

Analyse de la variance et de la régression. Plans d'expérience

par **Jacques POIRIER**

Ingénieur de l'École Centrale de Paris, Docteur-Ingénieur

Conseiller du Directeur des Réacteurs Nucléaires au Commissariat à l'Énergie Atomique

Chargé de mission auprès des Secrétaires Perpétuels de l'Académie des Sciences

Professeur associé au Conservatoire National des Arts et Métiers

1. Les hypothèses de l'analyse de la variance.....	R 260 - 2
2. Analyse de la variance à simple entrée	— 2
2.1 Relevé des observations	— 2
2.2 Notion de variation - Définition des variations utilisées dans l'analyse de la variance.....	— 3
2.3 Principe de l'interprétation	— 3
2.4 Calculs	— 4
2.5 Conclusion.....	— 4
3. Calculs pratiques de l'analyse de la variance à simple entrée	— 4
4. Analyse de la variance à double entrée.....	— 6
4.1 Relevé des observations	— 6
4.2 Variations utilisées.....	— 7
4.3 Calculs	— 7
4.4 Conclusions.....	— 7
4.5 Exemples.....	— 8
5. Remarques sur les modèles mathématiques et l'espérance mathématique des quotients.....	— 10
5.1 Cas où le choix des niveaux des facteurs contrôlés est systématique.....	— 10
5.2 Cas où le choix des niveaux des facteurs contrôlés est aléatoire	— 10
5.3 Construction de l'intervalle de confiance	— 11
5.4 Optimisation d'un plan d'expérience dans le cas d'une étude à un seul facteur contrôlé	— 11
6. Carré latin et analyse de la variance emboîtée	— 12
6.1 Carré latin	— 12
6.2 Analyse de la variance emboîtée	— 13
6.3 Exemple d'analyse de la variance emboîtée	— 16
7. Analyse de la régression.....	— 17
7.1 Relevé des observations	— 17
7.2 Hypothèse de la régression linéaire.....	— 17
7.3 Régression linéaire.....	— 18
7.4 Détermination des intervalles de confiance	— 21

L'ingénieur doit très souvent répondre à une question d'importance pratique considérable, qui est : « **est-ce que tel ou tel facteur influence le résultat de mesure ?** » Plus précisément, de telles questions peuvent être : « Est-ce que telle impureté affecte les caractéristiques mécaniques de tel matériau ? » ou bien : « Est-ce que tous les opérateurs conduisant tel gros appareil en travail posté aboutissent effectivement au même résultat, à la même qualité ? » ou bien : « Est-ce que tel paramètre, qu'on a de bonnes raisons physiques d'estimer important, influence réellement les résultats de mesure ? »

L'outil privilégié pour effectuer ce genre d'étude est **l'analyse de la variance**.

Nous examinerons successivement l'analyse de la **variance à simple entrée** (§ 2 et 3), où l'on cherche à déterminer l'influence d'un seul facteur, puis l'analyse de la **variance à double entrée** (§ 4 et 5 : deux facteurs, ayant éventuellement une interaction entre eux) et le cas particulier de l'analyse de la **variance emboîtée** (§ 6).

L'influence d'un facteur X sur un résultat de mesure Y ayant été mise en évidence, il est souvent utile de chercher à préciser cette liaison entre deux variables : la méthode de **régression** (§ 7) a pour objet la recherche d'une fonction représentant cette liaison.

Cet article fait suite aux articles [R 240] **Observation statistique**, [R 250] **Estimateur et tests d'hypothèses**, auxquels il est fait référence dans le cours du texte ; les tables numériques se trouvent dans l'article [R 270] **Tables statistiques**.

1. Les hypothèses de l'analyse de la variance

Les facteurs dont on cherche s'ils ont (ou non) une influence significative sur les résultats de mesure sont appelés **facteurs contrôlés**. L'étude de leur action se fait à partir d'une expérience composée d'un ensemble de mesures ; les mesures sont caractérisées par des valeurs définies (niveaux) de ces facteurs.

La technique d'analyse de la variance suppose que les résultats de mesures soient distribués selon une même **loi de Gauss** quelle que soit la valeur du facteur étudié susceptible d'avoir une influence sur les résultats de mesure. Cette condition, mathématique, rebute souvent ceux qui pourraient avoir recours à ce type d'analyse. C'est pourquoi il apparaît nécessaire de réfléchir à la signification physique de cette condition mathématique.

Prenons un **exemple** simple qui est la mesure de la limite d'élasticité d'un acier AFNOR XC 18S. Cela signifie principalement que la teneur en carbone est comprise entre 0,15 et 0,20 % et qu'il est « soudable » dans des conditions standards. Mais, naturellement, le métallurgiste sait bien que les propriétés de l'acier résultent de toutes les opérations d'élaboration, de traitements thermiques, de mise en forme qu'il a subies.

Ces propriétés vont donc, implicitement, être dépendantes – certes de façon tout à fait secondaire – de la présence des métaux qui se comportent *grasso modo* comme le fer lors de l'élaboration (le manganèse), des traces de métaux servant à « calmer » l'acier, des traces de gaz occlus et notamment de l'azote, et, de façon moins négligeable, des alignements de sulfures, phosphures et autres précipités fragilisants. Elles vont dépendre de la structure métallurgique et de la morphologie à l'échelle du grain, résultat des traitements thermomécaniques (corroyage, trempe, revenu). Elles vont dépendre de l'état d'écroutissage. En outre, elles vont être un peu influencées par la forme précise de l'éprouvette, par le soin mis à l'usiner, par l'alignement de l'éprouvette sur la machine de traction, par le protocole de l'essai lui-même, pourquoi pas par des « manies » de l'opérateur. On conviendra qu'on ne peut décidément pas tenir compte de tous ces paramètres *a priori* secondaires. On décide de les regrouper dans le « paquet » des **facteurs non contrôlés**.

Mais on reconnaît ici un cas d'application du théorème de la limite centrale exposé dans les articles [R 240] *Observation statistique* et [R 250] *Estimateurs et tests d'hypothèses*. On est donc fondé, par application de ce théorème, à considérer que l'ensemble des facteurs non contrôlés introduit une fluctuation aléatoire distribuée selon une loi de Gauss qui ne dépend pas des valeurs retenues pour le facteur contrôlé. Dès lors, la condition mathématique, difficile à vérifier à l'aide de quelques résultats de mesure, peut généralement être admise sur la base de considérations physiques.

2. Analyse de la variance à simple entrée

2.1 Relevé des observations

On isole un facteur A , celui vis-à-vis duquel on va chercher à prendre une décision – on l'appellera **facteur contrôlé** – et on rejette dans le « paquet » des **facteurs non contrôlés** tous les autres facteurs. On rangera parmi ceux-ci aussi bien ceux qu'on ne connaît pas que ceux qu'on connaît mais vis-à-vis desquels on ne se propose pas, à ce stade, de prendre une décision.

On note A_i le niveau i de facteur contrôlé. Il y a k niveaux du facteur contrôlé A ; pour le niveau i , on dispose de n_i résultats de mesure.

Chaque résultat de mesure individuel est noté x_{ij} . Le premier indice, i , est celui qui identifie le niveau du facteur contrôlé. Le second indice, j , est le numéro du résultat de mesure obtenu pour le niveau i du facteur contrôlé.

Remarque : dans ce paragraphe, on ne demande pas que le nombre de résultats de mesure obtenus soit identique pour chaque niveau i du facteur contrôlé. Plus exactement, il n'y a pas de grande complication du calcul à faire cette hypothèse : les n_i sont donc *a priori* tous différents. Cette remarque facilite l'utilisation de l'analyse de la variance à simple entrée, même si le plan d'expérience n'a pas été conçu dès l'origine pour l'appliquer.

À la différence de ce qui se passe dans les calculs plus élémentaires d'analyse statistique (articles [R 240] ou [R 250]), il sera nécessaire de faire des moyennes tantôt au sein du niveau du facteur contrôlé (c'est-à-dire sur l'indice j) tantôt au sein de l'ensemble des résultats de mesure (c'est-à-dire simultanément sur les indices i et j). Il y aurait ambiguïté à utiliser un surlignage (\bar{x}). On notera la moyenne en substituant un point à l'indice sur lequel on effectuera la moyenne. Ainsi :

$$x_{i\bullet} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{j=n_i} x_{ij} \quad (1)$$

$$x_{..} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \quad (2)$$

avec $N = \sum_i n_i$.

Il est commode d'utiliser la présentation des résultats sous la forme du tableau 1.

Tableau 1 – Notations concernant les résultats de mesure utilisés dans l'analyse de la variance à simple entrée						
Niveau du facteur contrôlé A	Résultats de mesure				Moyenne par niveau	Nombre de mesures par niveau
A ₁	x _{1 1}	x _{1 2}	...	x _{1 n₁}	x _{1.}	n ₁
A ₂	x _{2 1}	x _{2 2}	...	x _{2 n₂}	x _{2.}	n ₂
⋮	⋮				⋮	⋮
A _i	x _{ij}				x _{i.}	n _i
⋮	⋮				⋮	⋮
A _k	x _{k 1}	x _{k n_k}	x _{k.}	n _k	

2.2 Notion de variation – Définition des variations utilisées dans l'analyse de la variance

Chaque mesure x_{ij} présente un écart vis-à-vis de la moyenne générale $x_{..}$; cet écart est $x_{ij} - x_{..}$. On peut considérer la *norme* de cet écart qui est, au sens du vocabulaire de la géométrie la plus habituelle, le carré de la distance séparant chaque résultat de mesure x_{ij} de la moyenne générale $x_{..}$. La valeur de cette norme est :

$$(x_{ij} - x_{..})^2$$

Nota : on rappelle qu'en géométrie classique (Pythagore par exemple), on utilise toujours dans les calculs les carrés des distances.

Étendue à tous les résultats de mesure, supposés indépendants, la somme de ces termes $(x_{ij} - x_{..})^2$ prend le nom de **variation totale** T :

$$T = \sum_{ij} (x_{ij} - x_{..})^2 \quad (3)$$

Il est tentant et naturel d'essayer de distinguer dans cette variation totale T la contribution des facteurs non contrôlés et celle du facteur contrôlé. Avec la même signification géométrique, les facteurs non contrôlés contribuent, au sein de chaque niveau A_i du facteur contrôlé A , à une variation $\sum_j (x_{ij} - x_{i.})^2$. Étendue à tous les niveaux du facteur contrôlé, cette variation vaut :

$$R = \sum_i \left[\sum_j (x_{ij} - x_{i.})^2 \right] \quad (4)$$

On appelle R la **variation résiduelle** (certains parlent de **variation intraclasse**). C'est la variation constatée indépendamment de tout effet du facteur contrôlé A . Il est intuitif qu'elle est une mesure de la dispersion naturelle de la distribution des résultats de mesure en l'absence de tout effet du facteur contrôlé A .

La différence entre T et R rend compte de ce qui distingue ces deux variations, c'est-à-dire une variation qui se manifesterait en plus de celle des facteurs non contrôlés. Elle rend compte de la contribution – éventuelle – du facteur contrôlé A . Elle peut être écrite :

$$A = \sum_i [n_i (x_{i.} - x_{..})^2] = T - R \quad (5)$$

On appelle A la **variation interclasse**. En quelque sorte géométriquement, on remarque qu'elle fait apparaître la mesure entre les moyennes $x_{i.}$ au sein de chaque niveau i du facteur contrôlé A_i et la moyenne générale $x_{..}$.

2.3 Principe de l'interprétation

Dès lors, l'interprétation relève du « bon sens ». Elle est illustrée sur la figure 1 dans le cas de deux niveaux du facteur contrôlé. C'est presque un problème d'optique, de *pouvoir séparateur*, où il s'agit de savoir si l'œil voit distinctement. En effet, il s'agit de savoir si l'on peut distinguer les moyennes par niveau $x_{i.}$ de la moyenne générale $x_{..}$, sachant que l'unité de mesure naturelle de la distribution, l'écart-type σ_ξ constaté pour chaque niveau, est incompressible, et qu'il se déduit de la variation résiduelle R .

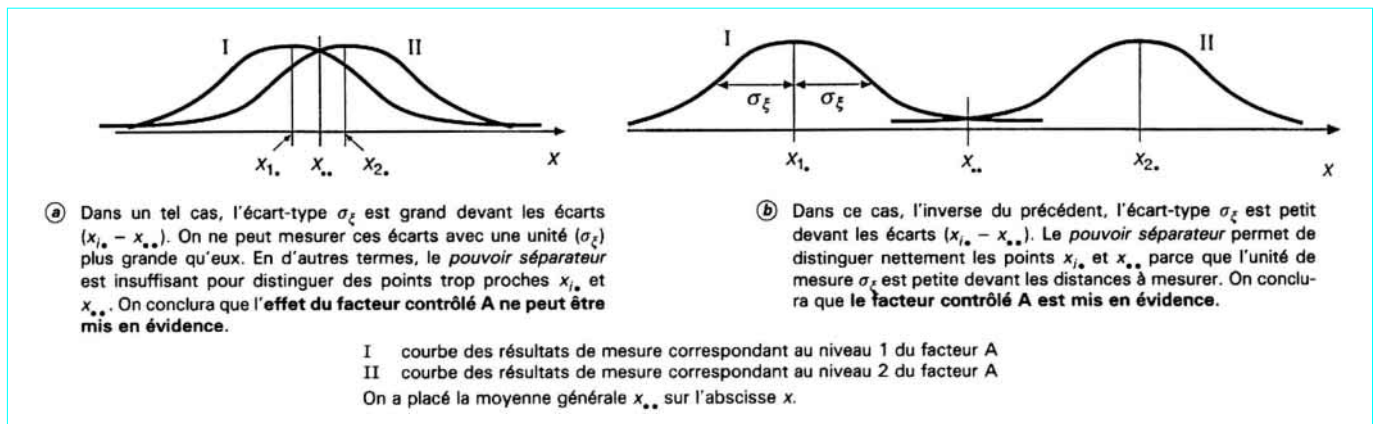


Figure 1 – Interprétation de l'analyse de la variance

2.4 Calculs

Compte tenu des réflexions du paragraphe 1, on fait l'hypothèse que, pour chaque niveau A_j du facteur contrôlé A, les résultats x_{ij} sont distribués selon une même loi de Gauss dont l'écart-type rend compte de l'effet des facteurs non contrôlés, lequel effet ne peut être que le même quel que soit le niveau A_j .

