{P = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F}.\vec{V}} \qquad \text{(P en watts)}$$

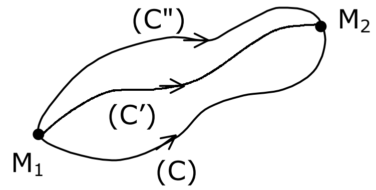
Pour un système de force $\vec{F_i}$ s'appliquant en des points M_i de vitesses $\vec{V_i}$, on aura évidemment :

$$P = \sum_i \vec{F_i}.\vec{V_i}$$

II. Cas d'une force dérivant d'une énergie potentielle.

Par définition :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,E_p$$

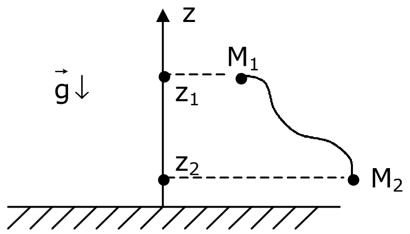


Donc : $\boxed{\begin{array}{l} \delta W = -\,dE_p \\ W_1^2 = E_p(M_1) - E_p(M_2) \end{array}}$, $\forall$ (C)

Dans ce cas, W_1^2 ne dépend donc pas du chemin suivi, mais que du « point de départ M_1 » et du « point d'arrivée » M_2.

Exemples

- Poids d'un corps : si $\vec{g} = -g\,\vec{z}$, g = cste

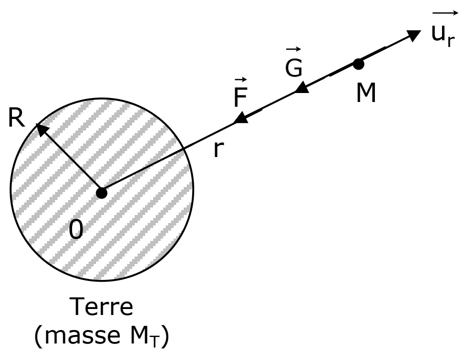


$$\overrightarrow{mg} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(mgz + \text{cste})$$

Donc : $\boxed{E_p = mgz + \text{cste}}$

Et : $\boxed{W_1^2 = E_{p_1} - E_{p_2} = mg\,(z_1 - z_2)}$ (Travail moteur si $z_1 > z_2$, résistant si $z_1 < z_2$)

- Force gravitationnelle (terrestre)



Pour r ≥ R :

$$\vec{G} = -g\,\frac{M_T}{r^2}\,\overrightarrow{u_r}$$

$$= -\overrightarrow{\text{grad}}\left(-\frac{gM_T}{r}\right)$$

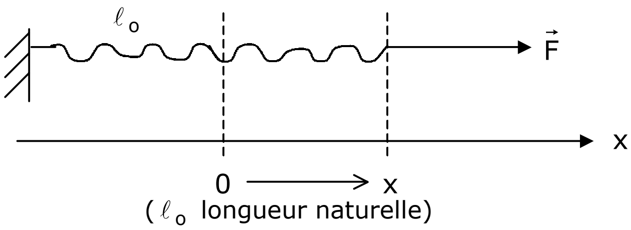
Donc $\boxed{V = -\frac{gM_T}{r} + \text{cste}}$ *(Potentiel de gravitation)*

Et $\vec{F} = m\vec{G} = -g\,\frac{mM_T}{r^2}\,\overrightarrow{u_r}$

$$= - \overrightarrow{grad}\left(-\frac{gmM_T}{r}\right)$$

Donc $$\boxed{E_p = mV = -\frac{gmM_T}{r} + cste}$$

- <u>Tension d'un ressort</u>



$$\vec{F} = - kx\vec{x}$$ (k cste de raideur)

$$= - \overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$$

Donc $$\boxed{E_p = \frac{1}{2}kx^2 + cste}$$ *(énergie potentielle élastique)*

III. Théorème de l'énergie cinétique (TEC) en référentiel galiléen.

En partant de la RFD appliquée à M dans (R) galiléen

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$$, on tire :

$$(\Sigma\vec{F}).\vec{v} = m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{v}\right)$$

On pose $$\boxed{E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\vec{p}.\vec{v} = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}}$$, énergie cinétique du point M.

