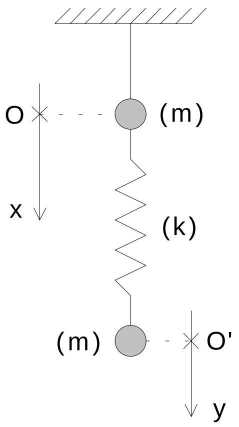
-EXERCICE 12.7-

• ENONCE :

« 2 billes et un ressort lâchés verticalement »



Deux billes de même masse m sont reliées par un ressort sans masse, de longueur à vide l_0 et de raideur k.
L'ensemble est suspendu à un plafond par l'intermédiaire d'un fil.
Le système est à l'équilibre lorsqu'on coupe le fil.

1) Quelle est l'accélération initiale de chacune des billes ?

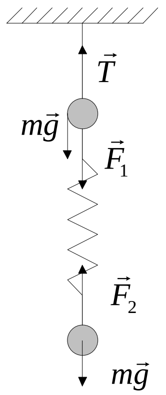
2) Déterminer le mouvement ultérieur des billes en exprimant les abscisses x(t) et y(t), comptées à partir des positions d'équilibre respectives des billes .

3) En déduire la longueur du ressort L(t).

• **CORRIGE :**

«2 billes et un ressort lâchés verticalement »

1) Effectuons un bilan des forces s'exerçant sur les 2 billes, et appliquons leur le PFD, le tout à $t=0^-$, puis à $t=0^+$:



$$t=0^-: \quad \boxed{\begin{aligned} \vec{T}+m\vec{g}+\vec{F}_1&=\vec{0} \\ m\vec{g}+\vec{F}_2&=\vec{0} \\ \vec{F}_1+\vec{F}_2&=\vec{0} \end{aligned}}$$

$$t=0^+: \quad \boxed{\begin{aligned} m\vec{g}+\vec{F}_1&=m\vec{a}_1 \\ m\vec{g}+\vec{F}_2&=m\vec{a}_2 \\ \vec{F}_1+\vec{F}_2&=\vec{0} \end{aligned}}$$

Rq : c'est parce que le ressort est **sans masse** que l'on a toujours $\vec{F}_1+\vec{F}_2=\vec{0}$

• l'énergie ne pouvant subir de discontinuité, il en est de même pour l'allongement d'un ressort ($E_P=\dfrac{1}{2}k(\Delta l)^2$) $\Rightarrow$ c'est également vrai pour les forces exercées aux extrémités du ressort, d'où :

$$\vec{F}_1(0^+)=\vec{F}_1(0^-)=-\vec{F}_2(0^-)=m\vec{g} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_1(0^+)=2\vec{g} \quad \text{et} \quad \vec{a}_2(0^+)=\vec{0}}$$

2) En appelant $L(t)$ la longueur du ressort, le PFD appliqué aux 2 billes, projeté sur un axe vertical orienté vers le bas, fournit :

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=mg+k[L(t)-l_0] \qquad \text{et} \qquad m\frac{d^2y(t)}{dt^2}=mg-k[L(t)-l_0]$$

• La longueur du ressort en l'état considéré est égale à la longueur à l'équilibre l_e, augmenté de la différence de déplacement de ses extrémités, soit : $L(t)=l_e+y(t)-x(t)$

A l'équilibre, le PFD appliqué à la bille du dessous avait donné :

$\vec{F}_2+m\vec{g}=\vec{0} \;\Rightarrow\; mg=k(l_e-l_0) \;\Rightarrow\; k[L(t)-l_0]=k[y(t)-x(t)]+mg$; d'où :

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega_0^2[x(t)-y(t)]=2g \quad (1) \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2y(t)}{dt^2}-\omega_0^2[x(t)-y(t)]=0 \quad (2)} \qquad \text{avec :} \quad \boxed{\omega_0^2=\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

• On fait le changement de variables : $u(t)=x(t)+y(t)$ et $v(t)=x(t)-y(t)$, puis on fait la somme (1) + (2) et la différence (1) – (2), ce qui donne :

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2}=2g \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2v(t)}{dt^2}+2\omega_0^2v(t)=2g$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u(t)=gt^2+At+B} \qquad \text{et} \qquad \boxed{v(t)=\frac{g}{\omega_0^2}+C\cos(\sqrt{2}\omega_0 t)+D\sin(\sqrt{2}\omega_0 t)}$$

• A t=0, on a : $\frac{dx}{dt}(0)=\frac{dy}{dt}(0)=0 \Rightarrow \frac{du}{dt}(0)=\frac{dv}{dt}(0)=0$; il en est de même pour $x(0)$ et $y(0)$, donc pour $u(0)$ et $v(0)$, ce qui conduit à : $u(t)=gt^2$ et $v(t)=\frac{g}{\omega_0^2}[1-\cos(\sqrt{2}\omega_0 t)] \Rightarrow$

$$\boxed{x(t)=\frac{u(t)+v(t)}{2}=\frac{gt^2}{2}+\frac{g}{2\omega_0^2}[1-\cos(\sqrt{2}\omega_0 t)] \quad \text{et} \quad y(t)=\frac{u(t)-v(t)}{2}=\frac{gt^2}{2}-\frac{g}{2\omega_0^2}[1-\cos(\sqrt{2}\omega_0 t)]}$$

Rq : les billes effectuent donc des oscillations harmoniques autour d'un point dont le mouvement par rapport au référentiel fixe est une translation rectiligne uniformément accélérée.

3) D'après la 1ère question, on sait que :

$$L(t)=l_e+y(t)-x(t)=l_0+\frac{mg}{k}+y(t)-x(t)=l_0+\frac{g}{\omega_0^2}+y(t)-x(t) \Rightarrow \text{on en déduit :}$$

$$\boxed{L(t)=l_0+\frac{g}{\omega_0^2}\cos(\sqrt{2}\omega_0 t)=l_0\left[1+\frac{g}{\omega_0^2 l_0}\cos(\sqrt{2}\omega_0 t)\right]}$$

Rq : la longueur du ressort varie sinusoïdalement, avec une amplitude relative $\frac{g}{\omega_0^2 l_0}$, autour de sa valeur « à vide » l_0.