Donc la moyenne $x_{i\bullet}$ de variables de Gauss x_{ij} est une variable de Gauss. La moyenne $x_{\bullet\bullet}$ de variables de Gauss $x_{i\bullet}$ est aussi une variable de Gauss. Les différences $(x_{ij} - x_{\bullet\bullet})$, $(x_{ij} - x_{i\bullet})$, $(x_{i\bullet} - x_{\bullet\bullet})$ sont des variables de Gauss. Leurs carrés $(x_{ij} - x_{\bullet\bullet})^2$, $(x_{ij} - x_{i\bullet})^2$, $(x_{i\bullet} - x_{\bullet\bullet})^2$ sont, à un facteur multiplicatif près, distribués selon des lois de χ^2 .

Le calcul détaillé montre que, si σ_ε est l'écart-type de la variable de Gauss x_{ij} :

- R est distribuée comme $\sigma_\varepsilon^2 \cdot \chi^2(N - k)$;
- A est distribuée comme $\sigma_\varepsilon^2 \cdot \chi^2(k - 1)$.

Remarque : les degrés de liberté, respectivement $(N - k)$ et $(k - 1)$, se déduisent du nombre N de résultats, de celui (k) des niveaux du facteur contrôlé et du nombre de relations utilisées pour calculer les variations R et A.

En se reportant à l'article [R 250] *Estimateurs et tests d'hypothèses*, on constate que la qualité :

$$v_R = \frac{R}{N - k} = \frac{\sum_{ij} (x_{ij} - x_{\bullet\bullet})^2}{N - k} \quad (6)$$

est une estimation de la variance de x_{ij} , laquelle est par hypothèse égale à σ_ε^2 . On note cette estimation par $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$.

De façon analogue, la quantité :

$$v_A = \frac{A}{k - 1} = \frac{\sum_i n_i (x_{i\bullet} - x_{\bullet\bullet})^2}{k - 1} \quad (7)$$

a la forme d'une variance.

Il vient que la quantité :

$$\frac{v_A}{v_R} = \frac{\sigma_\varepsilon^2 \chi^2(k - 1)}{\sigma_\varepsilon^2 \chi^2(N - k)}$$

est distribuée selon une loi de Fisher-Snedecor $F(k - 1 ; N - k)$.

Remarque : dans le langage courant, on parle des « quotients » v_A et v_R , et du « rapport » $\frac{v_A}{v_R}$ de ces « quotients ».

À ce stade, on dispose, d'une part, des résultats expérimentaux x_{ij} ayant permis de calculer les valeurs « expérimentales » des variations A et R puis les quotients v_A et v_R , d'autre part, des lois que suivent les valeurs « théoriques » des mêmes quotients v_A et v_R . Il est donc possible d'effectuer un **test d'hypothèse sur l'homogénéité des résultats**.

2.5 Conclusion

■ Si l'on constate que :

$$\frac{v_A}{v_R} \leq F_\alpha(k - 1 ; N - k)$$

cela signifie que, au seuil α , la contribution de la variation « expérimentale » de A est négligeable devant la variation « expérimentale » de R. Dans ce cas, on conclura : « au seuil α , il

n'est pas possible de rejeter l'hypothèse d'avoir une population homogène ».

● Remarque

— Une autre conclusion, de caractère un peu théorique, est que v_A est une seconde estimation de σ_ε^2 .

— En pratique, l'ingénieur franchira un pas supplémentaire, allant au-delà du résultat de l'analyse statistique, en **concluant que le facteur contrôlé A n'exerce pas d'influence significative sur les résultats de mesure**.

— Une fois de plus, on constate que la conclusion est « intrinsèquement liée » à un risque α . D'où l'importance pratique, concrète et pas seulement formelle, de la locution « au seuil α ». Ce qu'on lit dans la conclusion – l'avers de la médaille – est intrinsèquement lié au seuil α considéré – le revers de la médaille.

■ Si l'on constate que :

$$\frac{v_A}{v_R} > F_\alpha(k - 1 ; N - k)$$

la conclusion sera que « au seuil α , il est possible de rejeter l'hypothèse d'homogénéité ». En termes d'ingénieur, **il y a une influence significative du facteur contrôlé A sur le résultat de mesure**.

3. Calculs pratiques de l'analyse de la variance à simple entrée

Pour aller très vite et limiter le risque d'erreurs de calcul, on remplit le tableau 2 appelé **tableau d'analyse de la variance** à l'aide des formules pratiques rassemblées dans le tableau 3. Ces formules rendent calculables simplement « à la main » les problèmes d'une complexité moyenne qui sont ceux de la plupart des ingénieurs. Sur-tout, elles évitent d'avoir à calculer les différences du type $x_{ij} - x_{i\bullet}$, qui comportent un grand nombre de chiffres significatifs, ce qui évite les erreurs d'arrondis et diminue la place utilisée dans les mémoires d'ordinateurs.

Tableau 2 – Tableau d'analyse de la variance à simple entrée

Variations	Sommes des carrés	Degrés de liberté	Quotients
Variation interclasse	A	$v_A = k - 1$	$v_A = \frac{A}{v_A}$
Variation résiduelle	R	$v_R = N - k$	$v_R = \frac{R}{v_R}$
Variation totale	T		

Tableau 3 – Formules pratiques pour le calcul de l'analyse de la variance à simple entrée

$\Delta = \frac{1}{N} \left(\sum_{ij} x_{ij} \right)^2$ $T = \sum_{ij} x_{ij}^2 - \Delta$ $A = \sum_i \frac{1}{n_i} \left(\sum_j x_{ij} \right)^2 - \Delta$ $R = T - A$
<p>N nombre total de résultats de mesure.</p> <p>x_{ij} résultat de mesure individuel (niveau i du facteur A, numéro j du résultat de mesure pour ce niveau i).</p>

Exemple 1

Recherchons si le manipulateur déterminant la composition chimique d'un laitier de haut fourneau influe sur le résultat constaté quand, en effectuant un essai, le premier manipulateur obtient :

2,6 ; 2,9 ; 2,8

le second :

3,1 ; 3,0 ; 3,3 ; 2,9 ; 3,3

et le troisième :

2,9 ; 3,2 ; 3,0 ; 3,1

Remarquons que, même s'il est souvent passé sous silence, ce type de problème gouverne l'un des points clés de la plupart des fabrications industrielles, qui est celui de la reproductibilité et de l'homogénéité des livraisons lorsque la technique exige un travail posté.

● On commence par faire un **changement de variable** pour manipuler des nombres plus simples. On évite les virgules, source d'erreur aussi bien pour les calculs à la main que pour les entrées de données dans l'ordinateur.

Les résultats de mesure étant x_{ij} , on prend comme variable :

$$\theta_{ij} = 10 x_{ij} - 25$$

● D'où le tableau de calcul 4, qui comporte aussi les calculs intermédiaires nécessaires au **calcul des variations**.

Il vient :

$$T = 357 - 310,08 = 46,92$$

$$A = \frac{8^2}{3} + \frac{31^2}{5} + \frac{22^2}{4} - \Delta = 24,45$$

$$R = T - A = 46,92 - 24,45 = 22,47$$

● On peut reporter ces valeurs dans le tableau 5 d'analyse de la variance. Il y a ici trois manipulateurs, donc $k = 3$.

On en tire la valeur « expérimentale » du rapport des quotients :

$$\frac{V_A}{V_R} = 4,91$$

Test d'homogénéité

Pour effectuer le test, il faut choisir un risque α . Ce choix dépend des types de problèmes (donc des habitudes des entreprises et des laboratoires), notamment de l'ampleur et de la nature des conséquences des risques physiques et financiers associés à une conclusion erronée. Ici, on choisit le risque « habituel » (considéré de façon assez commune) de 5 %. On trouve dans la table de Fisher-Snedecor :

$$F_{0,05}(2 ; 9) = 4,26$$

On constate que :

$$\frac{V_A}{V_R} > F_{0,05}(2 ; 9)$$

On en déduit : « au seuil $\alpha = 5\%$, il faut rejeter l'hypothèse d'homogénéité de la population » : le manipulateur influence donc le résultat de l'essai.

Nota : d'aucuns auraient pu choisir un risque moindre, par exemple, choisir $\alpha = 1\%$. Ils auraient trouvé dans la table :

$$F_{0,01}(2 ; 9) = 8,02 \text{ et déduit que :}$$

$$\frac{V_A}{V_R} < F_{0,01}(2 ; 9)$$

Par conséquent, leur conclusion serait : « au seuil 1 %, il n'est pas possible de rejeter l'hypothèse d'homogénéité » (figure 2), et donc « l'influence du manipulateur qui effectue les essais n'est pas mise en évidence ».

On retrouve là une situation « de bon sens ». Si l'on doit – ou si l'on veut – se limiter à un risque très faible d'aboutir à une conclusion erronée, on est conduit à ne rien décider. Pour décider dans une telle situation, il faudrait plus de résultats, plus de temps, probablement plus d'argent pour faire l'étude. Pendant ce temps-là, il se peut que les concurrents progressent parce qu'ils auront, eux, accepté un risque mieux approprié au problème. En d'autres termes, et comme toujours, quelles que soient les aides à la décision – et l'analyse statistique est une aide très puissante –, les **qualités propres du décideur restent indispensables**.

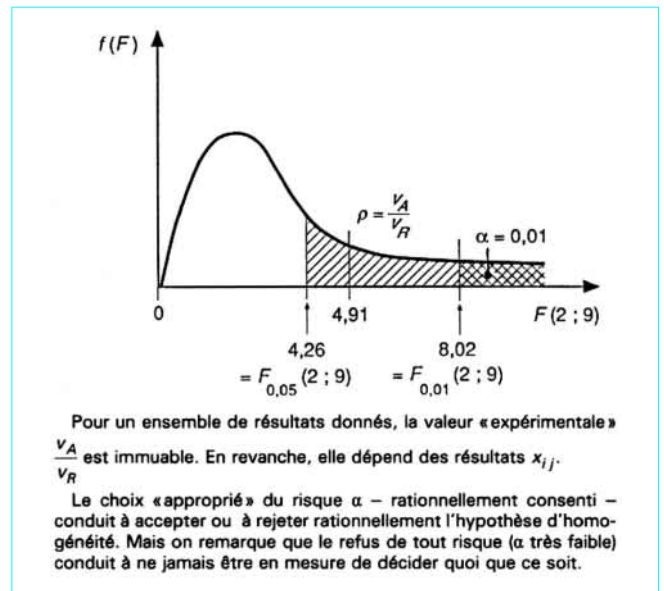


Figure 2 – Illustration de la façon dont le risque consenti α intervient (les valeurs numériques sont celles de l'exemple 1)

Tableau 4 – Résultats de mesure de l'exemple 1

Manipulateurs	Résultats de mesure, après changement de variable					Sommes par ligne $\sum_j \theta_{ij}$	Sommes totales $\sum_{ij} \theta_{ij}$	Moyennes par manipulateur $\theta_{i\cdot} = \frac{\sum_j \theta_{ij}}{n_i}$
$i = 1$	1	4	3			$n_i = 3$	8	} 61
$i = 2$	6	5	8	4	8	$n_i = 5$	31	
$i = 3$	4	7	5	6		$n_i = 4$	22	

Somme des carrés : $\sum_{ij} \theta_{ij}^2 = 357$.

Nombre total de mesures : $N = 12$.

$$\Delta = \frac{1}{N} \left(\sum_{ij} x_{ij} \right)^2 = \frac{61^2}{12} = 310,08$$

Tableau 5 – Tableau d'analyse de la variance à simple entrée de l'exemple 1			
Variations	Sommes des carrés	Degrés de liberté	Quotients
Variation interclasse	$A = 24,45$	$k - 1 = 2$	$v_A = 12,22$
Variation résiduelle	$R = 22,47$	$N - k = 9$	$v_R = 2,49$
Variation totale	$T = 46,92$		

4. Analyse de la variance à double entrée

Dans de nombreux problèmes industriels se pose la question de déterminer s'il y a une interaction entre deux facteurs A et B.

On peut citer comme exemples classiques les équivalences temps-température des traitements thermiques des aciers, ou les lois de compressibilité des gaz réels, où une interaction se superpose de façon significative à ce que laisse prévoir la loi de Mariotte. L'analyse de la variance à double entrée est un moyen puissant d'effectuer rationnellement ce type d'étude.

4.1 Relevé des observations

On considère deux facteurs contrôlés A et B, dont les niveaux généraux sont notés A_a et B_b (tableau 6). Pour chaque couple de niveaux A_a et B_b , il y a v mesures. La restriction à ce que ce nombre v soit identique pour tous les couples est nécessaire, dans le cadre de cet exposé, afin de disposer de notations mathématiques lisibles et manipulables.

Pour chaque couple de niveaux, les dispersions sont attribuées aux facteurs non contrôlés (§ 1) qui conduisent à considérer que les résultats $x_{ab\beta}$ (notation du tableau 6) sont distribués selon des lois de Gauss de même écart-type σ_ξ .