Alors : $$\frac{dE_C}{dt} = m\vec{v}.\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Ainsi : $$\boxed{\frac{dE_C}{dt} = P(\Sigma\vec{F})}$$ *(Théorème de la puissance cinétique : TPC)*

Ou encore : $$dE_C = (\Sigma\vec{F}).\vec{v}\,dt$$

Soit : $$\boxed{\begin{array}{l} dE_C = \delta W(\Sigma\vec{F}) \\ \Delta E_C = W_1^2(\Sigma\vec{F}) \end{array}}$$ (TEC sous forme différentielle et sous forme intégrale)

IV. Théorème de l'énergie mécanique (TEM) en référentiel galiléen.

Le TEM est une forme strictement équivalente du TEC.

En effet, parmi les forces s'exerçant sur M, certaines sont conservatives, d'autres non.

$$\Sigma\vec{F} = \underbrace{\Sigma\overrightarrow{F_C}}_{\text{Forces Conservatives}} + \underbrace{\Sigma\overrightarrow{F_{NC}}}_{\text{Forces non conservatives}}$$

Donc : $\delta W(\Sigma\vec{F}) = \delta W_C + \delta W_{NC}$

Mais : $\delta W_C = - dE_p$, si E_p est l'énergie potentielle <u>totale</u> dont dérivent les forces conservatives.

On pose alors $\boxed{E_m = E_c + E_p}$, énergie mécanique du point matériel.

La TEC s'écrit donc aussi :

$$\boxed{\begin{array}{l} dE_m = \delta W_{NC} \\ \Delta E_m = W_{NC} \end{array}} \quad \text{(TEM)}$$

En pratique, les forces non conservatives sont les forces de <u>liaison</u>. Elles ne peuvent être que <u>dissipatives</u> : $\underline{W_{NC} \leq 0}$

Donc $\underline{\Delta E_m \leq 0}$

<u>1^{er} cas : $W_{NC} = 0$</u>

Il n'y a pas de forces non conservatives

ou

Il y a des forces non conservatives, mais elles ne travaillent pas.

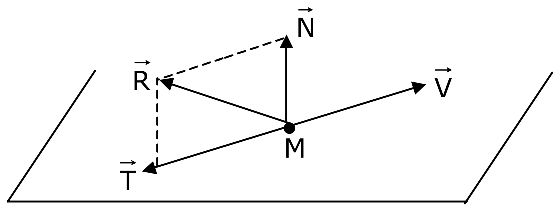
Alors : <u>E_m = cste : le système est conservatif</u>

<u>Ex</u>. : - Point matériel dans le champ de pesanteur ou de gravitation terrestre (en négligeant tout frottement fluide).

- Pendule simple : $\vec{T}$ est non conservative, mais perpendiculaire au déplacement : $W(\vec{T}) = 0$.
- Point mobile sur un support sans frottement : $\vec{R} = \vec{N}$ est perpendiculaire à $\vec{V}$: $W(\vec{N}) = 0$.

<u>2^e cas</u> : $\underline{W_{NC} < 0}$

$\underline{\Delta E_m < 0}$: $E_m\downarrow$, système <u>dissipatif</u>.



Dans le référentiel lié au support :

$$W(\vec{R}) = \vec{R}\,.\,\vec{V}\,dt = \vec{T}\,.\,\vec{V}\,dt$$

Soit, d'après les lois de Coulomb :

$$\boxed{W(\vec{R}) = -\,f\,N\,V\,dt < 0}$$

V. *Equilibre et stabilité par une méthode énergétique.*

Soit un système <u>conservatif</u> <u>à un degré de liberté</u> α :

$$E_m = \underbrace{K\,\dot{\alpha}^2}_{E_c\ (K\,>\,0)} + E_p(\alpha) = \text{cste} \quad (1)$$