Les moyennes sont :

— moyenne par ligne :

$$x_{a..} = \frac{\sum_{b\beta} x_{ab\beta}}{k_B v}$$

— moyenne par colonne :

$$x_{.b.} = \frac{\sum_a x_{ab\beta}}{k_A v}$$

— moyenne générale :

$$x_{...} = \frac{\sum_{ab\beta} x_{ab\beta}}{k_A k_B v}$$

Tableau 6 – Notations concernant les résultats de mesure utilisés dans l'analyse de la variance à double entrée						
Facteur contrôlé A, k_A niveaux	Facteur contrôlé B, k_B niveaux					
	B_1	B_b	B_{k_B}	
A_1						Moyenne $x_{1..}$
⋮						
A_a			x_{ab1} $x_{ab\beta}$ x_{abv}	Moyenne des v résultats : $x_{ab.}$		Moyenne $x_{a..}$
⋮						
A_{k_A}						Moyenne $x_{k_A..}$
	Moyenne $x_{.1.}$		Moyenne $x_{.b.}$		Moyenne $x_{.k_B.}$	Moyenne générale $x_{...}$

4.2 Variations utilisées

Par analogie avec les variations utilisées au paragraphe 2.2 (relations (3), (4) et (5)), on cherche à décomposer la **variation totale** T :

$$T = \sum_{ab\beta} (x_{ab\beta} - x_{\dots})^2$$

à l'aide de la **variation résiduelle** R :

$$R = \sum_{ab\beta} (x_{ab\beta} - x_{a b \bullet})^2$$

et des variations éventuellement provoquées par les facteurs contrôlés A et B , à savoir :

$$A = k_B v \sum_a (x_{a \bullet \bullet} - x_{\dots})^2$$

et

$$B = k_A v \sum_b (x_{\bullet b \bullet} - x_{\dots})^2$$

On peut remarquer que ces variations ont des définitions tout à fait identiques à celles considérées au paragraphe 2 sur l'analyse de la variance à simple entrée. Pour distinguer la variation A de la variation B , on parlera respectivement d'**effet principal du facteur A** (quantité A) et d'**effet principal du facteur B** (quantité B).

Si l'on se livre à une vérification, on constatera que :

$$T \neq R + A + B$$

En effet, il faut faire intervenir une nouvelle variation AB , appelée **interaction**, qui fait intervenir à la fois les moyennes des résultats obtenues pour les couples de niveaux A_a et B_b des facteurs contrôlés.

On a :

$$AB = v \sum_{ab} [x_{ab \bullet} - (x_{a \bullet \bullet} + x_{\bullet b \bullet}) + x_{\dots}]^2$$

et $T = R + A + B + AB$.

L'existence de cette interaction AB montre qu'une **variation, éventuellement importante, peut apparaître même si la contribution des effets principaux A et B est faible devant R**. Physiquement, cela montre que **les facteurs contrôlés A et B peuvent interagir significativement alors même que ni l'un ni l'autre n'agissent seuls significativement**.

4.3 Calculs

Soit σ_ξ^2 la variance de la distribution des $x_{ab\beta}$ pour chacun des couples A, B des facteurs contrôlés, toujours produite par les facteurs non contrôlés.

Comme pour l'analyse de la variance à simple entrée, on peut montrer que les quotients des variations T, A, B, AB, R par σ_ξ^2 sont distribués comme des lois de χ^2 de nombres de degrés de liberté convenables.

$$A \text{ est distribuée comme } \sigma_\xi^2 \cdot \chi^2(k_A - 1).$$

$$B \text{ est distribuée comme } \sigma_\xi^2 \cdot \chi^2(k_B - 1).$$

$$AB \text{ est distribuée comme } \sigma_\xi^2 \cdot \chi^2\{(k_A - 1)(k_B - 1)\}.$$

$$R \text{ est distribuée comme } \sigma_\xi^2 \cdot \chi^2\{k_A k_B (v - 1)\}.$$

Remarque : le nombre de degrés de liberté de l'interaction faisant intervenir la quantité $(v - 1)$, il en résulte qu'il est nécessaire de disposer d'au moins deux résultats de mesure ($v = 2$) par couple (A_a, B_b) de niveaux des facteurs contrôlés pour effectuer une analyse de la variance à double entrée.

On peut alors construire le tableau d'analyse de la variance à double entrée (tableau 7) et le remplir à l'aide des formules pratiques (tableau 8).

Tableau 7 – Tableau d'analyse de la variance à double entrée

Variations	Sommes des carrés	Degrés de liberté	Quotients
Effet principal du facteur A	A	$v_A = k_A - 1$	$v_A = \frac{A}{v_A}$
Effet principal du facteur B	B	$v_B = k_B - 1$	$v_B = \frac{B}{v_B}$
Interaction	AB	$v_{AB} = (k_A - 1)(k_B - 1)$	$v_{AB} = \frac{AB}{v_{AB}}$
Variation résiduelle	R	$v_R = k_A k_B (v - 1)$	$v_R = \frac{R}{v_R}$
Variation totale	T	$k_A k_B v - 1$	

Tableau 8 – Formules pratiques pour le calcul de l'analyse de la variance à double entrée

$$\Delta = \frac{\left(\sum_{ab\beta} x_{ab\beta}\right)^2}{k_A k_B v}$$

$$T = \sum_{ab\beta} x_{ab\beta}^2 - \Delta$$

$$G = \frac{\sum_{ab} \left[\sum_{\beta} x_{ab\beta}\right]^2}{v} - \Delta$$

$$R = T - G$$

$$A = \frac{\sum_a \left[\sum_{b\beta} x_{ab\beta}\right]^2}{k_B v} - \Delta$$

$$B = \frac{\sum_b \left[\sum_{a\beta} x_{ab\beta}\right]^2}{k_A v} - \Delta$$

$$AB = G - A - B$$

4.4 Conclusions

a) L'interaction AB est-elle significative ?

Pour « mesurer » si l'interaction AB est significative, on utilise la variation résiduelle R – qui est une estimation de σ_ξ^2 – comme unité de mesure. On utilise donc comme terme de comparaison v_R et l'on

compare $\frac{v_{AB}}{v_R}$ à $F_\alpha(v_{AB}; v_R)$.

On conclut, au seuil α , que l'interaction n'est pas significative – l'hypothèse d'homogénéité ne peut être rejetée – si :

$$\frac{v_{AB}}{v_R} \leq F_\alpha(v_{AB}; v_R)$$

On conclut l'inverse si :

$$\frac{v_{AB}}{v_R} > F_{\alpha}(v_{AB}; v_R)$$

b) Les effets principaux de A et de B sont-ils significatifs ?

Pour « mesurer » si les effets principaux de A et de B sont significatifs, on peut utiliser selon les cas deux termes de comparaison :

— soit v_R , c'est-à-dire que l'unité de mesure est toujours $\hat{\sigma}_{\xi}^2$; la discussion est alors celle d'une analyse de la variance à simple entrée pour le facteur principal A d'une part, pour le facteur principal B d'autre part ; au seuil α , les hypothèses d'homogénéité ne peuvent être rejetées respectivement si :

$$\frac{v_A}{v_R} \leq F_{\alpha}(v_A; v_R)$$

$$\frac{v_B}{v_R} \leq F_{\alpha}(v_B; v_R)$$

— soit v_{AB} , c'est-à-dire que l'unité de mesure tient compte de l'existence d'une interaction – elle est alors normalement supérieure à $\hat{\sigma}_{\xi}^2$; la discussion consiste alors à **rechercher un effet principal de A d'une part, de B d'autre par en plus d'une interaction déjà mise en évidence** ; il va de soi que ce type de discussion est le plus fertile et le plus novateur puisqu'il permet de mettre en évidence – lorsque c'est le cas – le caractère primordial d'une interaction. Au seuil α , les hypothèses d'homogénéité conditionnelle ne peuvent être rejetées respectivement si :

$$\frac{v_A}{v_{AB}} \leq F_{\alpha}(v_A; v_{AB})$$

$$\frac{v_B}{v_{AB}} \leq F_{\alpha}(v_B; v_{AB})$$

Remarques

- Il va de soi qu'une telle analyse ne peut être conduite lorsqu'on a conclu au premier stade (cf. a) qu'il n'existe pas d'interaction significative.
- Si l'on conclut simultanément à l'absence d'interaction significative, à l'absence d'effet principal significatif du facteur A, à l'absence d'effet principal significatif du facteur B, on admet en pratique que le population est homogène puisqu'on ne peut, au seuil α , rejeter l'hypothèse d'homogénéité.

4.5 Exemples

■ **Exemple 2**

Un fabricant de coussinets en bronze fritté se propose de déterminer si la résistance à la rupture du bronze dépend des lots de poudre de cuivre et d'étain utilisés pour son élaboration.

● **Plan d'expérience**

Dans ce but, on réalise à partir de 3 lots différents de poudre de cuivre (facteur A donc $k_A = 3$) et de 3 lots différents de poudre d'étain (facteur B donc $k_B = 3$), 9 mélanges de composition identique (90 % de Cu, 10 % de Sn) correspondant aux neuf combinaisons deux à deux des lots de cuivre et d'étain utilisés.

À partir de chacun de ces 9 mélanges, on comprime, sous une même pression, 4 éprouvettes de flexion identiques (donc $v = 4$). Les 36 éprouvettes provenant des 9 mélanges sont ensuite frittées en une même opération dans un four à atmosphère réductrice. Ces éprouvettes sont enfin cassées sur une machine d'essai.

Les charges de rupture ainsi déterminées, arrondies à 1 N/mm² près, sont reportées sur le tableau 9, en newtons par millimètre carré en excès de la valeur de 20 N/mm² choisie pour origine.

Tableau 9 – Résultats de l'exemple 2

Charge de rupture d'éprouvettes en bronze fritté (origine : 20 N/mm ² ; unité : 1 N/mm ²)							
Cuivre	Étain			Sommes par ligne (Cu)			
	B ₁	B ₂	B ₃				
A ₁	6	7	1	1	0	5	46
	Σ=24		Σ=9		Σ=13		
A ₂	3	8	4	3	6	2	49
	Σ=18		Σ=24		Σ=7		
A ₃	1	6	6	4	0	3	72
	Σ=31		Σ=25		Σ=16		
Sommes par colonne (Sn)	6	10	8	3	2	4	Somme générale = 167 = Σ _{abβ} x _{abβ}
	Σ=73		Σ=58		Σ=36		

On a inscrit, au centre de chaque case, la somme Σ_{abβ} des 4 résultats individuels qui figurent dans les angles de la case correspondante. Les sommes par ligne et par colonne ainsi que la somme générale de tous les résultats ont également été reportées dans les marges du tableau (il s'agit des sommes et non des moyennes).

- Les étapes du calcul sont les suivantes.

Terme correctif :

$$\Delta = \frac{167^2}{36} = 774,7$$

$$\sum_{ab\beta} x_{ab\beta}^2 = 6^2 + 7^2 + \dots + 3^2 + 7^2 = 1\ 035$$

Variation totale $T = 1\ 035 - 774,7 = 260,3$

Variation globale :

$$G = \frac{24^2 + 9^2 + 13^2 + \dots + 25^2 + 16^2}{4} - \Delta = \frac{3\ 617}{4} - 774,7 = 129,6$$

Variation résiduelle :

$$R = T - G = 260,3 - 129,6 = 130,7$$

Effet principal du cuivre :

$$A = \frac{46^2 + 49^2 + 72^2}{12} - \Delta = \frac{9\ 701}{12} - 774,7 = 33,7$$

Effet principal de l'étain :

$$B = \frac{73^2 + 58^2 + 36^2}{12} - \Delta = \frac{9\ 989}{12} - 774,7 = 57,7$$

Interaction cuivre-étain :

$$AB = G - A - B = 129,6 - 33,7 - 57,7 = 38,2$$

On reporte ces valeurs dans le tableau 10 d'analyse de la variance.

Tableau 10 – Tableau d'analyse de la variance de l'exemple 2

Variations	Sommes des carrés	Degrés de liberté	Quotients
Effet principal du cuivre (A)	A = 33,7	$v_A = 2$	$v_A = 16,85$
Effet principal de l'étain (B)	B = 57,7	$v_B = 2$	$v_B = 28,85$
Interaction cuivre-étain	AB = 38,2	$v_{AB} = 4$	$v_{AB} = 9,55$
Variation résiduelle	R = 130,7	$v_R = 27$	$v_R = 4,84$
Variation totale	T = 260,3	35	

● **Conclusions**

En choisissant un risque de première espèce $\alpha = 0,05$, on conclut de cette analyse :

— que l'interaction AB n'est pas significative, car on constate que :

$$\frac{v_{AB}}{v_R} = \frac{9,55}{4,84} = 1,97 < F_{0,05}(4 ; 27) = 2,73$$

— que les effets principaux A et B doivent être considérés comme significatifs, car on constate que :

$$\frac{v_A}{v_R} = \frac{16,85}{4,84} = 3,48 > F_{0,05}(2 ; 27) = 3,35$$

$$\frac{v_B}{v_R} = \frac{28,85}{4,84} = 5,96 > F_{0,05}(2 ; 27) = 3,35$$

L'hypothèse d'homogénéité doit donc être rejetée. Les lots de cuivre et d'étain exercent une influence sur la résistance à la rupture des bronzes frittés. L'étude précédente démontre, en outre, que leurs effets sont **simplemment additifs**, sans qu'il paraisse exister aucune interaction entre les lots de cuivre et d'étain associés dans un même mélange.

■ **Exemple 3**

Le rendement d'une réaction chimique réalisée dans des conditions industrielles pourrait dépendre de la température et de la pression. Afin de s'en assurer, une étude est conduite en adoptant trois valeurs de température (facteur A) : 225 °C, 250 °C, 275 °C et deux valeurs de pression (facteur B) – 50 bars, 60 bars. La grandeur mesurée est la quantité de produit chimique formée, exprimée en excès par rapport à la plus petite valeur obtenue – celle-ci est constatée pour le couple 225 °C, 50 bars.

● Les **résultats** sont reportés sur le tableau 11. Sur ce tableau, on a ajouté les sommes par ligne, par colonne et par case. Pour chaque couple A_a, B_b on a deux résultats de mesure : $v = 2$.

Tableau 11 – Résultats de l'exemple 3

Facteur B (pression) $k_B = 2$	Facteur A (température) $k_A = 3$			Sommes par ligne
	A ₁	A ₂	A ₃	
B ₁	$\left. \begin{matrix} 0 \\ 10 \end{matrix} \right\} \sum_{\beta} x_{ab\beta} = 10$	$\left. \begin{matrix} 28 \\ 32 \end{matrix} \right\} 60$	$\left. \begin{matrix} 65 \\ 65 \end{matrix} \right\} 130$	200
B ₂	$\left. \begin{matrix} 42 \\ 38 \end{matrix} \right\} 80$	$\left. \begin{matrix} 58 \\ 62 \end{matrix} \right\} 120$	$\left. \begin{matrix} 75 \\ 75 \end{matrix} \right\} 150$	350
Sommes par colonne	90	180	280	$550 = \sum_{ab\beta} x_{ab\beta}$

● **Calculs**

Terme correctif :

$$\Delta = \frac{\left(\sum_{ab\beta} x_{ab\beta} \right)^2}{k_A k_B v} = \frac{550^2}{3 \times 2 \times 2} = \frac{550^2}{12} = 25\,208$$

Somme des carrés :

$$\sum_{ab\beta} x_{ab\beta}^2 = 0^2 + 10^2 + 42^2 + \dots + 75^2 + 75^2 = 32\,024$$

Les calculs conduisent à :

$$T = 32\,024 - 25\,208 = 6\,816$$

$$G = \frac{10^2 + 80^2 + \dots + 150^2}{2} - \Delta = 31\,950 - 25\,208 = 6\,742$$

$$A = \frac{90^2 + 180^2 + 280^2}{4} - \Delta = 29\,725 - 25\,208 = 4\,517$$

$$B = \frac{200^2 + 350^2}{6} - \Delta = 27\,083 - 25\,208 = 1\,875$$

$$AB = 6\,742 - 4\,517 - 1\,875 = 350$$

$$R = 6\,816 - 6\,742 = 74$$

Ils permettent d'établir le tableau 12 d'analyse de la variance.

Tableau 12 – Tableau d'analyse de la variance de l'exemple 3

Variations	Sommes des carrés	Degrés de liberté	Quotients
Effet principal de la température	A = 4 517	$v_A = 2$	$v_A = 2\,258,5$
Effet principal de la pression	B = 1 875	$v_B = 1$	$v_B = 1\,875$
Interaction	AB = 350	$v_{AB} = 2$	$v_{AB} = 175$
Variation résiduelle	R = 74	$v_R = 6$	$v_R = 12,33$
Variation totale	T = 6 816		

● **Conclusions**

On constate que :

$$\frac{v_{AB}}{v_R} = \frac{175}{12,33} = 14,19 > F_{0,05}(2 ; 6) = 5,14$$

$$\frac{v_A}{v_R} = \frac{2\,258,5}{12,33} = 183,17 > F_{0,05}(2 ; 6) = 5,14$$

$$\frac{v_B}{v_R} = \frac{1\,875}{12,33} = 152,07 > F_{0,05}(1 ; 6) = 5,99$$

On conclut que, au seuil $\alpha = 5\%$, les effets de l'interaction, de la température et de la pression sont significatifs.

Cependant, la question physiquement la plus importante est de savoir s'il y a un effet de la température ou de la pression en sus de l'effet de l'interaction. En d'autres termes, il s'agit de savoir **si le vrai paramètre physique ne serait pas l'interaction**.

Pour répondre à cette question, il faut utiliser comme terme de comparaison v_{AB} . Ceci revient à chercher à mesurer l'effet éventuel de la température et de la pression avec une unité de mesure qui tient compte de l'existence de l'interaction. On constate que :

$$\frac{v_A}{v_{AB}} = \frac{2\,258,5}{175} = 12,90 < F_{0,05}(2 ; 2) = 19,00$$

$$\frac{v_B}{v_{AB}} = \frac{1\,875}{175} = 10,71 < F_{0,05}(1 ; 2) = 18,51$$

On conclut que, au seuil $\alpha = 5\%$, il n'y a pas lieu de considérer d'effet significatif de la température ni de la pression, en sus de l'effet significatif de l'interaction. L'interaction est donc le paramètre primordial dans cet exemple. L'ingénieur, muni de cette conclusion apportée par l'analyse statistique, doit continuer son étude en utilisant principalement ses connaissances sur la chimie de la réaction considérée. Il lui appartient éventuellement par approximations successives, de déterminer le paramètre efficace m , fonction de la température T et de la pression p , et de vérifier ensuite la justesse de sa détermination par une analyse de la régression (§ 7).

5. Modèles mathématiques et espérance mathématique des quotients : remarques

Une fois qu'a été déterminé au seuil α si tel ou tel effet est significatif, il est possible de construire un (ou des) modèle(s) mathématique(s) permettant d'affiner l'analyse et d'en tirer les conclusions ultimes.

5.1 Cas où le choix des niveaux des facteurs contrôlés est systématique

On peut poser :

$$x_{ab\beta} = \lambda_0 + \mathcal{A}_a + \mathcal{B}_b + \mathcal{J}_{ab} + \xi_{ab\beta}$$

Dans cette expression :

- $\xi_{ab\beta}$ est la fluctuation – gaussienne – due aux facteurs non contrôlés ;
- λ_0 est une constante ;
- \mathcal{A}_a (respectivement \mathcal{B}_b) est une correction systématique pour tous les résultats du même niveau du facteur A (respectivement B) ;
- \mathcal{J}_{ab} est une correction systématique complémentaire pour tous les couples de niveaux des facteurs A et B (donc pour toutes les mesures correspondant à une case du tableau 6 d'analyse de la variance).

De façon intuitive, \mathcal{A}_a et \mathcal{B}_b rendront compte, niveau par niveau, des effets principaux et, de façon analogue, \mathcal{J}_{ab} rendra compte de l'interaction. On peut choisir λ_0 de telle sorte que, simultanément :

$$\sum_a (\mathcal{A}_a) = 0$$

$$\sum_b (\mathcal{B}_b) = 0$$

$$\sum_a (\mathcal{J}_{ab}) = 0$$

$$\sum_b (\mathcal{J}_{ab}) = 0$$

$$\sum_{ab} (\mathcal{J}_{ab}) = 0$$

On démontre alors que, si – et seulement si – l'effet correspondant est significatif, on peut calculer les espérances mathématiques des quotients v_A, v_B, v_{AB} . Elles sont données par les expressions :

$$E[v_A] = \frac{k_B v}{k_A - 1} \sum_a (\mathcal{A}_a)^2 + \sigma_\xi^2$$

$$E[v_B] = \frac{k_A v}{k_B - 1} \sum_b (\mathcal{B}_b)^2 + \sigma_\xi^2$$

$$E[v_{AB}] = \frac{v}{(k_A - 1)(k_B - 1)} \sum_{ab} (\mathcal{J}_{ab})^2 + \sigma_\xi^2$$

avec toujours

$$E[v_R] = \sigma_\xi^2$$

À partir des résultats numériques du tableau d'analyse de la variance, on peut identifier chaque quotient à son espérance mathématique et en déduire σ_ξ^2 , ainsi que des éléments permettant de calculer les $\mathcal{A}_a, \mathcal{B}_b$ et \mathcal{J}_{ab} .

5.2 Cas où le choix des niveaux des facteurs contrôlés est aléatoire

On peut encore poser :

$$x_{ab\beta} = \lambda_0 + \mathcal{A}_a + \mathcal{B}_b + \mathcal{J}_{ab} + \xi_{ab\beta}$$

Mais, le choix des facteurs n'étant plus systématique, on ne connaît plus de valeurs numériques pour chacun des niveaux du facteur contrôlé. En revanche, on peut formuler l'hypothèse que ces valeurs sont distribuées selon une loi de Gauss.

On pose donc, si les effets sont significatifs, que les corrections $\mathcal{A}_a, \mathcal{B}_b, \mathcal{J}_{ab}$ sont des fluctuations aléatoires indépendantes et qu'elles sont distribuées suivant des lois normales d'écart-types respectivement égaux à $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_{AB}$. En choisissant convenablement λ_0 , on a simultanément :

$$E[\mathcal{A}_a] = 0$$

$$E[\mathcal{B}_b] = 0$$

$$E[\mathcal{J}_{ab}] = 0$$

En calculant les espérances mathématiques des quotients v_A, v_B, v_{AB} , on obtient :

$$E[v_A] = k_B v \sigma_A^2 + v \sigma_{AB}^2 + \sigma_\xi^2$$

$$E[v_B] = k_A v \sigma_B^2 + v \sigma_{AB}^2 + \sigma_\xi^2$$

$$E[v_{AB}] = v \sigma_{AB}^2 + \sigma_\xi^2$$

avec toujours

$$E[v_R] = \sigma_\xi^2$$

Les valeurs numériques des quotients portées dans le tableau d'analyse de la variance permettent, par identification avec leur espérance mathématique, de calculer – lorsque cela a un sens, c'est-à-dire lorsque l'effet est significatif – les valeurs de $\sigma_\xi^2, \sigma_A^2, \sigma_B^2, \sigma_{AB}^2$.

Remarque : beaucoup d'ouvrages adjoignent au tableau d'analyse de la variance une cinquième colonne appelée « espérance mathématique des quotients ». Lorsqu'on utilise cette colonne, il faut garder présent à l'esprit qu'elle est écrite **pour le cas où l'effet correspondant est significatif**.

5.3 Construction de l'intervalle de confiance

■ Exemple 2 (suite)

Les grandeurs précédentes permettent d'obtenir les limites de l'intervalle de confiance. Reportons-nous à l'exemple 2 du paragraphe 4. Il s'agit de choix aléatoires des niveaux du facteur contrôlé, pour lesquels, puisqu'il n'y a pas d'interaction significative :

$$E[v_B] = k_A v \sigma_B^2 + \sigma_\xi^2 = 12 \sigma_B^2 + \sigma_\xi^2$$

$$E[v_R] = \sigma_\xi^2$$

Compte tenu des lois suivies par les quantités B et R , le quotient :

$$\frac{\frac{v_B}{E[v_B]}}{\frac{v_R}{E[v_R]}} = \frac{\frac{v_B}{12 \sigma_B^2 + \sigma_\xi^2}}{\frac{v_R}{\sigma_\xi^2}}$$

suit une loi de Fisher-Snedecor $F(2; 27)$.

Il vient donc :

$$F_{\alpha 1}(2; 27) \leq \frac{\sigma_\xi^2}{(12 \sigma_B^2 + \sigma_\xi^2)} \cdot \frac{v_B}{v_R} \leq F_{\alpha 2}(2; 27)$$

ou encore :

$$\frac{1}{12} \left\{ \frac{1}{F_{\alpha 2}(2; 27)} \cdot \frac{v_B}{v_R} - 1 \right\} \leq \frac{\sigma_B^2}{\sigma_\xi^2} \leq \frac{1}{12} \left\{ F_{\alpha 1}(2; 27) \cdot \frac{v_B}{v_R} - 1 \right\}$$

Pour construire un intervalle de confiance à 90 %, on utilise les limites :

$$F_{0,05}(2; 27) = 3,35$$

$$\text{et } F_{0,95}(2; 27) = \frac{1}{F_{0,05}(27; 2)} = \frac{1}{19,46}$$

et les valeurs tirées du tableau d'analyse de la variance :

$$v_B = 28,85 \quad \text{et} \quad v_R = 4,84$$

Il vient :

$$\frac{1}{12} \left[\frac{1}{3,35} \cdot \frac{28,85}{4,85} - 1 \right] \leq \frac{\sigma_B^2}{\sigma_\xi^2} \leq \frac{1}{12} \left[19,46 \frac{28,85}{4,85} - 1 \right]$$

On peut donc affirmer, avec une probabilité de 90 %, que :

$$0,254 \leq \frac{\sigma_B}{\sigma_\xi} \leq 3,09$$

Remarque : toute cette partie de l'exposé peut s'appliquer au cas de l'analyse de la variance à simple entrée. Il suffit pour cela de se placer dans le cas des hypothèses :

- interaction AB non significative ;
- effet principal B non significatif ;
- effet principal A significatif.

5.4 Optimisation d'un plan d'expérience dans le cas d'une étude à un seul facteur contrôlé

Au moyen de calculs un peu plus complexes et surtout plus longs, on peut déduire des résultats du paragraphe 5.2 et de la remarque précédente l'équation de la courbe d'efficacité du test (voir article [R 250]). Si le nombre de résultats de mesure est identique pour tous les k niveaux du facteur contrôlé (c'est-à-dire s'il est égal à v), cette courbe se déduit de :

$$\left(\frac{\sigma_A}{\sigma_\xi} \right)^2 = \frac{1}{v} \left\{ \frac{F_\alpha(k-1; N-k)}{F_{1-\beta}(k-1; N-k)} - 1 \right\}$$

où α est le risque de première espèce et β le risque de deuxième espèce.

Exemple numérique : imposons-nous $\alpha = 0,05$ et $\beta = 0,50$ pour :

$$\left(\frac{\sigma_A}{\sigma_\xi} \right)^2 = 0,10$$

Les inconnues sont le nombre de niveaux k du facteur contrôlé et le nombre n de mesures par niveau. Le programme optimal est celui pour lequel le nombre total de mesures $N = kn$ est minimal. On procède par approximation. Pour des couples de valeurs n et k donnés, on obtient les valeurs des fonctions de Fisher-Snedecor dans la table. Pour $\alpha = 0,05$ et $\beta = 0,50$, on n'obtient pas en général exactement

$\left(\frac{\sigma_A}{\sigma_\xi} \right)^2 = 0,10$ car n et k sont entiers. Par approximation, on retient pour

chaque valeur de k la valeur de n qui conduit à la valeur de $\left(\frac{\sigma_A}{\sigma_\xi} \right)^2$ la

plus proche de 0,10. On construit ainsi le tableau 13. Il en ressort que le programme optimal correspond à la combinaison $n = 19$ et $k = 5$.