- A l'équilibre : $F = -\dfrac{dE_p}{d\alpha} = 0$

Donc les positions <u>d'équilibre</u> sont les <u>extrema</u> de $E_p(\alpha)$: $\left(\dfrac{dE_p}{d\alpha}\right)_{\alpha 0} = 0$

- Pour discuter de la stabilité, on pose, comme pour la méthode dynamique :

$$\varepsilon = \alpha - \alpha_0 \quad , \qquad \text{avec } |\varepsilon| << \alpha_0$$

Alors, on développe $E_p(\alpha)$ au <u>2^e ordre</u> au voisinage de α_0 :

$$E_p(\alpha) \approx E_p(\alpha_0) + (\alpha - \alpha_0)\,\underbrace{E'_p(\alpha_0)}_{0} + \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{2\,!}\,E''_p(\alpha_0)$$

L'équation (1) s'écrit alors :

$$K\,\dot{\alpha}^2 + (\alpha - \alpha_0)^2\,E_p''(\alpha_0) = \text{cste}$$

Soit : $$\boxed{\dot{\varepsilon}^2 + \left(\frac{E_p''(\alpha_0)}{2\,K}\right)\varepsilon^2 = \text{cste}}$$

<u>1er cas</u> : <u>$E_p''(\alpha_0) < 0$</u> : on pose $\dfrac{E_p''(\alpha_0)}{2\,K} = -\,\omega^2$

On a alors : $\quad \dot{\varepsilon}^2 - \omega^2\,\varepsilon^2 = \text{cste} \;\Leftrightarrow\; \ddot{\varepsilon} - \omega^2\,\varepsilon = 0$

et la position d'équilibre est <u>instable</u>.

<u>2^e cas</u> : <u>$E_p''(\alpha_0) > 0$</u> : on pose $\dfrac{E_p''(\alpha_0)}{2\,K} = \omega^2$

Et alors : $\quad \dot{\varepsilon}^2 + \omega^2\,\varepsilon^2 = \text{cste} \;\Leftrightarrow\; \ddot{\varepsilon} + \omega^2\,\varepsilon = 0$

La position d'équilibre est <u>stable</u>, avec des oscillations harmoniques à la pulsation ω autour de cette position.

Conclusion

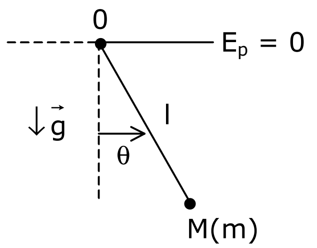
$$\text{Equilibre} \;\Rightarrow\; E_p'(\alpha_0) = 0 \quad (\text{extremum de } E_p)$$

$E_p''(\alpha_0) > 0$ (<u>minimum de E_p</u>) : <u>stable</u>

$E_p''(\alpha_0) < 0$ (<u>maximum de E_p</u>) : <u>instable</u>

(Les positions d'équilibre stables correspondent aux « puits de potentiel »).

<u>*Exemple*</u> : reprenons le pendule simple



$$\begin{cases} E_c = \dfrac{1}{2} m \,(l\,\dot{\theta})^2 \\ E_p = -\,mgl \cos\theta \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} ml^2\, \dot{\theta}^2 + (-\,mgl\cos\theta) = \text{cste}$$

$$\begin{cases} E_p'(\theta) = mgl \sin\theta = 0 \;\Leftrightarrow\; \theta = 0 \text{ ou } \theta = \Pi \\ E_p''(\theta) = mgl\cos\theta \end{cases}$$

- Pour $\theta = \Pi$: $E_p''(\Pi) = -\,mgl < 0$: $\theta = \Pi$ est instable
- Pour $\theta = 0$: $E_p''(0) = mgl > 0$: $\theta = 0$ est stable

Au voisinage de $\theta = 0$:

$$E_p(\theta) \approx E_p(0) + \frac{\theta^2}{2\,!} E_p''(0)$$

Ainsi :
$$\underbrace{\frac{1}{2}ml^2}_{K}\dot{\theta}^2 + mgl\frac{\theta^2}{2} = cste$$

Ou encore :
$$\dot{\theta}^2 + \omega^2\theta^2 = cste \quad , \quad si\ \omega^2 = \frac{g}{l}$$

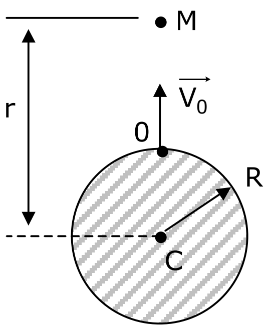
Et on retrouve bien l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation ω.