Remarque : cet exemple numérique illustre bien un fait qui n'est pas toujours facile à faire comprendre : ce n'est pas en multipliant beaucoup les points de mesure – en diminuant donc le nombre des mesures par points – qu'on diminue le risque de se tromper dans les conclusions.

Tableau 13 – Optimisation d'un plan d'expérience à simple entrée à k niveaux et n mesures par niveau

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	14	17	21	27
n	75	34	24	19	16	14	13	12	11	9	8	7	6
$\left(\frac{\sigma_A}{\sigma_\xi} \right)^2$	0,101	0,101	0,100	0,100	0,103	0,104	0,101	0,100	0,102	0,099	0,099	0,100	0,102
$N = kn$	150	102	96	95	96	98	104	108	110	126	136	147	162

6. Carré latin et analyse de la variance emboîtée

Il est possible de généraliser l'analyse de la variance à 3, 4, 5... facteurs contrôlés. Il n'est cependant pas certain que l'usage de ces généralisations soit à recommander. D'abord, parce que cela conduit à des expérimentations coûteuses au regard de ce qu'elles enseignent, en général. Ensuite, parce qu'il est souvent bien difficile de transformer les interactions deux à deux ou trois à trois mises à jour en conclusions physiques utilisables – en raison de la complexité même de ces interactions multiples.

Exemple : une analyse de la variance à quatre facteurs contrôlés A, B, C, D fait intervenir les interactions suivantes :

2 à 2 : AB, AC, AD, BC, BD, CD

3 à 3 : ABC, ACD, ABD, BCD

4 à 4 : ABCD

Soit onze interactions possibles pour lesquelles il faudrait pouvoir proposer un contenu physique !

6.1 Carré latin

Un cas particulier d'analyse de la variance à triple entrée est cependant fréquemment utilisé en pratique dans la mesure où il ne nécessite qu'un budget d'études assez limité. Il porte le nom de **carré latin**.

Dans un plan d'expérience en carré latin, les trois facteurs contrôlés vont intervenir avec un même nombre de niveaux chacun ($k_A = k_B = k_C$). Le plan d'expérience peut être représenté par un carré divisé en k_A colonnes correspondant aux k_A niveaux du facteur A et k_B lignes ($k_B = k_A$) correspondant aux k_B niveaux du facteur B. À toute case du carré $A_b B_c$ est associé un niveau C_c du facteur C, de façon que sur chaque ligne et sur chaque colonne du carré apparaisse une seule fois chacun des k_C niveaux du facteur C.

Cependant, s'agissant d'un plan d'expérience limité, on ne s'étonnera pas qu'il ne permette pas de tirer toutes les conclusions qu'on tirerait d'une analyse de la variance classique. On propose de l'étudier sur un exemple.

■ Exemple 4

Des ruptures en service de l'isolant en polythène de câbles téléphoniques apparaissent être très irrégulières. On se propose de rechercher si les irrégularités constatées peuvent provenir, au stade de la fabrication, de :

- la qualité de la charge d'isolation employée ;
- l'état de la boudineuse qui effectue l'isolation ;
- le pas de quartage utilisé.

À cette fin, on réalise 25 échantillons portant sur :

- 5 qualités de charge (repérées 1, 2, 3, 4, 5) ;
- 5 boudineuses (repérées A, B, C, D, E) ;
- 5 pas de quartage (repérés a, b, c, d, e).

L'association de ces paramètres est effectuée conformément au tableau 14 de telle sorte que le « croisement » des différents facteurs soit « bien » assuré.

Les résultats d'essais de traction sont reportés sur le tableau 15. Il est alors possible de calculer (tableau 16) les différentes grandeurs utilisées dans l'analyse. On a pris soin d'effectuer un changement de variable $2(x - 170)$ pour manipuler des nombres plus simples. On aboutit au tableau 17 d'analyse du carré latin.

Tableau 14 – Conception d'un plan d'expérience du type carré latin

Charge		Boudineuse				
		A	B	C	D	E
Pas	a	1	3	5	4	2
	b	5	4	2	1	3
	c	2	1	3	5	4
	d	4	2	1	3	5
	e	3	5	4	2	1

Les lignes correspondent aux pas de quartage (premier facteur contrôlé), les colonnes à la boudineuse (deuxième facteur contrôlé) ; les qualités de charge (troisième facteur contrôlé) sont indiquées dans les cases, de façon que chaque charge apparaisse une fois et une seule dans chaque ligne et dans chaque colonne.

Tableau 15 – Résultats de l'exemple 4 de carré latin. (Essais de traction)

Résultats d'essai (MPa)		Boudineuse				
		A	B	C	D	E
Pas	a	164	169	170	171	172,5
	b	169	172	174,5	170	170
	c	173	170,5	166	172	169
	d	169	170,5	166	166	168
	e	166	174	173	174	169,5

On constate que :

— facteur « pas » :

$$\frac{v_1}{v_R} = 4,02 > F_{0,05}(4; 12) = 3,26$$

— facteur « boudineuse » :

$$\frac{v_2}{v_R} = 2,62 < F_{0,05}(4; 12) = 3,26$$

— facteur « charge » :

$$\frac{v_3}{v_R} = 10,40 > F_{0,01}(4; 12) = 5,41$$

● Conclusions

On en déduit qu'on doit rejeter l'hypothèse d'homogénéité, au seuil $\alpha = 5\%$ pour le facteur « pas », au seuil $\alpha = 1\%$ pour le facteur « charge ». En revanche, on peut, au seuil $\alpha = 5\%$, éliminer l'hypothèse d'influence du facteur « boudineuse ». En conséquence, on conseillera d'être par priorité attentif au facteur « pas » pour remédier aux anomalies constatées.

Remarque : dans ce type d'analyse en carré latin, la pseudorésiduelle utilisée se déduit par différence de la variation totale T et de la somme des effets principaux. Il ne s'agit donc pas de la résiduelle habituelle due aux seuls facteurs non contrôlés. Elle intègre les éventuelles interactions que le carré latin ne peut déterminer ; ce qui conduit à dire parfois, de façon approximative, que le carré latin pose comme hypothèse qu'il n'y a pas d'interaction.

Tableau 16 – Calculs pratiques en vue de l'analyse du carré latin (exemple 4)

Résultats de mesure, après changement de variable, et moyennes pour les facteurs « pas » et « boudineuse »								Résultats, après changement de variable, et moyennes pour les facteurs « pas » et « charge »						
Valeurs	Boudineuse					Sommes par ligne	Moyennes par ligne	Charge					Valeurs	
	A	B	C	D	E			1	2	3	4	5		
Pas	a	-12	-2	0	2	5	-7	-1,4	-12	5	-2	2	0	a
	b	-2	4	9	0	0	11	2,2	0	9	0	4	-2	b
	c	6	1	-8	4	-2	1	0,2	1	6	-8	-2	4	c
	d	-2	1	-8	-8	-4	-21	-4,2	-8	1	-8	-2	-4	d
	e	-8	8	6	8	-1	13	2,6	-1	8	-8	6	8	e
Sommes par colonne	-18	12	-1	6	-2	Somme générale : -3	Somme des moyennes par ligne : -0,6	-20	29	-26	8	6	Sommes par colonne	
Moyennes par colonne	-3,6	2,4	-0,2	1,2	-0,4	Somme des moyennes par colonne : -0,6	Moyenne générale : -0,12	-4,0	5,8	-5,2	1,6	1,2	Moyenne par colonne	

Carrés des résultats et des moyennes pour les facteurs « pas » et « boudineuse »								Carrés des résultats et des moyennes pour les facteurs « pas » et « charge »						
Carrés des valeurs	Boudineuse					Sommes des carrés par ligne	Carrés des moyennes	Charge					Carrés des valeurs	
	A	B	C	D	E			1	2	3	4	5		
Pas	a	144	4	0	4	25	177	1,96	144	25	4	4	0	a
	b	4	16	81	0	0	101	4,84	0	81	0	16	4	b
	c	36	1	64	16	4	121	0,04	1	36	64	4	16	c
	d	4	1	64	64	16	149	17,64	64	1	64	4	16	d
	e	64	64	36	64	1	229	6,76	1	64	64	36	64	e
Sommes des carrés par colonne	252	86	245	148	46	Somme générale : 777	31,24 × 5 = 156,20	210	207	196	64	100	Sommes par colonne	
Carrés des moyennes par colonne	12,96	5,76	0,04	1,44	0,16	20,36 × 5 = 101,00	$\Delta = 0,0144 \times 25 = 0,3600$	16,00	33,64	27,04	2,56	1,44	80,68 × 5 = 405,40	

Tableau 17 – Tableau d'analyse du carré latin (exemple 4)

Variations	Sommes des carrés	Degrés de liberté	Quotients
Variation due au pas	156,20 - 0,36 = 155,84	4	$v_1 = 38,96$
Variation due à la boudineuse	101,80 - 0,36 = 101,44	4	$v_2 = 25,36$
Variation due à la charge	403,40 - 0,36 = 403,04	4	$v_3 = 100,76$
Variation « résiduelle »	$R = 776,64 - 155,84 - 101,44 - 403,04 = 116,32$	12	$v_R = 9,69$
Variation totale	$T = 777 - 0,36 = 776,64$		

6.2 Analyse de la variance emboîtée

Un autre cas particulier important se prête bien à l'application concrète : c'est celui où **les facteurs sont hiérarchisés** – on dit **emboîtés** – les uns par rapport aux autres, selon le schéma de la figure 3.

6.2.1 Construction de l'arbre

On supposera que l'on rencontre le même nombre de sommets dans tout trajet qui, partant du pied de l'arbre, conduit à l'une quelconque des branches extrêmes. On appelle *ordre du plan* le nombre commun de sommets ainsi rencontrés (la figure 3 est tracée pour un plan d'ordre 3).

Les sommets de même rang correspondent aux différentes modalités d'intervention d'un même facteur contrôlé : facteur A pour les sommets de rang 1, etc.

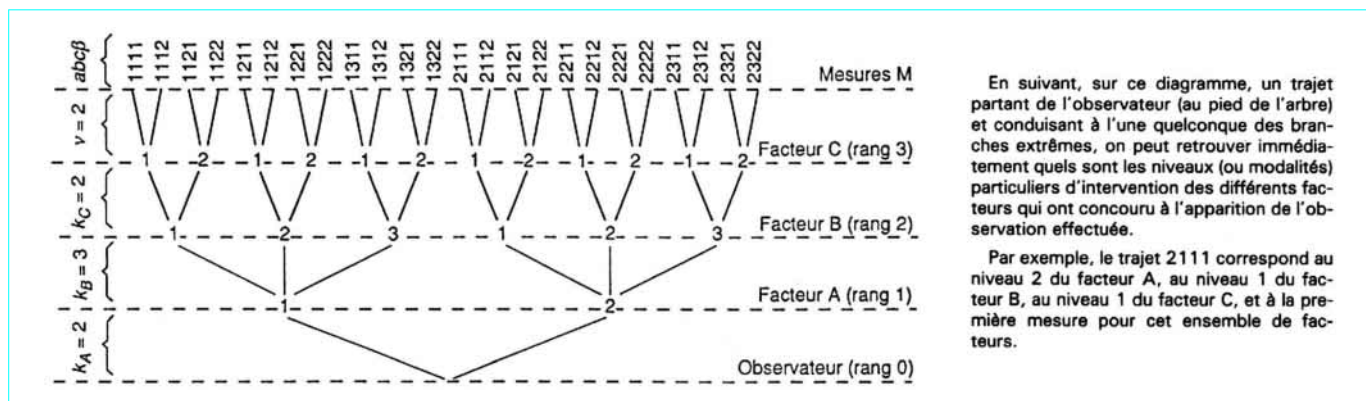


Figure 3 – Plan d'expérience se prêtant à un dépouillement par analyses emboîtées

On supposera enfin qu'il part un même nombre de branches de chacun des sommets d'un même rang : cette condition correspond à un plan d'expérience dit « orthogonal » (par exemple, de chaque sommet du rang 1 partent trois branches).

6.2.2 Notations

On notera par :

- k_A le nombre de branches partant du pied de l'arbre vers les sommets A ;
- k_B le nombre de branches partant de chaque sommet A vers les sommets B ;
- k_C le nombre de branches partant de chaque sommet B vers les sommets C ;
- v le nombre de branches partant de chaque sommet C (branches extrêmes).

Le nombre total de mesures est donc égal à :

$$N = k_A k_B k_C v$$

6.2.3 Calculs des variations

Partant des sommets C de rang le plus élevé, on peut considérer l'ensemble des observations recueillies $x_{abc\beta}$ comme les données d'une analyse de la variance à simple entrée, dont les différents niveaux correspondraient aux sommets de rang C. Il est alors possible de calculer la **variation intraclasse ou résiduelle** correspondant à cette analyse, soit :

$$M|(ABC) = \sum_{abc\beta} (x_{abc\beta} - x_{abc\bullet})^2$$

qui caractérise la somme des dispersions des mesures provenant d'un même sommet de rang C (et donc, *a fortiori*, d'un même sommet A et d'un même sommet B), le trajet menant de l'observateur à un sommet de rang C étant unique. Cette remarque justifie la notation $M|(ABC)$ adoptée, qu'on lit « M si ABC ».

La moyenne $x_{abc\bullet}$ de toutes les observations partant d'un même sommet C peut être prise comme mesure caractérisant ce sommet.

Partant alors des sommets de rang B, on peut considérer l'ensemble des moyennes $x_{abc\bullet}$ comme les données d'une analyse de la variance à simple entrée, dont les différents niveaux correspondraient aux sommets de rang B. Il est alors possible de calculer la variation intraclasse ou résiduelle correspondante, soit :

$$C|(AB) = \sum_{abc} v(x_{abc\bullet} - x_{ab\bullet\bullet})^2$$

qui caractérise la somme, pour tous les sommets B, des dispersions des moyennes $x_{abc\bullet}$ caractérisant tous les sommets C reliés à un même sommet B.

Le même processus peut s'étendre inclusivement jusqu'aux sommets A. Partant en dernier lieu de l'observateur, on peut calculer la variation :

$$A = \sum_a k_B k_C v (x_{a\bullet\bullet\bullet} - x_{\bullet\bullet\bullet\bullet})^2$$

qui caractérise la dispersion entre sommets A (**effet principal du facteur A**).

On a ainsi effectué une suite d'analyses à simple entrée qui s'emboîtent les unes dans les autres, ce qui justifie l'appellation adoptée pour ce plan d'expériences.

Comme il est facile de le vérifier, la somme des variations intra-classes de toutes ces analyses et de l'effet principal A est équivalente à la **variation globale (ABCM)** :

$$(ABCM) = A + B | A + C | (AB) + M | (ABC)$$

On présente, comme d'usage, l'ensemble de ces résultats sous la forme du tableau 18 d'analyse de la variance.

6.2.4 Interprétation d'une suite d'analyses emboîtées

Ce plan d'expériences correspond au modèle mathématique défini par la formule suivante :

$$x_{abc\beta} = \lambda_0 + \mathcal{A}_a + \mathcal{B}_{ab} + \mathcal{C}_{abc} + \xi_{abc\beta}$$

- avec λ_0 est une constante,
- \mathcal{A}_a est une terme correctif intéressant chacun des niveaux du facteur A,
- \mathcal{B}_{ab} est un terme correctif intéressant chacun des niveaux du facteur B,
- \mathcal{C}_{abc} est un terme correctif intéressant chacun des niveaux ou modalités d'intervention du facteur C,
- $\xi_{abc\beta}$ est une fluctuation aléatoire résiduelle caractérisant la dispersion entre mesures issues d'un même sommet C. Nous supposons que $E[\xi] = 0$ et que la distribution de ξ est une distribution normale d'écart-type σ_ξ .

Pour effectuer l'**interprétation de l'analyse emboîtée**, deux cas sont à considérer.

■ Les modalités d'intervention des facteurs A, B et C sont choisies au hasard

Nous considérons alors les termes correctifs $\mathcal{A}_a, \mathcal{B}_{ab}$ et \mathcal{C}_{abc} comme des variables aléatoires indépendantes normales, avec :

$$\begin{aligned} E[\mathcal{A}_a] &= 0 & \text{var}(\mathcal{A}_a) &= \sigma_A^2 \\ E[\mathcal{B}_{ab}] &= 0 & \text{var}(\mathcal{B}_{ab}) &= \sigma_B^2 \\ E[\mathcal{C}_{abc}] &= 0 & \text{var}(\mathcal{C}_{abc}) &= \sigma_C^2 \end{aligned}$$

■ Le choix des modalités d'intervention des facteurs A, B et C est systématique

Nous considérons alors les termes correctifs comme des constantes caractérisant le choix des modalités d'action des facteurs A, B et C. Nous ne perdrons pas de généralité en supposant que ces constantes vérifient, de plus, les relations :

$$\begin{aligned} \sum_a \mathcal{A}_a &= 0 & \text{ou } \mathcal{A}_\bullet &= 0 \\ \sum_b \mathcal{B}_{ab} &= 0 & \text{ou } \mathcal{B}_{a\bullet} &= 0 & \text{et par suite } \mathcal{B}_{\bullet\bullet} &= 0 \\ \sum_c \mathcal{C}_{abc} &= 0 & \text{ou } \mathcal{C}_{abc\bullet} &= 0 & \text{et par suite } \mathcal{C}_{\bullet\bullet\bullet} &= 0 \end{aligned}$$

Le tableau 19 fournit les espérances mathématiques des quotients, d'après le mode d'intervention des facteurs contrôlés.

On déduira immédiatement de ce tableau les valeurs des espérances mathématiques des quotients, dans le cas d'un choix mixte des niveaux des facteurs contrôlés.

6.2.5 Recherche des termes significatifs

La recherche des termes significatifs se fera selon des processus différents selon la nature du choix des modalités d'intervention des facteurs A, B et C.

■ Le choix est aléatoire

Le quotient $v_{M|(ABC)}$ servira de terme de comparaison pour déterminer si l'écart-type σ_C peut ou non être considéré comme nul, au seuil α .

Si l'on doit considérer σ_C comme différent de zéro, il faudra alors utiliser le quotient $v_{C|(AB)}$ pour déterminer si l'écart-type σ_B est nul, au seuil α .

Enfin, si l'on doit considérer σ_B comme différent de zéro, il faudra utiliser le quotient $v_{B|A}$ pour déterminer si l'écart-type σ_A est nul, au seuil α .

■ Le choix est systématique

On utilisera toujours le quotient $v_{M|(ABC)}$ comme terme de comparaison pour déterminer si l'un quelconque des trois effets A, B|A et C|(AB) est significatif, au seuil α .

Tableau 18 – Tableau d'analyse de la variance emboîtée

Variations	Sommes des carrés	Degrés de liberté	Quotients
Effet principal du facteur A	$A = \sum_a k_B k_C v (x_{a\bullet\bullet} - x_{\bullet\bullet\bullet})^2$	$k_A - 1$	$v_A = \frac{A}{k_A - 1}$
Somme des effets principaux du facteur B, pour un même A	$B A = \sum_{ab} k_C v (x_{ab\bullet} - x_{a\bullet\bullet})^2$	$k_A (k_B - 1)$	$v_{B A} = \frac{B A}{k_A (k_B - 1)}$
Somme des effets principaux du facteur C, pour un même B et un même A	$C (AB) = \sum_{abc} v (x_{abc\bullet} - x_{ab\bullet\bullet})^2$	$k_A k_B (k_C - 1)$	$v_{C (AB)} = \frac{C (AB)}{k_A k_B (k_C - 1)}$
Variation entre mesures, pour un même C, un même B et un même A (variation résiduelle)	$M (ABC) = \sum_{abc\beta} (x_{abc\beta} - x_{abc\bullet})^2$	$k_A k_B k_C (v - 1)$	$v_{M (ABC)} = \frac{M (ABC)}{k_A k_B k_C (v - 1)}$
Variation totale	$(ABCM) = \sum_{abc\beta} (x_{abc\beta} - x_{\bullet\bullet\bullet})^2$	$k_A k_B k_C v - 1$	

Tableau 19 – Calcul des espérances mathématiques des quotients de l'analyse emboîtée

	Le choix des modalités d'intervention des facteurs A, B et C est aléatoire	Le choix des modalités d'intervention des facteurs A, B et C est systématique
$E[v_A]$	$k_B k_C v \sigma_A^2 + k_C v \sigma_B^2 + v \sigma_C^2 + \sigma_\xi^2$	$\frac{k_B k_C v}{k_A - 1} \sum_a \mathcal{A}_a^2 + \sigma_\xi^2$
$E[v_{B A}]$	$k_C v \sigma_B^2 + v \sigma_C^2 + \sigma_\xi^2$	$\frac{k_C v}{k_A (k_B - 1)} \sum_{ab} \mathcal{B}_{ab}^2 + \sigma_\xi^2$
$E[v_{C (AB)}]$	$v \sigma_C^2 + \sigma_\xi^2$	$\frac{v}{k_A k_B (k_C - 1)} \sum_{abc} \mathcal{C}_{abc}^2 + \sigma_\xi^2$
$E[v_{M (ABC)}]$	σ_ξ^2	σ_ξ^2

On rappelle que ces expressions sont écrites dans le cas où tous les facteurs emboîtés sont significatifs. Il faut, comme déjà vu dans les paragraphes précédents, les adapter – avec des valeurs nulles – dans le cas où un (ou plusieurs) facteurs ne serait(en)t pas jugé(s) significatif(s) au seuil α .

6.3 Exemple d'analyse de la variance emboîtée

■ Exemple 5

Pour exécuter le revenu de petites pièces en acier, on dispose d'un four à circulation d'air forcé, qui contient un panier comportant 6 étages sur lesquels on place les pièces à traiter (figure 4). Ces étages sont numérotés de 1 à 6, en sens inverse de la circulation de l'air chaud.

On se propose de déterminer s'il existe une différence systématique de dureté entre les pièces traitées sur les différents étages. Dans cette étude, il faudra tenir compte de la dispersion éventuelle de dureté entre pièces ainsi que de l'hétérogénéité de dureté au sein d'une même pièce.

● Plan d'expérience

On prélève donc sur chacun des 6 étages (facteur A, systématique, du premier rang, $k_A = 6$) deux pièces (facteur B, aléatoire, du deuxième rang, $k_B = 2$) sur lesquelles on fait deux mesures de dureté ($v = 2$). Les résultats de mesure sont reportés sur le tableau 20.

● Analyse de la variance

On a calculé sur le tableau 20 les sommes par pièce, les sommes par étage, ainsi que le total général. Il est commode d'effectuer les calculs dans l'ordre suivant.

a) Variations « entre étages »

En observant que les sommes « par étage » sont des sommes de 4 mesures et que le total général est une somme de 24 mesures, il vient (cf. formule du tableau 3) :

$$A = \frac{42^2 + 45^2 + 30^2 + 19^2 + 15^2 + 14^2}{4} - \frac{165^2}{24} = 233,375$$

b) Variations « entre pièces d'un même étage »

Pour calculer ce terme, on doit effectuer la somme des résultats de 6 analyses de la variance à simple entrée indépendantes ; chacune d'elles correspondant aux variations entre pièces d'un même étage. Nous n'effectuerons pas ces analyses individuelles, car il est possible de calculer directement la somme de leurs résultats. En observant que les sommes par pièce sont des sommes de 2 mesures, il vient :

$$B|A = \frac{18^2 + 24^2 + 23^2 + 22^2 + 16^2 + 14^2 + 11^2 + 8^2 + 4^2 + 11^2 + 8^2 + 6^2}{2} - \frac{42^2 + 45^2 + 30^2 + 19^2 + 15^2 + 14^2}{4} = 25,75$$

c) Variations entre mesures d'une même pièce

On doit ici effectuer 12 analyses de la variance indépendantes à simple entrée, correspondant aux 12 pièces examinées. En faisant la somme des résultats de ces analyses, il vient :

$$M|(AB) = 10^2 + 12^2 + 12^2 + \dots + 4^2 + 4^2 + 1^2 + 5^2 - \frac{18^2 + 24^2 + \dots + 8^2 + 6^2}{2} = 23,50$$

On a établi, d'après ces résultats, le tableau 21 d'analyse de la variance que l'on a complété en y faisant figurer l'espérance mathématique des quotients, calculée d'après les résultats du paragraphe précédent.

Étages A	1		2		3		4		5		6																																																																		
Pièces B	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2																																																																	
Mesures M	10	12	12	12	7	6	5	3	2	7	4	1		8	12	11	10	9	8	6	5	2	4	4	5	Sommes par pièce	18	24	23	22	16	14	11	8	4	11	8	6	Sommes par étage	42		45		30		19		15		14		Total général	165												Origine : 30 Rockwell C - Unité : 1 point Rockwell C												
	8	12	11	10	9	8	6	5	2	4	4	5																																																																	
Sommes par pièce	18	24	23	22	16	14	11	8	4	11	8	6																																																																	
Sommes par étage	42		45		30		19		15		14																																																																		
Total général	165																																																																												
Origine : 30 Rockwell C - Unité : 1 point Rockwell C																																																																													

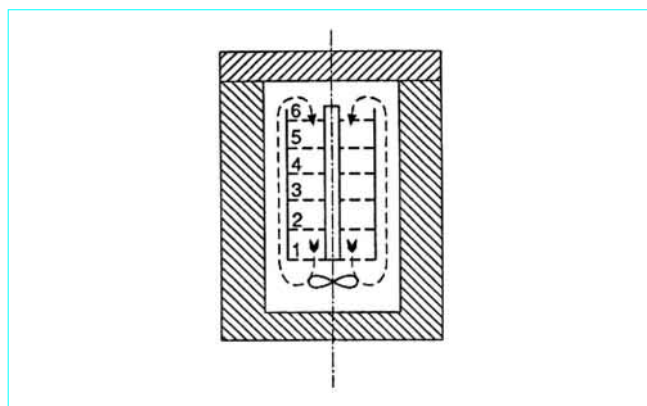


Figure 4 – Four à circulation d'air forcé

Variations	Sommes des carrés	Degrés de liberté	Quotients	Espérances mathématiques des quotients
Variation entre étages	$A = 233,375$	$k_A - 1 = 5$	$v_A = 46,675$	$\frac{4}{5} \sum_a M_a^2 + 2\sigma_B^2 + \sigma_\xi^2$
Variation entre pièces d'un même étage	$B A = 25,75$	$(k_B - 1) k_A = 6$	$v_{B A} = 4,292$	$2\sigma_B^2 + \sigma_\xi^2$
Variation entre mesures d'une même pièce	$M (AB) = 23,50$	$k_A k_B (v - 1) = 12$	$v_{M (AB)} = 1,958$	σ_ξ^2
Variation totale	$(ABM) = 282,625$	23		

● Interprétation du tableau d'analyse de la variance

On déduit du tableau d'analyse de la variance les conclusions suivantes :

a) l'hétérogénéité de dureté *au sein d'une même pièce* est caractérisée par un *écart-type* dont on peut estimer la valeur à :

$$\hat{\sigma}_\xi = \sqrt{1,958} \approx 1,4 \text{ point Rockwell}$$

soit, approximativement, une dispersion totale de la dureté au sein d'une même pièce de :

$$\pm (3,09 \times 1,4) = \pm 4,3 \text{ points Rockwell}$$

Nota : rappelons en effet que 99,8 % des valeurs (celles-ci étant distribuées suivant la loi de Gauss) sont comprises dans un intervalle $[-3,09 \sigma ; 3,09 \sigma]$ autour de la moyenne.

b) Il n'est pas possible, au seuil $\alpha = 5 \%$, de mettre en évidence de différence systématique de dureté *entre pièces d'un même étage*. En effet, le quotient $v_{B|A}$ n'est pas significatif par rapport au quotient $v_{M|(AB)}$:

$$\frac{v_{B|A}}{v_{M|(AB)}} = \frac{4,292}{1,958} = 2,19 < F_{0,05}(6; 12) = 3,00$$

On peut donc admettre que l'écart-type σ_B est nul.

c) Il existe par contre, au seuil $\alpha = 5 \%$, des différences significatives *entre étages*, comme le montre la comparaison des quotients v_A et $v_{B|A}$:

$$\frac{v_A}{v_{B|A}} = \frac{46,675}{4,292} = 10,9 > F_{0,01}(5; 6) = 8,75$$

d) On peut déduire du tableau de données des estimations des *duretés moyennes* des pièces traitées sur chaque étage. Ces estimations sont entachées d'une erreur approximative (limites de confiance pour un seuil de 5 %) donnée par application de la formule de Student, dans ce cas particulier.