VI. Exemples d'utilisation.

Remarques préliminaires :

- TEC, TPC, TEM sont des formes <u>équivalentes</u> de la RFD.
- Il est, en général, préférable d'utiliser le TEC ou le TEM sous forme <u>intégrale</u>. En effet, cette forme contient l'information des <u>conditions initiales</u>. Par dérivation, on perd cette information, et on doit retrouver l'équation obtenue par application de la RFD.
- Pour un système à un degré de liberté (θ) conservatif, la méthode énergétique est la plus élégante, et la plus utile (discussion de la nature d'un mouvement, calcul de la période d'un mouvement oscillant…).
  Sous la forme <u>E_m = cste</u>, elle se lit comme une équation différentielle du 1^er^ ordre en θ, appelée « <u>intégrale 1^ère^ de l'énergie</u> ».

VI.1. Vitesse de libération.



Terre

On lance un engin du sol avec une vitesse $\overrightarrow{V_0}$, évaluée dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen.
On cherche la vitesse minimale pour échapper à l'attraction terrestre, en négligeant tout frottement atmosphérique. Il y a alors conservation de l'énergie du point M :

$$\underbrace{\frac{1}{2}m V_0^2 + \left(-\frac{g M_T m}{R}\right)}_{E_{sol}} = \underbrace{\frac{1}{2}m V^2 + \left(-\frac{g M_T m}{r}\right)}_{E_{(M)}}$$

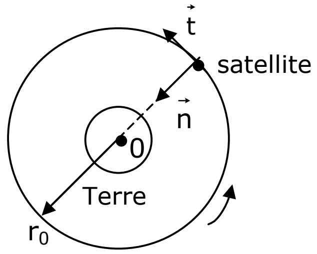
Pour $r \to \infty$:
$$\frac{1}{2}V_0^2 - \frac{g M_T}{R} = \frac{1}{2}V^2(\infty)$$

L'engin sera libéré si $V(\infty)$ existe.

Il faut donc réaliser :
$$\boxed{V_0 \geq \sqrt{\frac{2 g M_T}{R}} = V_{libération}}$$

A.N. : $\left.\begin{array}{l} g = 6{,}67\ 10^{-11}\ \text{SI} \\ M_T \approx 6\ 10^{24}\ \text{kg} \\ R \approx 6400\ \text{km} \end{array}\right\} \Rightarrow V_{\text{libération}} \approx 11{,}2\ \text{kms}^{-1}$

VI.2. Mouvement circulaire d'un satellite terrestre.



Dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen :

$$E_m\ (\text{satellite}) = \text{cste}$$

Or : $E_p = -\dfrac{g\,M_T M_S}{r_0} = \text{cste}$

Donc : $E_c = E_m - E_p = \text{cste}$: le mouvement du satellite est <u>uniforme</u> (ce que l'on peut retrouver en appliquant la RFD projetée sur $\vec{t}$). De plus :

$$M_S \frac{v_0^2}{r_0} = \frac{g\,M_S M_T}{r_0^2} \quad \text{(RFD en projection sur } \vec{n}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{g\,M_T}{r_0}} \quad \left(= \frac{V_{\text{libération}}}{\sqrt{2}} \right)$$

Alors : $E_c = \dfrac{1}{2} M_S v_0^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{g\,M_S M_T}{r_0} = -\dfrac{1}{2} E_p$

On a donc la propriété :

$$\boxed{E_m = -E_c = -\frac{g\,M_T M_S}{2\,r_0} = \frac{E_p}{2}}$$