Pour calculer la dureté de chacune des 12 pièces, on dispose de 24 mesures. Le nombre de degrés de liberté de la loi de Student est égal à la différence du nombre de mesures (24) et du nombre de relations utilisées pour effectuer les calculs (12). Ce nombre est donc égal à 12. Par ailleurs, nous avons conclu qu'on ne peut mettre ici en évidence de différence de dureté entre pièces d'un même étage. Pour chaque étage, 4 mesures interviennent pour déterminer $\hat{\sigma}_\xi$. De ce fait, l'intervalle de confiance à 95 % est :

$$\pm \left[t_{0,05}(12) \cdot \frac{\hat{\sigma}_\xi}{\sqrt{4}} \right] = \pm \left[2,179 \frac{1,4}{2} \right] = 1,5 \text{ point Rockwell}$$

On obtient ainsi les duretés moyennes suivantes :

$$1^{\text{er}} \text{ étage : } \left(30 + \frac{42}{4} = 40,5 \right) \pm 1,5 \text{ point Rockwell}$$

$$2^{\text{e}} \text{ étage : } \left(30 + \frac{45}{4} = 41,2 \right) \pm 1,5 \text{ point Rockwell}$$

$$3^{\text{e}} \text{ étage : } \left(30 + \frac{30}{4} = 37,5 \right) \pm 1,5 \text{ point Rockwell}$$

$$4^{\text{e}} \text{ étage : } \left(30 + \frac{19}{4} = 34,7 \right) \pm 1,5 \text{ point Rockwell}$$

$$5^{\text{e}} \text{ étage : } \left(30 + \frac{15}{4} = 33,7 \right) \pm 1,5 \text{ point Rockwell}$$

$$6^{\text{e}} \text{ étage : } \left(30 + \frac{14}{4} = 33,5 \right) \pm 1,5 \text{ point Rockwell}$$

7. Analyse de la régression

Lorsqu'a été mise en évidence l'influence significative d'un facteur (ou d'une interaction) dans le cas du choix systématique des niveaux du facteur contrôlé, il est naturel de chercher une **fonction représentant le phénomène**. Le cas le plus fréquent est celui d'une fonction monotone (croissante ou décroissante) qu'on peut toujours – au moyen d'une anamorphose éventuellement – représenter sous forme d'une **fonction linéaire**. Ainsi la parabole $y = ax^2$ devient une droite $y = at$ en posant $x = \sqrt{t}$, l'exponentielle $y = ae^{bx}$ devient une droite $t = -bx + m$ en posant $t = \ln a$ et $m = \ln y$, etc.

Remarque : dans ce genre de problème, les deux variables x et y ne jouent pas des rôles symétriques. x est la **variable d'entrée**, celle dont on s'est fixé la valeur dans le plan d'expérience, y est la **variable de sortie**, celle qui résulte de la mesure – et qui, généralement, incorpore au passage toutes les raisons exprimées dans le premier paragraphe d'être distribuée selon une loi de Gauss. Il faudra être particulièrement prudent dans l'utilisation des résultats de la régression ; s'il est toujours valide de « prédire » la valeur de y pour une valeur de x donnée, il est nécessaire de bien réfléchir à la nature physique du problème avant de tenter de « prédire » la valeur de x pour une valeur de y donnée.

7.1 Relevé des observations

Pour chaque valeur x_i de la variable d'entrée, on obtient plusieurs (n_i) résultats de mesure :

$$Y_{i1} ; Y_{i2} \dots Y_{in_i}$$

Le nombre total d'essais est :

$$N = \sum_{i=1}^p n_i$$

Ces résultats sont reportés sur le tableau **22**.

Tableau 22 – Résultats utilisés dans l'analyse de la régression

Variable d'entrée	Variable de sortie
x_1	$Y_{11} \quad Y_{12} \dots Y_{1n_1}$
x_2	$Y_{21} \quad Y_{22} \dots Y_{2n_2}$
\vdots	$\dots \dots \dots$
x_i	$Y_{i1} \dots Y_{ij} \dots Y_{in_i}$
\vdots	$\dots \dots \dots$
x_p	$Y_{p1} \quad Y_{p2} \dots Y_{pn_p}$

Le nombre total d'essais est : $N = \sum_{i=1}^p n_i$

On rappelle que la variable d'entrée et la variable de sortie ne jouent pas des rôles symétriques.

7.2 Hypothèse de la régression linéaire

Si les résultats peuvent être mis sous forme d'une régression linéaire, l'expression de la variable de sortie y est de la forme :

$$y = \alpha + \beta x + \xi$$

où α et β sont des constantes,

ξ une fluctuation aléatoire d'espérance mathématique nulle.

Compte tenu de la remarque précédente, on suppose que ξ suit une loi normale centrée, d'écart-type σ_ξ indépendant des valeurs de la variable d'entrée x . On retrouve là une hypothèse liée à la nature et au rôle des facteurs non contrôlés.

Dans ces conditions, la distribution de la variable de sortie suit aussi une loi normale. Son espérance mathématique est :

$$E[y] = \alpha + \beta x$$

Son écart-type est :

$$\sigma_y = \sigma_\xi$$

Le phénomène peut être représenté dans un plan par une droite Δ , appelée **droite de la régression théorique de y en x**, dont l'équation est :

$$E[y] = \alpha + \beta x$$

On se reportera à la remarque précédente pour bien distinguer les sens physiques de la variable d'entrée et de la variable de sortie.

7.3 Régression linéaire

7.3.1 Estimation de la variance d'erreur $\hat{\sigma}_\xi^2$

Une analyse de la variance à simple entrée effectuée sur les valeurs de la variable de sortie y permet d'obtenir une estimation $\hat{\sigma}_\xi^2$ de la variance d'erreur σ_ξ^2 . Pour cela, on calcule, comme précédemment aux paragraphes 2 et 3, en utilisant les notations du tableau 22 (n_i nombre de mesures pour le niveau i de la variable d'entrée, p nombre de niveaux pour la variable d'entrée, N nombre total de mesures) :

— la variation totale T :

$$T = \sum_{ij} (y_{ij})^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{ij} y_{ij} \right)^2$$

— la variation interclasse A :

$$A = \sum_i \left[\frac{1}{n_i} \left(\sum_j y_{ij} \right)^2 \right] - \frac{1}{N} \left(\sum_{ij} y_{ij} \right)^2$$

avec $\Delta = \frac{1}{N} \left(\sum_{ij} y_{ij} \right)^2$ terme correctif ;

— la variation résiduelle R :

$$R = T - A$$

— l'estimation $\hat{\sigma}_\xi^2$ de σ_ξ^2 :

$$\hat{\sigma}_\xi^2 = \frac{R}{N - p}$$

7.3.2 Droite de régression empirique

Puisqu'on ne connaît pas les valeurs des paramètres de la droite théorique de régression Δ d'équation $E[y] = \alpha + \beta x$, on en cherche une estimation D appelée **droite de régression empirique**. Son équation sera :

$$Y - y_{..} = b(x - x_{..})$$

avec $x_{..} = \frac{\sum_{i=1}^p n_i x_i}{N}$ moyenne sur x de l'ensemble des observations,

$y_{..} = \frac{\sum_{ij} y_{ij}}{N}$ moyenne sur y de l'ensemble des observations.

b , le coefficient empirique de régression, est obtenu par la méthode des moindres carrés, de y en x :

$$b = \frac{s_2}{s_1}$$

$$\text{avec } s_1 = \sum_i n_i (x_i)^2 - \frac{1}{N} \left[\sum_i n_i x_i \right]^2$$

$$s_2 = \sum_i x_i \left[\sum_j y_{ij} \right] - \frac{1}{N} \left[\sum_i n_i x_i \right] \left[\sum_{ij} y_{ij} \right]$$

Cette droite de régression D , calculée, permet d'associer à toute valeur x_i de la variable d'entrée une valeur Y_i – appelée « **valeur ajustée** » – de la variable de sortie :

$$Y_i = y_{..} + b(x_i - x_{..})$$

7.3.3 Caractère significatif de la régression

Mais ce n'est pas parce que des calculs sont possibles qu'ils ont un sens, en d'autres termes, que les résultats obtenus sont significatifs. L'ingénieur sait bien que rien ne serait pire que de « traîner » des calculs théoriques qui n'auraient pas de signification physique.

Afin de juger du caractère significatif de la régression, on va décomposer la variation interclasse A en deux contributions :

— la première est celle qu'introduit logiquement la régression linéaire lorsqu'elle est significative ; on l'appelle *contribution de la régression linéaire* ; sa valeur est :

$$S_1 = \sum_i n_i (Y_i - y_{..})^2$$

On remarque que $S_1 = s_1 (b)^2$.

— la seconde est celle qui reste après qu'on a expliqué la variation interclasse par la régression linéaire supposée significative ; on l'appelle *variation résiduelle par rapport à la régression linéaire* ; sa valeur est :

$$S_2 = \sum_i n_i (Y_i - y_{i.})^2 = A - S_1$$

On démontre que, comme au paragraphe 2, les grandeurs S_1 et S_2 sont statistiquement indépendantes et qu'elles suivent des lois de χ^2 à respectivement 1 et $p-2$ degrés de liberté.

Toutes ces grandeurs permettent de remplir le tableau 23 d'analyse de la régression, qui comporte tous les éléments permettant de juger, avec un risque consenti α , du caractère significatif ou non de la régression calculée en répondant aux questions suivantes.

Tableau 23 – Tableau d'analyse de la régression linéaire

Variations	Sommes des carrés	Degrés de liberté	Quotients
Contribution de la droite empirique de régression	$S_1 = s_1 (b)^2$	1	$v_1 = S_1$
Résiduelle par rapport à la droite empirique de régression	$S_2 = A - S_1$	$p - 2$	$v_2 = \frac{A - S_1}{p - 2}$
Variation intraclasse ou erreur	$R = T - A$	$N - p$	$v_R = \frac{T - A}{N - p}$
Variation totale	$T = \sum_{ij} y_{ij}^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{ij} y_{ij} \right)^2$	$N - 1$	

a) **Y a-t-il adéquation du modèle linéaire ?** Pour que le modèle linéaire puisse être considéré comme acceptable, au seuil α , il faut que l'inégalité suivante se trouve vérifiée :

$$\frac{V_2}{V_R} \leq F_{\alpha}(p - 2 ; N - p)$$

b) **La pente de la droite de régression est-elle significative ?** Pour que la pente de la droite de régression soit significativement différente de zéro, il faut que l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$\frac{V_1}{V_R} > F_{\alpha}(1 ; N - p)$$

■ Si cette dernière inégalité est vérifiée, on peut adopter la valeur b comme estimation du coefficient théorique de régression β . On calcule ensuite les valeurs ajustées de la variable de sortie y en utilisant la formule :

$$Y_i = y_{..} + b(x_i - x_{..})$$

■ Dans le cas contraire, on doit se contenter d'affirmer que les observations recueillies ne permettent pas d'exclure l'hypothèse de l'indépendance des variables d'entrée et de sortie. Dans ces conditions, le coefficient théorique de régression β peut être considéré comme nul et les valeurs ajustées de la variable de sortie y doivent être considérées comme toutes égales à la moyenne arithmétique globale des observations :

$$Y_i = y_{..} \text{ pour tout } i$$

Toutefois, si la conclusion d'une indépendance des variables x et y paraît surprenante, on pourra tenter de l'infirmar en multipliant le nombre des essais.

7.3.4 Espérance mathématique des quotients

Lorsque les réponses aux tests ont conclu à un effet significatif, on peut calculer les espérances mathématiques des quotients :

$$E(v_1) = s_1 \beta^2 + \sigma_{\xi}^2$$

$$E(v_R) = \sigma_{\xi}^2$$

Exemple 6

Pour disposer d'une loi de rupture différée de réservoirs en acier contenant de l'hydrogène gazeux, on a procédé à un programme d'essais accélérés. Alors que la pression de service envisagée est de 200 bars, les essais ont été conduits à 500, 400, 330 bars. Les résultats obtenus sont reportés sur le tableau 24. On se propose de déduire de ce programme une régression permettant d'extrapoler les résultats obtenus à la pression de service.

Comme pour beaucoup de phénomènes de rupture en service (fluage, fatigue, corrosion sous contrainte...), la littérature scientifique laisse supposer que la loi physique est de forme semi-logarithmique :

$$\sigma = \sigma_0 - \lg t_R$$

où σ est la contrainte de service,
 t_R le temps à rupture.

On commence donc par exprimer les résultats à l'aide de la variable de sortie auxiliaire :

$$y_{ij} = \lg t_{ij} \quad (\lg = \text{logarithme décimal})$$

Ceci conduit au tableau 25.

Tableau 24 – Tableau des résultats bruts de l'exemple 6

P (bars)	330	400	500
t_R (jours)	$t_{11} = 386$	$t_{21} = 249$	$t_{31} = 45$
	$t_{12} = 401$	$t_{22} = 350$	$t_{32} = 59$
	$t_{13} = 530$	$t_{23} = (1)$	$t_{33} = 59$
	$t_{14} = 663$		$t_{34} = 64$
	$t_{15} = 847$		$t_{35} = 73$
	$t_{16} = 914$		$t_{36} = 105$
			$t_{37} = 162$
			$t_{38} = 238$
			$t_{39} = 240$
			$t_{310} = 260$
			$t_{311} = 412$
			$t_{312} = 420$
Nombre d'essais $N = 20$	$n_1 = 6$	$n_2 = 2$	$n_3 = 12$

(1) fuite à l'embout.

Tableau 25 – Résultats de mesure de l'exemple 6, après changement de variable

$x_1 = 330$	$x_2 = 400$	$x_3 = 500$	$p = 3$
$y_{11} = 2,587$	$y_{21} = 2,396$	$y_{31} = 1,653$	
$y_{12} = 2,603$	$y_{22} = 2,544$	$y_{32} = 1,771$	
$y_{13} = 2,724$		$y_{33} = 1,771$	
$y_{14} = 2,822$		$y_{34} = 1,806$	
$y_{15} = 2,928$		$y_{35} = 1,863$	
$y_{16} = 2,961$		$y_{36} = 2,021$	
		$y_{37} = 2,210$	
		$y_{38} = 2,377$	
		$y_{39} = 2,380$	
		$y_{310} = 2,415$	
		$y_{311} = 2,615$	
		$y_{312} = 2,623$	
$n_1 = 6$	$n_2 = 2$	$n_3 = 12$	$N = 20$
$\sum_j y_{1j} = 16,625$	$\sum_j y_{2j} = 4,940$	$\sum_j y_{3j} = 25,505$	$\sum_{ij} y_{ij} = 47,07$
$\sum_j y_{1j}^2 = 46,193$	$\sum_j y_{2j}^2 = 12,213$	$\sum_j y_{3j}^2 = 55,571$	$\sum_{ij} y_{ij}^2 = 113,977$

Calculs

Il est alors possible de faire tous les calculs nécessaires.

Terme correctif :

$$\Delta = \frac{1}{N} \left[\sum_{ij} y_{ij} \right]^2 = 110,78$$

Variation totale :

$$T = \sum_{ij} y_{ij}^2 - \frac{1}{N} \left[\sum_{ij} y_{ij} \right]^2 = 113,97 - 110,78 = 3,19$$

Variation interclasse :

$$A = \sum_i \left\{ \frac{1}{n_i} \left[\sum_j y_{ij} \right]^2 \right\} - \frac{1}{N} \left[\sum_{ij} y_{ij} \right]^2 = 112,48 - 110,78 = 1,70$$

Variation résiduelle :

$$R = T - A = 3,19 - 1,70 = 1,49$$

Calcul de l'équation de la droite empirique de régression :

$$x_{\bullet} = \frac{\sum_i n_i x_i}{N} = 439$$

$$y_{\bullet\bullet} = \frac{\sum_{ij} y_{ij}}{N} = 2,35$$

$$s_1 = \sum_i n_i x_i^2 - \frac{1}{N} \left[\sum_i n_i x_i \right]^2 = 119 \cdot 10^3$$

$$s_2 = \sum_i x_i \left[\sum_{ij} y_{ij} \right] - \frac{1}{N} \left[\sum_i n_i x_i \right] \left[\sum_{ij} y_{ij} \right] = -449$$

$$b = \frac{s_2}{s_1} = -0,38 \cdot 10^{-2}$$

Droite empirique de régression :

$$\lg t_R = 2,35 - 0,38 \cdot 10^{-2} (x - 439)$$

Contribution de la régression linéaire :

$$S_1 = s_1 b^2 = \frac{s_2^2}{s_1} = 1,69$$

Variation résiduelle par rapport à la régression linéaire :

$$S_2 = A - S_1 = 10^{-2}$$

■ Conclusions

En utilisant les valeurs obtenues, on obtient le tableau 26 d'analyse de la régression, qui permet la discussion suivante, au seuil $\alpha = 5\%$:

— on constate que :

$$\frac{v_2}{v_R} = 0,11 < F_{0,05}(1; 17) = 4,45$$

d'où l'on conclut que la relation linéaire entre P et t_R représente de façon satisfaisante le phénomène ;

— on constate que :

$$\frac{v_1}{v_R} = 19,3 > F_{0,05}(1; 17) = 4,45$$

d'où l'on conclut que la pente est significative.

Tableau 26 – Tableau d'analyse de la régression linéaire de l'exemple 6		
Sommes des carrés	Degrés de liberté	Quotients
$S_1 = 1,69$	1	$v_1 = 1,69$
$S_2 = 10^{-2}$	1	$v_2 = 10^{-2}$
$R = 1,49$	17	$v_R = 8,76 \cdot 10^{-2}$
$T = 3,19$	19	

De ces deux conclusions, il vient que, avec un risque consenti de 5%, le phénomène étudié peut – pour l'acier, la géométrie et la technologie de fabrication considérés – être représenté par la relation :

$$\lg t_R = 2,35 - 0,38 \cdot 10^{-2} (x - 439)$$

où t_R est exprimé en jours et x en bars.

En particulier, si l'on fait l'hypothèse physique que le phénomène de rupture différée qui intervient est le même pour les pressions plus faibles, on peut extrapoler la droite de régression obtenue et estimer la durée de vie moyenne des réservoirs pour une pression de service de 200 bars. Il vient que pour $x = 200$, $\lg t_R$ vaut 3,26. D'où :

$$t_R = 1\ 810 \text{ jours}$$

Comme l'estimation de l'écart-type $\hat{\sigma}_\xi$ sur la distribution de $\lg t_R$ est fournie par :

$$\hat{\sigma}_\xi = \sqrt{v_R} = 0,296$$

on peut calculer la probabilité de rupture prématurée, avant une durée de vie donnée.

$\lg t_R$ est distribué, pour $x = 200$ bars, suivant une loi de Gauss de moyenne 3,26. La probabilité qu'une rupture intervienne en moins de 800 jours correspond à la variable normale réduite :

$$u = \frac{\lg 800 - 3,26}{0,296} = -1,20$$

On lit dans la table $\alpha = 0,115$ (cf. article [R 270] *Tables statistiques*). Il y a donc, dans cet exemple, un peu plus d'une chance sur 10 pour qu'une rupture intervienne en moins de 800 jours à $x = 200$ bars.

■ Remarques

● Dans l'interprétation ultérieure des courbes de régression, il convient de s'interroger sur la **signification** des extrapolations (au-delà du domaine de variables d'entrée expérimentées) et des interpolations (à l'intérieur de ce même domaine). Cette discussion ne peut relever que de l'**analyse physique** :

— pour extrapoler, elle doit conclure à la « stabilité » du phénomène en dehors du domaine d'expérimentation, comme dans l'exemple précédent ;

— pour interpoler, il faut être tout particulièrement attentif à d'éventuelles fluctuations périodiques qui seraient occultées par un choix malheureux des valeurs de la variable d'entrée choisies pour l'expérimentation (figure 5).

● Les ressources des mathématiques étant presque infinies, il est toujours possible de faire passer une courbe de degré $n-1$ quand on procède à une expérimentation avec n valeurs de la variable d'entrée. Des méthodes statistiques analogues à celle exposée dans ce paragraphe permettent d'ajuster la meilleure de ces courbes.

Cela ne dispense pas de réfléchir à la **signification physique** qu'aurait une telle courbe trouvée « significative ». Dans l'exemple n° 5 précédent, on aboutirait à une courbe du troisième degré, ce qui ne correspond à aucune signification physique. On ne peut que conseiller d'exercer à bon escient l'esprit critique qui fait partie de la culture profonde de l'ingénieur.

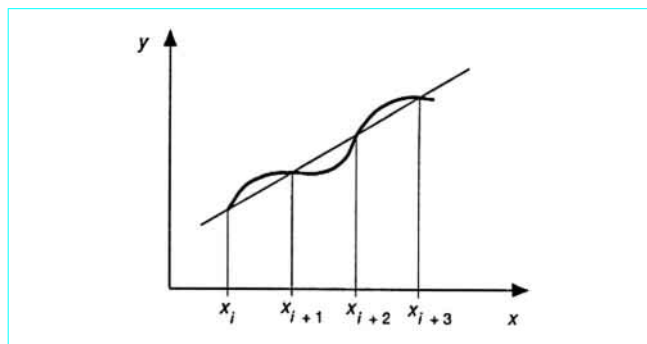


Figure 5 – Illustration d'un cas délicat pour l'analyse de la régression linéaire : une fluctuation périodique superposée à une tendance monotone linéaire peut être délicate à mettre en évidence

7.4 Détermination des intervalles de confiance

La droite D déterminée au paragraphe 7.3.2 précédent constitue la « meilleure droite possible ». Au sens de l'estimation statistique, elle constitue une *estimation ponctuelle*. Dès lors se pose la question analogue pour déterminer une *estimation par intervalles*.

■ Tout d'abord, il est possible de construire les intervalles de confiance pour σ_ξ^2 et β . La meilleure estimation de σ_ξ^2 est donnée par v_R . Comme la quantité $\frac{(N-p)v_R}{\sigma_\xi^2}$ est une variable de χ^2 à $N-p$ degrés de liberté, il vient :

$$\text{Prob} \left\{ \chi_{\alpha_1}^2(N-p) < \frac{(N-p)v_R}{\sigma_\xi^2} < \chi_{\alpha_2}^2(N-p) \right\} = \alpha_1 - \alpha_2$$

d'où l'intervalle de confiance à $\alpha_1 - \alpha_2$ de σ_ξ^2 :

$$\frac{(N-p)v_R}{\chi_{\alpha_2}^2(N-p)} < \sigma_\xi^2 < \frac{(N-p)v_R}{\chi_{\alpha_1}^2(N-p)}$$

■ Par ailleurs, le coefficient de régression empirique b est distribué suivant une loi normale de paramètres :

$$E[b] = \beta$$

$$\text{var}[b] = \frac{\sigma_\xi^2}{s_1} = \frac{v_R}{s_1}$$

Il vient que la quantité $\frac{b-\beta}{\sqrt{\frac{v_R}{s_1}}}$ est une variable de Student à $N-p$

degrés de liberté :

$$\text{Prob} \left\{ -t_\alpha(N-p) < \frac{b-\beta}{\sqrt{\frac{v_R}{s_1}}} < t_\alpha(N-p) \right\} = 1 - \alpha$$

d'où l'intervalle de confiance à $1 - \alpha$ pour β :

$$b - t_\alpha(N-p) \sqrt{\frac{v_R}{s_1}} < \beta < b + t_\alpha(N-p) \sqrt{\frac{v_R}{s_1}}$$

■ Plus généralement, il est possible – après des calculs assez longs – de déterminer une zone de confiance à $1 - \alpha$ relative à la droite théorique de régression Δ . On montre que cette zone est délimitée par une hyperbole d'équation :

$$Y - y_{..} = b(x - x_*) \left\{ 1 \pm \sqrt{\frac{2v_R F_\alpha(2; N-p)}{b^2 s_1} \left(1 + \frac{s_1}{N(x - x_*)^2} \right)} \right\}$$

dont les asymptotes ont pour équations :

$$Y - y_{..} = b(x - x_*) \left[1 \pm \sqrt{\frac{2v_R F_\alpha(2; N-p)}{b^2 s_1}} \right]$$

Sur la figure 6 tracée dans un cas réel d'analyse, on peut lire l'intervalle de confiance sur la variable de sortie Y , déterminé à partir de la zone de confiance. On constate que cet intervalle est minimal pour la valeur moyenne x_* , des valeurs choisies pour la variable d'entrée. On constate aussi qu'il s'élargit considérablement dans les zones d'extrapolation.

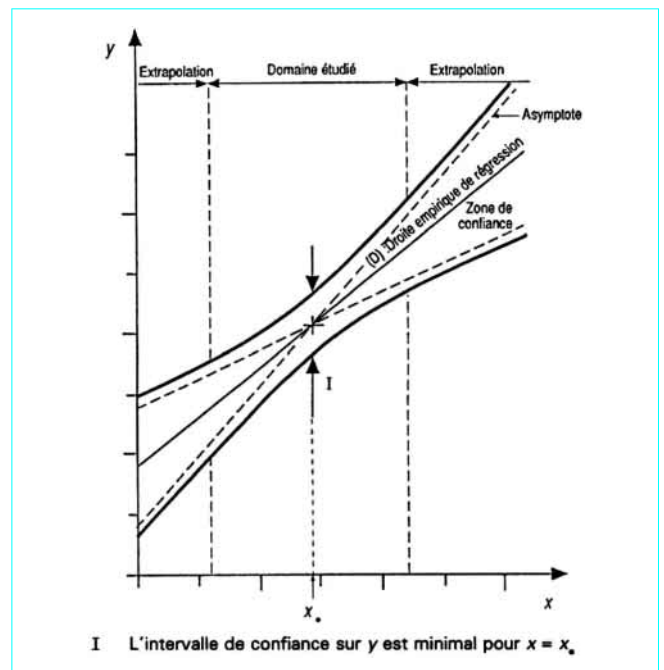


Figure 6 – Zone de confiance relative à la droite théorique de régression D